física cuántica



berkeley physics course - volumen 4

física
cuántica



editorial reverté, s. a.

Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

física cuántica

berkeley physics course - volumen 4

La preparación de este curso fue apoyada con una donación de la National Science Foundation al Educational Development Center

Eyvind H. Wichmann

Profesor de Física
Universidad de California, Berkeley

Título de la obra original:
QUANTUM PHYSICS

Edición original en lengua inglesa publicada por:
McGraw-Hill Book Company, New York

Copyright © 1971 by Education Development Center, Inc.

Versión española por:
Prof. Dr. Ramón Ortiz Fornaguera
Jefe de la División de Física Teórica
de la Junta de Energía Nuclear, Madrid

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Encarnación 86
08024 Barcelona

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español
© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1986
Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4020 - 4 obra completa
ISBN - 84 - 291 - 4024 - 7 tomo 4

Depósito Legal B.38464/1985
LITOCLUB S.A. - Barcelona

Prólogo al Berkeley Physics Course

Éste es un curso de física de dos años, a nivel intermedio, para estudiantes de ciencias e ingeniería. La intención de los autores ha sido presentar la física, en lo que cabe, tal como se manifiesta a los físicos que trabajan en la primera línea de sus campos respectivos. Hemos pretendido desarrollar un curso que subraye vigorosamente los fundamentos de la física. Nuestros objetivos específicos fueron los de conseguir una primera introducción de los estudiantes a las ideas de la relatividad especial, la física cuántica y la física estadística. Al mismo tiempo queríamos que nuestra presentación de los temas tuviera un carácter elemental, y nunca fue nuestra intención desarrollar un curso limitado a estudiantes distinguidos o a estudiantes que han alcanzado ya un elevado nivel. Este curso está destinado a cualquier estudiante que conozca la física de grado medio. Debiera seguirse al mismo tiempo un curso de matemáticas que incluya el cálculo diferencial e integral.

Los cinco volúmenes que forman el curso son: *

I. Mecánica (Kittel, Knight, Ruderman)
II. Electricidad y Magnetismo (Purcell)
III. Ondas (Crawford)
IV. Física Cuántica (Wichmann)
V. Física Estadística (Reif)

Los trabajos iniciales sobre este curso condujeron a Alan M. Portis a idear una nueva física elemental de laboratorio, conocida ahora como Física de Laboratorio de Berkeley. Debido a que el presente curso realza los principios de la física, algunos profesores pueden tener la impresión de que en él no se trata suficientemente la física experimental. La Física de Laboratorio es rica en importantes experimentos y ha sido proyectada para equilibrar el curso en conjunto.

* De éstos, han aparecido ya anteriormente los volúmenes I, II, III y V. Los cambios en el prólogo común introducidos en el presente volumen reflejan algunos otros en la organización bajo la que tuvo lugar la preparación del mismo.

En los últimos años se han planeado y desarrollado en los Estados Unidos varios nuevos cursos de física de grado intermedio. La idea de preparar un nuevo curso se les ha ocurrido a numerosos físicos a la vista de los progresos en ciencias e ingeniería y de la creciente importancia atribuida a las ciencias en las escuelas de grados elemental y superior. Nuestro curso se concibió durante una conversación entre Philip Morrison, actualmente en el Massachusetts Institute of Technology, y C. Kittel, a fines de 1961. Nos animaron a acometer la empresa John Mays y sus colegas de la National Science Foundation, y Walter C. Michels, por aquel entonces presidente de la Commission on College Physics. Se formó un comité con carácter no oficial presidido por C. Kittel para guiar el curso en sus estadios iniciales. El comité se reunió por vez primera en mayo de 1962, en Berkeley, y trazó un bosquejo tentativo que incluía los temas y los puntos de vista que creíamos debieran y podrían enseñarse a los alumnos que iniciaban sus estudios de ciencias e ingeniería a nivel intermedio. Desde entonces la composición del comité ha experimentado algunos cambios y en la actualidad está constituido por los abajo firmantes. En el desarrollo del curso cada autor ha podido elegir libremente el estilo y el método de presentación que le parecieron apropiados al tema que trataba.

La National Science Foundation ha aportado el apoyo económico para el desarrollo del curso y a éste contribuyó considerablemente de modo indirecto la Universidad de California. Los fondos fueron administrados por el Education Development Center, Incorporated * (EDC), una organización sin fines lucrativos establecida para administrar los programas de mejora de la composición de los cursos. Nos sentimos particularmente en deuda con Gilber Oakley, James Aldrich y William Jones, todos del EDC, por su amable y entusiasta apoyo. El EDC estableció una oficina en Berkeley, últimamente bajo la muy competente dirección de la señora Lila Lowell, para ayudar en el desarrollo del curso y de la guía de laboratorio.

La Universidad de California no ha tenido ninguna conexión oficial con nuestro programa, pero nos ha ayudado de diversas e importantes maneras. Por esta ayuda damos las gracias al profesor Burton J. Moyer, presidente del Departamento de Física, y al personal faculativo y al no académico del Departamento. Estamos particularmente agradecidos a aquellos colegas

* Antes, Educational Services Incorporated.

nuestros que han ensayado este curso en las clases y que, basándose en su experiencia, han realizado una labor crítica y ofrecido sugerencias para mejorarlo.

Las correciones y sugerencias del lector serán siempre bien recibidas.

Frank S. Crawford, Jr.
Charles Kittel
Walter D. Knight
Alan M. Portis
Frederick Reif
Malvin A. Ruderman
Eyvind H. Wichmann
A. Carl Helmholz
Edward M. Purcell

Presidentes

Prólogo al volumen IV

Este volumen del Berkeley Physics Course está dedicado a la física cuántica. Se trata de un libro de introducción para el estudiante cuyos conocimientos básicos de física corresponden a una fracción apreciable del material contenido en los volúmenes precedentes de la serie. Mi lector-estudiante ideal es, por consiguiente, un alumno de ciencias o ingeniería de segundo año. Posponer el estudio de todos los aspectos de los fenómenos cuánticos más allá del nivel correspondiente al segundo curso no parece ni razonable ni justo hoy en día teniendo en cuenta el progreso que ha experimentado la física durante los últimos cincuenta años. Un curso de introducción bien equilibrado debiera, sin duda alguna, reflejar parte de este progreso.

No creo que el estudio de la física cuántica sea *intrínsecamente* más difícil que el estudio de cualquier otra rama de la física. En cualquiera de sus dominios encontramos fenómenos que nos dan la sensación de ser sencillos y transparentes, al igual que fenómenos que es muy difícil explicar de manera cuantitativa. Cierto es, hay que reconocerlo, que todos los fenómenos cuánticos se consideraron al principio como sumamente misteriosos y desconcertantes. Durante el período en que se exploró por vez primera este terreno, los físicos experimentaron dificultades psicológicas muy reales, dificultades que, en parte, se debían a prejuicios comprensibles en favor del punto de vista clásico del universo y, en parte, a la naturaleza fragmentaria de la imagen experimental. Sin embargo, no hay razón ninguna para que estas mismas dificultades tengan que recrearse para el estudiante de hoy que empieza. Sabemos ahora con certeza que la descripción clásica es tan sólo aproximadamente correcta, y existe hoy una cantidad enorme disponible de resultados experimentales que apoyan e ilustran varios aspectos de las ideas teóricas presentes. Creo firmemente que entre los hechos conocidos cabe encontrar temas de discusión que son suficientemente bien definidos y simples como para ser tratados de manera elemental, pero que al mismo tiempo iluminan importantes ideas y principios. Dudo mucho de que el estudiante que se ve guiado en su pensar acerca de una sucesión bien elegida de he-

chos físicos importantes, pero simples, tenga la sensación de que los fenómenos cuánticos son *más* misteriosos que, por ejemplo, el fenómeno de la gravitación universal.

Lo que persigo en este libro es presentar ejemplos característicos de fenómenos cuánticos, familiarizar al lector con los órdenes de magnitud típicos de los parámetros físicos en microfísica e introducirlo al modo de pensar que caracteriza la mecánica cuántica. He intentado incluir entre los temas de discusión fenómenos y resultados que son de importancia particular para entender la física. A la vez, he intentado mantener la discusión en el nivel más elemental posible. Los temas se han seleccionado entre varios dominios de la microfísica, pero no he intentado presentar una exposición sistemática detallada de ninguno de ellos. Opino que tales exposiciones deben dejarse para cursos que corresponden al nivel de penúltimo y último año.

Lo que se exige en relación con la preparación matemática es más bien poco. He supuesto que el lector ha seguido un curso de cálculo diferencial e integral, en el que se incluye una primera introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias y un poco de análisis vectorial. A fin de evitar que la atención se desvíe de los resultados físicos para atender a cuestiones técnicas de matemáticas, he intentado evitar temas que en este estadio pudieran resultar difíciles desde el punto de vista matemático. No se discuten temas que exigen cierto conocimiento de las propiedades de funciones especiales o del método de separación de variables en la teoría de las ecuaciones entre derivadas parciales. En cuanto al álgebra, y aun lamentándolo en cierto modo, he llegado a la conclusión de que no debiera presuponer que el lector estuviera familiarizado con la teoría de matrices y, en consecuencia, he evitado temas para los que dicha teoría es la herramienta matemática natural.

No creo en modo alguno que el cumplimiento de las finalidades generales de esta parte del curso exija que *todo* el material que contiene el Libro sea enseñado en clase. Por el contrario, querría dejar al profesor una considerable libertad en la selección de los temas a discutir. Para ayudarlo en la programación de su curso, señalo las finalidades específicas de los diferentes capítulos en las notas para la enseñanza, que siguen a este prólogo, y trato de bosquejar qué se pudiera considerar como un programa *mínimo*. Tengo la impresión de que no hay mal alguno en poder disponer de más material para lectura del que de hecho se enseña en clase, puesto que siempre habrá algunos estudiantes que querrán leer más de lo que se ha explicado.

Eyvind H. Wichmann

Berkeley, California

Expresiones de agradecimiento

Me siento muy en deuda con los otros miembros del Comité del Berkeley Physics Course por haberme animado y ayudado continuamente durante los últimos años. Quiero dar las gracias, en particular, a los profesores C. Kittel, A. M. Portis y A. C. Helmholz por sus numerosas sugerencias con vistas a mejorar la obra y por su crítica constructiva.

Muchos de mis colegas del Departamento de Física en Berkeley me han ayudado en una u otra ocasión y quiero expresar aquí mi gratitud a todos ellos. Estoy particularmente agradecido a los profesores S. P. Davis, W. B. Fretter, W. D. Knight, L. B. Loeb, J. H. Reynolds, A. H. Rosenfeld, E. G. Segre y C. H. Townes, y al doctor W. Hines, por haberme proporcionado fotografías y por sus comentarios acerca de mi manuscrito.

Este libro es el resultado de apuntes precedentes utilizados en la enseñanza de esta parte del curso en Berkeley y en otros centros. La versión primera la utilicé al enseñar a un pequeño grupo de estudiantes de Berkeley durante el trimestre de primavera de 1964. Quiero dar las gracias a estos estudiantes por su interés y por los comentarios y sugerencias muy útiles que hicieron. Apuntes posteriores se han utilizado luego como textos en el mismo curso por los profesores K. Dransfeld, F. S. Crawford, L. T. Kerth y A. C. Helmholz. Doy las gracias a estos colegas por compartir conmigo sus experiencias en la enseñanza de este curso.

Mis manuscritos han sido mecanografiados por la señora Lila Lowell y quiero darle las gracias por su infinita paciencia y cuidadoso trabajo. El manuscrito ha sido leído con espíritu crítico y revisado para evitar errores por el doctor J. D. Finley y el doctor L. J. Landau, y me siento muy en deuda con ellos por sus numerosos comentarios y críticas. Quiero también dar las gracias al doctor J. Chrichton que asimismo leyó el manuscrito para la edición preliminar.

Agradezco a mi esposa, Marianne Wichmann, el haber ilustrado mi seria discusión de algunos temas con unos pocos dibujos de un carácter no del todo serio. Los demás dibujos fueron todos preparados en su forma final por el señor Felix Cooper y es un placer el darle las gracias por su cuidadoso trabajo.

Notas didácticas

El material se presenta en nueve capítulos. Cada capítulo se divide en varias secciones cortas, numeradas consecutivamente, cada una de las cuales corresponde más o menos a una idea o a un paso en el curso del razonamiento. Las ecuaciones, figuras y tablas dentro del texto se han numerado de acuerdo con los números de las secciones dentro de las cuales aparecen o a las que hacen referencia. La bibliografía específica relativa a temas particulares en el texto se da como nota al pie de página. La bibliografía general se presenta al final de los capítulos. El apéndice contiene tablas de datos físicos, al igual que las contracubiertas del libro.* Problemas para un estudio individual se dan al final de los capítulos. El estudiante serio debiera resolver una fracción muy importante de los mismos.

La bibliografía que indico se refiere a artículos originales, a otros libros de texto y a artículos elementales de puesta a punto del tipo que puede encontrarse en el *Scientific American*. A mi estudiante-lector quisiera decirle lo que sigue. La imagen que se formará de la física será distorsionada si se limita a leer únicamente obras de texto. Un libro de texto proporciona un entramado para estudios ordenados y sistemáticos, pero no puede reflejar la riqueza y la variedad del esfuerzo intelectual en la física. Este libro, por ejemplo, es muy deficiente en su descripción de las técnicas experimentales. Para animarlo a empezar a familiarizarse con la literatura, he incluido referencias a artículos que tratan de investigación original. Ciertamente no espero que lea más de una pequeña fracción de estos artículos, pero cuando encuentre un tema que le resulte particularmente interesante le incito a que vaya a una biblioteca para buscar las fuentes originales. Es probable que encuentre otros trabajos que también le interesen, y pronto llegará a ser un lector habitual. No intente leer artículos para los que está claro que no posee la base necesaria. Hay muchos trabajos, especialmente

(Nota añadida al corregir pruebas.) El manuscrito completo fue presentado al editor a fines de 1967, por lo que el libro no hace referencia a trabajos más recientes. Sin embargo, cabe afirmar que nada ha ocurrido en el entretanto que pudiera afectar de modo importante al contenido de este libro.

relativos a experimentos, que *puede* leer con su grado de preparación presente, y debería hacer una selección entre ellos. Su profesor puede aconsejarle acerca de dónde buscar. Los artículos elementales de puesta a punto en el *Scientific American,* que requieren muy poca preparación para su lectura, pueden ser también muy útiles en este estadio. Allí podrá adquirir nociones acerca de experimentos y temas de interés actual.

La cuestión de las unidades no es objeto de controversia en esta obra. El profesor puede utilizar el sistema CGS o el sistema MKS según sus preferencias. (El único punto en que ello supone una diferencia es en la expresión de la constante de estructura fina.) Las constantes se dan en ambos sistemas de unidades. Los resultados experimentales se presentan en el sistema práctico. En la discusión teórica he escrito frecuentemente las ecuaciones en una forma sin dimensiones en la que no aparece ninguna de las unidades macroscópicas.

Quisiera ahora hacer algunos comentarios relativos al contenido de cada artículo para explicar mis intenciones e indicar cómo pueden realizarse los cortes. Parte del material se designa específicamente en el texto como "temas avanzados". Éstos no son necesariamente más avanzados que los otros temas discutidos, ni tampoco son necesariamente más difíciles. Representan, sin embargo, una digresión en la línea principal de presentación y pueden, por lo tanto, omitirse sin correr el riesgo de que el resto del libro resulte incomprensible.

El capítulo 1 es una introducción general. Se discute en él el objetivo de la física cuántica y se comentan algunos aspectos de la historia de la misma. El mensaje más importante es, quizás, que la física cuántica representa un papel en *toda* la física y no se limita meramente a los fenómenos "microscópicos". En un programa mínimo la mayor parte del capítulo 1 puede dejarse como objeto de lectura y el profesor puede limitar su explicación a discutir el material contenido en las secciones 27-52 que concierne a la entrada de la constante de Planck en el mundo de la física. Los problemas al final del capítulo no requieren una preparación particular y todos ellos pueden asignarse al programa mínimo.

El capítulo 2 se refiere a los órdenes de magnitud de las cantidades físicas en la microfísica. La finalidad que se persigue es familiarizar al estudiante con estos órdenes de magnitud, descubrir "combinaciones naturales" de las constantes físicas y mostrar al alumno cómo se pueden hacer estimaciones simples basadas en modelos sencillos. Considero estos objetivos como muy importantes, y el capítulo, con los ejercicios al final, mere-

ce cuidadosa atención. En un programa mínimo se pueden omitir las secciones 47-57.

El capítulo 3 trata de los niveles de energía, pero no de la explicación teórica de su existencia. Esta explicación viene más adelante, en el capítulo 8. La razón para este orden de presentación un tanto peculiar es la de que he querido colocar todos los temas que exigen cierto conocimiento de ecuaciones diferenciales lo más adelante posible en el libro. Según sea la preparación de los estudiantes, este orden puede cambiarse. En el capítulo 3 he pretendido ofrecer ejemplos, tomados de la realidad, de los sistemas de niveles y de los esquemas de términos, ilustrar cómo se pueden deducir conclusiones simples, basadas en el hecho empírico de que los sistemas de niveles se presentan en la naturaleza. Parte del capítulo puede muy bien dejarse como objeto de lectura. Un punto importante que se debiera discutir a fondo es la conexión entre vida media y anchura de un nivel (secciones 14-36).

El capítulo 4 se refiere a las propiedades ondulatorias y corpusculares y se guía al lector de forma que piense acerca de estos hechos dentro del esquema de la mecánica cuántica. Mi impresión es que este capítulo no debiera acortarse.

El capítulo 5 discute la naturaleza ondulatoria de todas las partículas materiales. El estudiante que ha leído los capítulos 4 y 5 habrá así aprendido que todas las partículas reales que se encuentran en la naturaleza tienen propiedades ondulatorias y habrá adquirido ciertas ideas acerca de las consecuencias inmediatas de este simple hecho experimental. Habrá aprendido también que la naturaleza ondulatoria de las partículas no contradice nuestra experiencia relativa a la física macroscópica, como también, por qué ocurre así. El capítulo 5 se refiere, por lo tanto, en amplia medida a resultados fundamentales. Convendría no prescindir de la deducción de la ecuación de Klein-Gordon (secciones 36-46). El análisis de la interpretación de las soluciones de una ecuación de onda como vectores en un espacio vectorial (secciones 47-54) puede dejarse como tema de lectura, o acaso suprimirse enteramente. La discusión de las ondas de difracción por una estructura periódica (secciones 16-22) podría también omitirse en un programa mínimo, si bien sería una pena dejar a un lado una teoría que tiene tantas aplicaciones experimentales elegantes y bien definidas.

En la primera parte del capítulo 6 se discuten las relaciones de indeterminación (sección 1-10). Este material es de importancia *decisiva* y no debiera acortarse. En el resto del capítulo 6 se intenta formular y discutir algunas reglas generales de la

mecánica cuántica. Se presenta una teoría de las mediciones y se discute la noción de conjunto estadístico y de superposiciones coherentes e incoherentes. He intentado mantener esta discusión a un nivel tan físico y concreto como ha sido posible. Sin embargo, no se puede negar que la discusión que se presenta en el mismo va mucho más allá de lo que ha sido costumbre en los libros de introducción y acaso muchos lectores puedan tener la impresión de que este material podría esperar a ser tratado más adelante. Por otra parte. pienso que algunas de las ideas centrales de este capítulo no son particularmente difíciles, si se presentan de manera ordenada, y que merece la pena intentar exponerlas ya al principio.

En los capítulos 7 y 8 se ofrece una introducción a la teoría de Schrödinger. Mi propósito fue el mostrar con cierto detalle cómo se aplica en la práctica una teoría mecánico-ondulatoria. Las secciones 49-51 del capítulo 7 y las secciones 49-58 del capítulo 8 se pueden saltar en un programa mínimo. La discusión de la penetración de barreras en la desintegración alfa (secciones 37-48, capítulo 7), probablemente *no* debiera omitirse, puesto que la comparación entre teoría y experimento ha de causar un fuerte impacto.

El capítulo 9 trata del problema de cómo describir las interacciones entre partículas elementales. Las secciones 1-18 contienen una discusión elemental de los procesos de colisión. Algunos hechos conocidos, y ciertas ideas teóricas acerca de las partículas, se discuten en las secciones 19-31. Esta discusión se ve seguida por otra cualitativa relativa a algunas ideas básicas de la teoría cuántica de campos. El resultado tangible de esta discusión es la deducción simplificada del potencial de Yukawa en las secciones 47-55. Cabría prescindir por completo del capítulo 9 en un programa mínimo, pero tengo la impresión de que algunas observaciones acerca del problema de la interacción debieran hacerse en algún punto del curso. Con independencia de si se estudia o no el material contenido en el capítulo 9, considero que debe estar a disposición inmediata del estudiante interesado, Los resultados que se exponen constituyen, después de todo, el centro de atención de la física de nuestros días.

Con los problemas al final de cada capítulo se persigue ilustrar un poco más los temas discutidos. Su grado de dificultad varía considerablemente. Son relativamente pocos los problemas que suponen la mera substitución de valores numéricos en una fórmula que aparece en alguna parte del libro. Un cierto número de tales problemas sirven para la finalidad útil de dar

al lector un sentido de los órdenes de magnitud importantes. Sin embargo, en mi selección quise subrayar los problemas que realmente someten a prueba el grado de comprensión del texto por parte del lector y no quise sumergirlos en una masa de problemas muy triviales. Supuse, además, que cada profesor querrá incorporar un cierto número de sus propios problemas, adecuados para su curso particular, y si surge la necesidad, algunos de éstos pueden muy bien ser del tipo de simple substitución. Si un profesor omite ciertas porciones del texto, prescindirá naturalmente de los correspondientes problemas y acaso los substituya por otros.

Además de estas sugerencias concretas acerca de lo que se puede omitir, un profesor tiene la opción de prescindir, también, de algunas secciones aquí y allí y de acortar y simplificar la discusión sin con ello alterar la finalidad de este libro. En un programa mínimo las clases pudieran así cubrir algo así como una mitad o dos tercios del contenido del libro, lo que no es mucho. Estimo que ello pudiera corresponder a unas veinte horas de clase y éste es, por consiguiente, el tiempo *mínimo* que debiera dedicarse a la parte de física cuántica del curso.

Índice analítico

	Prólogo al Berkeley Physics Course	v
	Prólogo al volumen IV	ix
	Expresiones de agradecimiento	xi
	Notas didacticas	xiii
	Capítulo 1 **Introducción**	**1**
1-7	Objeto de la física cuántica	2
8-19	Átomos y partículas elementales	5
20-26	Los límites de aplicabilidad de la teoría clásica	15
27-40	El descubrimiento de la constante de Planck	20
41-46	El efecto fotoeléctrico	31
47-55	El problema de la estabilidad y tamaño de los átomos	36
	Bibliografía para ulterior estudio	43
	Problemas	44
	Capítulo 2 **Órdenes de magnitud de las cantidades físicas en física cuántica**	**49**
1-10	Unidades y constantes físicas	50
11-18	Energía	56
19-32	Órdenes de magnitud característicos de la física molecular y atómica	63
33-39	Los hechos más fundamentales de la física nuclear	75
40-43	Fuerzas gravitatorias y electromagnéticas	82
44-46	Acerca del trabajo numérico	85
47-57	Un tema avanzado : las constantes fundamentales de la naturaleza	88
	Bibliografía para ulterior estudio	97
	Problemas	97
	Capítulo 3 **Niveles de energía**	**103**
1-13	Esquemas de términos	104
14-26	Las anchuras no nulas de los niveles energéticos	115
27-42	Más sobre niveles y esquemas de términos	124
43-46	Ensanchamiento de las rayas espectrales por efecto Doppler y por colisión	140

47-56	Un tema avanzado : sobre la teoría de las transiciones electromagnéticas	144
	Bibliografía para ulterior estudio	151
	Problemas	152
	Capítulo 4 **Fotones**	**157**
1-17	El fotón como partícula	158
18-30	Efecto Compton, radiación de frenado ; creación y aniquilación de pares	169
31-50	¿Pueden « dividirse » los fotones?	181
	Bibliografía para ulterior estudio	195
	Problemas	195
	Capítulo 5 **Partículas materiales**	**199**
1-15	Las ondas de De Broglie	200
16-22	Teoría de la difracción en una estructura periódica	212
23-27	No hay sino una constante de Planck	219
28-35	¿Pueden dividirse las ondas materiales?	223
36-46	La ecuación de onda y el principio de superposición	229
47-54	Un tema avanzado : el espacio vectorial de los estados físicos	236
	Bibliografía para ulterior estudio	242
	Problemas	243
	Capítulo 6 **El principio de indeterminación y la teoría de mediciones**	**247**
1-19	Relaciones de indeterminación de Heisenberg	248
20-40	Mediciones y conjuntos estadísticos	262
41-49	Amplitudes e intensidades	280
50-56	¿Se puede predecir en principio el resultado de cualquier medición?	286
57-61	Luz polarizada y no polarizada	291
	Bibliografía para ulterior estudio	295
	Problemas	296
	Capítulo 7 **La mecánica ondulatoria de Schrödinger**	**301**
1-18	La ecuación de onda no-relativista de Schrödinger	302
19-36	Algunos sencillos « problemas de barrera »	315
37-48	Teoría de la radiactividad alfa	330

49-51	Un tema avanzado : Normalización de la función de onda	343
	Bibliografía para ulterior estudio	347
	Problemas	347
	Capítulo 8 **Teoría de los estados estacionarios**	**353**
1-26	La cuantificación como problema de valores propios	354
27-41	El oscilador armónico. Excitaciones de vibración y rotación de las moléculas	373
42-48	Sistemas hidrogenoides	385
49-58	Un tema avanzado : las variables posición e impulso en la teoría de Schrödinger	391
	Bibliografía para ulterior estudio	398
	Problemas	399
	Capítulo 9 **Las partículas elementales y sus interacciones**	**405**
1-18	Procesos de colisión y el modelo ondulatorio	406
19-31	¿Qué se entiende por partícula?	422
32-46	Ideas fundamentales de la teoría cuántica de campos	433
47-55	Piones y fuerzas nucleares	445
56	Consideraciones finales	452
	Bibliografía para ulterior estudio	454
	Problemas	454
	Apéndice	**459**
A	Constantes físicas generales	460
B	Partículas elementales más estables	462
C	Los elementos químicos	464
	Índice alfabético	**467**

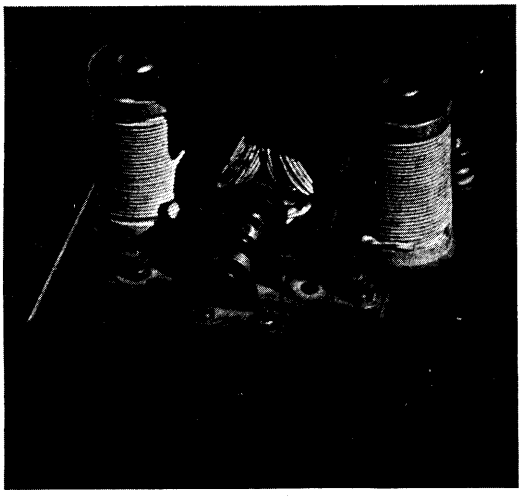
Capítulo 1

Introducción

Objeto de la física cuántica	2
Átomos y partículas elementales	5
Los límites de aplicabilidad de la teoría clásica	15
El descubrimiento de la constante de Planck	20
El efecto fotoeléctrico	31
El problema de la estabilidad y tamaño de los átomos	36
Bibliografía para ulterior estudio	43
Problemas	44

Capítulo 1

Introducción



Ejemplo de sistema mecánico-cuántico. El comportamiento de este motor eléctrico (y la pila de lámpara de mano utilizada como fuente de energía) viene regido por las leyes de la mecánica cuántica, aunque el autor nunca lo sospechó cuando le dieron el motor hace unos treinta años.

El diseño de un motor eléctrico puede y debe basarse en la teoría electromagnética clásica y en la mecánica clásica, que son formas límite de la mecánica cuántica. Ningún ingeniero en sus cabales intentaría describir un sistema macroscópico como éste en términos de las interacciones entre todas las partículas elementales que constituyen el sistema.

Objeto de la física cuántica

1 En esta parte de nuestro curso estudiaremos la física en el dominio de los átomos, de los núcleos y de las partículas elementales. Al hacerlo, descubriremos aspectos nuevos de la naturaleza, nuevos en el sentido de que no los hemos estudiado sistemáticamente en los volúmenes precedentes. Estos aspectos de la naturaleza se suelen designar como *fenómenos cuánticos* y, por lo tanto, llamaremos *física cuántica* al objeto de este volumen. La teoría matemática básica comúnmente aceptada de la física cuántica se conoce con el nombre de *mecánica cuántica.*

Ahora bien, no hay que pensar que la "física cuántica" es algo que no concierne al mundo macroscópico. En realidad, *toda* la física es física cuántica; las leyes de ésta, tal como las conocemos hoy, constituyen nuestras leyes más generales de la naturaleza.

2 En los volúmenes que preceden del Curso de Física de Berkeley hemos estudiado los fenómenos físicos en el mundo macroscópico. Las leyes de la naturaleza que en ellos se han descubierto son las leyes de la *física clásica.* De una manera general, podemos decir que la física clásica trata de aquellos aspectos de la naturaleza para los que la cuestión de cuál sea la constitución última de la materia no es algo que nos concierne de manera *inmediata.* En este volumen, por otra parte, estudiaremos específicamente las partículas elementales, y hemos de tratar ahora de descubrir las leyes que gobiernan el comportamiento de estas partículas. Naturalmente, nuestra atención se centrará en aquellas situaciones físicas en las que estas leyes se manifiestan del modo más claro posible, y esto significa que las situaciones consideradas suponen las interacciones de tan sólo unas pocas partículas a la vez. La mayor parte de la física estudiada en el presente volumen se podría llamar, por consiguiente, *microfísica*: se estudian sistemas "pequeños" constituidos por un número reducido de partículas elementales.

Sin embargo, si conocemos las leyes básicas a que obedecen las partículas elementales, podemos también, en principio, predecir el comportamiento de los sistemas físicos macroscópicos formados por un número muy grande de tales partículas. Esto significa que las leyes de la física clásica se siguen de las leyes

de la microfísica y, en este sentido, la mecánica cuántica tiene tanta importancia en el mundo macroscópico como en el mundo microscópico.

3 Cuando aplicamos las leyes de la física clásica a los sistemas macroscópicos tratamos de describir solamente ciertos rasgos globales del comportamiento del sistema. Consideramos, por ejemplo, el movimiento de un "cuerpo rígido" como un todo, pero no intentamos discutir los movimientos de todos los constituyentes elementales del mismo. Es éste un rasgo característico de las teorías clásicas de la física en tanto que aplicada a los sistemas macroscópicos; los más finos detalles del comportamiento del sistema se ignoran y ningún intento se hace de considerar todos los aspectos de la cuestión. En este sentido, las leyes de la física clásica son leyes aproximadas de la naturaleza. Debemos considerarlas como formas límite de las leyes de la física cuántica, más fundamentales y que abarcan mucho más.

En otras palabras, las teorías clásicas son *teorías fenomenológicas*. Una teoría fenomenológica intenta descubrir y resumir hechos experimentales dentro de un cierto dominio limitado de la física. No se persigue con ella describirlo todo en el reino de la física, pero si es una buena teoría fenomenológica, sí describe de manera muy precisa cualquier aspecto dentro de aquel dominio limitado. El lector cuya mente se oriente hacia lo filosófico puede querer hacer notar que, en último término, *toda* teoría física es "fenomenológica", y que la diferencia entre una teoría fundamental y una teoría fenomenológica es tan sólo una cuestión de grado. En tanto que físicos, sin embargo, reconocemos una clara diferencia entre los dos tipos de teorías. Nuestras leyes de la naturaleza *básicas* se distinguen por su gran generalidad; no tenemos conocimiento de excepción alguna a lo que afirman. Las consideramos como verdaderas y exactas y universalmente válidas hasta que se presentan pruebas experimentales claras de lo contrario. En contraste con esto, no se reconoce en las leyes contenidas en una teoría fenomenológica una validez universal; *sabemos* que son válidas (es decir, suficientemente precisas) únicamente en cierto dominio limitado de la física, y que fuera de dicho dominio la teoría fenomenológica puede muy bien carecer por completo de sentido.

4 Naturalmente, no debemos desdeñar las teorías fenomenológicas. Sirven para la finalidad muy útil de resumir nuestro



Albert Einstein. Nacido en 1879 en Ulm, Alemania; falleció en 1955. Estudió en la Escuela Técnica Superior (ETH) de Zürich, Suiza. Después de recibir su diploma en 1900, obtuvo un puesto de examinador de patentes en la Oficina Suiza de Patentes de Berna. Durante este tiempo escribió tres famosos artículos, todos los cuales aparecieron en la serie de 1905 de los *Annalen der Physik*, dedicados al efecto fotoeléctrico, al movimiento browniano y a la relatividad especial. Más tarde ocupó puestos en Berna, Zürich y Praga y fue director del Kaiser Wilhelm Institut en Berlín. En 1933 pasó a ser miembro del Institute for Advanced Study en Princeton, N.J., estableciéndose con carácter permanente en los Estados Unidos. Recibió el Premio Nobel en 1921.

Einstein es generalmente considerado como el físico más sobresaliente de este siglo y como uno de los más grandes científicos de todos los tiempos. Poseía en grado extraordinario la habilidad de aprehender la esencia de los fenómenos físicos y ningún corto sumario podría hacer justicia a todas sus numerosas contribuciones, siempre profundas, a los problemas fundamentales de la física. Su teoría de la relatividad general destaca como una de las más notables creaciones intelectuales de todos los tiempos. (Fotografía proporcionada por ***Physics Today.***)

conocimiento práctico de los varios dominios de la física. Hay en ésta muchos casos en que creemos ciertamente disponer de una teoría fundamental, pero en los que la complejidad del fenómeno nos impide realizar predicciones precisas basadas en "principios primeros". Cuando así ocurre, intentamos aplicar una teoría fenomenológica simplificada que, en parte, se basa directamente sobre los hechos experimentales y, en parte, en ciertos rasgos generales de la teoría básica. Dicho de otra manera, dejamos que "los sistemas físicos realicen parte de nuestro trabajo teórico". Hay, además, muchos casos en física para los que carecemos de la teoría fundamental. Cualquier teoría fenomenológica que se pueda construir (basada en algún modelo simple) es entonces útil como piedra sobre la que apoyarnos en nuestra marcha en busca de una teoría más general.

Cuando intentamos explicarnos un fenómeno físico que no nos es familiar, es razonable, claro está, probar primero lo más simple, es decir, ensayar una teoría o modelo que ha dado buen resultado en una situación al parecer análoga. Si resulta que nuestro modelo es aplicable, hemos aprendido ya algo, pero si resulta que no lo es *también* hemos aprendido algo.

Lo que importa tener presente es que los modelos son solamente modelos y que no todo en la física debe necesariamente describirse en términos de un solo modelo.

5 Con frecuencia se habla de la "revolución" provocada en la física por el descubrimiento de la mecánica cuántica. "Revolución" es una palabra dramática (al parecer, con un extraño atractivo) que evoca que algo ha sido derribado por completo. Hay que advertir, sin embargo, que las leyes de la física clásica, en tanto que aplicadas a aquellas situaciones que la teoría clásica estaba destinada a describir, no han sido derribadas. El movimiento de un péndulo, por ejemplo, se describe hoy de la misma manera como se describía en el siglo XIX.

Además, el caso es que, a menudo, los conceptos clásicos pueden utilizarse con éxito para lograr *cierto* entendimiento de los fenómenos en microfísica: poseen una validez aproximada. Es importante que comprendamos los límites de aplicabilidad de las ideas clásicas, y en este capítulo intentaremos dar al lector una idea *basta* de estos límites. A medida que vayamos aprendiendo más acerca de los fenómenos cuánticos en capítulos posteriores, el lector alcanzará un grado de comprensión más preciso de esta importante cuestión.

Que las teorías clásicas de la física no poseen una validez universal es algo que ha quedado establecido de modo convincente en virtud de muchos experimentos realizados durante

este siglo. En este volumen presentaremos algunas de las importantes pruebas experimentales de que así es para convencer al lector de este hecho.

6 Al pensar en los cambios que han tenido lugar en la física durante este siglo, hemos de tener presente que nunca existió una teoría clásica *general* de la materia. Las leyes de la física clásica son buenas leyes fenomenológicas, pero no nos lo dicen todo acerca de los cuerpos macroscópicos. Mediante estas leyes podemos describir el comportamiento (el movimiento) de un mecanismo formado por muelles, palancas, volantes, etc., si se nos dan ciertas "constantes materiales", tales como la densidad, el módulo elástico, etc., de los materiales con que se ha construido el mecanismo. Sin embargo, si preguntamos *por qué* las densidades son las que son, *por qué* las constantes elásticas tienen los valores que tienen, *por qué* una barra se romperá si la tensión en ella pasa de un cierto límite, y así sucesivamente, entonces la física clásica calla. La física clásica no nos dice por qué el cobre se funde a 1083°C, por qué el vapor de sodio emite luz amarilla, por qué el hidrógeno tiene las las propiedades químicas que posee, por qué brilla el Sol, por qué el núcleo de uranio se desintegra espontáneamente, por qué la plata conduce la electricidad, por qué el azufre es un aislante, ni tampoco por qué los imanes permanentes pueden hacerse de acero. Podríamos seguir así indefinidamente, enumerando hechos de observación de la vida cotidiana acerca de los cuales la física clásica tiene bien poco o nada que decirnos.

7 Si el lector nos pregunta, ¿contamos *hoy* con una teoría general de la materia?, la respuesta es no. No tenemos una teoría detallada para *todo* lo que ocurre en nuestro mundo. Sin embargo, nuestro conocimiento de la naturaleza se ha ampliado enormemente en todas direcciones durante los últimos sesenta años. Hemos descubierto aspectos de la misma en los que antes no cabía ni soñar y se ha conseguido resolver muchos viejos problemas. Es justo decir, por ejemplo, que ahora comprendemos bastante bien los hechos de la química y las propiedades de la materia macroscópica: en estos dominios de la física podemos responder a cuestiones que no pudieron ser discutidas dentro de la teoría clásica.

Átomos y partículas elementales

8 Hablemos un poco de la noción de partículas elementales. Se atribuye a algunos antiguos filósofos griegos el haber sido



Muy bien se le pudo haber ocurrido a algún filósofo de la Naturaleza primitivo que las formas sorprendentemente regulares y bellas de los cristales reflejan la manera cómo se construyen a partir de pequeñas partículas o átomos. Hoy resulta esto una idea muy natural. Sin embargo, parece ser que esta idea *no* se presentó pronto. Hasta donde se le alcanza al autor, no existe indicación ninguna en la historia de que los atomistas griegos hubiesen especulado en este sentido acerca de los cristales.

La cristalografía como ciencia empezó a desarrollarse a fines del siglo XVIII. Entre los primeros que trabajaron en este campo podemos mencionar a Romé de Lisle y Haüy, quienes llevaron a cabo mediciones precisas de los ángulos formados por los planos de exfoliación. Antes de ellos, Robert Hooke y Christian Huygens habían considerado detenidamente el problema de cómo los cristales podrían construirse a partir de partes pequeñas (invisibles).

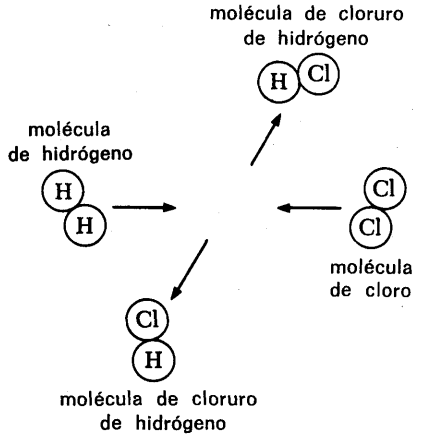


Fig. 9A Representación muy esquemática de la reacción química $H_2 + Cl_2 \rightarrow 2HCl$ en la que una molécula de hidrógeno reacciona con una de cloro para formar dos moléculas de cloruro de hidrógeno. La figura simboliza la idea de que una reacción química consiste en la redistribución de los constituyentes "elementales".

Los detalles de los procesos que realmente tienen lugar cuando el gas hidrógeno arde en una atmósfera de cloro son muy complejos. En el proceso se libera energía en forma de luz y de energía cinética de los productos de la reacción. El calentamiento de los gases resultante conduce a una disociación parcial de las moléculas de hidrógeno y de cloro en átomos, que pueden luego combinarse formando moléculas de cloruro de hidrógeno. Otros procesos, en los que los átomos y moléculas son excitados internamente por colisiones o por la luz, representan también un importante papel.

los primeros en introducir el concepto de átomos en la teoría de la materia. (Esto no excluye la posibilidad de que otras personas pudieran haber teorizado, siguiendo líneas de pensar similares, mucho antes.) Hay que afirmar desde luego que los "átomos" de los antiguos, con toda certeza, no son las mismas cosas que los átomos de hoy. De hecho, no es nada fácil entender de modo preciso qué querían significar con este término los filósofos griegos, pero el problema central con que se enfrentaban era la cuestión de si la materia es o no divisible indefinidamente. Si la materia *no* es indefinidamente divisible, hemos de descubrir, a escala suficientemente pequeña, los constituyentes elementales de la misma, es decir, los átomos. Tomamos un pedazo de materia y lo dividimos una y otra vez en trozos cada vez más pequeños. Al final, este dividir repetido termina, encontramos algo que ya no se puede dividir, y este algo es el "átomo" (de hecho, esta palabra significa "indivisible").

Los atomistas griegos creían que toda materia está realmente construida con "átomos", y es de presumir que, para ellos, todos los extremadamente variados aspectos de la materia son algo explicable como configuraciones (¿y movimientos?) diferentes de "átomos". Algo vagamente parecido creemos hoy, pero es bien cierto que existe una enorme diferencia entre nuestras teorías cuantitativas y las nebulosas especulaciones de los antiguos.

9 No vamos a discutir en este libro la historia primera de la teoría atómica de la materia, pero instamos al lector a que considere con atención el notable grado de entendimiento de los fenómenos naturales que se consiguió durante el siglo XIX apoyándose sobre la hipótesis de que la materia está constituida por átomos. Mediante este supuesto, podemos entender el hecho básico de la química, a saber, que un compuesto químico dado está siempre formado por ciertos elementos químicos básicos en proporciones fijas, definidas, características de este compuesto. Consideremos, en particular, el sorprendente hecho de que podemos representar los compuestos químicos por fórmulas tan simples como H_2O, H_2SO_4, Na_2SO_4 y NaOH. Lo notable en estas fórmulas es la aparición en ellas de números enteros *pequeños* que nos dicen que *dos unidades* de hidrógeno se combinan con *una unidad* de oxígeno para formar *una unidad* de agua, etc. Si suponemos que la materia está integrada por átomos, podemos comprender inmediatamente estos hechos empíricos. Los compuestos químí-

cos consisten de moléculas que, a su vez, son sistemas compuestos de un pequeño número de átomos. Dos átomos de hidrógeno se combinan con un átomo de oxígeno para formar una molécula de agua. Esto es claro y simple.

Como otra prueba en favor de la hipótesis atómica señalaremos los éxitos logrados por la *teoría cinética de los gases,* desarrollada en particular por J. C. Maxwell y L. Boltzmann. Esta teoría puede explicar muchas propiedades de los gases partiendo de la base de que un gas en un recipiente es un enjambre de moléculas que se mueven al azar en su interior, chocando sin cesar entre sí y con las paredes del recipiente. La teoría cinética pudo utilizarse, además, para estimar el número de Avogadro, $N_0 = 6{,}02 \times 10^{23}$, que es el número de moléculas en un mol de un gas cualquiera. (Se entiende por *mol* de un compuesto químico cualquiera la cantidad de la substancia en cuestión que tiene una masa en gramos igual al peso molecular del compuesto.) La primera estimación grosera de N_0 la dio Loschmidt en 1865.

Ante estas pruebas en favor de la existencia de los átomos, es difícil entender cierta escuela que persistió hasta el cambio de siglo y que rechazaba la hipótesis atómica basándose en que no existía testimonio *directo* (!) ninguno de que la materia esté formada por átomos.

10 Los átomos de los filósofos griegos no corresponden a los átomos de hoy, porque nuestros átomos no son indivisibles: están constituidos por protones, neutrones y electrones. Son más bien los protones, los electrones y una multitud de otras partículas elementales lo que representa el papel de los "átomos" de los griegos. ¿Qué entendemos por "partícula elemental"? La definición *precisa* de este término es algo hoy objeto de cierta polémica, pero con vistas a lo que pretendemos cabe dar una respuesta simple y práctica a esta cuestión: una partícula debe cosiderarse como elemental si no es posible describirla como un sistema compuesto por otras entidades más elementales. Una partícula elemental no tiene "partes", no se ha "construido" a partir de algo más simple. Nuestros intentos de descomponer mentalmente han alcanzado un punto final. Con esta definición, el protón, el neutrón y el electrón son todos elementales, pero no lo es el átomo de hidrógeno o el núcleo de uranio.

Cabe decir que lo esencial en la idea de que la materia no es divisible indefinidamente consiste en lo siguiente: no podemos proseguir analizando más y más las cosas en términos

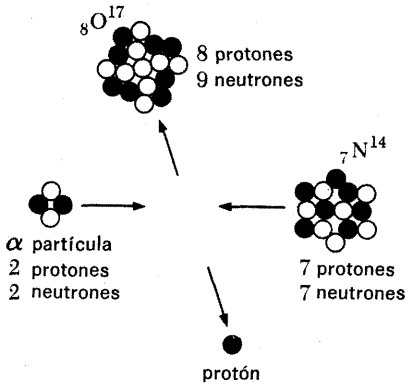


Fig. 11A Representación esquemática de una reacción nuclear en la que una partícula alfa (núcleo de helio) choca con un núcleo de nitrógeno para producir un núcleo de oxígeno y un protón. Esta reacción particular, descubierta por Rutherford en 1919, fue la primera observación de la transmutación de un núcleo estable (E. Rutherford, *Philosophical Magazine* **37**, 581 (1919)). En el experimento de Rutherford, el nitrógeno se bombardea con partículas alfa procedentes de una fuente radiactiva, y que la reacción se producía quedó establecido mediante la observación de los protones emitidos.

La figura, muy análoga a la fig. 9A, simboliza las ideas de que los núcleos están formados de neutrones y protones y que las reacciones nucleares (a baja energía) consisten en la reagrupación de estas partículas entre núcleos. Naturalmente, la figura no debe tomarse al pie de la letra; en ningún sentido de la palabra tienen los núcleos este "aspecto".

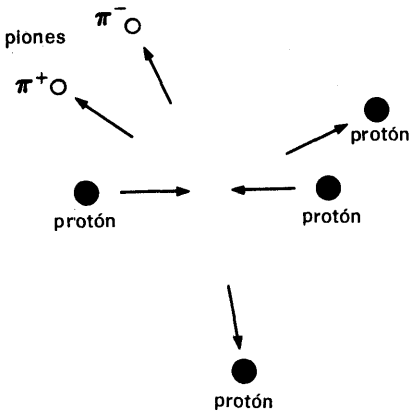


Fig. 12A Representación esquemática de la creación de dos mesones pi en una colisión de dos protones a alta energía. Un pión lleva la carga $+e$ y el otro la carga $-e$, donde e es el valor absoluto de la carga del electrón. Por lo tanto, la carga total se conserva en este suceso.

Dado que los dos protones subsisten después de la colisión y aparecen dos nuevas partículas, salta a la vista de modo evidente que los modelos ingenuos del tipo representado en las figs. 9A y 11A no pueden aplicarse aquí: no es posible concebir el suceso como una "reagrupación de constituyentes elementales (?) de los dos protones".

de partes a partir de las cuales se construyen. Este proceso pierde finalmente su significado; encontramos entidades irreducibles, y éstas son nuestras partículas elementales.

11 ¿Cómo podemos afirmar que el electrón es *realmente* elemental? ¿Acaso lo que hoy se considera como elemental no puede resultar mañana ser algo compuesto? A fin de cuentas, los átomos de hoy fueron las partículas elementales del siglo XIX; ¿no se podría repetir la historia?

Hay muchos hechos experimentales que indican con firmeza que la historia *no* se repetirá y que las partículas tales como el electrón, el protón y el neutrón jamás resultarán ser sistemas compuestos en el mismo sentido en que se halló que lo era el átomo de hidrógeno. Tratemos de describir la naturaleza de estas pruebas.

Si dos bolitas entran en colisión con velocidad relativa suficientemente grande, se romperán en fragmentos más pequeños. De la misma manera, dos moléculas de hidrógeno que chocan con elevada velocidad relativa se fragmentarán. A menos que la velocidad sea *muy* grande, entre los fragmentos encontraremos cosas como átomos de hidrógeno, o protones o electrones; en otras palabras, las componentes a partir de las cuales se construye la molécula de hidrógeno. En ambos casos es justo describir lo que ha ocurrido como sigue: la violencia de la colisión superó las fuerzas de cohesión que mantenían juntas las partes en una bolita, o en una molécula de hidrógeno, y, por lo tanto, los objetos se desintegraron. Una interpretación similar puede darse de muchas reacciones nucleares. Los núcleos están formados por protones y neutrones, y si un protón de alta energía choca con un núcleo, puede ocurrir que unos pocos protones y neutrones sean expulsados del mismo.

12 Sin embargo, si estudiamos una violenta colisión entre dos partículas elementales, tales como dos protones, descubrimos fenómenos que son *cualitativamente diferentes* de los fenómenos considerados más arriba. Por ejemplo, si un protón de energía muy alta choca con otro protón, puede suceder que los dos protones subsistan después de la colisión y que encontremos, además, una o varias partículas elementales nuevas, como, por ejemplo, mesones pi, entre los productos de la reacción. Decimos entonces que los mesones pi, llamados también piones, han sido *creados* en la reacción. No es esto lo único que puede ocurrir en una colisión protón-protón: los protones acaso desaparezcan y un cierto número de partícu-

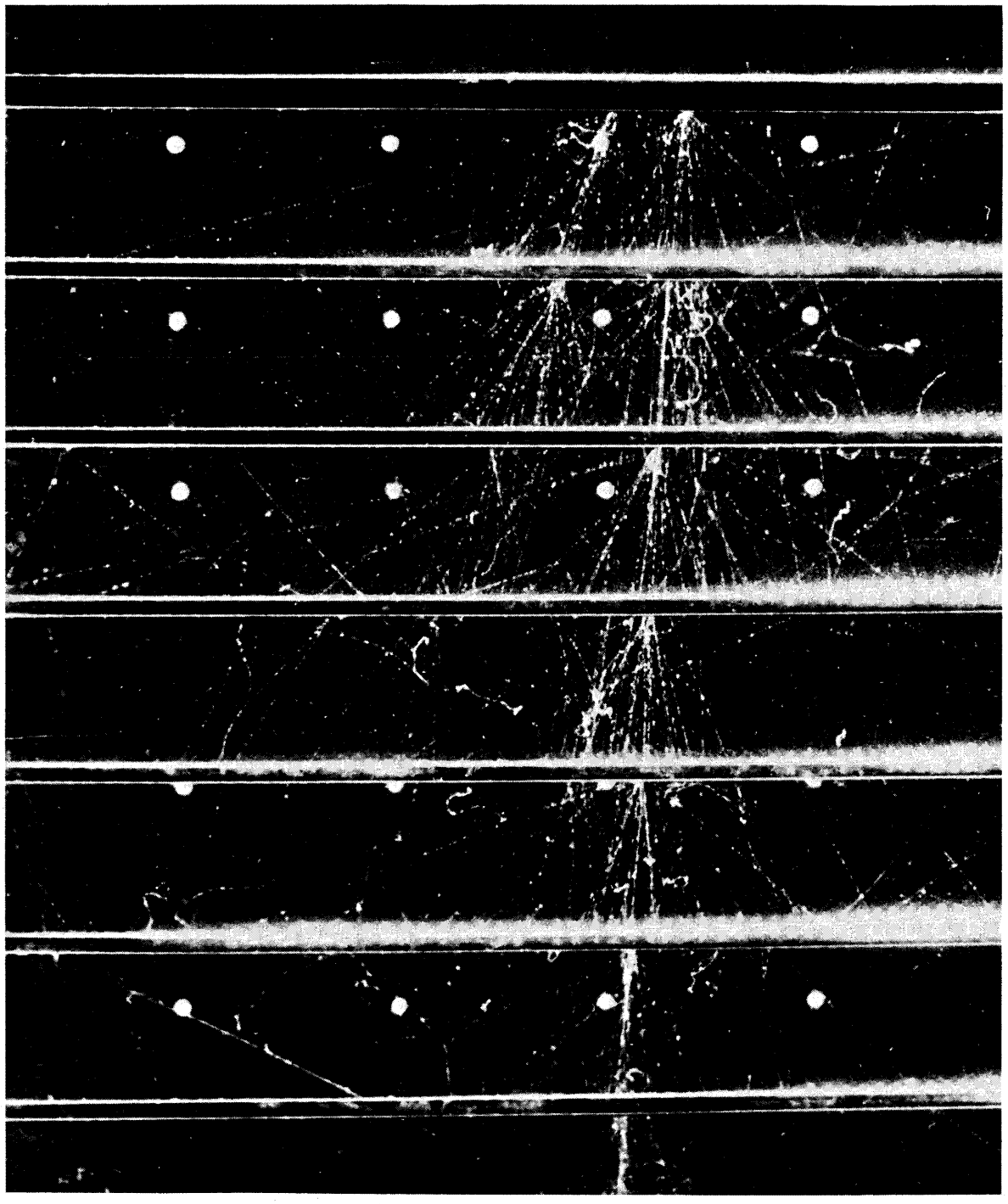


Fig. 13A Fotografía en una cámara de niebla que muestra chaparrones en cascada. La mayoría de las trazas visibles se deben a electrones y positones, que generalmente se mueven hacia la parte inferior de la figura. La partícula que penetró en la parte superior derecha y que atravesó tres placas antes de ser detenida en la cuarta puede ser un pión. Para más comentarios, véase el texto. (Proporcionada por el profesor W. B. Fretter, Berkeley.)

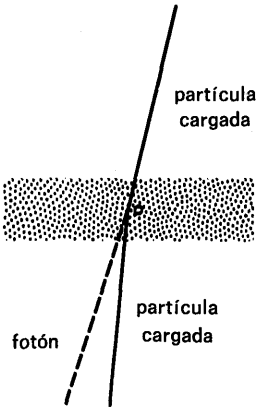


Fig. 13B Una partícula cargada de gran energía (*por ejemplo*, un positón o un electrón) es desviada por el campo eléctrico de un átomo y, como consecuencia de este movimiento acelerado, se emite un rayo gamma (es decir, un fotón de gran energía). Éste es el fenómeno físico de *radiación de frenado*. La parte sombreada de la figura representa materia macroscópica, por ejemplo una porción de placa de plomo en una cámara de niebla. (El tamaño del átomo se ha exagerado ligeramente para mayor claridad.)

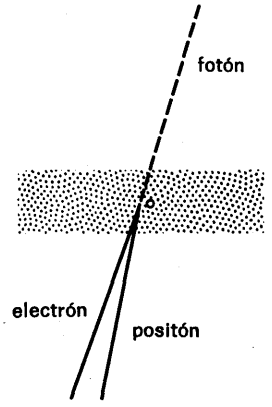


Fig. 13C Un rayo gamma de gran energía que penetra en el campo eléctrico de un átomo da lugar a un par electrón-positón. Éste es el fenómeno físico de *producción de pares*. Los dos procesos básicos que se presentan en estas dos figuras son los responsables del desarrollo del chaparrón en cascada que muestra la fig. 13A.

las enteramente nuevas, conocidas con el nombre de mesones-K e hiperones, pueden aparecer en vez de ellos.

Análogamente, en una violenta colisión de dos electrones puede suceder que los productos de reacción finales sean *tres* electrones y un positón. (El positón es una partícula elemental análoga al electrón, salvo la carga, que es de signo opuesto.) Por otra parte, si un electrón y un positón chocan, cabe que estas dos partículas desaparezcan (decimos entonces que se han *aniquilado*) y nos queda solamente la radiación electromagnética en forma de rayos gamma.

13 Un ejemplo interesante de proceso de creación es la creación de un par electrón-positón cuando un rayo gamma atraviesa el campo eléctrico de un átomo. Las partículas elementales, por consiguiente, pueden ser creadas a partir de radiación electromagnética. La figura 13A, que es una fotografía de cámara de niebla de los llamados chaparrones en cascada, "muestra" varios ejemplos de este fenómeno. Lo que se ve en ella se explica como sigue (véanse también las figs. 13B y C). Si una partícula cargada y de gran energía, por ejemplo un electrón o un positón, atraviesa una de las placas de plomo horizontales que se ven en la figura, puede ser desviada muy ligeramente por el campo de uno de los átomos de la placa. Esta desviación constituye un movimiento acelerado y, en consecuencia, se emite radiación electromagnética en forma de rayo gamma de alta energía. (Claro está, la partícula puede desviarse por la acción de varios átomos en una sola placa, en cuyo caso varios serán también los cuantos gamma que se emitan.) Los rayos gamma que así aparecen crean luego pares electrón-positón en los campos de los átomos que *dichos rayos* encuentran al atravesar las placas. Estas partículas cargadas, a su vez, originan más rayos gamma al ser desviadas en las placas, y los nuevos rayos gamma crean nuevos pares, y así sucesivamente. Una única partícula cargada, o un único rayo gamma de gran energía, puede dar lugar así a una cascada de rayos gamma, electrones y positones. Las partículas cargadas dejan trazas visibles en la cámara de niebla; éstas son las trazas que vemos en la figura 13A. Los rayos gamma no son visibles en ella.

El chaparrón en cascada de la parte derecha de la fotografía fue iniciado por un rayo gamma que incidió desde arriba. La energía de este rayo gamma era probablemente de unos 20 GeV. El chaparrón de la izquierda fue provocado por una partícula cargada cuya energía era algo menor. Ambos chaparrones tu-

vieron probablemente su origen en un suceso que ocurrió en la pared de la cámara, fuera del campo de vista. La mayor parte de las partículas que se observan en los chaparrones se mueven hacia abajo. Es un rasgo característico de estos procesos el que las partículas de mayor energía tienden a ser emitidas en la dirección y sentido de la partícula incidente, mientras que las de energía menor pueden serlo en otras direcciones. Si miramos con atención la fotografía, observaremos que los chaparrones secundarios debidos a partículas emitidas en direcciones distintas de las correspondientes a los chaparrones principales pronto "se extinguen". Un chaparrón en cascada cesa, naturalmente, cuando la energía original se ha distribuido entre tantas partículas cargadas y fotones que ni unas ni otros poseen ya energía suficiente para la creación de pares adicionales. Las partículas de baja energía son entonces absorbidas por las placas de plomo.

La energía de la partícula que inicia un chaparrón puede estimarse a partir del número de partículas secundarias cargadas que se producen.

14 Los procesos de creación y de aniquilación que hemos mencionado son aspectos importantes de la naturaleza. Es obvio que estos fenómenos no son en modo alguno análogos ni a la fragmentación de las bolitas, ni a las reacciones químicas. Una reacción química podemos describirla diciendo que en ella se forman nuevas moléculas a partir de los constituyentes elementales de otras, y para esta descripción los *átomos* son los constituyentes elementales de las moléculas. En contraste con esto, consideremos una colisión en la que las dos partículas presentes al principio subsisten después de la colisión, a la vez que aparecen un cierto número de nuevas partículas creadas en el suceso. Es claro que no podemos describir éste en términos de una reordenación de los constituyentes elementales de las partículas originales para formar nuevos sistemas compuestos. Tampoco es posible aplicar esta descripción a sucesos en los que algunas de las partículas originales desaparecen. Un notable ejemplo de este último fenómeno es la aniquilación de un par electrón-positón, en la que las partículas materiales presentes originalmente desaparecen por completo quedando sólo rayos gamma.

15. Para decidir experimentalmente si una partícula es elemental o compuesta intentamos romperla haciéndola chocar con otra partícula y observando los productos de la reacción.

De esta manera podemos romper moléculas en átomos y los átomos en electrones y núcleos, y está justificado decir que las moléculas están formadas por átomos que, a su vez, lo están por electrones y núcleos. En realidad, los físicos del siglo XIX estaban equivocados cuando pensaban que los átomos son indestructibles e indivisibles: de hecho, es posible romper fácilmente los átomos. Análogamente, los núcleos se pueden romper, y cabe decir que éstos están formados de protones y neutrones. Sin embargo, para romper un núcleo se requiere mucha más energía que para romper un átomo, y en este sentido los núcleos son mucho menos "destructibles" que los átomos.

Con los modernos aceleradores de partículas cabe producir haces de partículas de muy alta energía y tenemos así los medios para destruir partículas tales como los protones, si es que éstos pueden efectivamente ser destruidos. Pero los protones no se rompen como los átomos y los núcleos: ocurre algo muy diferente. Hemos de llegar así a la conclusión de que en el estudio de los electrones, protones, neutrones, etc., hemos alcanzado un límite: no parece razonable ni útil considerar estas partículas como formadas por otras partículas más elementales.

16 Nadie intentaría hoy crear una teoría general de la materia basada en la proposición de que ésta es indefinidamente divisible; una tal empresa sería inútil. Sin embargo, pensemos un poco acerca de qué rasgos podría tener dicha teoría. Si tomamos un pedazo de cobre y lo dividimos en trozos cada vez más y más pequeños, jamás conseguiremos sino pequeños trozos de cobre. Por pequeños que sean éstos, se les puede reconocer todavía como trozos de cobre. ¿Qué significa esto? Esto significa que las leyes físicas que rigen el comportamiento de los *pequeños* trozos de cobre son las mismas que las leyes que gobiernan el comportamiento de los trozos de cobre *grandes;* los sistemas físicos se pueden "reducir de tamaño" indefinidamente. Ahora bien, hay que admitir que nuestra teoría no tiene por qué poseer *necesariamente* este rasgo, pero sería una característica muy natural en una teoría que describe la materia como algo indefinidamente divisible. Observemos que, desde muchos puntos de vista, nuestras teorías clásicas de la física sí poseen dichos rasgos. Las leyes de la física que utilizamos para describir una máquina que pese una tonelada no son cualitativamente diferentes de las leyes que empleamos para describir un reloj de pulsera. Los sistemas físicos macroscópicos se pueden reducir o aumentar de tamaño dentro de un intervalo considerable.

Esta "conservación de la forma de las leyes físicas", que podría parecer natural si la materia fuese indefinidamente divisible, es ciertamente del todo implausible si la materia está formada por partículas elementales. Un *átomo* de cobre en modo alguno se parece a un trozo macroscópico de cobre; es algo enteramente distinto. No tenemos en absoluto razón alguna a priori para creer que las leyes de la física que describen los sistemas macroscópicos con precisión suficiente, serían también adecuadas para describir la estructura de los átomos y de las partículas elementales.

17 Una cosa es admitir, en tanto que principio abstracto, que las ideas clásicas pudieran no ser adecuadas para representar los átomos, y que el electrón es realmente una partícula elemental, pero otra muy diferente es que nos comportemos por completo de acuerdo con dichos principios en nuestro modo de pensar. La experiencia prueba que nuestro pensamiento tiende a basarse en prejuicios, y que no renunciamos fácilmente a ideas que aprehendimos una vez. Dado que nuestras primeras observaciones conscientes de los fenómenos físicos se refieren a sistemas macroscópicos, adquirimos todo un conjunto de "prejuicios clásicos" que hay que superar cuando queremos estudiar la física cuántica *. Veamos de ilustrar el sentido de estas observaciones considerando dos problemas íntimamente relacionados que han sido objeto de muchos estudios y discusiones en este siglo.

18 Preguntémonos lo que sigue: ¿Cuáles son las fuerzas que conservan unido un electrón? ¿Qué fracción de la masa de un electrón es de naturaleza *intrínseca* y qué fracción se debe a la energía del campo electrostático que crea? Para intentar abordar estas cuestiones adoptaremos un modelo que no deja de ser razonable y según el cual el electrón es una pequeña esfera uniformemente cargada de radio r. Las diferentes partes de esta esfera se repelen entre sí electrostáticamente y, por lo tanto, debe haber algún otro tipo de fuerza que mantiene unida la esfera. ¿Cuál es la naturaleza de esta fuerza?

En el volumen 2 de esta serie ** aprendimos a calcular la

* No sólo el estudiante que comienza sus estudios de física tiene tales prejuicios, sino que también los tiene el que es ya un físico. Dado que la rigidez de pensamiento parece aumentar con la edad, es plausible que el físico maduro padezca realmente más sus "prejuicios clásicos" que el estudiante que empieza.

** Berkeley Physics Course, Vol. 2, *Electricidad y Magnetismo*, Cap. 2. pág. 51.

energía total "que reside" en un campo electrostático: se integra $(1/8\pi)\mathbf{E}^2$ en todo el espacio, donde **E** es el campo eléctrico local. En el caso de nuestro modelo, para la energía electrostática obtenemos la expresión $W = (3/5)(e^2/r)$ *, donde e es la carga electrónica. (El coeficiente de la expresión e^2/r depende de los pormenores del modelo: si se trata de una esfera cargada uniformemente, su valor resulta ser 3/5. Lo que aquí importa no es el valor de este coeficiente, sino el hecho de que W sea proporcional a la expresión e^2/r. Que W dependa de esta manera de e y r es inmediatamente obvio por razones de dimensionalidad.) Podemos escribir ahora la masa del electrón en la forma $m = m_e + m_i$, donde $m_e = W/c^2$ es la contribución electromagnética y m_i es la parte "intrínseca". El problema es: ¿cuán grande es m_e? ¿Podría quizá ocurrir que $m = m_e$, en cuyo caso toda la masa sería de origen electromagnético? Si hacemos esta hipótesis, podemos calcular el radio r y se encuentra $r = 1{,}7 \times 10^{-13}$ cm. Son muchos los hechos experimentales que indican que el electrón debe ser muy "pequeño" y, por lo tanto, es satisfactorio que obtengamos efectivamente un valor pequeño. Obsérvese que no podemos hacer r mucho menor, a menos que no queramos enfrentarnos con la posibilidad de que m_i sea negativa.

Dado que, por hipótesis, el electrón es una partícula elemental, podría resultar particularmente tentador ensayar un modelo con $r = 0$, en cuyo caso el electrón sería una "partícula puntual" sin ni extensión ni estructura. Pero esto conduciría a una energía propia W infinita y a una masa intrínseca infinita negativa m_i, lo que difícilmente tiene sentido. (Esta circunstancia, que levanta un obstáculo insuperable en el camino del modelo, atractivo y matemáticamente *simple*, de un electrón puntual, se suele designar en la literatura como "la dificultad de la energía propia infinita del electrón".)

19 Reflexionemos ahora con espíritu crítico acerca de las consideraciones que preceden: ¿poseen realmente algún sentido? Al formular nuestras preguntas, claramente hemos aceptado a la vez muchas hipótesis que reflejan nuestros prejuicios. Hemos supuesto que el electrón es una pequeña esfera cargada, y hemos supuesto también que las leyes de Coulomb pueden aplicarse a las "partes" de esta esfera. ¿Cómo sabemos que la ley

* Esto vale en el sistema de unidades CGS. En el sistema MKS tenemos

$$W = \frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right).$$

de Coulomb es aplicable a esta situación? ¿Y qué hay de la idea de que una fuerza ha de mantener juntas las "partes" del electrón para vencer a las fuerzas electrostáticas de repulsión? Hemos dicho antes que el electrón no tiene "partes"; el electrón *es una partícula elemental.* Preguntar qué es lo que mantiene junto como un todo al electrón significa que admitimos la posibilidad de que pueda romperse en pedazos, pero ésta es una idea muy discutible. Obsérvese que la energía propia electrostática de la partícula es el trabajo que podríamos obtener dejando que las "partes" que la constituyen se dispersaran completamente; así es como dedujimos originalmente el resultado de que la energía electrostática de un sistema cualquiera de cargas es igual a la integral del cuadrado de la intensidad del campo eléctrico extendida a todo el espacio. Si la partícula *no puede* ser disgregada en partes, la energía propia electrostática es entonces un concepto dudoso. Esto es particularmente verdad para la energía propia infinita, carente de sentido, del "electrón puntual".

La mayoría de los físicos se han dado ya cuenta de que intentar construir un cierto tipo de modelo clásico del electrón es algo sin sentido. El electrón no se comporta como una esfera cargada, y todas las discusiones acerca de qué puede mantenerlo unido como si fuese una esfera cargada o de cuál pueda ser su energía propia clásica es algo que no importa a la física. Nuestros prejuicios clásicos nos condujeron a formular preguntas para las que no cabe esperar respuestas razonables.

Hemos de mencionar, sin embargo, la curiosa circunstancia de que el fantasma de la energía propia infinita no ha sido todavía por completo exorcizado de la física; restos de esta confusión persisten todavía en la mecánica cuántica.

Los límites de aplicabilidad de la teoría clásica

20 En la teoría de la relatividad especial, la velocidad de la luz representa un papel fundamental. Esta velocidad, $c = 3 \times \times 10^{10}$ cm/s, es el límite superior de la velocidad de cualquier partícula material y el límite superior de la velocidad con la que la energía o la información pueden transmitirse en el espacio físico. La existencia de esta velocidad nos proporciona un criterio simple y natural en términos del cual podemos decir si un fenómeno físico puede discutirse de modo "no-relativista" y cuándo ha de ser discutido "relativísticamente". Hablando en términos generales, un tratamiento no relativista

es adecuado, es decir, es suficientemente preciso, si todas las velocidades que realmente cuentan son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

Podemos preguntarnos si existe un criterio análogo que nos diga cuándo hemos de aplicar la mecánica cuántica y cuándo es adecuada la teoría de la física clásica. ¿Hay una constante de la naturaleza "análoga" a la constante c, en términos de la cual se pueda formular el criterio en cuestión?

En efecto, tal constante existe y se conoce con el nombre *de constante de Planck*. Se designa por h y tiene el valor

$$h = 6{,}626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$$
$$= 6{,}626 \times 10^{-34} \text{ joule s}$$

La dimensión física de esta constante es así: (tiempo) × × (energía) = (longitud) × (impulso) = (momento cinético). Tal magnitud física se llama *acción*, y de acuerdo con esto la constante de Planck ha recibido el nombre de *cuanto de acción* (fundamental).

El criterio puede formularse más o menos como sigue. Si, para un sistema físico, una variable dinámica "natural" cualquiera * que tiene las dimensiones de una acción toma un valor numérico comparable con la constante de Planck h, el comportamiento de este sistema ha de describirse dentro del marco de la mecánica cuántica. Si, por otra parte, toda variable cuya dimensión sea la de una acción es muy grande referida a h como unidad, las leyes de la física clásica son en tal caso válidas con precisión suficiente.

Hay que subrayar que éste es un criterio *tosco* que nos dice meramente cuándo debemos proceder con cuidado. El hecho de que una variable de acción sea pequeña en un caso particular, no significa necesariamente que la teoría clásica sea *del todo* inaplicable. En muchos casos la teoría clásica nos proporcionará *cierta* visión del comportamiento del sistema, especialmente si se le han añadido algunas nociones mecánico-cuánticas.

21 Advertimos desde luego que la constante de Planck es "pequeña", lo que significa que h es numéricamente pequeña

* Una *variable dinámica* es cualquier variable que caracteriza el estado del sistema; por ejemplo, una coordenada de posición, una componente del impulso, una componente del momento cinético, una componente de la velocidad, la energía total, etc.

cuando se mide tomando como unidades las que son apropiadas para una descripción de los fenómenos macroscópicos, es decir, las unidades MKS o CGS. Dicho de otra manera, una cantidad de acción en el mundo macroscópico es *enorme* cuando se mide tomando h como unidad.

Imaginémonos, por ejemplo, el péndulo de un reloj de péndulo. Para hallar una cantidad que tenga las dimensiones de una acción, formemos el producto del período del péndulo por la energía total de su movimiento oscilante. El período es del orden de un segundo y la energía es sin duda mucho mayor que un erg, lo que significa que el producto de estas dos cantidades es mucho mayor que 10^{26} por h. De acuerdo con nuestro criterio, una descripción clásica del péndulo en oscilación debe ser, y en efecto lo es, completamente adecuada.

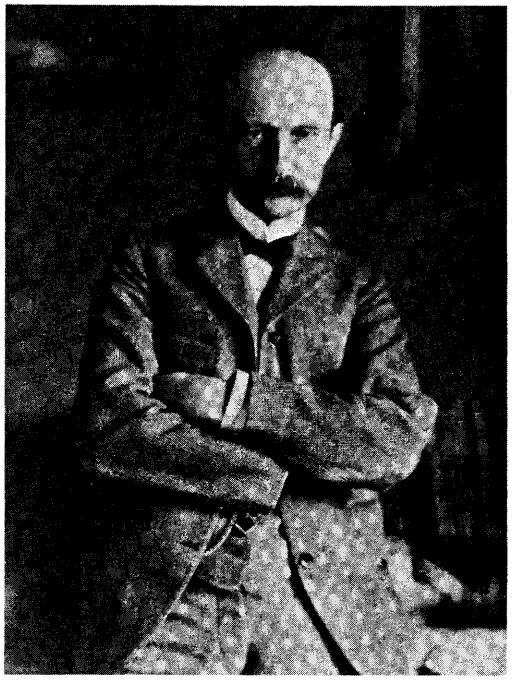
Consideremos, análogamente, un cuerpo en rotación. Supongamos que el momento de inercia es de 1 g cm^2 y que la velocidad angular es igual a 1 rad/s. El momento cinético vale entonces 1 g cm^2/s = 1 erg s $> 10^{26}$ h y, por lo tanto, dicho momento es enorme comparado con h. Incluso si el cuerpo fuese tan pequeño como un grano de arena, y su período de rotación de una hora, su momento cinético sería aún extraordinariamente grande si se midiera tomando h como unidad.

Consideremos, finalmente, un oscilador armónico pequeño, pero macroscópico. Supongamos que la masa es de 1 g, que la velocidad máxima vale 1 cm/s y que la amplitud máxima es $x = 1$ cm. El impulso máximo es entonces $p = 1$ g cm s^{-1}. La cantidad $xp = 1$ erg s es una acción, que también ahora resulta ser $> 10^{26}$ h.

Esta discusión ilustra cómo nuestro criterio, al ser aplicado a tales sistemas macroscópicos, nos dirá siempre lo que ya sabíamos, a saber, que los sistemas pueden describirse clásicamente.

22 Intentemos ahora alcanzar un conocimiento más profundo de lo que realmente significa el criterio nuestro.

En la física clásica admitimos que cualquier variable dinámica de un sistema pueda ser especificada y medida con precisión arbitraria. Esto no significa que efectivamente podamos hacerlo en la práctica; significa más bien que no admitimos la existencia *en principio* de un límite, cualquiera que sea, para la precisión. El conjunto de las variables dinámicas de la física clásica incluye variables tales como las coordenadas de posición, las componentes del impulso, las componentes del momento cinético, etc., para un sistema de partículas o una sola partícula, al igual que variables tales como las compo-



Max Karl Ernst Ludwig Planck. Nació en Kiel, Alemania, en 1858; falleció en 1947. Después de estudiar en Munich y Berlín, Planck obtuvo su grado de doctor en 1879. Su tesis trataba de la segunda ley termodinámica. Después de ocupar un cargo en la Universidad de Kiel, Planck fue nombrado profesor de Física Teórica de la Universidad de Berlín en 1899. Se retiró a la edad de 70 años, en 1928. Recibió el Premio Nobel en 1919.

Al comenzar su carrera Planck se dedicó al estudio de la Termodinámica, tema éste por el que se interesó a lo largo de toda su vida. En Berlín se familiarizó con el trabajo experimental sobre la radiación térmica llevada a cabo por Lummer, Pringsheim, Rubens y Kurlbaum y se propuso la tarea de deducir una ley teórica de la radiación del cuerpo negro. El éxito que coronó su esfuerzo marca el comienzo de la física cuántica, y lo que ahora se llama constante de Planck apareció por vez primera en su artículo del año 1900. Después de este descubrimiento monumental, Planck continuó desempeñando un activo papel en el desarrollo de la física cuántica. (Fotografía proporcionada por ***Physics Today***.)

nentes de los vectores de los campos eléctrico y magnético en un punto dado del espacio y en un instante dado.

Un análisis cuidadoso del comportamiento real de los sistemas microfísicos prueba, sin embargo, que existe un *límite fundamental* para la precisión con la que tales variables pueden especificarse y medirse. El análisis, muy penetrante y elegante, mediante el cual se estableció este límite, fue llevado a cabo por W. Heisenberg en 1927. Nos referimos a la existencia de tales límites cuando hablamos del *principio de indeterminación;* una expresión específica cuantitativa de este principio en un caso particular cualquiera se conoce con el nombre de *relación de indeterminación.*

Una relación de indeterminación particular concierne al par de variables (q, p), donde q es la coordenada posición de una partícula y p es el impulso de la misma. Esta relación es

$$\Delta q \, \Delta p \geqq \frac{h}{4\pi} \tag{22a}$$

En ella Δq es el error cuadrático medio de q y Δp el error cuadrático medio de p, y la desigualdad nos dice, por lo tanto, que la máxima precisión con que se pueden conocer las dos variables q y p es tal que el producto de las "indeterminaciones" de las dos variables es del orden de magnitud de la constante de Planck.

Se advierte inmediatamente que, debido a la pequeñez de la constante de Planck, h, la relación de indeterminación no tiene importancia ninguna en la macrofísica; otras fuentes de error en q y en p enmascaran siempre la indeterminación fundamental expresada por la desigualdad (22a). Esta relación, por consiguiente, no contradice en sentido alguno nuestro *conocimiento empírico* de la macrofísica, aunque sí contradice nuestras *teorías* clásicas relativas a los sistemas macroscópicos.

23 El principio de indeterminación se "explica" a menudo como sigue: las variables dinámicas tales como la posición, el impulso, el momento cinético, deben definirse *por vía operacional,* es decir, señalando los procedimientos experimentales que permiten medirlas. Si ahora analizamos los procedimientos de medición que realmente se siguen en microfísica, resulta que una medición siempre *perturbará* al sistema; existe una interacción característica inevitable entre el sistema y el aparato de medida. Si intentamos medir la posición de una partícula con gran precisión, la perturbaremos de tal manera que después de la medición su impulso es muy impreciso. Si in-

tentamos medir su impulso con precisión grande, lo perturbamos de tal manera que su posición será muy incierta. Si intentamos medir la posición y el impulso de la partícula *simultáneamente,* estas dos mediciones interferirán necesariamente entre sí de manera tal que la precisión del resultado final estará sujeta a la desigualdad (22a). La discusión pasa luego a mostrar cómo estas perturbaciones se producen en casos particulares.

Este tipo de descripción del significado del principio de indeterminación es muy corriente en los textos de mecánica cuántica. El autor no quiere sostener que sea completamente equivocado, pero sí tiene la impresión de que puede desorientar y de que puede originar serios malentendidos. Dicha descripción yerra el punto esencial, que es este: *las relaciones de indeterminación establecen los límites más allá de los cuales no se pueden aplicar los conceptos de la física clásica.* El "sistema físico clásico", descrito mediante variables dinámicas clásicas que son funciones definidas del tiempo y que pueden en principio conocerse con precisión arbitraria, es algo meramente imaginario; no existe en el mundo real. Se han realizado experimentos que nos dicen que así son las cosas. Si describimos un sistema real como si fuese un "sistema clásico", estamos haciendo una aproximación y las relaciones de indeterminación nos dicen hasta dónde podemos llegar.

24 Para seguir poniendo en claro estas ideas, consideremos el movimiento unidimensional de una partícula. Según la dinámica clásica, la posición instantánea de la partícula se define mediante la variable posición $q = q(t)$. Si la masa de la partícula es m y se mueve con suficiente lentitud, su impulso p viene dado por $p = p(t) = m\,dq\,(t)\,/dt$. Podemos pensar ahora que la relación de indeterminación no expresa ni más ni menos que una poco afortunada propiedad de nuestros instrumentos de medida que nos impide determinar $q(0)$ y $p(0)$ con precisión arbitraria, aunque muy bien podemos imaginar valores precisos de estas variables y el consiguiente movimiento preciso de la partícula. En otras palabras, cabe imaginar que podemos seguir usando una descripción clásica según la cual toda partícula sigue una trayectoria definida, pero con el refinamiento de que introducimos una indeterminación acerca de *cuál* de las trayectorias sigue la partícula imponiendo relaciones de indeterminación a las condiciones iniciales que las determinan.

No es esto. Los experimentos nos dicen que hemos de modificar nuestras ideas de una manera mucho más profunda. *El*

movimiento a lo largo de una trayectoria clásica debe ser rechazado. Preguntar por los valores simultáneos de $q(t)$ y $p(t)$, o razonar como si existieran, carece tanto de sentido como el preguntar por el color del pelo del rey de los Estados Unidos.

25 Puede parecer ahora que nuestra discusión es lógicamente contradictoria. Primero formulamos una relación de indeterminación, y afirmamos luego que las variables q y p que aparecen en ella carecen de sentido. Si efectivamente no lo tienen, ¿cómo puede tener algún sentido aquella relación? La respuesta es la siguiente: en la descripción mecánico-cuántica del comportamiento de una partícula podemos introducir ciertos objetos matemáticos q y p que, desde muchos puntos de vista, *corresponden* a las variables clásicas posición e impulso. Estos objetos, sin embargo, *no* son idénticos a las variables clásicas. La relación (22a) nos dice que si intentamos interpretar los objetos mecánico-cuánticos q y p como "posición" e "impulso" e interpretamos así el movimiento en términos clásicos, hay entonces una limitación fundamental impuesta a la precisión con la que se pueden conocer la "posición y el "impulso". En otras palabras, la relación nos dice que si *intentamos* introducir variables clásicas e *intentamos* interpretar clásicamente el movimiento, existe un límite para la precisión con que pueden especificarse estas variables.

26 Es necesario comprender claramente que ningún análisis del proceso de medición en términos puramente clásicos podrá nunca conducir a una relación de indeterminación. Las relaciones de indeterminación reflejan hechos de la naturaleza descubiertos experimentalmente. Las partículas que encontramos en ella no se comportan como partículas puntuales clásicas, ni tampoco se comportan como pequeñas bolas de billar:* su comportamiento es por completo diferente y ésta es la razón por la cual ciertos tipos de mediciones no pueden realizarse, ni tan sólo ser imaginados.

En capítulos siguientes iremos conociendo las propiedades de las partículas del mundo real y veremos entonces con cuánta naturalidad encajan en el esquema de las cosas las en apariencia extrañas relaciones de indeterminación.

* Por alguna razón, la *bola de billar* ha venido a representar el papel del prototipo de una partícula clásica en los libros de texto de mecánica cuántica. El autor, claro está, se adapta a esta tradición. Puede resultar divertido para el lector saber que el autor jamás jugó al billar, y que nunca tuvo en su mano una bola de billar. Su conocimiento de las propiedades que se les atribuye es, por lo tanto, un conocimiento obtenido de los libros, resultado de la lectura de textos de mecánica cuántica.

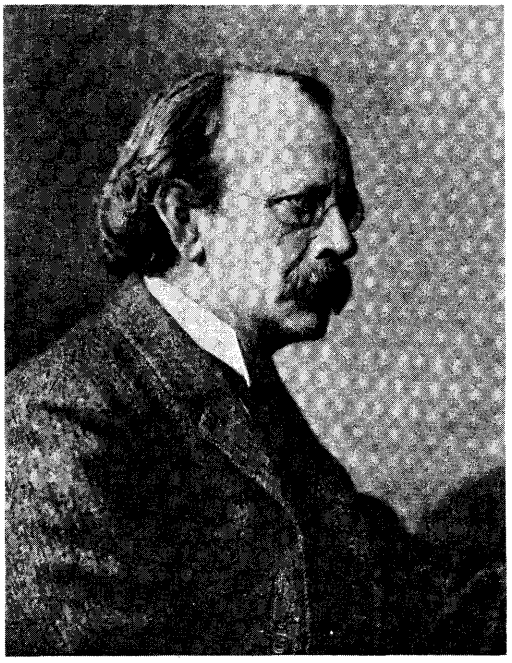
El descubrimiento de la constante de Planck

27 Consideremos ahora en su fase primera la historia de la constante de Planck y veamos cómo fue descubierta y cómo se abrió camino en la física. Retrocederemos en el tiempo hasta el principio del presente siglo y examinaremos algunos de los problemas sobresalientes de la física de dicho período, a saber, los siguientes:

i) El problema de la ley de radiación del cuerpo negro,
ii) El problema del efecto fotoeléctrico,
iii) El problema de la estabilidad y tamaño de los átomos.

Estos tres problemas no eran, naturalmente, los únicos que ocupaban a los físicos de aquel tiempo, pero los hemos destacado aparte porque ilustran el dilema de la física clásica de manera particularmente bien definida.

El lector debe tener en cuenta que nuestra exposición es muy deficiente en tanto que relato histórico: difícilmente cabría esperar valorar debidamente, en unas pocas páginas, el muy interesante desarrollo de la física cuántica. Contemplamos retrospectivamente la situación al principio del presente siglo y, en estas condiciones, es fácil ver que estos tres problemas eran problemas clave. Sin embargo, si examinamos las publicaciones del año 1900 en los *Annalen der Physik* (una de las más importantes revistas de física de aquel entonces), encontramos que la mayor parte de los físicos se preocupaban de cosas muy distintas. La habilidad de distinguir lo verdaderamente importante de lo que no lo es, es ciertamente una rara habilidad (en cualquier tiempo) y tenemos toda clase de razones para admirar la notable penetración mental e imaginación de los pioneros de la física cuántica.



Joseph John Thomson. Nació cerca de Manchester, Inglaterra, en 1856; falleció en 1940. Durante muchos años Thomson (afectuosamente apodado "J.J.") ocupó el cargo de profesor de Física en la Cátedra Cavendish en la Universidad de Cambridge y también el de profesor de Física en la Royal Institution, Lóndres. Sus múltiples y variadas contribuciones a la física incluyen investigaciones sobre la conducción de la electricidad a través de los gases, la carga y la masa del electrón, y las propiedades de los rayos positivos. Thomson descubrió el electrón en 1897. Su trabajo acerca de los rayos positivos le condujo a su descubrimiento de los isótopos del neón. Recibió el Premio Nobel en 1906. (Fotografía proporcionada por el profesor L. B. Loeb, Berkeley.)

28 Para escenificar la situación, consideraremos estos tres problemas como tres aspectos diferentes del fundamental "Misterio de la constante que falta". Cierto es que un físico del año 1900 no hubiera formulado de esta manera las dificultades que le hacían frente, pero es instructivo examinar retrospectivamente el asunto desde este punto de vista.

La constante que falta es, naturalmente, la constante h de Planck. En una teoría puramente clásica de la materia, esta constante no aparecería. Consideremos, por lo tanto, algunas de las otras constantes fundamentales de la física que *representarían* un papel en una descripción clásica.

i) La velocidad de la luz, $c = 3{,}00 \times 10^{10}$ cm/s. Esta constante se conocía con bastante precisión en el año 1900.

ii) El número de Avogadro, $N_0 = 6{,}02 \times 10^{23}$, que es el número de moléculas en un mol de cualquier gas. En el año 1900 se disponía de un valor *no preciso* de esta constante basado en la teoría cinética de los gases.

iii) La masa del átomo de hidrógeno, $M_H = 1{,}67 \times 10^{-24}$ g. Con una precisión de 1 parte en 2000, ésta es también la masa del protón M_p. Dado que un mol de hidrógeno tiene una masa muy aproximadamente igual a 2 g, tenemos

$$N_0 M_H \cong N_0 Mp \cong 1 \text{ g} \tag{28a}$$

y, si conocemos el número de Avogadro, podemos hallar así M_H.

iv) La carga elemental, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C $= 4{,}8 \times 10^{-10}$ Fr. La carga del electrón es $-e$, y la carga del protón, $+e$. La carga que transporta un mol de iones simplemente cargados (es decir, tales que cada ion lleva consigo la carga e) se conoce con el nombre de constante de Faraday, F. Tenemos así

$$F = N_0 e = 96\,500 \text{ C} \tag{28b}$$

La constante de Faradary F se mide sin dificultad en un experimento de electrólisis. Por ejemplo, F es la cantidad de carga que ha de pasar por una celda electrolítica para depositar un equivalente-gramo de plata (es decir, 107,88 g de plata, ya que el peso atómico de ésta es 107,88).

v) La razón de la carga a la masa del electrón, $e/m = 1{,}76 \times 10^8$ C/g, y la razón de la carga a la masa del protón, $e/M_p = 9{,}6 \times 10^4$ C/g. Estas constantes pueden determinarse en experimentos de desviación con haces de electrones o protones en campos eléctricos y magnéticos. De esta manera se determinó el valor e/m por J. J. Thomson en 1897 *. Hay que hacer observar que

$$\frac{e}{M_p} = \frac{F}{N_0 M_p} \tag{28c}$$

y esta constante, por consiguiente, no es independiente de las constantes antes citadas.

Hay que advertir también que si se dan valores precisos de e/m y de e/M_p, podemos hallar un valor preciso de

$$\frac{M_p}{m} = \frac{e/m}{e/M_p} \tag{28d}$$

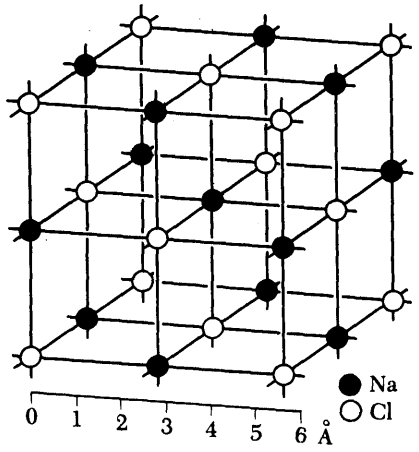


Fig. 30A Estructura cristalina del cloruro de sodio. La red es cúbica, con átomos de cloro y átomos de sodio que alternan en los vértices. Los centros de las pequeñas esferas en la figura indican las posiciones medias de los núcleos de sodio y cloro. El tamaño de estas esferas no pretende proporcionar información ninguna acerca de los tamaños ni de los núcleos ni de los átomos.

* J. J. Thomson, "Cathode Rays", *Philosophical Magazine* **44**, 293 (1897).

incluso si la carga e no se conoce con la correspondiente precisión. Esto supone, claro está, que la carga del protón es igual en valor absoluto a la carga del electrón.

vi) La masa del electrón, $m = 9{,}11 \times 10^{-28}$ g. Esta constante puede deducirse de e y e/m.

29 El número de Avogadro N_0 es el vínculo que conecta la microfísica con la macrofísica. El hecho de que este número sea tan grande nos dice cuán pequeños son realmente los átomos y las moléculas y por qué la estructura granular de la materia ya no es patente en el mundo de la macrofísica. Conforme hemos dicho, N_0 no era un número bien conocido al final del siglo pasado. Pero las constantes F, e/m, m/M_p se conocían mucho mejor y una buena medición independiente de N_0 o de e nos conduciría así a un mejor conocimiento de las constantes fundamentales e, m y M_p. Un importante aspecto de la teoría de Planck de la radiación del cuerpo negro consistía, conforme veremos, en que permite una evaluación independiente, y mejor, de N_0.

Unos diez años más tarde, R. A. Millikan, en su famoso experimento de la gota de aceite, midió directamente e observando el movimiento de pequeñas gotas de aceite cargadas que flotaban en el aire bajo la influencia combinada de la gravedad y de un campo eléctrico *. Aunque difícilmente cabe esperar que un experimento de este tipo proporcione un valor de e de alta precisión, poseía una gran importancia como medición independiente, y *conceptualmente simple,* de esta constante.

30 Siguiendo con nuestra historia, diremos que el número de Avogadro N_0 se puede también medir de manera muy directa contando el número de átomos en un cristal. Los átomos en el cristal están colocados formando una red regular, digamos una red cúbica, y si podemos determinar la distancia entre átomos vecinos en el cristal, es decir, la *constante de red,* podemos hallar, evidentemente, N_0. Es posible determinar dicha distancia mediante experimentos de difracción de rayos X, con tal que determinemos también la longitud de onda de los rayos X utilizados, por ejemplo, por mediciones con una red "macroscópica" de difracción realizada mecánicamente. N_0 fue finalmente determinado de esta manera.

* R. A. Millikan, "The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of Its Charge, and the Correction of Stokes's Law", *The Physical Review,* **32**, 349 (1911).

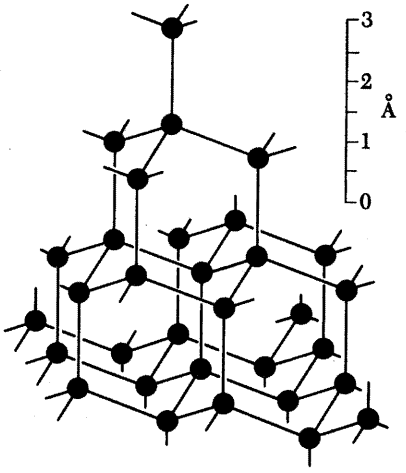


Fig. 30B Estructura cristalina del diamante. Cada átomo de carbono tiene como vecinos más próximos cuatro átomos situados en los vértices de un tetraedro (los vecinos más próximos están unidos por líneas de trazo continuo).

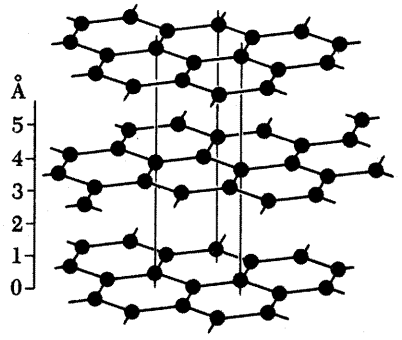


Fig. 30C Estructura cristalina del grafito. Tanto el diamante como el grafito están constituidos solamente por carbono. Las marcadas diferencias en las propiedades físicas de estos dos materiales son consecuencia de las formas diferentes de sus redes cristalinas. La red de grafito consiste en planos paralelos igualmente espaciados en los que los átomos de carbono se encuentran dispuestos formando un hexágono. Compárese la red de esta figura con la red del diamante en la fig. 30B.

El primero a quien se le ocurrió la inteligente idea de que la naturaleza nos proporciona redes de difracción, ya preparadas, en forma de cristales, fue M. von Laue, y basándose en ella, se llevaron a cabo en 1912 por W. Friedrich y P. Knipping * experimentos de difracción con rayos X en cristales. Esto fue de hecho la primera prueba experimental concluyente de que los rayos X son, en realidad, ondas de corta longitud.

31 Para poder comprender las consecuencias vinculadas con la radiación del cuerpo negro es necesaria una digresión a fin de discutir algunas cuestiones relativas al calor y a la temperatura **. Estos conceptos son importantes para la descripción del comportamiento de la materia a escala macroscópica en condiciones de equilibrio térmico. Este tema nada tiene que ver con la estructura, o el comportamiento, de los átomos, moléculas o núcleos aislados, pero tiene importancia en muchas manifestaciones de los fenómenos cuánticos. La razón de que así sea, claro está, estriba en que, por lo general, no efectuamos mediciones en átomos, moléculas o núcleos aislados; observamos estas partículas como "encajadas" en la materia macroscópica.

La energía térmica es energía asociada con el movimiento desorganizado de los constituyentes de un cuerpo macroscópico. El calor es energía térmica que se transfiere (de un cuerpo a otro). ¿Qué es la temperatura?

32 No es nada fácil dar, en una sola proposición, una definición *precisa* del concepto de temperatura. En cierto sentido, todos "sabemos" qué es la temperatura y sabemos también cómo medirla con un termómetro. Un termómetro es un cuerpo, o sistema, cualquiera en el que un cambio de temperatura produce un cambio directamente observable, como un cambio de longitud, un cambio de volumen, un cambio de resistencia eléctrica, etc. Consideremos, por ejemplo, un termómetro de mercurio. La temperatura se lee observando el nivel de una columna de mercurio en un tubo capilar de sección transversal constante. Para establecer una escala de temperaturas podemos asignar la temperatura 0° al punto de fusión del hielo y la temperatura 100° al punto de ebullición del agua y definir luego los

* W. Friedrich, P. Knipping y M. Laue, "Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen", *Annalen der Physik* **41**, 971 (1913).

** Estos temas se estudian con mayor extensión en el Berkeley Physics Course, vol. 5, *Física Estadística*. Véase también Physical Science Study Committee (PSSC), *Física*, caps. 9 y 26 (Ed. Reverté, 1965).

"grados" intermedios dividiendo el intervalo entre los dos puntos de referencia en el tubo capilar en un centenar de partes iguales. De esta manera es posible, ciertamente, definir una medida de la temperatura, pero este procedimiento tiene el grave defecto (desde el punto de vista de la teoría física fundamental) de que nuestra escala de temperaturas depende de las propiedades especiales de una substancia arbitrariamente elegida, en este caso el mercurio. Si seguimos el mismo procedimiento utilizando otra substancia, digamos alcohol, podemos hallar que 30° en la escala de alcohol no es lo mismo que 30° en la escala de mercurio.

Para fines científicos, es evidentemente deseable tener una medida de la temperatura que sea independiente de las propiedades especiales de cualquier substancia particular. En el volumen siguiente de esta serie, dedicado a la física del calor, discutiremos en detalle cómo puede definirse una tal medición. La escala de temperaturas que resulta es la *escala absoluta,* en la que la temperatura se mide en grados Kelvin, que se designan por °K. En la escala absoluta 0°K es la temperatura más baja posible: esta temperatura corresponde aproximadamente a — 273°C. Por conveniencia, el valor del grado Kelvin se elige de manera que una *diferencia* de temperaturas posee el mismo valor numérico en la escala absoluta y en la escala centígrada y tenemos así, por definición,

$$\boxed{(\text{temperatura en °K}) = (\text{temperatura en °C}) + 273{,}15}$$

33 Intentemos formarnos una idea cuantitativa de qué "significa" la temperatura desde el punto de vista de la microfísica. La idea básica es la siguiente. A medida que la temperatura aumenta, aumenta el valor medio de la energía asociada con los movimientos al azar de los constituyentes elementales de un cuerpo macroscópico. A la temperatura de 0°K cesan todos los movimientos *aleatorios,* y éste es el significado físico de la más baja temperatura posible. (El énfasis recae en la palabra "aleatorio".)

En mecánica estadística, a menudo idealizamos las propiedades de un gas real acudiendo a un modelo: se supone que el gas está constituido por un gran número de pequeñas partículas idénticas (moléculas), que se mueven al azar, y con interacciones mutuas *insignificantes.* Este modelo nos proporciona una buena descripción de lo que es un gas real *enrarecido.* Si las partículas en el gas (modelo) son moléculas monoatómicas, ha-

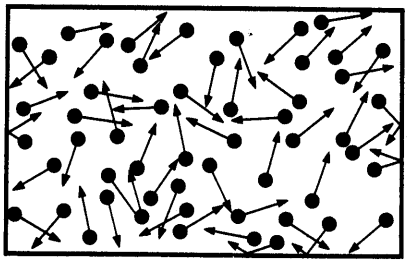


Fig. 33A Es fácil comprender la relación $PV = (2/3)N_0E_{cin}$. Considérese un recipiente de volumen V en el que se encuentran N_0 moléculas. Supongamos primero que todas ellas se se mueven hacia la derecha con velocidad v. El número de moléculas que chocan con una unidad de área de la pared por unidad de tiempo es $v(N_0/V)$. Cada molécula cede una cantidad de impulso $2mv$ a la pared. La presión P' es igual al momento total cedido por unidad de área y por unidad de tiempo y, en consecuencia, tenemos $P' = 2mv^2(N_0/V) = 4E_{cin}(N_0/V)$.

En realidad, la dirección del movimiento es al azar y la verdadera presión P está ligada con la presión P' que acabamos de calcular por $P = (1/6)P'$, lo que conduce a la ec. (33a). (Puede entenderse el porqué del factor 1/2 si imaginamos que las moléculas se mueven en seis direcciones típicas: en ambos sentidos a lo largo de tres ejes perpendiculares. Sólo un sexto de las moléculas contribuirá entonces a la presión sobre la pared de la derecha).

blamos de un gas perfecto (o ideal) monoatómico. Es posible demostrar que para un mol de un gas perfecto se tiene

$$PV = \tfrac{2}{3}N_0E_{cin} \tag{33a}$$

donde P es la presión, V el volumen del recipiente, y E_{cin} la energía cinética media por molécula (monoatómica).

La temperatura absoluta se define de modo que, en este modelo, expresa simplemente la energía cinética media de acuerdo con la igualdad $E_{cin} = (3/2)\,kT$, donde la constante de proporcionalidad k se conoce con el nombre de constante de Boltzmann. Podemos escribir, por lo tanto, (33a) en la forma

$$PV = N_0kT = RT \tag{33b}$$

donde la constante $R = N_0k$ es la *constante universal de los gases*. Es un *hecho experimental* que esta ley vale de manera precisa para todos los gases suficientemente enrarecidos: es decir, para un gas real cualquiera, la ley es tanto más válida cuanto menos denso es el gas. Podemos valernos de este hecho para construir un termómetro de gas calibrado de forma que marque la temperatura absoluta.

34 La constante universal de los gases tiene el valor

$$\begin{aligned} R = N_0k &= 8{,}3 \times 10^7 \text{ erg } (^\circ\text{K})^{-1}\,(\text{mol})^{-1} \\ &= 1{,}99 \text{ cal } (^\circ\text{K})^{-1}\,(\text{mol})^{-1} \end{aligned} \tag{34a}$$

Es una constante macroscópica que puede medirse fácilmente tomando como base la relación (33b).

La constante de Boltzmann, $k = R/N_0$, es la constante de los gases por molécula. Esta constante puede hallarse con tal que se conozca N_0 y vale

$$k = 1{,}38 \times 10^{-16} \text{ erg } (^\circ\text{K})^{-1} \tag{34b}$$

De hecho, k es un factor de conversión para el paso de temperatura a energía. Sin embargo, que la temperatura y la energía estén ligadas entre sí de esta manera, no debe llevar a nadie a creer que la energía y la temperatura son "la misma cosa".

35 Después de este repaso de las constantes fundamentales de la física clásica, consideremos ahora el problema de la ley de la radiación del cuerpo negro. Los hechos empíricos son los que siguen. La superficie de un cuerpo material mantenido a temperatura elevada emite luz de todas las frecuencias, o longitudes de onda. Si representamos gráficamente la cantidad de energía

radiante emitida por unidad de tiempo, por unidad de área y por unidad de intervalo de longitud de onda en función de la longitud de onda, obtenemos una curva que tiende a cero tanto para longitudes de onda muy largas, como para longitudes de onda muy cortas; en general, la curva presentará un solo máximo para cierta longitud de onda λ_{max} que depende de la temperatura. La posición de este máximo y la cantidad total de radiación emitida es más o menos la misma para todas las superficies materiales. En vez de estudiar la radiación procedente de una *superficie material,* cabe observar la radiación que emerge por un *pequeño orificio* en la pared de una superficie material cerrada mantenida a una temperatura fija. En una medición de este tipo, tenemos un recinto cerrado, u "horno", construido con un material refractario adecuado, con un pequeño orificio en la pared (es decir, un orificio que es pequeño comparado con las dimensiones lineales de la cavidad). Dirigimos nuestros instrumentos hacia el orificio y de esta manera medimos la energía radiante que emerge del *interior* del recinto. En tales mediciones se halló que

i) Un gráfico (véase fig. 35A) de la intensidad de radiación procedente del orificio en función de la longitud de onda es una curva lisa que tiende a cero lo mismo para longitudes de ondas largas que cortas, y con un máximo para una longitud de onda λ_{max} que depende de la temperatura T de las paredes de manera muy simple, a saber

$$\lambda_{max}T = C_0 = 0{,}2898 \text{ cm } °\text{K} \qquad (35a)$$

ii) La distribución espectral de la radiación emitida, es decir, la forma de la curva citada en i), es independiente de la forma de la cavidad, como también de la naturaleza del material de las paredes. La constante C_0 de la ecuación (35a), que expresa la *ley de desplazamiento de Wien,* es así una constante universal que describe una notable propiedad de las cavidades *en general.*

iii) La intensidad de la radiación que emerge por el orificio es siempre mayor, para cada longitud de onda, que la correspondiente intensidad de emisión por una superficie material mantenida a la misma temperatura que las paredes de la cavidad; con todo, el orden de magnitud de la intensidad es el mismo.

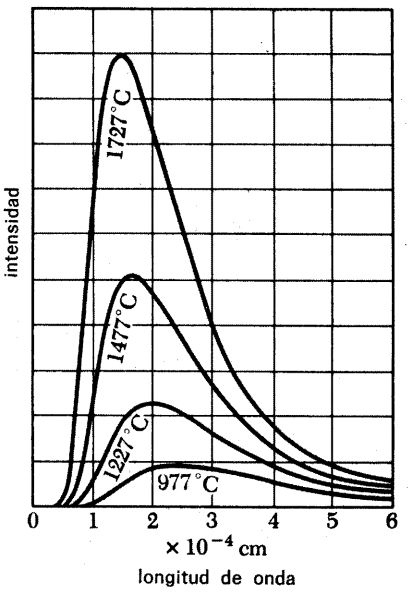


Fig. 35A Gráficos que representan la potencia emitida por un radiador del tipo cuerpo negro por unidad de área por unidad de intervalo de longitud de onda para cuatro temperaturas diferentes. La potencia *total* emitida es proporcional a las áreas limitadas por las curvas y resulta proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta. Obsérvese cómo la posición del máximo depende de la temperatura; la relación precisa viene expresada por la ley de Wien.

36 Una superficie que absorbe toda radiación que incide sobre ella se llama *superficie de cuerpo negro.* Para un observador *exterior,* un pequeño orificio en la pared de una cavidad se comporta de manera más o menos parecida a una superficie de

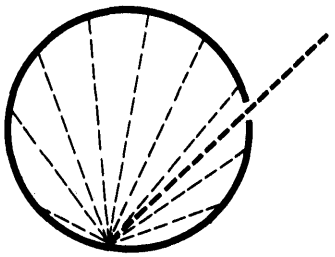


Fig. 36A Para un observador exterior, un pequeño orificio en la pared de una cavidad con una superficie interior absorbente (parcialmente) es una superficie de cuerpo negro: absorbe la radiación incidente casi por completo. Un rayo de luz que penetra a través del orificio es en parte absorbido y en parte reflejado de modo difuso cuando incide sobre la superficie interior. Los rayos reflejados son de nuevo en parte absorbidos y en parte reflejados de modo difuso, y únicamente una muy pequeña fracción de la luz incidente encontrará de nuevo su camino para escapar a través del orificio.

Dicho de otra manera: un fotón que penetra en la cavidad tiene una probabilidad muy pequeña de escapar por el orificio.

El lector puede comprobar fácilmente por sí mismo que una superficie de cuerpo negro puede conseguirse en la práctica como sigue. Píntese de negro el interior de una pequeña caja de cartón y practíquese un pequeño orificio en una de las caras. Visto desde fuera, el orificio resulta considerablemente "más negro" que cualquier superficie "negra" *material.*

cuerpo negro, sobre todo si las paredes interiores de la cavidad son rugosas y están ennegrecidas. La razón de ello consiste, simplemente, en que cualquier radiación (luz) que incide desde el exterior sobre el orificio será casi por completo absorbida en múltiples reflexiones dentro de la cavidad, incluso si las paredes interiores no son perfectamente absorbentes.

Debido a estas circunstancias, designamos la radiación que emerge por un orificio en la pared de una cavidad como *radiación del cuerpo negro.* A partir de consideraciones termodinámicas muy generales, G. R. Kirchhoff demostró que, para cualquier longitud de onda, la razón de la intensidad de emisión por una superficie material arbitraria a la intensidad de emisión por una superficie de cuerpo negro es igual al coeficiente de absorción del material para el valor de longitud de onda en cuestión. La superficie de cuerpo negro es, por lo tanto, un emisor patrón adecuado y limitaremos nuestras consideraciones a la radiación del cuerpo negro, es decir, a la radiación que procede de un orificio en la pared de una cavidad.

37 A fines del siglo XIX se habían realizado ya mediciones cuidadosas relativas a la ley de la radiación del cuerpo negro, y, en particular, había quedado establecida la relación (36a). El principal problema teórico consistía en deducir la ley de la radiación a partir de los principios fundamentales. Que el orificio debía emitir radiación no es algo de suyo sorprendente; sabemos que los constituyentes de la materia poseen carga eléctrica, y las vibraciones térmicas de los que constituyen las paredes conducirán naturalmente a la emisión de energía radiante hacia el interior de la cavidad. Esta radiación puede también ser absorbida por las paredes, y si éstas se mantienen a una temperatura fija, tendremos un cierto tipo de equilibrio entre la energía radiante en la cavidad y en las paredes, es decir, las intensidades de emisión y absorción serán iguales. El problema consiste, pues, en deducir una expresión para la densidad de energía radiante en la cavidad en función de la longitud de onda y de la temperatura.

Concentremos nuestra atención aquí en un solo detalle de este problema, la relación (35a). Para ver qué implica, escribamos dicha ecuación en la forma siguiente

$$\frac{\lambda_{max}}{c} \times kT = X_1 = \frac{C_0 k}{c} \qquad (37a)$$

donde c es la velocidad de la luz, k es la constante de Boltzmann y X_1 una nueva constante. Dado que el primer miembro

de (37a) tiene las dimensiones (tiempo) × (energía) =(acción), la constante X_1 es una cantidad de acción. ¿Cómo podemos deducir una expresión teórica para X_1? ¿Cómo podemos construir una magnitud que tenga las dimensiones físicas de una acción a partir de las constantes de la naturaleza de que se dispone? Ciertamente esto es todo un problema, porque resulta difícil ver cómo las constantes m, M_H y e podrían intervenir en la expresión de X_1. La situación física parece muy bien perfilada; la energía radiante dentro de la cavidad se encuentra en equilibrio térmico con las paredes. Sin embargo, la radiación emitida por la cavidad es *independiente del tamaño y de la forma de la misma y es también independiente del material de las paredes;* ¿cómo podrían entonces intervenir constantes como m y e, que se refieren a propiedades de las paredes? Nuestra sospecha de que X_1 no se puede deducir de las demás constantes parece estar bien justificada y, de hecho, el significado de la relación (37a) no puede comprenderse basándose en la física clásica. La situación realmente no ofrecía muchas esperanzas en el año 1900, antes del descubrimiento de Planck. La aplicación de la mecánica estadística clásica había conducido a la absurda ley de la radiación del cuerpo negro que afirma que la intensidad radiada aumenta con monotonía con la frecuencia de tal manera que la intensidad radiada total es infinita. ¡Lo que significa que la radiación no puede estar en equilibrio térmico con la materia, cualquiera que sea la temperatura!

38 El catorce de diciembre del año 1900, Max Planck presentó un trabajo acerca de la ley de la radiación del cuerpo negro en una reunión de la Sociedad Alemana de Física, en Berlín, y esta fecha puede considerarse como la del nacimiento de la teoría de la física cuántica *. En su deducción de la expresión teórica de la intensidad de la radiación en función de la longitud de onda y de la temperatura, Planck abandonó la física clásica al introducir una radical hipótesis ad hoc cuya esencia puede formularse como sigue. Un oscilador de frecuencia natural ν puede tomar o ceder energía únicamente en porciones de magnitud $E = h\nu$, donde h es una nueva constante fundamental de la naturaleza. Planck fue entonces capaz de deducir, entre otras cosas, una expresión para nuestra constante X_1, a saber

$$\frac{\lambda_{max}}{c} \times kT = \frac{C_0 k}{c} = X_1 = 0{,}2014 \times h \qquad (38a)$$

* Max Planck, "Über das Gesetz der Energieverteilung in Normalspektrum", *Annalen der Physik*, **4**, 553 (1901).

Así es como la constante de Planck apareció en escena por primera vez.

El propio Planck aceptaba de mala gana este apartarse de la física clásica y, después de su gran descubrimiento, intentó con insistencia durante muchos años explicar el fenómeno de la radiación del cuerpo negro apoyándose en una base puramente clásica. De estos esfuerzos infructuosos dijo, más tarde, que no los consideraba como una labor inútil; únicamente gracias a sus repetidos fracasos consiguió alcanzar la convicción final de que era imposible encontrar una explicación dentro de la física clásica.

39 En todo su esplendor, la ley de radiación de Planck reza como sigue:

$$E(\lambda,T) = \left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\right) \times \frac{1}{\exp\,(hc/\lambda kT) - 1} \qquad (39a)$$

donde $E(\lambda,T)$ es la densidad de energía radiante en la cavidad por unidad de intervalo de longitud de onda, para la longitud de onda λ y la temperatura T. La constante k es la constante de Boltzmann y c la velocidad de la luz.

La intensidad de la radiación emitida por un pequeño orificio en la pared de la cavidad es proporcional a la densidad de energía dentro de la misma y, por lo tanto, la expresión (39a) es la formulación matemática de las relaciones ilustradas en la fig. (35A).

Para hallar la posición del máximo de $E(\lambda,T)$, considerada como función de λ y con T constante, igualamos a cero la derivada de $E(\lambda,T)$ respecto de λ y de aquí despejamos λ_{max}. Así es como se obtiene la relación (38a), o la relación equivalente

$$\lambda_{max}T = C_0 = 0{,}2014 \times \frac{hc}{k} \qquad (39b)$$

Dado que λ_{max} y T se pueden medir directamente, y dado que se conoce c, podemos determinar así h/k experimentalmente apoyándonos en la relación (39b). Además, mediante una comparación detallada de los valores de $E(\lambda,T)$ medidos experimentalmente con la expresión teórica (39a), podemos determinar la constante h. Esto permite calcular la constante de Boltzmann k y, finalmente, en virtud de la relación $N_0 = R/k$, calcular N_0. El valor que para k obtuvo Planck de esta manera es aproximadamente un 2,5 por ciento menor que el mejor valor moderno.

40 La historia detallada de la ley de radiación de Planck es fascinante. Antes de que Planck consiguiese deducir la expresión (39a) a partir de un punto de vista "microscópico", había ya adivinado de hecho la dependencia correcta de $E(\lambda,T)$ respecto de λ y T. Le había llevado a ello, en parte, ciertas medidas precisas realizadas por H. Rubens y F. Kurlbaum y, en parte, ciertas consideraciones teóricas generales. (La relación expresada por (39a) es evidentemente demasiado complicada para llegar a ella basándose en fundamentos empíricos.) Planck presentó su resultado preliminar a la Sociedad Alemana de Física el 19 de octubre de 1900. En esta versión, la fórmula contenía dos constantes sin ninguna interpretación física, a saber, las constantes que ahora escribiríamos en la forma $(8\pi hc)$ y (hc/k). Esta fórmula fue sometida de nuevo a contrastación con resultados experimentales por Rubens y por O. Lummer y E. Pringsheim y se encontró que concordaba con los hechos con precisión notable *. Planck se vio así frente al problema de hallar cierta justificación teórica básica para una fórmula que parecía ser la correcta. Esto es lo que consiguió hacer después de ocho semanas de extenuante trabajo.

El efecto fotoeléctrico

41 Allá por el cambio de siglo se sabía experimentalmente que cuando la luz (en la región visible o ultravioleta) incide sobre una superficie metálica, ésta emite electrones **. El fenómeno no es en sí sorprendente, puesto que sabemos que la luz es radiación electromagnética y cabe esperar, por lo tanto, que el campo eléctrico de la onda luminosa pueda ejercer una fuerza sobre los electrones en la superficie metálica y provocar la emisión de algunos de ellos. Sin embargo, lo que sí es sorprendente es hallar que la energía cinética del electrón emitido es independiente de la *intensidad* de la luz, pero depende de la *frecuencia* de manera muy simple: aumenta linealmente con ella. Si aumentamos la intensidad de la luz, aumentamos únicamente el número de electrones emitidos por unidad de tiempo, pero no su energía. Es muy difícil entender esto desde el punto de vista clásico, ya que debiéramos esperar que cuando aumenta la intensidad de la onda luminosa, y por consiguiente la ampli-

* Para comprobaciones *posteriores* de la ley de Planck, véase H. Rubens y G. Michel, "Prüfung der Planckschen Strahlungsformel", *Physikalische Zeitschrift* **22**, 569 (1921).

** Véase PSSC, *Física*, Cap. 33.

tud del campo eléctrico en la misma, los electrones deberían ser acelerados, alcanzando mayores velocidades.

Estos hechos habían quedado establecidos antes de 1905 por P. Lenard y otros investigadores. *Mediciones precisas* de la relación entre la frecuencia de la luz y la energía de los electrones emitidos no se llevaron a cabo hasta 1916, cuando este tema fue estudiado muy detenidamente por R. A. Millikan.

42 En 1905 Albert Einstein sugirió una explicación de estos fenómenos *. De acuerdo con esta explicación, la energía en un haz de luz monocromática llega en porciones de magnitud $h\nu$, donde ν es la frecuencia; este *cuanto* de energía puede transferirse por completo a un electrón. En otras palabras, el electrón adquiere la energía $E = h\nu$ mientras se encuentra en reposo dentro del metal. Si ahora suponemos que hay que realizar una cierta cantidad de trabajo, W, para extraer del metal el electrón, éste saldrá del primero con una energía cinética $E_{\text{cin}} = E - W$, o bien

$$E_{\text{cin}} = h\nu - W \tag{42a}$$

Se supone que la cantidad W, conocida como *trabajo de extracción* del material, es una constante característica del metal, independiente de la frecuencia, ν.

La ecuación (42a) es la célebre ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico. La energía de los electrones emitidos aumenta linealmente con la frecuencia, pero es independiente de la intensidad de la luz. El número de electrones emitidos es, claro está, proporcional al número de cuantos incidentes y, por consiguiente, proporcional a la intensidad de la luz que incide. De esta manera Einstein fue capaz de explicar los aspectos cualitativos del efecto fotoeléctrico tal como los conocía en aquel tiempo.

43 Einstein llegó a esta idea observando que ciertos aspectos de la extraña ley de la radiación del cuerpo negro de Planck podrían entenderse atribuyendo propiedades corpusculares a la radiación electromagnética en la cavidad, es decir, admitiendo que la energía radiante está constituida por cuantos de magnitud $h\nu$. Hemos de hacer notar aquí que el significado real de la hipótesis de Planck se encontraba por aquel entonces oculto en

* A. Einstein, "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt", *Annalen der Physik* 17, 132 (1905).

la oscuridad y la nueva visión del fenómeno de la radiación del cuerpo negro que ofrecía Einstein fue, por consiguiente, un importante paso adelante. Con todo, el aspecto más notable de todo eso fue que Einstein pudo aplicar su interpretación del fenómeno de la radiación del cuerpo negro a una situación física *nueva;* el efecto fotoeléctrico.

44 La ecuación (42a) era una predicción teórica precisa, y como a tal susceptible de contrastaciones experimentales cuantitativas. Además, ofrecía la oportunidad para una nueva medición de la constante de Planck, supuesto que las ideas de Einstein fueran correctas. Conforme hemos mencionado ya, estas cuestiones sumamente importantes fueron estudiadas por R. A. Millikan en una serie de medidas elegantes y muy cuidadosas *, en las que encontró un completo acuerdo con la ecuación de Einstein (42a).

El método de Millikan se ilustra esquemáticamente en la fig. 44A. Luz monocromática incide sobre una superficie metálica, generalmente un metal alcalino, y provoca la emisión de fotoelectrones. Un electrodo colector, que se puede mantener a un potencial arbitrario $-V$ respecto del fotocátodo, se coloca cerca de la superficie sensible a los fotones y se mide la corriente de fotoelectrones. Si suponemos ahora que todos los electrones se emiten con la misma energía cinética E_{cin}, la dada por la ecuación (42a), es claro que ninguno de ellos puede alcanzar el electrodo colector si $eV > E_{cin}$. En consecuencia, podemos observar la corriente en función del potencial de frenado V y si V_0 es el menor valor del potencial para el que la corriente se anula, tenemos

$$V_0 = \left(\frac{h}{e}\right)\nu - \frac{W}{e} \qquad (44a)$$

Un gráfico del valor de corte del potencial de frenado V_0 en función de la frecuencia ν será, por consiguiente, una recta, como muestra la fig. 44B tomada del trabajo de Millikan. La pendiente de esta recta permite hallar la constante h/e y de su intersección con el eje V_0 se puede deducir la constante del material W/e.

Éste es un experimento claro y conceptualmente simple, pero para obtener resultados precisos y reproducibles se requiere un cuidado considerable.

* R. A. Millikan, "A Direct Photoelectric Determination of Planck's h", *"The Physical Review* 7, 355 (1916).

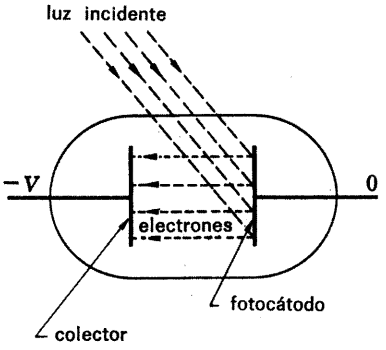


Fig. 44A Figura muy esquemática para ilustrar el principio del experimento de Millikan. Se emiten electrones con una energía $E_{cin} = h\nu - W$, donde W es el trabajo de extracción característico del material del cátodo, cuando luz de frecuencia ν incide sobre el fotocátodo. La corriente eléctrica dirigida hacia el colector cesará cuando el potencial de frenado $V > (h\nu - W)/e$. La observación de cómo varía el potencial de frenado crítico $V_0 = (h\nu - W)/e$ en función de ν proporciona la constante h/e. (Véase Fig. 44B.)

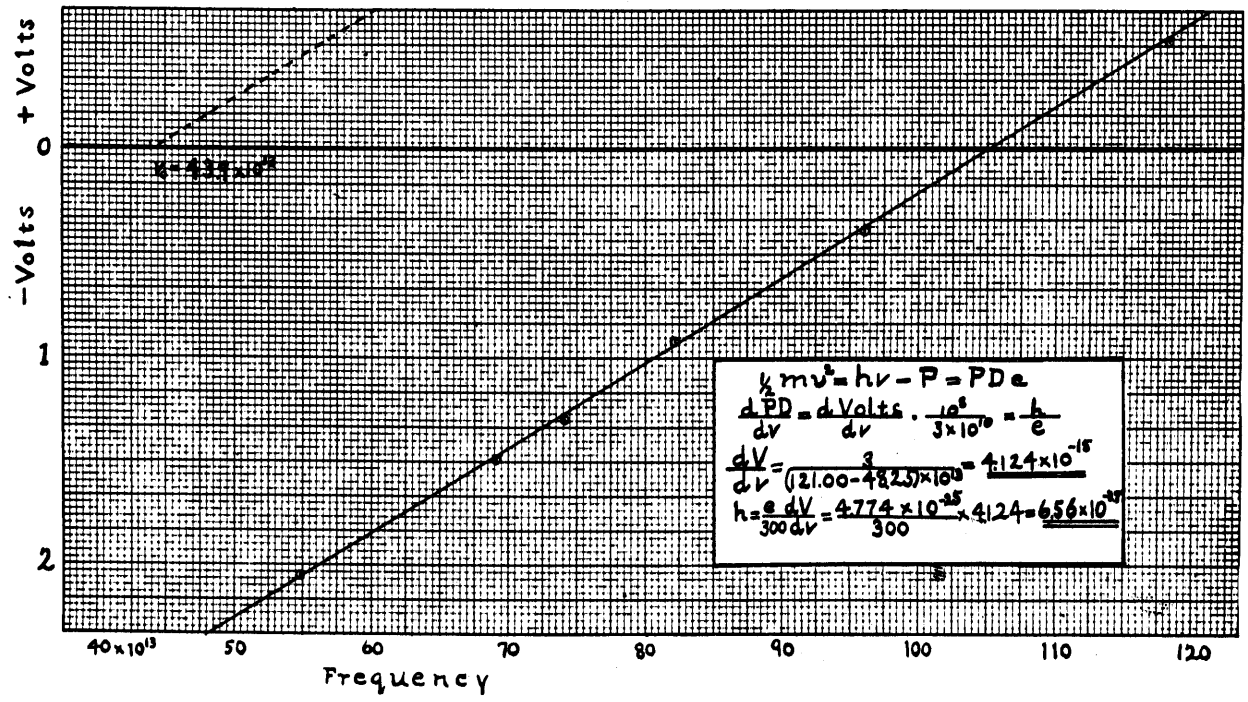


Fig. 44B Gráfico tomado del trabajo de Millikan (R. A. Millikan, *Physical Review* 7, 355 (1916)) que representa la relación lineal entre el potencial crítico de frenado V_0 y la frecuencia de la luz para una superficie fotosensible de sodio. Como se ve, Millikan presentó su cálculo de la constante de Planck basándose en la curva de la figura. (Proporcionado por *The Physical Review*.)

45 Consideremos la relación (44a) desde el punto de vista numérico. Con $h = 6{,}63 \times 10^{-27}$ erg · s $= 6{,}63 \times 10^{-34}$ J. s y $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C, obtenemos $h/e = 4{,}14 \times 10^{-15}$ V. s. Para la luz visible la longitud de onda varía en el intervalo de 4000 Å a 7000 Å, donde 1 Å(ngström) $= 10^{-8}$ cm *. Esto corresponde al intervalo de frecuencias $(4{,}3$ a $7{,}5) \times 10^{14}$ s^{-1}, y para este caso obtenemos $(h/e)\nu \sim 2{,}8$ volts. Para la luz en la región visible o en la ultravioleta próxima, el potencial de frenado será, pues, del orden de magnitud de un volt. Es un hecho experimental que la constante material W/e es también típicamente de este orden. Su valor resulta particularmente pequeño para los metales alcalinos, y ésta es la razón por la cual las células fotoeléctricas para luz visible tienen fotocátodos constituidos por estos materiales. Una célula fotoeléctrica no respondería, evidentemente, a radiación para la cual $W > h\nu$.

* En honor a la memoria del físico sueco A. J. Ångström. Las personas de habla española acaso deban hacer un esfuerzo para pronunciar su nombre correctamente. La primera vocal "Å" se pronuncia como o, y la segunda vocal "ö" como la misma letra en alemán o como la vocal *eu* en la palabra francesa *deux*.

46 Los rasgos cualitativos de la emisión de fotoelectrones que se habían descubierto antes de 1905 eran ciertamente notables, aunque fue necesaria la penetración mental de Einstein para apreciar por completo el significado de estos fenómenos. Si en aquel tiempo se hubiera podido disponer de los resultados cuantitativos de Millikan, no hay duda de que se habría reconocido en ellos de un modo más general un importante desafío a las ideas clásicas.

El punto esencial de la cuestión es, evidentemente, la extraña relación

$$\frac{E}{\nu} = X_2 \tag{46a}$$

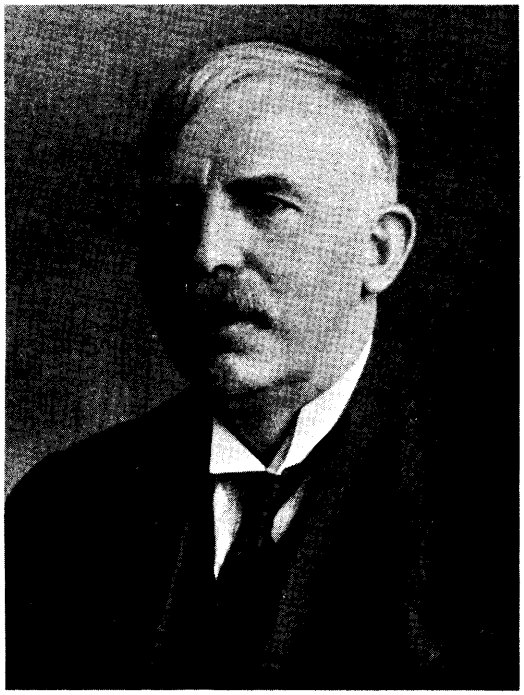
donde E es la energía que ha de ceder a un electrón un haz de luz monocromática de frecuencia ν y donde X_2 es una constante independiente de la intensidad de la luz, independiente de la frecuencia de la misma e independiente del material en que están inmersos los electrones. (Que los electrones escapen con una energía cinética *menor* que E no se habría considerado más misterioso en 1905 que ahora: el trabajo de extracción W representa, simplemente, la energía de enlace de los electrones en el material.) Comprender una relación tal como la (46a) apoyándonos en una base clásica y expresar esta comprensión en una fórmula que dé la misteriosa constante X_2 en términos de las constantes fundamentales de la física clásica, resulta ser una tarea verdaderamente sin esperanza. La constante X_2 tiene las dimensiones físicas de una acción y es verdad que, en efecto, se puede formar una cantidad como ésa a partir de las constantes básicas, a saber $(e^2/c) \cong (h/860)$. Sabemos ahora que $X_2 = h$ y el orden de magnitud de la cantidad (e^2/c) no es el correcto, resulta unas mil veces demasiado pequeño, lo que no es alentador. Sin embargo, esgrimir de esta manera argumentos dimensionales no nos conduce realmente a ninguna parte, a menos que podamos proponer un mecanismo *clásico* que conduzca a la ecuación (46a). Nadie ha sido capaz de hacerlo, y los hechos concernientes al efecto fotoeléctrico apoyan muy fuertemente la idea de Einstein de que la energía radiante está *cuantificada* *.

Como veremos más adelante, la relación (46a) expresa uno de los principios más fundamentales de la física cuántica, a sa-

* Cabe mencionar aquí que Einstein no utilizó en su trabajo el término *fotón* para los cuantos electromagnéticos; el término fue introducido mucho más tarde.

ber, que la energía y la frecuencia se encuentran *universalmente* ligadas por la igualdad $E = h\nu$. Esta relación es enteramente extraña a la física clásica y la misteriosa constante X_2 $(= h)$ en (46a) es una manifestación de insospechados secretos de la naturaleza.

El problema de la estabilidad y tamaño de los átomos



Ernest Rutherford. Nació cerca de Nelson, Nueva Zelanda, en 1871; falleció en 1937. Después de ocupar un puesto de profesor en la Universidad McGill de Montreal, Canadá, Rutherford aceptó un cargo en la Universidad de Manchester en 1907. En 1919 sucedió a J. J. Thomson en la Cátedra Cavendish de la Universidad de Cambridge. Recibió el Premio Nobel (de química) en 1908.

Rutherford llevó a cabo un trabajo de pionero y de importancia sobresaliente en radiactividad y en física nuclear. Su trabajo experimental se caracteriza por un ingenio y una habilidad excepcionales, y su análisis de los hechos experimentales revela una profunda visión física. (Fotografía proporcionada por el profesor L. B. Loeb, Berkeley.)

47 Pasemos ahora al tercero de nuestros problemas, esto es, a la cuestión de la estabilidad y tamaño de los átomos, y consideremos en particular este último punto. Podemos definir el "tamaño" de un átomo como la distancia típica entre átomos vecinos en un cristal o en un líquido. Se sabe experimentalmente que este tamaño es del orden de 1 Å $= 10^{-8}$ cm. El orden de magnitud de esta distancia está ligado con el orden de magnitud del número de Avogadro N_0 como sigue. Un centímetro cúbico de un líquido o sólido cualquiera tiene una masa de, más o menos, un gramo. Un gramo de cualquier substancia contiene unos N_0 átomos, y, por lo tanto, la separación entre átomos vecinos en un sólido o en un líquido debe ser del orden de $(1/N_0)^{1/3}$ cm $\sim$ 1 Å. Una medida *precisa* de las distancias interatómicas en un cristal conduce, conforme vimos antes, a un valor para el número de Avogadro.

La cuestión es ahora la de si podemos hallar, dentro del marco de la física clásica, una explicación para el tamaño de un átomo, es decir, de si podemos calcular el "radio" de un átomo dadas las constantes básicas de la física clásica.

48 Después del famoso análisis que, allá por 1910, llevó a cabo Rutherford * de los experimentos de dispersión de partículas alfa efectuados por H. Geiger y E. Marsden, había cobrado forma una cierta imagen del átomo según la cual éste consiste de un núcleo central, muy pequeño, rodeado por uno o más electrones. Había buenas razones para creer que tanto el núcleo como el electrón eran muy pequeños comparados con el tamaño del átomo, por lo menos menores que, digamos, 10^{-11} centímetros. Además, la mayor parte de la masa del átomo parecía encontrarse concentrada en el núcleo.

En estas circunstancias, era muy natural intentar crear algo así como un modelo de sistema solar del átomo, en el que el

* E. Rutherford, "The Scattering of α y β Particles by Matter and the Structure of the Atom", *Philosophical Magazine* **21**, 669 (1911). Véase tambien Berkeley Physics Course, Vol. 1, *Mecánica*, Cap. 15, y PSSC, *Física*, Cap. 32.

núcleo representaría el papel del Sol, y los electrones, el de los planetas. Las partículas se moverían sometidas a sus interacciones mutuas electrostáticas y la mayor parte del átomo consistiría en "espacio vacío". El tamaño de un átomo estaría ligado con el radio de la órbita del electrón más exterior.

Aceptemos este modelo por el momento como base de razonamiento y supongamos primero que las velocidades de las partículas son suficientemente pequeñas como para permitir una discusión dentro de la mecánica no-relativista. Hemos de contestar entonces a la siguiente pregunta: ¿Qué determina el tamaño de la órbita del electrón más exterior? Observemos que en este modelo no hay lugar alguno para la velocidad de la luz. Pero entonces no podemos formar una cantidad que tenga las dimensiones físicas de una longitud a partir de las restantes constantes clásicas fundamentales de que disponemos e, m y M_H y podemos así sospechar que nuestro problema es insoluble dentro de la mecánica clásica. Para verlo claramente podemos argumentar como sigue:

49 Consideremos un átomo, formado por Z electrones, cada uno de carga $-e$, y un núcleo de carga $+Ze$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que estas partículas se mueven de tal manera que el centro de masa del sistema permanece en reposo. Cada partícula se mueve entonces a lo largo de determinada órbita especificada por la función $\mathbf{r}_k(t)$ que da el vector posición de la partícula k-ésima en función del tiempo t. (Elegimos el centro de masa del sistema como origen.)

Las funciones $\mathbf{r}_k(t)$, $(k = 1, 2, \ldots, Z + 1)$, tomadas juntas, constituyen así *una* solución de las ecuaciones del movimiento del sistema. A partir de esta solución podemos construir toda una familia de *nuevas* soluciones mediante una simple *semejanza* como sigue. Si q es una constante cualquiera no nula, las funciones $\mathbf{r}_k'(t)$ definidas por

$$\mathbf{r}_k'(t) = q^2\mathbf{r}_k(t/q^3) \tag{49a}$$

también satisfacen a las ecuaciones del movimiento. En otras palabras: la función $\mathbf{r}_k'(t)$ describe la trayectoria de la k-ésima partícula en el nuevo estado de movimiento del sistema. Podemos ver esto muy fácilmente. En efecto, la fuerza $\mathbf{F}_{ij}$ que la j-ésima partícula ejerce sobre la i-ésima partícula viene dada por

$$\mathbf{F}_{ij} = Q_iQ_j\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \tag{49b}$$

donde Q_i es la carga de la i-ésima y Q_j la carga de la j-ésima. La nueva solución se obtiene a partir de la antigua multiplicando todas las distancias por el factor q^2, lo que significa que las fuerzas en el nuevo estado de movimiento se obtienen a partir de las fuerzas en el estado de movimiento primitivo multiplicando por el factor q^{-4}. Esto a su vez significa que todas las aceleraciones deben multiplicarse por el mismo factor. Dado que las distancias lineales se multiplican por el factor q^2, llegamos a la conclusión de que todas las velocidades deben serlo por el factor q^{-1} y que todos los tiempos deben multiplicarse por el factor q^3. Esto es precisamente lo que expresa la ecuación (49a), y esta ecuación define así una nueva solución, conforme habíamos afirmado.

Observemos, además, que todos los momentos cinéticos se multiplican por el factor q y que todas las energías potenciales y cinéticas, y, por consiguiente, también la energía total, quedan multiplicadas por el factor q^{-2}.

El hecho de que podemos obtener una nueva solución a partir de una solución dada mediante transformaciones de semejanza del tipo descrito es, en realidad, una extensión de la tercera ley de Kepler. Aplicada al caso particular de un solo electrón que se mueve en torno de un núcleo fijo, nuestro razonamiento nos dice que para dos órbitas elípticas de igual excentricidad la razón de los cuadrados de los períodos es proporcional a la razón de los cubos de los semiejes mayores.

Dado que podemos dar el valor que queramos a q, tenemos en realidad toda una familia de soluciones y no hay razón alguna por la que debamos preferir una de ellas en particular; en otras palabras, no existe ningún principio que nos diga por qué un "tamaño" particular del átomo debe ser el preferido. Cabría argüir, naturalmente, que el tamaño real de un átomo viene determinado por "accidente", pero este argumento difícilmente podría sostenerse. ¿Cómo es posible que este "accidente" conduzca siempre al mismo tamaño de la órbita para una especie dada de átomos? ¿Por qué no tenemos una distribución continua de tamaños para, por ejemplo, el átomo de hidrógeno?

50 Ante este enigma podemos preguntarnos si tenía justificación nuestro intento de discutir el problema no-relativísticamente. Observemos que, en efecto, es posible formar una expresión que tenga las dimensiones de una longitud a partir de

las constantes clásicas si incluimos la velocidad de la luz, a saber

$$\frac{e^2}{mc^2} = 2{,}8 \times 10^{-13} \text{ cm} \tag{50a}$$

Ésta es en esencia el "radio clásico del electrón" que discutimos en la Sec. 18. Deberíamos, pues, esperar que si la relatividad desempeña realmente un papel esencial, es decir, si los electrones se mueven con una velocidad comparable con la velocidad de la luz, el tamaño de un átomo sería un cierto múltiplo de la longitud e^2/mc^2. Esta longitud, sin embargo, es más de 10^4 veces demasiado pequeña, y no parece probable que esta manera de abordar el problema nos conduzca a parte alguna. Verdad es que nuestro simple argumento de semejanza desarrollado en la sección precedente no es aplicable como a tal en un modelo relativista, pero sigue sin haber ningún principio que nos diga por qué sólo pueden presentarse ciertas órbitas en correspondencia con los tamaños observados de los átomos.

51 Podemos considerar nuestro enigma como un "misterio de la constante que falta". Supongamos ahora, en un rasgo de audacia, que el presente misterio está relacionado con nuestros anteriores "misterios de la contante que falta" y que la constante de Planck ha de representar un papel en la descripción de la estructura atómica. Esta constante tiene las dimensiones de un momento cinético y podríamos ensayar la hipótesis ad hoc que solamente aquellas soluciones de las ecuaciones del movimiento para las que el momento cinético total del átomo es un determinado múltiplo de h cobran realidad en la naturaleza. Si aceptamos este principio, debemos renunciar a nuestro razonabiento por semejanza, ya que en las transformaciones descritas por la ec. (49a) el momento cinético viene multiplicado por el factor q, lo que ahora no se permite. Esto significa que existirán soluciones preferidas y, en consecuencia, disponemos así de un principio para la determinación del tamaño de un átomo.

En 1913 Niels Bohr presentó una teoría del átomo de hidrógeno que se ajustaba a estas ideas *. En la versión más simple de esta teoría, un solo electrón se mueve a lo largo de una órbita circular de radio a_0 en torno de un protón. La órbita viene determinada por la ecuación del movimiento

$$m\left(\frac{v^2}{a_0}\right) = \frac{e^2}{{a_0}^2} \tag{51a}$$

* N. Bohr, "On the Constitution of Atoms and Molecules", *Philosophical Magazine* **26**, 1 (1913).



Niels Henrick David Bohr. Nació en Copenhague, Dinamarca, en 1885; falleció en 1962. Después de estudiar en la Universidad de Copenhague, Bohr marchó a Cambridge y, unos pocos meses después, a Manchester para trabajar con Rutherford. En 1913 publicó su célebre trabajo sobre estructura atómica. En 1916 Bohr fue nombrado profesor de física teórica en la Universidad de Copenhague. Su Instituto de Física Teórica (fundado en 1921) llegó a ser un centro mundial en el que la mayoría de los físicos más eminentes pasaron algún tiempo como visitantes. A Bohr se le concedió el Premio Nobel en 1922.

Después de abrir nuevos caminos con sus trabajos sobre el átomo de hidrógeno, a él se deben muchas importantes y destacadas contribuciones al desarrollo de la física atómica y, más tarde, también al de la física nuclear. Mediante sus publicaciones y sus contactos personales con otros físicos, su influencia como campeón de las nuevas ideas ha sido muy considerable. (Fotografía proporcionada por el profesor L. B. Loeb, Berkeley.)

junto con las *condiciones cuánticas de Bohr*

$$J = mva_0 = \frac{h}{2\pi} \tag{51b}$$

donde v es la velocidad del electrón y J es el momento cinético. La condición cuántica afirma, por lo tanto, que el momento cinético es igual a $h/2\pi$. Si eliminamos v entre estas dos ecuaciones, obtenemos

$$a_0 = \frac{h^2}{(2\pi)^2 me^2} = 0{,}53 \times 10^{-8} \text{ cm} \tag{51c}$$

longitud que posee el orden de magnitud deseado. Además, hay que hacer notar que el problema del tamaño atómico está íntimamente relacionado con el problema de las energías de enlace atómicas; una vez conocemos el tamaño de un átomo, pasa a ser posible estimar también el trabajo requerido para descomponerlo en sus constituyentes elementales.

52 Como sin duda sabe el lector, Bohr fue capaz de ir mucho más allá; en realidad, fue incluso capaz de explicar el espectro del átomo de hidrógeno cuantitativamente, lo que representó un éxito espectacular para las nuevas ideas. Su condición cuántica era ciertamente extraña a la física clásica y, además, Bohr tuvo que admitir que el movimiento del electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno no conduce a emisión de radiación electromagnética; de no ser así, según la teoría electromagnética clásica, el electrón se movería en espiral cayendo hacia el núcleo en un intervalo de tiempo muy corto (del orden de 10^{-9} s).

Esta teoría planetaria de los átomos no debe tomarse seriamente; en realidad, es muy equivocada. El hecho de que responda tan bien en el caso particular del átomo de hidrógeno es una casualidad afortunada (o desafortunada). Afortunada, porque animó a Bohr y a otros a intentar crear una teoría cuántica de los átomos. Desafortunada si conduce a alguien a creer que los átomos se parecen en lo más mínimo a sistemas planetarios. El propio Bohr no se dejó engañar: consideró su propia teoría como un mero paso intermedio en la búsqueda de una teoría más coherente, que ahora existe.

53 Los tres problemas que hemos examinado pueden considerarse como tres aspectos del descubrimiento de la constante de Planck. Si analizamos, en particular, el último problema, vemos que la adición de esta constante a nuestra lista de las cons-

tantes fundamentales de la naturaleza habrá de tener consecuencias de gran alcance. Podemos esperar ahora ser capaces de comprender no sólo el porqué de los tamaños y energías de enlace de los átomos, sino también de las moléculas, y parece abrirse el camino a una teoría atómica *cuantitativa* de la materia macroscópica.

Hay que subrayar que el rasgo *esencial* de los tres problemas es, claro está, que la resolución de las dificultades planteadas requirió apartarse de las leyes macroscópicas clásicas de la física. *La consideración de estos problemas, por lo tanto, condujo a algo que es mucho más que el descubrimiento de una nueva constante, a saber, al descubrimiento de nuevas leyes de la física.*

El desarrollo de la física fue muy rápido a partir de estos descubrimientos iniciales y quedó claro que se había hallado la clave para explicar muchos fenómenos de la microfísica. El trabajo teórico culminó con la publicación de dos teorías matemáticas consistentes de la física cuántica: la mecánica de las matrices, creada por Werner Heisenberg en 1925, y la mecánica ondulatoria, creada por Erwin Schrödinger en 1926. Más tarde se demostró que estas dos teorías eran por completo equivalentes, tan sólo dos formas diferentes de lo que hoy llamamos *mecánica cuántica,* que es la teoría fundamental generalmente aceptada sobre la que se basa el estudio de la microfísica.

54 Acaso el lector quiera formular algunas preguntas. ¿Estamos seguros de que la mecánica cuántica es la verdad última? ¿Qué queda por descubrir en la física?

Es un placer para el autor el estar en condiciones de tranquilizar al lector en lo que concierne a estas preguntas. Nunca podemos saber si una teoría, cualquiera que sea, es "la verdad última". Ni tampoco podemos saber nunca "qué queda por descubrir"; muy probablemente queda mucho, porque, conforme hemos dicho antes, no hay duda ninguna de que carecemos hoy de una teoría global que abarque todos los fenómenos que ocurren en la naturaleza. Hemos aprendido mucho, pero queda mucho por aprender. *Ésta* es una de las razones por las que la física es interesante. El lector no tiene por qué temer que ha nacido demasiado tarde para hacer descubrimientos en el campo de la física.

Intentemos responder a estas preguntas de manera algo más precisa. Los principios *generales* de la mecánica cuántica son "verdaderos" en el sentido de que no existe testimonio experimental alguno en contra de ellos, pero sí un número enorme

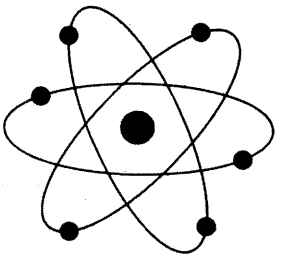


Fig. 52A Un símbolo de la Era Atómica, que nada absolutamente tiene que ver con la estructura de los átomos. Figuras con este aspecto general se encuentran muy extendidas como emblemas de compañías, organismos gubernamentales y otras organizaciones que tienen algo que ver con los "átomos". Versiones muy fantásticas pueden verse a veces en anuncios, en las que la tremenda velocidad de los electrones se indica por algo que se parece a rastros de vapor (¿acaso rastros de vapor en el éter?).

Ningún daño se hace con ello en tanto se entienda que esto es solamente un símbolo, pero existe siempre el peligro de que ciertas personas puedan llegar a creer equivocadamente que los átomos presentan realmente este aspecto.

de pruebas de que dichos principios se pueden utilizar para predicciones acertadas.

Las pruebas a favor son particularmente convincentes en el campo de la electrodinámica cuántica, que es la teoría básica de los átomos, moléculas, radiación electromagnética y de la materia macroscópica tal como la conocemos en nuestra Tierra. Como hemos dicho antes, nunca hubo una teoría clásica *fundamental* de la física en este dominio; ahora tenemos una teoría, una teoría que es altamente satisfactoria. Esto significa que creemos conocer ahora los hechos básicos en términos de los cuales podríamos explicar, por ejemplo, fenómenos tales como la superconductibilidad y la superfluidez. Hasta hoy, sin embargo, nadie ha sido *realmente* capaz de explicar estos dos fenómenos de manera cuantitativa a partir de principios primeros. Conocer los principios fundamentales es una cosa, pero explicar un fenómeno complejo en el que intervienen muchas partículas, esto es algo muy distinto. Debido a que podemos explicar el comportamiento de sistemas simples, constituidos por un número relativamente pequeño de partículas (tales como átomos individuales y moléculas simples), creemos en nuestros principios básicos. Sin embargo, nuestras matemáticas no son suficientemente refinadas, y a medida que aumenta la complejidad de la situación se nos hace más y más difícil el hacer predicciones cuantitativas, aunque podamos poseer una idea cualitativa general del fenómeno. Sin riesgo a equivocarnos, podemos predecir que siempre habrá problemas en la física que son difíciles en este sentido, y que siempre habrá un sitio para ideas ingeniosas que permitan vencer tales dificultades. Es posible que la electrodinámica cuántica sea un tema casi "cerrado" desde el punto de vista fundamental, pero ciertamente no es cerrado en el sentido de que todas las consecuencias posibles hayan sido extraídas ya de la teoría.

55 Desde el punto de vista de la física allá por el cambio de siglo, los átomos "estables e indivisibles" eran las partículas elementales del universo. Hoy los átomos han perdido esta posición distinguida; mediante la teoría de la electrodinámica cuántica, se ha explicado su estructura en términos de objetos más elementales. En cierto sentido, lo mismo vale en el caso de los núcleos. No podemos explicar las propiedades de los núcleos a partir sólo de principios primeros, pero aun así creemos firmemente que es acertado el considerar los núcleos como sistemas compuestos construidos esencialmente con protones y neutrones.

Una vez quedó de manifiesto la naturaleza compuesta de los átomos y de los núcleos, el número de partículas reconocidas como elementales disminuyó bruscamente. Más tarde, este número ha ido aumentando de modo continuo, y es ahora aproximadamente el mismo que el que era a principios de siglo. Electrones, muones, neutrinos, protones, neutrones, hiperones, piones, kaones y muchas otras partículas, han pasado a ocupar el puesto de los átomos. Hemos explicado ya en qué sentido estas partículas son elementales.

No existe actualmente una teoría básica de las partículas elementales. Qué forma puedan tomar las futuras teorías posibles es algo que cada uno debe conjeturar y el campo aparece abierto ampliamente a las ideas brillantes.

Bibliografía para ulterior estudio

1) Se supondrá en este libro que el lector está *hasta cierto punto* familiarizado con los hechos más fundamentales de la física cuántica al nivel a que se estudian estos temas en un texto de física de grado medio, tal como la *Física*, por el Physical Science Study Committee (D. C. Heath and Company, Boston, 1960). (Editorial Reverté, S. A.). (En particular, la parte IV.)

En el caso en que este supuesto no corresponda a los hechos, convendrá un cierto grado de lectura suplementaria. Cualquier biblioteca cuenta con varias exposiciones semipopulares de la "física atómica", de las cuales algunas son malas y algunas son buenas. Tomado con su grano de sal, un libro así puede servir para este fin. Artículos en revistas tales como el *Scientific American* pueden ser muy útiles y son *altamente* recomendables. La lectura de tales artículos puede estimular el apetito del lector y conducirlo a ampliar sus lecturas y a estudiar por su cuenta. En la medida en que lo permitan sus conocimientos, debe intentar leer artículos originales, pero es preferible evitar en este estadio las exposiciones muy técnicas o matemáticamente complicadas.

2) El lector puede estar interesado en leer fragmentos seleccionados de algún texto de física cuántica en el que se dé una exposición más completa que en este libro. Entre las muchas obras de este tipo, citaremos las siguientes:

a) E. Grimsehl y R. Tomaschek: *A Textbook of Physics*, vol. V, *Physisc of the Atom* (Blackie and Son Limited, Londres, 1945).

b) G. P. Harnwell y J. J. Livingood: *Experimental Atomic Physics* (McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1933).

3) Los siguientes libros son bosquejos históricos del desarrollo de la física moderna:

a) M. Jammer: *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966). Una magnífica obra maestra, que, sin embargo, requiere un conocimiento sustancial de mecánica cuántica para poder ser apreciada en lo que merece. La primera parte del libro, que trata de los primeros estadios históricos, puede leerse contando con una modesta base. La extensa bibliografía, cuidadosamente recopilada, relativa a artículos originales, es de gran valor.

b) E. Whittaker: *A History of the Theories of Aether and Electricity*, vols. I y II (Harper Torchbooks, Harper and Brothers, Nueva York, 1960). En el segundo volumen se describe el desarrollo de la mecánica cuántica. Estos libros (al igual que el de Jammer) tratan también de los falsos ca-

minos interesantes, esto es, de las teorías que se tomaron en serio en algún momento, pero que ahora se han olvidado.

4) a) Un análisis sumamente interesante y a fondo del desarrollo de la mecánica cuántica, como también de la relatividad, lo ofrece Albert Einstein (en alemán, con una traducción al inglés) en forma de autobiografía publicada en: *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, vol. I, preparado por P. A. Schilpp (Harper Torchbooks, Harper and Brothers, Nueva York, 1959).

b) La propia exposición de Planck acerca del desarrollo de sus ideas se presenta en: M. Planck, *A Survey of Physical Theory* (Dover Publications, Nueva York, 1960).

5) En el texto de este capítulo se ha hecho referencia a varios importantes artículos originales. Se insta con ahínco al lector a por lo menos dedicarles una mirada: varios de los artículos se pueden leer sin extremada dificultad. Posteriormente se han publicado colecciones de éstos y otros trabajos. Citaremos dos fuentes de este tipo:

a) *Great Experiments in Physics*, preparada por M. H. Shamos (Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1962). (Versiones traducidas y abreviadas, con comentarios del director de la publicación.)

b) *The World of the Atom*, preparada por H. A. Boorse y L. Motz, vols. I y II (Basic Books, Inc., Nueva York, 1966). Es ésta una colección muy completa con comentarios de los compiladores que proporcionan una base histórica e información bibliográfica. Se recomienda mucho una lectura selectiva de estos libros.

6) Un número considerable de los descubrimientos experimentales y de las ideas teóricas discutidos en este volumen merecieron en su día el Premio Nobel. La persona a quien se otorga este premio ha de dar, en Estocolmo, una conferencia semipopular acerca de su trabajo. Extractos de estas conferencias, con breves descripciones del trabajo por el que se concedió el premio al galardonado, se pueden encontrar en N. H. de V. Heathcote: *Nobel Prize Winners in Physics 1901-1950* (Henry Schmun, Nueva York, 1953).

Problemas

1 (*a*) Considérese primero, y descríbase luego muy brevemente, el tipo de razonamiento y los tipos de mediciones que han conducido a valores definidos de los pesos atómicos y moleculares.

(*b*) En 1815 William Prout sugirió que todos los elementos pudieran ser combinaciones de hidrógeno, que sería así la materia primordial a partir de la cual se formaría todo lo demás. ¿Qué pudo conducirlo a esta hipótesis y por qué se rechazó durante el siglo XIX lo que había sugerido?

2 Muchos átomos (mejor dicho, *núcleos*) se desintegran espontáneamente, por lo general emitiendo un electrón o una partícula alfa, que no es ni más ni menos que un núcleo de helio. En esto consiste el fenómeno de la radiactividad, descubierta por Henri Becquerel en 1896. (H. Becquerel, "Sur les radiations invisibles émises par les corps phosphorescents", *Comptes Rendus* **122**, 501 (1896)). El número de desintegraciones por unidad de tiempo viene regido por una ley estadística que predice que de entre N_i átomos originalmente presentes $N(t) = N_i \exp(-\lambda t)$ sobrevivirán en el instante t. La constante λ, que representa la velocidad de desintegración, es característica del átomo (del núcleo). El tiempo T necesario para que decaiga la mitad de los átomos inicialmente presentes se conoce con el nombre de período (o semivida). Evidentemente, se tiene $T = (1/\lambda) \ln 2$.

(*a*) Probar que se obtiene esta ley de desintegración si admitimos que cada átomo se desintegra con independencia de los demás, y si admitimos también que la probabilidad de que un átomo que ha sobrevivido hasta el instante t se desintegre durante el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ es independiente de t.

(*b*) En la desintegración de los átomos de radio se emite una partícula alfa. Si esta partícula alfa choca con una pantalla de sulfuro de zinc, un destello marcará el punto en que se produce el impacto. De esta manera es posible contar directamente el número de partículas alfa emitidas por segundo por 1 gramo de radio y este número fue determinado por Hess y Lawson, quienes obtuvieron $3{,}72 \times 10^{10}$. El peso atómico del radio es 226. Úsense estos datos para hallar el período del radio. (Se han utilizado mediciones con substancias radiactivas para obtener estimaciones, independientes, del número de Avogadro. En este problema se invierte el sentido del proceso, determinado, en cambio, el período del radio.)

3 Las partes móviles de un reloj de pulsera son bastante "pequeñas". Sin embargo, haciendo estimaciones razonables de los valores de los parámetros físicos que caracterizan un reloj de pulsera "típico", probar, basándose en el criterio general formulado en la Sec. 20, que la mecánica cuántica es ajena en absoluto al arte de la relojería.

4 Dentro del espíritu del problema que precede, considérese un circuito eléctrico simple de características constantes que consiste en un condensador de capacidad 100 pF (100 $\mu\mu$F) y una inductancia de 0,1 mH. Supóngase que el circuito oscila de modo que la tensión máxima aplicada al condensador es de 1 mV. Trátese de hallar una cantidad física "natural" cuyas dimensiones físicas sean las de una acción y calcúlese esta cantidad tomando la constante de Planck h como unidad.

5 La antena de una emisora emite radiación (ondas de radio) con una frecuencia 1 Mc/s = 1 Hz y una potencia de 1 kW. ¿Cuál es el número correspondiente de fotones emitidos por segundo? La magnitud de este número explica por qué la naturaleza cuántica de la radiación electromagnética no se advierte de modo inmediato cuando estudiamos la radiación emitida por las antenas.

Este ejemplo, y los que ofrecen los problemas 3 y 4, resultan ridículos en el sentido de que los números que se obtienen son ridículos. No intentaremos, en el resto de este libro, aplicar la mecánica cuántica a problemas que son obviamente macroscópicos. Sin embargo, puede ser instructivo el haber hecho *una vez* problemas de esta naturaleza —si más no, para aprender la lección de que *son* ridículos.

6 Para ver que la afirmación de que la radiación electromagnética se manifiesta en forma de paquetes de energía $E = h\nu$, donde ν es la frecuencia, no viola el sentido común (esto es, no viola la experiencia del lector en lo que concierne a los fenómenos macroscópicos), calcular el número de fotones emitidos por segundo por un foco luminoso cuya intensidad es de 1 *candela* (1 cd). Para simplificar, supondremos que la luz emitida es de color amarillo, con una longitud de onda de 5600 Å (unidades ångström). Un foco luminoso cuya intensidad es de 1 cd emite energía luminosa con una potencia de 0,01 W.

Supóngase que un observador mira hacia un foco de luz isótropo de intensidad 1 cd situado a una distancia de 100 metros. Calcular el número de fotones que penetran por segundo en uno de sus ojos; supóngase que la pupila de entrada del ojo tiene un diámetro igual a 4 mm. Debido a que el número de fotones es tan grande como de hecho es, no observamos ningún "titilar", a pesar de que el flujo luminoso recibido por el ojo es pequeño con relación a los valores macroscópicos típicos.

7 Todos sabemos que las estrellas "centellean". Para ver si esto puede ser una manifestación de la naturaleza cuántica de la luz, estimar el número de fotones que penetran en el ojo de un observador que mira una estrella de primera magnitud visual aparente. Una estrella de estas características produce sobre la superficie de la Tierra un flujo de unos 10^{-6} lumen/metro^2. Para la longitud de onda de máxima visibilidad, que es de unos 5560 Å, un lumen corresponde a 0,0016 W. Una estrella de primera magnitud visual aparente es una estrella bastante brillante, fácilmente visible a simple vista, aunque no figura entre las estrellas más brillantes. Un ejemplo lo ofrece la estrella Aldebarán.

Supóngase que N fotones por segundo penetran en el ojo del observador. ¿Qué valor alcanza la fluctuación media de este número? Después de que haya determinado N, decida cuál es la posible explicación del centelleo. ¿Por qué los planetas parecen centellear mucho menos o no hacerlo en absoluto?

8 (*a*) Considérese la ley de desplazamiento de Wien y supóngase que tenemos un radiador de cuerpo negro mantenido a una temperatura de 2500°K. Calcular la longitud de onda en ångströms, conforme resulta de la ley de Wien, para la cual la emisión alcanza un máximo. ¿Se encuentra esta longitud de onda en la región visible?

(*b*) Deducir la ley de desplazamiento de Wien partiendo de la fórmula de Planck (39a).

(*c*) Tomando como base la ley de radiación de Planck (39a), probar que la intensidad total de la radiación emitida por un cuerpo negro (es decir, incluidas todas las frecuencias) es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura T.

9 En nuestra discusión acerca de la historia de la ley de la radiación del cuerpo negro hemos dicho que Planck, al deducirla, hizo la hipótesis de que un oscilador armónico de frecuencia ν puede absorber energía tan sólo en paquetes $h\nu$. (Hay que hacer notar al lector que, en nuestra exploración histórica, no hemos intentado en ningún momento explicar las cosas y que, por lo tanto, el lector no tiene ahora obligación ninguna de comprender cómo Planck llegó a su resultado final.) Es interesante ver qué conexión puede haber entre la hipótesis de Planck y la que hizo Bohr al deducir las características del átomo de hidrógeno. Para ello consideremos la situación siguiente: un oscilador armónico de masa m y constante elástica K se comporta de acuerdo con la hipótesis de Planck. Esto significa que la energía del oscilador puede sólo cambiar en cantidades que son múltiplos de $h\nu$, donde ν es la frecuencia del oscilador. Introduzcamos la variable acción $J = q_0 p_0$, donde q_0 es el desplazamiento máximo de la masa puntual oscilante, y donde p_0 es el valor máximo del impulso.

(*a*) Para un estado de oscilación, J tiene un valor determinado. Si la energía del oscilador cambia de acuerdo con la regla de Planck, ¿cuáles son los cambios correspondientes permitidos en la variable acción J? Compare el resultado a que llegue con lo dicho en la Sec. 51.

(*b*) Tracemos un gráfico que ilustre el comportamiento del oscilador, tomando el desplazamiento instantáneo $q(t)$ y el impulso instantáneo $p(t)$ como coordenadas en un plano. A medida que pasa el tiempo, el punto $(q(t), p(t))$ describe una curva continua. Hallar esta curva, dibujarla y dar una interpretación geométrica de la variable acción J. Un plano con q y p como coordenadas se conoce como *plano de las fases*. Las dos coordenadas q y p se llaman *variables conjugadas o variables conjugadas canónicas.*

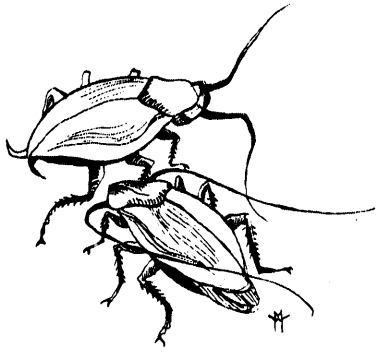
Capítulo 2

Órdenes de magnitud de las cantidades físicas en física cuántica

Unidades y constantes físicas	50
Energía	56
Órdenes de magnitud característicos de la física molecular y atómica	63
Los hechos más fundamentales de la física nuclear	75
Fuerzas gravitatorias y electromagnéticas	82
Acerca del trabajo numérico	85
Un tema avanzado: las constantes fundamentales de la naturaleza	88
Bibliografía para ulterior estudio	97
Problemas	97

Capítulo 2

Ordenes de magnitud de las cantidades físicas en física cuántica



Unidades y constantes físicas

1 Uno de los objetivos de este capítulo es proporcionar al lector un cierto sentido acerca de los órdenes de magnitud de las diferentes cantidades físicas en el dominio de la física cuántica. Muchas cantidades físicas importantes, tales como la carga del electrón, su masa, la constante de Planck, etc., tienen valores numéricos que ni son convenientes ni resultan transparentes cuando se expresan en términos de nuestras unidades macroscópicas familiares, debido precisamente a que aquéllas son muy pequeñas. Es difícil captar directamente qué *significa* el que la constante de Planck tenga el valor $h = 6{,}6 \times 10^{-27}$ erg s. Por lo tanto, es importante que estudiemos detenidamente cómo aparecen en la física estas varias constantes y qué significan realmente sus valores numéricos *

Cada capítulo de la física posee lo que podríamos llamar unidades naturales para las cantidades físicas que en él intervienen, entendiendo por ello que cuando expresamos una cantidad física cualquiera en términos de estas unidades naturales, los valores numéricos que se obtienen son razonables en el sentido de que es posible captar inmediatamente su significación. Los valores numéricos pueden variar entre 10^{-6} y 10^{6}, pero no encontraremos números tales como 10^{-27}. Nuestras unidades macroscópicas tan familiares (en el sistema MKS) son particularmente adecuadas para nuestra experiencia diaria relativa a los fenómenos físicos, y están basadas en patrones macroscópicos que es fácil conseguir. Obsérvese que se trata realmente de "unidades humanas"; unidades como el metro, el kilogramo y el segundo se refieren inconfundiblemente a características humanas. El sistema de unidades llamado "científico", o CGS, es más apropiado para pequeños animales, tales como las cucarachas. Intentaremos liberar nuestra discusión de los patrones arbitrarios del sistema humano, o del sistema de las cucarachas, y trataremos de identificar las unidades naturales en los diferentes dominios de la física cuántica.

Al hacerlo, nos anticiparemos a veces a la discusión más detallada que seguirá luego. En el caso en que el lector encontrase algunos pasajes por ahora oscuros, no debe preocuparse demasiado; habrá de volver varias veces al presente capítulo a medida que avanzamos en nuestro curso. Es de esperar que la mayoría de los lectores esté ya *algo* familiarizada con los temas de nuestra discusión.

2 Comenzaremos por hacer una lista, en forma de tabla, de algunas constantes físicas. Al referirse a estas constantes, se suele hablar de "las constantes fundamentales de la microfísica", pero realmente nada hay de fundamental en lo que concierne a los números individuales de la tabla 2A, porque los patrones macroscópicos son arbitrarios y "accidentales". Pero esto no significa que la lista carezca de importancia. Una vez hemos elegido nuestros patrones macroscópicos, es natural que queramos vincular los parámetros básicos de la física cuántica a dichos patrones, y esto es lo que se persigue con la lista.

Hemos indicado también los errores estimados de las constantes para dar al lector un sentido de con qué precisión se conocen actualmente. Al nivel de este libro, casi nunca tendrá ocasión de efectuar un cálculo con precisión mayor que la que se puede obtener con una regla de cálculo, precisión que es de, aproximadamente, el 0,2 por ciento por cada multiplicación o división. El lector debiera también aprender a efectuar simples estimaciones, que pueden variar en precisión desde un diez por ciento a una mera estimación del orden de magnitud. En la parte interior de la tapa de delante de este libro, encontrará una tabla de valores aproximados de las constantes más importantes y esta tabla convendría aprenderla de memoria. Otras tablas, más detalladas, de datos físicos pueden encontrarse en el Apéndice.

3 La definición de número de Avogadro requiere ser discutida. Cuando los químicos tabularon los pesos atómicos en el pasado, emplearon una escala en la que al oxígeno que se presenta naturalmente se le asignó, *por definición,* el peso atómico 16 *exactamente.* El peso atómico del hidrógeno, por ejemplo, se definió así por

$$\text{(peso atómico del hidrógeno)} = 16 \times \frac{\text{(masa del "átomo" de hidrógeno)}}{\text{(masa del "átomo" de oxígeno)}} \qquad (3a)$$

La palabra "átomo" se ha adornado con comillas porque el peso del "átomo" se refiere siempre al elemento tal como se presenta en la naturaleza. Los pesos atómicos, definidos como en la ec. 3a, son determinados por los químicos mediante cuidadosas *operaciones de pesada;* por ejemplo, un químico determinará la cantidad, en gramos, de hidrógeno, tal como se presenta naturalmente, que se combina con 16 gramos de oxígeno tal como se presenta naturalmente, para formar agua sin residuo

TABLA 2A Algunas constantes físicas

Constante de Planck
$h = 2\pi\hbar = (6{,}62559 \pm 0{,}00015) \times 10^{-27}$ erg s
$\hbar = h/2\pi = (1{,}05449 \pm 0{,}00003) \times 10^{-27}$ erg s

Velocidad de la luz
$c = (2{,}997925 \pm 0{,}000001) \times 10^{10}$ cm s^{-1}

Carga del electrón
$e = (4{,}80298 \pm 0{,}00006) \times 10^{-10}$ Fr
$= (1{,}60210 \pm 0{,}00002) \times 10^{-19}$ C

Masa del electrón
$m = (9{,}10908 \pm 0{,}00013) \times 10^{-28}$ g

Masa del protón
$M_p = (1{,}67252 \pm 0{,}00003) \times 10^{-24}$ g

Número de Avogadro
$N_0 = (6{,}02252 \pm 0{,}00009) \times 10^{23}$ $(\text{mol})^{-1}$

Constante de Boltzmann
$k = (1{,}38054 \pm 0{,}00006) \times 10^{-16}$ erg $(^0\text{K})^{-1}$

TABLA 3A Pesos atómicos (masas atómicas) de los elementos más ligeros *

Elemento	*Z*	*Peso atómico*
H	1	1,00797
He	2	4,0026
Li	3	6,939
Be	4	9,0122
B	5	10,811
C	6	12,01115
N	7	14,0067
O	8	15,9994
F	9	18,9984
Ne	10	20,183
Na	11	22,9898
Mg	12	24,312
Al	13	26,9815
Si	14	28,086
P	15	30,9738
S	16	32,064
Cl	17	35,453
A	18	39,948

* Para una lista completa, véase la tabla C del Apéndice.

TABLA 4A Isótopos naturales* de algunos elementos ligeros

Elemento	Z	*Isótopo A*	*Masa atómica*	*Abundancia natural en %*
H	1	1	1,007825	99,985
		2	2,01410	0,015
He	2	3	3,01603	0,00013
		4	4,00260	100
Li	3	6	6,01513	7,42
		7	7,01601	92,58
Be	4	9	9,01219	100
B	5	10	10,01294	19,6
		11	11,00931	80,4
C	6	12	12,000000	98,89
		13	13,00335	1,11
N	7	14	14,00307	99,63
		15	15,00011	0,37
O	8	16	15,99491	99,759
		17	16,99914	0,037
		18	17,99916	0,204
F	9	19	18,99840	100
...	...	...	...	...
S	16	32	31,97207	95,0
		33	32,97146	0,76
		34	33,96786	4,22
		36	35,96709	0,014
Cl	17	35	34,96885	75,53
		37	36,96590	24,47
...	...	...	...	...

alguno. El número resultante, dividido por dos, es el peso atómico del hidrógeno.

Los pesos atómicos determinados de esta manera por los químicos se llaman *pesos atómicos en la escala química.* Muchos elementos tienen pesos atómicos que casi son enteros, pero también hay notables excepciones, por ejemplo, el peso atómico del cloro es 35,5.

4 Como sabe el lector, la masa de un átomo está concentrada sobre todo en el núcleo. Los núcleos se construyen con protones y neutrones. El número de protones más el número de neutrones se conoce con el nombre de *número másico* del núcleo. Este entero se suele designar por A. El número de protones se llama *número atómico* del núcleo. Se designa por Z y la carga nuclear es así eZ, donde e es la carga elemental. Las propiedades químicas de un átomo están determinadas, por lo tanto, casi exclusivamente por la carga nuclear y, en consecuencia, Z es una característica del *elemento químico.* Se ha encontrado que existen muchos casos de familias de núcleos con la *misma* carga, pero con diferentes números másicos, y los núcleos de una misma familia se denominan *isótopos,* diferentes, del elemento en cuestión. Los isótopos de un elemento difieren en el número de neutrones. La masa del protón es casi igual a la masa del neutrón y las masas de todos los núcleos son muy aproximadamente proporcionales al número másico entero A. La explicación de la existencia de pesos atómicos marcadamente no enteros consiste en que muchos elementos químicos que se presentan en la naturaleza son mezclas de dos o más isótopos diferentes, en cuyo caso el "peso atómico" del elemento, tal como lo miden los químicos, es un promedio de los pesos atómicos, más fundamentales, de los diferentes isótopos *.

Es un hecho experimental que las abundancias relativas de los diferentes isótopos que encontramos en una mezcla isotópica de un elemento, son muy aproximadamente las mismas en toda la superficie de la Tierra. Además, los diferentes isótopos tienen, para todos los fines prácticos, idénticas propiedades químicas y es, por consiguiente, casi imposible separarlos entre sí por medios "químicos". Si así no fuera, las tablas de pesos atómicos de los químicos carecerían de valor.

* Que un elemento químico puede consistir en una mezcla de diferentes isótopos fue establecido firmemente por J. J. Thomson. (J. J. Thomson, "Rays of Positive Electricity", *Proceedings of the Royal Society* (Londres, Series A) **89**, 1 [1913]).

5 Cuando el químico escribe la ecuación de una reacción química, emplea símbolos tales como H (hidrógeno), Li (litio), Fe (hierro), etc., para designar el elemento químico que aparece naturalmente, elemento que puede o no ser una mezcla de isótopos. Desde el punto de vista del físico nuclear, sin embargo, los isótopos del oxígeno con número másico 16 y número másico 18 son objetos enteramente distintos y ha de distinguir entre estos objetos cuando escribe *su* fórmula para una reacción nuclear. Esto se hace empleando subíndices y superíndices y un isótopo se suele representar por

$$_{Z}(\text{símbolo químico})^{A} \quad \text{o bien} \quad (\text{símbolo químico})^{A}$$

El oxígeno tal como se presenta de ordinario es, naturalmente, una mezcla de tres isótopos estables, a saber, O^{16}, O^{17} y O^{18} de los cuales el isótopo O^{16}, cuya abundancia relativa es del 99,759 por ciento, constituye el componente dominante.

6 Físicos y químicos han acordado recientemente adoptar un nuevo patrón de pesos atómicos basado en la masa del isótopo del carbono C^{12}. Al *átomo* (no al núcleo) de este isótopo del carbono se le asigna una masa de precisamente 12 ***unidades de masa atómica,*** abreviadamente 12 u. Este convenio, al que nos adherimos, da lugar a la *nueva escala* de masas atómicas. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} 1\,\text{u} &= \tfrac{1}{12}\,(\text{masa de un átomo } C^{12}) \\ &= (1{,}66043 \pm 0{,}00002) \times 10^{-24}\,\text{g} \end{aligned} \tag{6a}$$

El número de Avogadro N_0 se define como número de átomos en 12 gramos de C^{12} isotópicamente puro, y éste es el número que se da en la tabla 2A.

En la nueva escala, el peso atómico del oxígeno tal como se presenta en la naturaleza es 15,9994. Este número es muy próximo al número entero 16, que es el peso atómico del oxígeno en la antigua escala química. Para la mayoría de fines prácticos, por lo tanto, cabe ignorar la diferencia entre la nueva escala química y la antigua.

7 El número de Avogadro N_0 es el vínculo que conecta la macrofísica con la microfísica. Citemos algunas importantes cantidades en las que interviene N_0 y que expresan esta conexión.

(i) La masa del protón es 1,0073 u y la masa del átomo de hidrógeno neutro (el isótopo H^1) es 1,0078 u. El producto

del número de Avogadro N_0 por la masa del protón M_p es, por consiguiente,

$$N_0 M_p = 1{,}0073 \text{ g} \tag{7a}$$

muy próxima a 1 g. En cálculos de poca precisión, tenemos, pues,

$$(\text{masa del protón}) \cong (\text{masa del átomo de hidrógeno}) \cong \frac{1}{N_0} \text{ g} \tag{7b}$$

(ii) El producto de N_0 por la constante de Boltzmann k nos da la *constante universal de los gases R,*

$$\begin{aligned} N_0 k = R &= 8{,}314 \times 10^7 \text{ erg } (^\circ\text{K})^{-1} \text{ (mol)}^{-1} \\ &= 1{,}986 \text{ cal } (^\circ\text{K})^{-1} \text{ (mol)}^{-1} \end{aligned} \tag{7c}$$

puesto que la constante de Boltzmann es la constante de los gases referidos a una *molécula.*

(iii) El producto de N_0 por la carga del electrón e nos da la *constante de Faraday F,*

$$N_0 e = F = 96\,487 \text{ coulomb (mol)}^{-1} \tag{7d}$$

Esta constante expresa la carga total que lleva un mol de iones simplemente cargados.

8 Consideremos ahora la constante de Planck, de la que existen dos versiones designadas por h y $\hbar$, como puede verse en la tabla 2A. (El símbolo $\hbar$ se lee: "h-barrada".) Ambas constantes se llaman "constante de Plank" y una y otra son de empleo común, aunque en cierto modo puede decirse que $\hbar$ es la preferida; resulta ser una constante "mejor". La razón de por qué se emplean ambas constantes es que es más fácil escribir una $\hbar$ con una barra que separar factores 2π que, de otro modo, aparecerían en muchas de nuestras fórmulas; es decir, se trata de la misma razón por la cual las "frecuencias" se presentan en dos versiones.

En este libro designaremos una frecuencia, que es el número de veces que se repite un fenómeno periódico por unidad de intervalo de tiempo, o el número de *ciclos/unidad de tiempo,* por la letra ν. Las velocidades angulares se representarán por la letra ω y las mediremos en radianes/unidad de tiempo o sim-

plemente en 1/unidad de tiempo. Con cada frecuencia ν asociamos una velocidad angular ω de acuerdo con

$$\omega = 2\pi\nu \tag{8a}$$

De aquí se sigue que

$$\hbar\omega = h\nu \tag{8b}$$

y ambas expresiones dan así la energía de un fotón de frecuencia ν. Hay que observar que la cantidad ω se suele llamar también "frecuencia", o *frecuencia angular* (o *pulsación)* sobreentendiendo la relación (8a).

La correspondiente notación se emplea también para las longitudes de onda. La verdadera *longitud de onda,* que es el período de un fenómeno periódico en una dimensión espacial, se designa por la letra λ. Con cada longitud de onda λ asociamos una cantidad $\lambda\!\!\!^{-}$ definida por

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi} \tag{8c}$$

Para una onda monocromática que se propaga con la velocidad de fase c, tenemos

$$\lambda\nu = \lambda\!\!\!^{-}\omega = c \tag{8d}$$

El lector debe aprender cuidadosamente estos convenios generalmente aceptados.

9 La longitud de onda de una onda se expresa a menudo en términos de su valor inverso, $\bar{\nu} = 1/\lambda$, llamado *número de onda.* Esta manera de expresarse se emplea mucho en espectroscopia óptica y el número de onda se da en unidades cm^{-1}. Para una onda luminosa en el vacío tenemos

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} \tag{9a}$$

donde ν es la frecuencia. El número de onda es proporcional a la frecuencia, pero no debe confundirse con ella. Hay que mencionar que en la región óptica las longitudes de onda y los números de onda pueden medirse con mucha precisión, de modo mucho más preciso de cómo se mide la velocidad de la luz. Por lo tanto, en la región óptica se conocen mejor los números de onda que las correspondientes frecuencias. Por otra

parte, la frecuencia puede medirse con mucha precisión en la región de las microondas, y en ésta las frecuencias se conocen mucho mejor que los correspondientes números de onda o longitudes de onda.

10 En el Cap. 1 hemos indicado algunos métodos que permiten medir las constantes fundamentales: históricamente éstos fueron los primeros métodos. Sin embargo, los mejores valores numéricos de las constantes básicas no se obtienen actualmente acudiendo a mediciones tan simples y transparentes conceptualmente, y hemos mencionado los métodos directos tan sólo para que quede inmediatamente claro que estas constantes no se encuentran más allá de nuestro alcance. Los mejores valores proceden de un cierto número de mediciones de cantidades *derivadas,* es decir, de expresiones en las que intervienen estas constantes (y otras) en varias combinaciones que creemos entender bien teóricamente. A partir de las cantidades derivadas podemos calcular las constantes básicas. Dado que el número de todas las cantidades derivadas medidas es en realidad mucho mayor que el número de constantes fundamentales, las ecuaciones están sobredeterminadas y esta circunstancia nos proporciona valiosas comprobaciones acerca de la consistencia interna de todas las cantidades medidas y tomadas en consideración en nuestra determinación de las constantes.

Energía

11 Consideremos ahora las unidades que se usan para describir la energía en microfísica. Una de las unidades de energía más útiles es el electrón-volt, abreviadamente eV. Se define como la energía que adquiere una carga elemental de valor e cuando experimenta una caída de potencial de un volt. Teniendo en cuenta el valor de e dado en la tabla 2A, podemos expresar el electrón-volt en ergios:

$$1\ \text{eV} = (1{,}60210 \pm 0{,}00002) \times 10^{-12}\ \text{erg} \qquad (11a)$$

Además del electrón-volt, empleamos también las unidades derivadas.

$$1\ \text{keV} = 1000\ \text{eV}, \qquad 1\ \text{MeV} = 10^6\ \text{eV},$$
$$1\ \text{GeV} = 10^3\ \text{MeV} = 10^9\ \text{eV} \qquad (11b)$$

donde keV es una abreviación para *kiloelectrón-volt,* MeV es una abreviación para *un millón de electrón-volts* y GeV es una

abreviación para *mil millones de electrón-volts* *. La unidad electrón-volt resulta particularmente conveniente en física atómica, dado que las energías de enlace atómicas son del orden de un eV, mientras que la unidad MeV es útil en física nuclear, ya que las energías de enlace nucleares son del orden de un MeV. La unidad GeV se usa al estudiar las interacciones de muy alta energía de las partículas fundamentales.

12 En el Cap. 1 discutimos el papel principal que desempeñan las constantes c y h. Estas constantes son tan fundamentales en física cuántica relativista, que frecuentemente se emplea en este campo un sistema de unidades en el cual $\hbar = 1$ y $c = 1$; las constantes $\hbar$ y c carecen de dimensiones y son iguales a la unidad. El lector puede tener la impresión de que una definición de este tipo viola nuestro concepto de dimensión física. Sin embargo, hay que entender bien que nuestra atribución de dimensiones físicas a las diferentes magnitudes físicas es arbitraria y resultado de un puro convenio. Estrictamente hablando, tan sólo las *cantidades físicas directamente comparables* tienen la misma "dimensión física"; es decir, aquellas cantidades que se pueden medir directamente la una respecto de la otra. Todas las demás atribuciones de dimensión se basan en ciertas relaciones entre magnitudes físicas que creemos son particularmente fundamentales. Debido a la naturaleza fundamental de la velocidad de la luz, podemos, sin duda alguna, si así lo queremos, vincular la distancia, x, y el tiempo, t, mediante la igualdad $x = ct$ y medir así la distancia y el tiempo en las mismas unidades. Esto es, de hecho, lo que hacen los astrónomos cuando miden las distancias en años-luz.

Hacer $\hbar = c = 1$ conduce a fórmulas claras y simples y estéticamente atrayentes, y a veces nos valdremos de esta posibilidad. El autor experimentó una fuerte tentación de hacer $\hbar = c = 1$ sistemáticamente todo a lo largo del libro; en realidad, así es como debiera procederse. Por otra parte, dar este paso podría causar al lector dificultades innecesarias al leer otros libros de introducción a la física cuántica, puesto que la mayoría de ellos se basan en los sistemas corrientes MKS o CGS. Por esta razón, adoptaremos casi siempre los convenios del sistema de unidades CGS.

13 Exploremos ahora algunas relaciones entre varias magnitudes físicas que resultan de la existencia de las destacadas cons-

* En los Estados Unidos esta unidad se escribe también BeV.

tantes c y $\hbar$. Consideremos una masa, m, y un cierto número de otras magnitudes físicas, asociadas con ella, construidas a partir de m, $\hbar$ y c, dando las dimensiones físicas ordinarias de estas magnitudes:

$$\begin{aligned} m &= [\text{masa}] & \frac{mc^2}{\hbar} &= [\text{tiempo}]^{-1} \\ mc &= [\text{impulso}] & \frac{\hbar}{mc^2} &= [\text{tiempo}] \\ mc^2 &= \text{energía} & \frac{\hbar}{mc} &= [\text{longitud}] \end{aligned} \tag{13a}$$

Conviene que el lector compruebe que las dimensiones físicas (según los convenios del sistema CGS) son las correctas. Todas estas magnitudes "cuelgan juntas" enlazadas por las constantes h y c. Basada en las relaciones que preceden, se puede asociar una *energía* con una masa, o una frecuencia o la inversa de una longitud, y el valor de la energía puede expresarse en términos de los valores de las cantidades asociadas.

14 Con una energía E asociamos así la frecuencia E/h, el número de onda $E/(hc)$ y la masa E/c^2. Se encuentran los siguientes factores de conversión:

$$\frac{(\text{energía})}{(\text{masa})} = (9{,}31478 \pm 0{,}00005) \times 10^8\ (\text{eV})/(\text{u}) \tag{14a}$$

$$\frac{(\text{frecuencia})}{(\text{energía})} = (2{,}41804 \pm 0{,}00002) \times 10^{14}\ (\text{Hz})/(\text{eV}) \tag{14b}$$

$$\frac{(\text{n}^\circ\ \text{de onda})}{(\text{energía})} = (8{,}06573 \pm 0{,}00008) \times 10^3\ (\text{cm}^{-1})/(\text{eV}) \tag{14c}$$

La tabla en la cara interna de la tapa posterior de este libro se basa, en parte, en estos factores de conversión. Cada fila horizontal contiene un conjunto de cantidades correspondientes asociadas con la cantidad que figura en la primera columna. Las columnas segunda y tercera dan la energía E en eV y ergios. La columna séptima da la correspondiente masa E/c^2, en unidades de masa atómica, u; la columna octava, la correspondiente frecuencia E/h, en ciclos/s (hertz, Hz); y la novena columna da el número de onda $E/(hc)$, en cm^{-1}. La columna déci-

ma da la longitud de onda asociada $(hc)/E$, en ångströms y ésta es la única cantidad en la tabla que no es directamente proporcional a E.

15 En química, las unidades *caloría,* abreviadamente cal, y kilocaloría, abreviadamente Cal o kcal, son de uso común para expresar una energía. (La caloría se suele llamar "caloría pequeña" y la kilocaloría, "caloría grande".) Estas unidades se definen por

$$1\,\text{kcal} = 1000\,\text{cal}, \quad 1\,\text{cal} = 4{,}186\,\text{joule} = 4{,}186 \times 10^7\,\text{erg} \quad (15a)$$

Tiene interés ligar una energía E que se refiere a un solo átomo o molécula a la correspondiente energía macroscópica E_{macr} de N_0 de tales partículas, es decir, la energía asociada con un átomo-gramo, o un mol. Tenemos entonces

$$\frac{E_{\text{macr}}}{E} = N_0 = 23\,050\,(\text{cal})/(\text{eV}) = 9{,}6487 \times 10^{11}\,(\text{erg})/(\text{eV}) \quad (15b)$$

En la tabla que aparece en la cara interna de la tapa posterior, las columnas cuarta y quinta dan energías macroscópicas en erg/mol y cal/mol.

16 En las Secs. 31-34, Cap. 1, discutimos brevemente los conceptos de calor y temperatura. Se hizo notar que la constante de Boltzmann k es de hecho un factor de conversión para pasar de temperatura a energía. En realidad, es una práctica común el expresar una temperatura en términos de la correspondiente energía y viceversa, *definiendo arbitrariamente* la correspondencia por

$$(\text{energía equivalente}) = k \times (\text{temperatura}) \quad (16a)$$

Con vistas a esta conversión, conviene expresar la constante de Boltzmann en la forma

$$k = 8{,}617 \times 10^{-5}\,(\text{eV})/^\circ\text{K}, \qquad \frac{1}{k} = 11\,605^\circ\text{K}/(\text{eV}) \quad (16b)$$

En esta correspondencia la "temperatura normal" ($=20^\circ\text{C}=293^\circ\text{K}$) equivale a la energía

$$k \times 293^\circ\text{K} \approx (1/40)\,\text{eV} \quad (16c)$$

En la sexta columna de la tabla en la cara interna de la tapa posterior se da la temperatura equivalente en grados Kelvin.

17 Que la energía y la temperatura se pueden expresar en las mismas unidades no debe conducir a nadie a creer que energía y temperatura son la "misma cosa". Por ejemplo, *no es verdad* que la energía térmica de un cuerpo macroscópico arbitrario a temperatura T sea igual al número de átomos en el mismo multiplicado por kT. La energía interna de un cuerpo macroscópico depende, no sólo de la temperatura, sino también de otros parámetros (macroscópicos) y, además, la relación precisa entre energía y temperatura depende de la naturaleza del sistema. Es éste un punto importante, y la fórmula (16a) no debe ser mal interpretada.

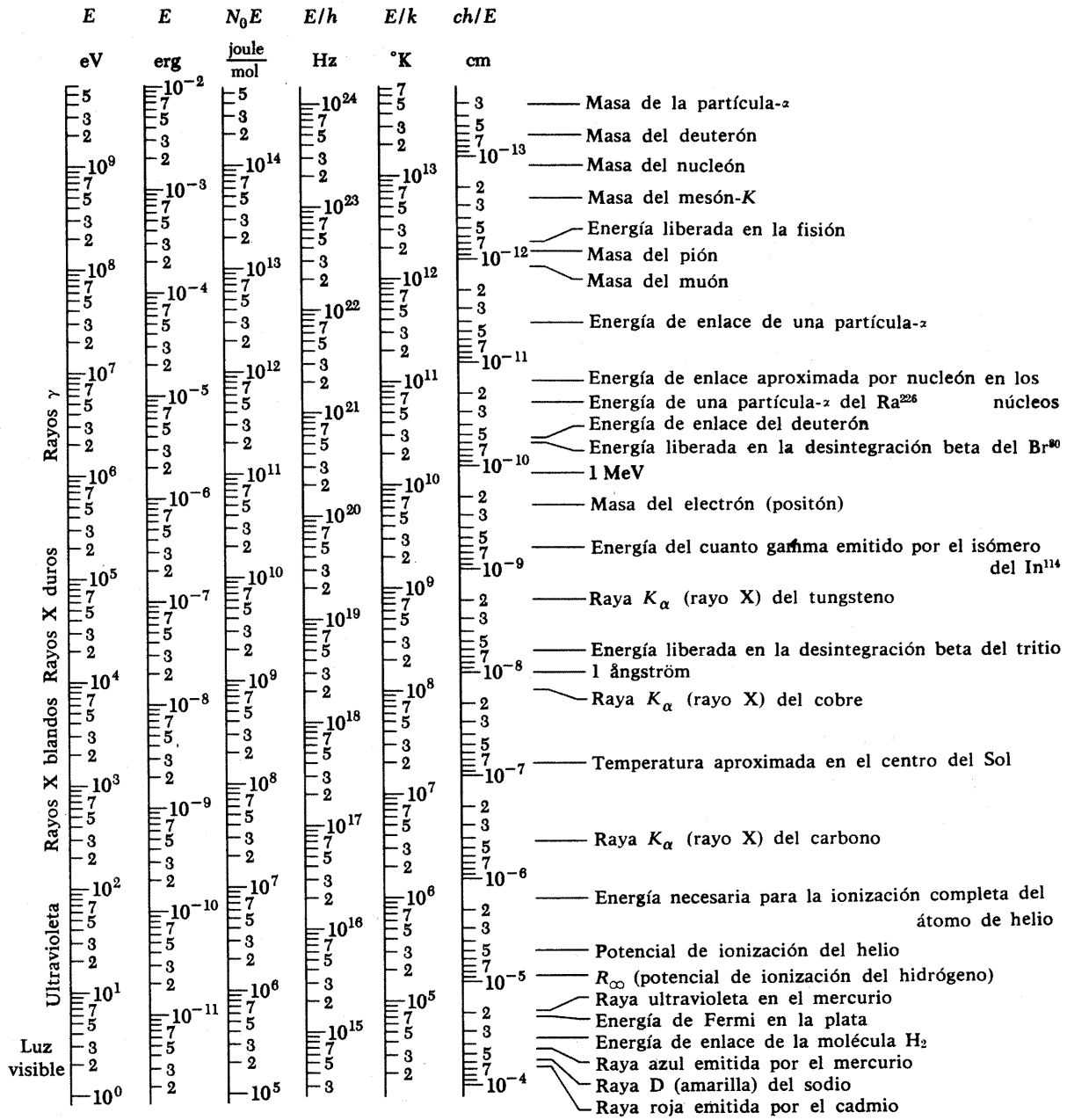
Con todo, podemos afirmar algo sumamente útil. Con frecuencia ocurre (pero no siempre) que si un cuerpo macroscópico se mantiene a una temperatura T, la energía media "desorganizada" por átomo (o molécula) del cuerpo es del *orden* de kT.

Esta afirmación nos permite *estimar* la energía media de un átomo, o molécula, en movimiento térmico desorganizado una vez conocemos la temperatura. Para muchos sistemas especiales podemos formular enunciados *precisos*. Un importante ejemplo se refiere a un gas de moléculas a la temperatura T. La energía cinética media E_{tr} asociada con el movimiento de *translación* de una molécula viene dada por

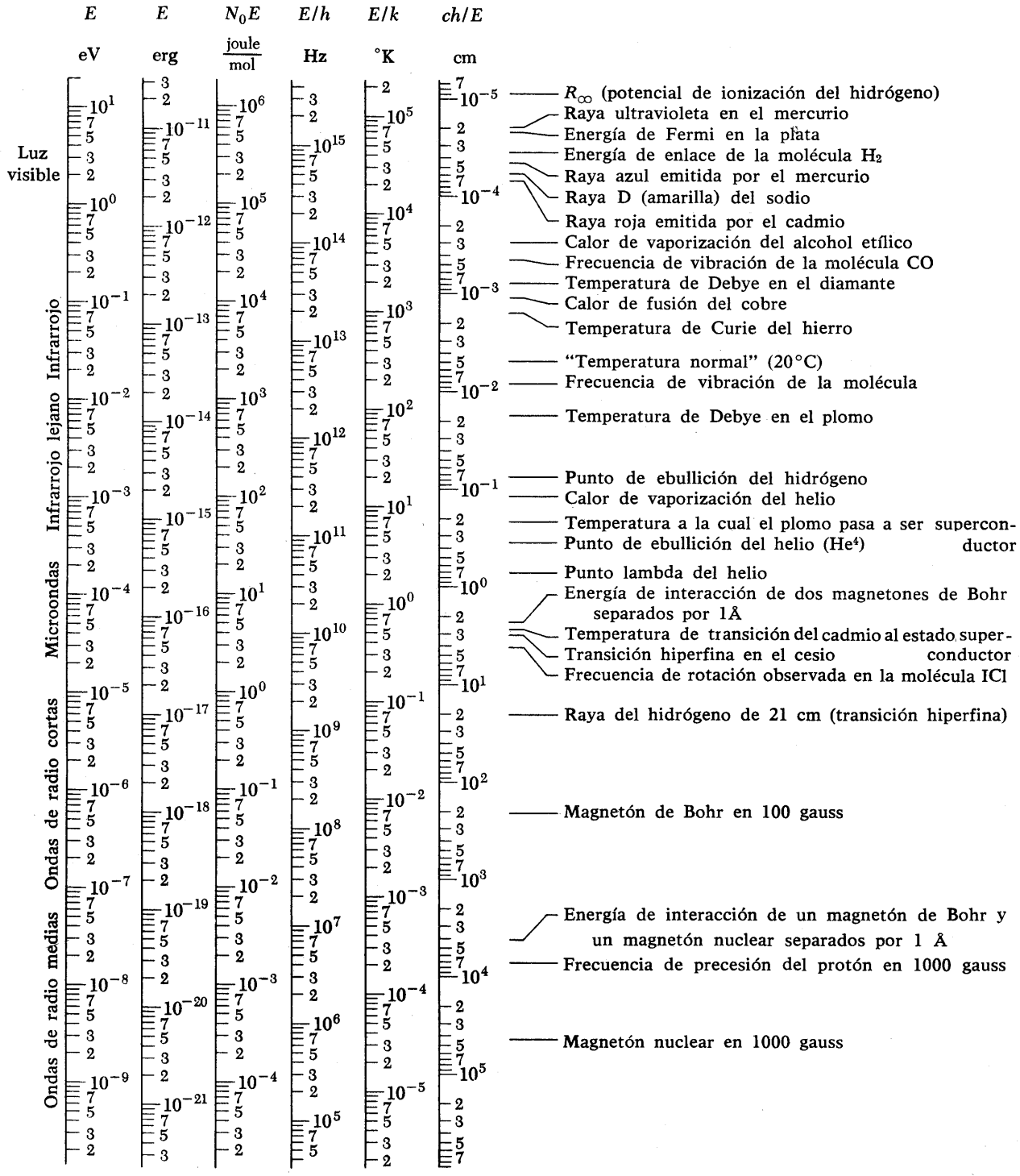
$$E_{\text{tr}} = \frac{3}{2}kT \tag{17a}$$

y esta relación es válida independientemente de si las moléculas son monoatómicas o no. Deducir esta fórmula es un problema de mecánica estadística, y lo dejamos para el siguiente volumen. De vez en cuando haremos uso de este resultado aunque todavía no ha sido deducido.

18 Conforme hemos dicho antes, los conceptos de calor y temperatura no vienen al caso cuando consideramos núcleos, átomos o moléculas *aislados*: estos conceptos se aplican a la materia macroscópica. Sin embargo, en general no podemos efectuar nuestras mediciones en partículas aisladas: hemos de observar estas partículas formando cantidades macroscópicas de materia. Por lo tanto, el movimiento térmico desorganizado es a menudo un factor importante que hay que tomar en consideración cuando queremos comprender el comportamiento de



Energías características de los fenómenos físicos. Los datos seleccionados en esta página y en la que sigue se presentan para dar al lector una idea general de las energías típicas de diferentes fenómenos. Las energías se expresan en términos de algunas unidades de uso común; véanse las Secs. 14-16 para una explicación de las mismas.


E
eV
E
erg
N_0E
joule/mol
E/h
Hz
E/k
°K
ch/E
cm
Luz visible
Infrarrojo
Infrarrojo lejano
Microondas
Ondas de radio cortas
Ondas de radio medias
R_∞ (potencial de ionización del hidrógeno)
Raya ultravioleta en el mercurio
Energía de Fermi en la plata
Energía de enlace de la molécula H_2
Raya azul emitida por el mercurio
Raya D (amarilla) del sodio
Raya roja emitida por el cadmio
Calor de vaporización del alcohol etílico
Frecuencia de vibración de la molécula CO
Temperatura de Debye en el diamante
Calor de fusión del cobre
Temperatura de Curie del hierro
"Temperatura normal" (20°C)
Frecuencia de vibración de la molécula
Temperatura de Debye en el plomo
Punto de ebullición del hidrógeno
Calor de vaporización del helio
Temperatura a la cual el plomo pasa a ser superconductor
Punto de ebullición del helio (He^4)
Punto lambda del helio
Energía de interacción de dos magnetones de Bohr separados por 1Å
Temperatura de transición del cadmio al estado superconductor
Transición hiperfina en el cesio
Frecuencia de rotación observada en la molécula ICl
Raya del hidrógeno de 21 cm (transición hiperfina)
Magnetón de Bohr en 100 gauss
Energía de interacción de un magnetón de Bohr y un magnetón nuclear separados por 1 Å
Frecuencia de precesión del protón en 1000 gauss
Magnetón nuclear en 1000 gauss

los sistemas mecánico-cuántico y, en particular, cuando estudiamos las manifestaciones macroscópicas de fenómenos cuánticos.

La característica importante del movimiento térmico en un sistema consiste en que, desde nuestro punto de vista, es un movimiento *al azar*. Se introduce así un manifiesto elemento aleatorio en el comportamiento del sistema en tanto que observado por nosotros. Podemos decir que el movimiento térmico al azar es un "ruido en la sinfonía de la mecánica cuántica pura". Y podemos añadir que, con frecuencia, el ruido es tan fuerte que no se puede oir la música. En principio, cabría suprimir el movimiento térmico manteniendo el sistema que se estudia, y lo que lo rodea, a una temperatura en la inmediata vecindad de 0°K, porque el movimiento térmico cesa en el cero absoluto. En la práctica, esto no es posible; el movimiento térmico es un rasgo esencial del mundo en que vivimos.

Órdenes de magnitud característicos de la física molecular y atómica

19 Consideremos el átomo como un sistema dinámico constituido por un núcleo, de tamaño muy pequeño, rodeado por una nube de electrones. Éstos son atraídos por el núcleo e interactúan entre sí mediante fuerzas electromagnéticas. La creencia de que éstas son las únicas fuerzas de importancia en la determinación de la estructura de los átomos y moléculas descansa en la comparación entre teoría y experimento que se ha llevado a cabo hasta hoy.

La teoría cuántica de la interacción de las partículas cargadas con el campo electromagnético se conoce con el nombre de *electrodinámica cuántica.* Esta teoría, de la que forma parte el Principio de Relatividad Especial, es actualmente la teoría de los procesos fundamentales en que intervienen partículas elementales que cuenta con más éxito. Es la teoría dentro de la cual se trata de describir la estructura de átomos y moléculas, y la emisión y absorción de radiación edectromagnética por estos objetos.

20 Experimentalmente, el orden de magnitud del tamaño de un núcleo resulta ser de unos 10^{-13} cm, mientras que el tamaño de un átomo es aproximadamente de 10^{-8} cm. Por consiguiente, el núcleo es muy pequeño comparado con un átomo.

La masa de un núcleo es grande comparada con la masa de un electrón, igual a 0,0005486 u, siendo la razón de la masa del electrón a la del protón

$$\frac{m}{M_p} = \frac{1}{1836} \tag{20a}$$

Por lo tanto, es razonable esperar que, por lo menos en primera aproximación, el movimiento del núcleo no represente un papel esencial, con lo que, en esta aproximación, podemos considerar el núcleo como "infinitamente pesado" y, en consecuencia, fijo en el espacio. Dado que el núcleo, además, es muy pequeño, cabe hacer otra aproximación más, la de que es un "punto": el único papel que representa es el de proporcionar un campo electrostático definido por el potencial

$$V(r) = \frac{eZ}{r} \tag{20b}$$

donde e es una carga elemental y Z el número atómico.

El problema de la teoría atómica, en primera aproximación, es así el de estudiar el movimiento de los electrones en este campo electrostático, teniendo en cuenta también las repulsiones electrostáticas mutuas entre los electrones. Hay que recordar al lector que cuando hablamos de "movimiento" nos referimos al movimiento en el sentido de la mecánica cuántica. Más adelante explicaremos de modo preciso qué significa esto.

21 En un sentido restringido, el objeto de la electrodinámica cuántica son las interacciones de los electrones con el campo electromagnético. Consideremos las cantidades físicas que importan en esta teoría, a saber, la masa del electrón, m; la carga del electrón, $-e$; la velocidad de la luz, c, y la constante de Planck, $\hbar$. A partir de las constantes m, c y $\hbar$ podemos formar *unidades naturales de la electrodinámica* cuántica conforme se explicó en la Sec. 13: así, m es la unidad de masa, mc^2 la unidad de energía, $\hbar/mc$ la unidad de distancia y $\hbar/mc^2$ la unidad de tiempo. Además, $\hbar$ es la unidad de momento cinético y c la unidad natural de velocidad.

Hasta aquí no hemos considerado la carga elemental e. Esta constante representa el papel de *constante de acoplamiento;* nos dice con qué intensidad están acoplados los electrones con el campo electromagnético. * Intentemos formar una

* Éste es un modo común de expresarse. Sin embargo, tendría un sentido más profundo el decir que la constante de acoplamiento refleja cuán fuertemente interactúan las cargas elementales *entre sí.* Al fin y al cabo, el campo electromagnético es una construcción mental introducida con el fin de analizar interacciones entre *cargas.* •

cantidad de dimensión nula que mida la intensidad de dicho acoplamiento y consideremos la *energía electrostática de repulsión, expresada en las unidades naturales introducidas más arriba, de dos electrones separados por una distancia igual a la unidad natural.* Esta cantidad se representa por α y obtenemos

$$\alpha = \frac{e^2/(\hbar/mc)}{(mc^2)} = \frac{e^2}{\hbar c}$$

$$= (7{,}29720 \pm 0{,}00003) \times 10^{-3} \approx 1/137 \qquad (21a)^*$$

Esta constante α desempeña un papel fundamental en física atómica y se conoce con el nombre de *constante de estructura fina.* Puede considerarse como el cuadrado de la carga elemental en unidades naturales y describe la magnitud de esta carga de manera independiente de cualquier patrón físico macroscópico arbitrario. El hecho de que α sea numéricamente muy pequeña refleja una "debilidad" básica de las interacciones electromagnéticas; la energía electrostática de dos electrones separados por una distancia unidad es pequeña comparada con la energía en reposo de un electrón. La *constante de estructura fina es una de las constantes verdaderamente fundamentales de la naturaleza,* y en la actualidad es una constante puramente empírica en el sentido de que no contamos con ninguna explicación teórica del porqué de su valor. Igualmente pudiera "haber resultado" ser grande, en cuyo caso el universo tendría realmente un aspecto muy distinto. De hecho, *inconcebiblemente* distinto.

Examinando la ec. (21a), el lector debe observar que la *masa* del electrón no interviene en la expresión de α. En consecuencia, α es la constante de acoplamiento que describe el acoplamiento con el campo electromagnético de *cualquier* partícula elemental que lleva consigo la carga elemental e.

En la tabla 21A damos una lista de algunas cantidades importantes que podemos formar a partir de m, $\hbar$, c y e y también los nombres con que se conocen estas cantidades.

22 En la Sec. 51, Cap. 1, discutimos un aspecto de la teoría semiclásica de Bohr del átomo de hidrógeno, a saber, el tamaño de este átomo, y afirmamos que la constante a_0, definida en la ec. (51c) de dicho capítulo, es un tamaño atómico típico.

* Esta expresión de α se aplica en el sistema de unidades CGS. En el sistema MKS, tenemos: $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$.

El lector observará que esta constante, conocida como *primer radio de Bohr (en el átomo de hidrógeno),* es la misma que la dada en la tabla 21A. En la discusión presentada en el capítulo 1, a_0 aparecía como el radio de una órbita circular del electrón en el modelo planetario del átomo, y de aquí su nombre. En la discusión mecánico-cuántica del átomo de hidrógeno, esta constante se interpreta de modo diferente: $1/a_0$ es el valor medio de $1/r$ en el estado fundamental del átomo, donde r es la distancia entre el electrón y el protón. Tanto en un caso como en el otro, a_0 puede considerarse como la distancia "típica" entre el electrón y el protón.

23 Prosigamos con la discusión semiclásica del capítulo 1 e intentemos estimar la energía de enlace del electrón en el átomo de hidrógeno. Para un electrón que se mueve con velocidad v (y, por consiguiente, con un impulso $p = mv$) a una distancia r del protón, la energía E viene dada por

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} \tag{23a}$$

Si la órbita es circular y de radio $r = a_0$, la condición de equilibrio dinámico se escribe

$$\frac{mv^2}{a_0} = \frac{e^2}{{a_0}^2} \tag{23b}$$

y combinando esta ecuación con la ec. (23a), obtenemos

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{a_0}\right) - \frac{e^2}{a_0} = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 = -R_\infty \tag{23c}$$

La energía del electrón en esta órbita es así $-R_\infty$, o sea, de unos $-13{,}6$ eV. Esta energía se ha de comparar con la energía total cuando el electrón se encuentra a distancia infinita del protón y en reposo; un simple examen de la ecuación (23a) nos dice que esta energía es igual a cero. Por lo tanto, para separar por completo al electrón de la órbita circular considerada, hemos de proporcionar al átomo una energía R_∞. Esta energía se llama *energía de ionización.* La energía de ionización, expresada en función del número de onda equivalente,

TABLA 21A Más constantes físicas

Energía en reposo del electrón

$mc^2 = (0{,}511006 \pm 0{,}000002)$ MeV

Longitud de onda de Compton del electrón

$\lambda\!\!\!^{-}_e = \dfrac{\hbar}{mc} = (3{,}86144 \pm 0{,}00003) \times 10^{-11}$ cm

Primer radio de Bohr

$a_0 = \dfrac{\hbar^2}{me^2} = \alpha^{-1}\lambda\!\!\!^{-}_e$

$= (5{,}29167 \pm 0{,}00002) \times 10^{-9}$ cm

Potencial de ionización no-relativista del hidrógeno con masa del protón infinita

$R_\infty = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 = (13{,}6053 \pm 0{,}0002)$ eV

Constante de Rydberg para el protón de masa infinita

$\tilde{R}_\infty = \dfrac{\alpha}{4\pi a_0} = R_\infty/hc$

$= (109737{,}31 \pm 0{,}01)\ \text{cm}^{-1}$

se conoce con el nombre de constante de Rydberg. La designaremos por $\tilde{R}_\infty$.*

Ocurre así, y en principio hemos de considerar esto como algo "accidental", que la simple estimación basada en el modelo planetario, por otra parte no muy convincente, da *precisamente* la misma energía de ionización R_∞ que la teoría rigurosa mecánico-cuántica y R_∞ es, por lo tanto, la energía de ionización del hidrógeno o, dicho de otro modo, $-R_\infty$ es la energía en el *estado fundamental* del átomo de hidrógeno.

El caso es que, además, las energías de ionización de *todos* los átomos (es decir, el trabajo necesario para separar *un* electrón del átomo), es más o menos del orden de 10 eV; más adelante volveremos a considerar esta cuestión.

24 Veamos cómo el carácter débil de las fuerzas electromagnéticas, es decir, la pequeñez de la constante de acoplamiento α, se manifiesta en la estructura del átomo de hidrógeno. Si la constante de acoplamiento fuese del orden de la unidad, cabría esperar que el tamaño del átomo fuera del orden de la unidad natural de longitud en electrodinámica cuántica, es decir, la longitud de onda de Compton $\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/mc$. La constante de acoplamiento, sin embargo, es "pequeña" ($\alpha \approx 1/137$) y el campo de Coulomb del núcleo es incapaz, por lo tanto, de mantener el electrón confinado dentro de una longitud de onda de Compton. La órbita del electrón es *grande* tomando como unidad la natural en electrodinámica cuántica, a saber, el radio $a_0 = \lambda\!\!\!^{-}_e/\alpha$.

La velocidad del electrón en la órbita se obtiene despejando v en la ec. (23b):

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{ma_0}} = \alpha c \tag{24a}$$

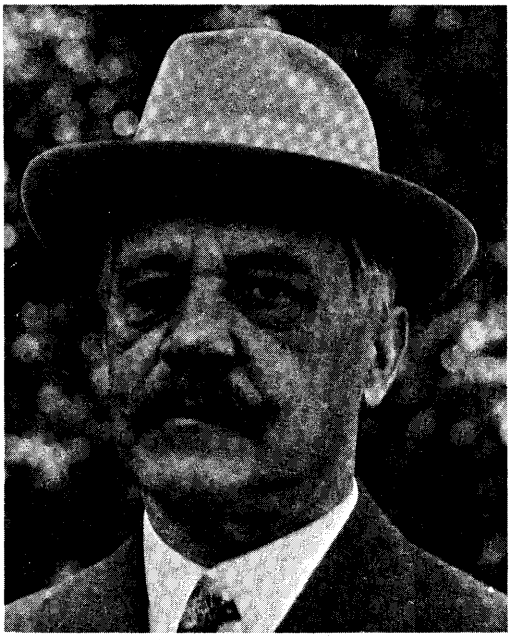
La velocidad es, por consiguiente, 137 veces más pequeña que la unidad natural, que es la velocidad de la luz c. Esto constituye una justificación a posteriori de nuestro análisis no-relativista de este problema.

La energía cinética, E_{cin}, y la energía potencial, E_{pot}, vienen dadas por

$$E_{\text{cin}} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(\alpha c)^2 = R_\infty \tag{24b}$$

$$E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{a_0} = E - E_{\text{cin}} = -2R_\infty = -2E_{\text{cin}} \tag{24c}$$

* El subíndice ∞ en R_∞ y en $\tilde{R}_\infty$ se refiere al modelo en el cual el protón tiene masa infinita y se encuentra en reposo. La energía de ionización verdadera es algo menor.



Arnold Sommerfeld. Nacido en Königsberg, Alemania (ahora, Kaliningrado, URSS), en 1868; falleció en 1951. Durante muchos años, profesor de física en la Universidad de Munich.

Sommerfeld contribuyó de modo importante al desarrollo de la física cuántica y, en particular, a la teoría atómica en su fase primera. Perfeccionó la teoría de Bohr en dos direcciones: incluyó las órbitas elípticas y tuvo en cuenta la teoría de la relatividad especial. Su teoría relativista del átomo de hidrógeno introdujo en la física la constante de estructura fina. (Fotografía proporcionada por el profesor L. B. Loeb, Berkeley.)

Tomando como base estas consideraciones, cabe decir que el átomo de hidrógeno es una estructura extensa muy poco rígida. El lector debe reflexionar muy cuidadosamente acerca de esto y acerca del papel que la constante de estructura fina representa en la teoría de los átomos.

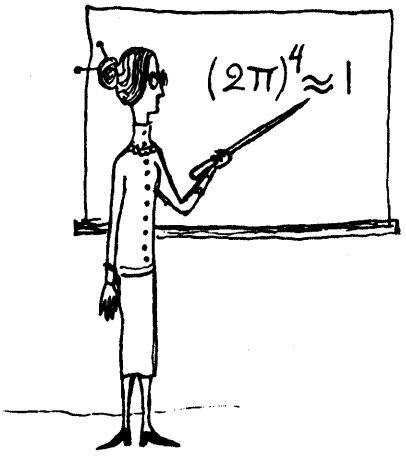
25 Dado que la velocidad del electrón ha resultado ser pequeña en nuestra descripción semiclásica, es razonable esperar que sea posible describir el átomo en una versión no-relativista de la mecánica cuántica. En esta teoría la velocidad de la luz no debiera representar ningún papel si consideramos las constantes m, $\hbar$ y e como constantes básicas; en particular, ha de ser posible expresar el radio de Bohr a_0 y la energía de ionización R_∞ en función exclusivamente de estas constantes. Así es, en efecto, y encontramos

$$a_0 = \frac{\lambda\!\!\!^{-}_e}{\alpha} = \frac{\hbar^2}{me^2} \tag{25a}$$

y

$$R_\infty = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 = \frac{e^2}{2a_0} = \frac{e^4 m}{2\hbar^2} \tag{25b}$$

La velocidad de la luz no aparece en el último miembro de estas expresiones. Además, la longitud a_0 es la única longitud, y la energía R_∞ la única energía que podemos formar a partir de las constantes m, $\hbar$ y e. Podemos, por lo tanto, argüir que, puesto que estas constantes son los ingredientes de la teoría mecánico-cuántica no-relativista (que por el momento desconoce el lector), toda longitud calculada dentro de la misma debe ser un múltiplo numérico de a_0 y, análogamente, toda energía debe ser un múltiplo numérico de R_∞. (Múltiplo numérico significa aquí un número independiente de las tres constantes. Es de esperar que en una teoría "razonable" tales números sean "del orden de la unidad".)



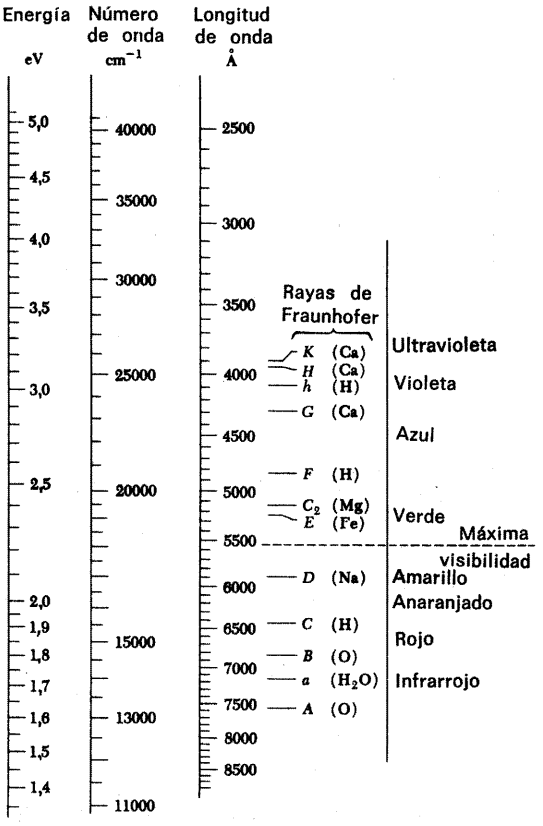
26 Es probable que el lector tenga la impresión de que estos "razonamientos" son muy forzados. ¿Qué valor puede tener un argumento basado en el modelo de Bohr, del que antes hemos dicho que era muy desacertado? ¿Y hasta qué punto hemos de tomar en serio el "argumento dimensional" de la sección que precede? ¿No podría ocurrir que la constante "de orden de magnitud unidad", que da la energía correcta en función de R_∞, de hecho resulte ser algo así como 4711 o tal vez $(2\pi)^{-4}$? Estos valores de las constantes darían lugar a una notable diferencia en nuestra estimación.

La respuesta es que muy bien pudiera ocurrir así, pero el autor, que tiene una cierta experiencia, sabe que realmente esto no ocurre; la constante es igual a la unidad. Acerca de las "simples deducciones" de este tipo, que encontramos frecuentemente en los textos de física, el escéptico puede observar siempre que los argumentos funcionan al parecer de manera particularmente correcta en todos los casos en los que se conocen o bien los resultados experimentales, o bien los resultados de una teoría más completa.

En defensa de lo hecho diremos que: (i) pretendemos dar una idea de los órdenes de magnitud en la física atómica y molecular. En vez de limitarnos a decir al lector que la energía de ionización del hidrógeno es 13,6 eV, hemos de intentar establecer una relación entre este valor 13,6 eV y ciertas expresiones formadas a partir de las constantes básicas. Desde este punto de vista está bien saber que 13,6 eV es igual a $\alpha^2 mc^2/2$, y está bien saber que 0,53 Å es igual a $(1/\alpha)\ (\hbar/mc)$. Nuestro análisis de la electrodinámica cuántica y de su importancia para el átomo de hidrógeno nos proporciona por lo menos *un cierto* entendimiento de cómo todo ello puede estar entrelazado. El autor, ciertamente, no hubiera presentado estas ideas si no poseyeran su elemento correspondiente en la teoría precisa. Nuestros "razonamientos" son, en consecuencia, por lo menos útiles como recursos nemotécnicos.

(ii) Hay que admitir que la teoría de Bohr está equivocada. Por otra parte, el lector sabe, sin duda, que tuvo éxito en algunos casos, aunque fracasó malamente en otros. En un sentido vago, la teoría contiene, por consiguiente, *ciertos* elementos de verdad. Introduce la constante de Planck en la física, e introduce así una relación entre posición e impulso que en modo alguno se presenta en una teoría puramente clásica: algo así como $rp \sim \hbar$. Podemos adoptar el punto de vista de que nuestro razonamiento basado en la teoría de Bohr era, en realidad, esencialmente un experimento con una relación de este tipo: $rp \sim \hbar$. Más adelante trataremos esta relación de manera diferente, y discutiremos un método para estimar el tamaño del átomo de hidrógeno y la energía de ionización del mismo, apoyándonos en la relación de indeterminación. Al mismo tiempo, lograremos comprender mucho mejor por qué el átomo de hidrógeno no experimenta un colapso.

(iii) El argumento dimensional presentado en la Sec. 25 sería mucho más convincente de estar ligado con un estudio serio de una determinada ecuación para la descripción mecánico-cuántica del átomo de hidrógeno, por ejemplo, la llamada



La vecindad espectral de la luz visible. Las rayas de Fraunhofer son rayas de absorción (rayas oscuras) muy notables en el espectro solar. La columna de la izquierda caracteriza estas rayas según la antigua notación mediante letras, y en la columna de la derecha se da el símbolo químico que identifica el átomo o molécula causa de la absorción.

La asignación de colores a las diferentes regiones espectrales es, claro está, tan sólo aproximada. Obsérvese que el punto de máxima visibilidad corresponde a unos 5500 Å.

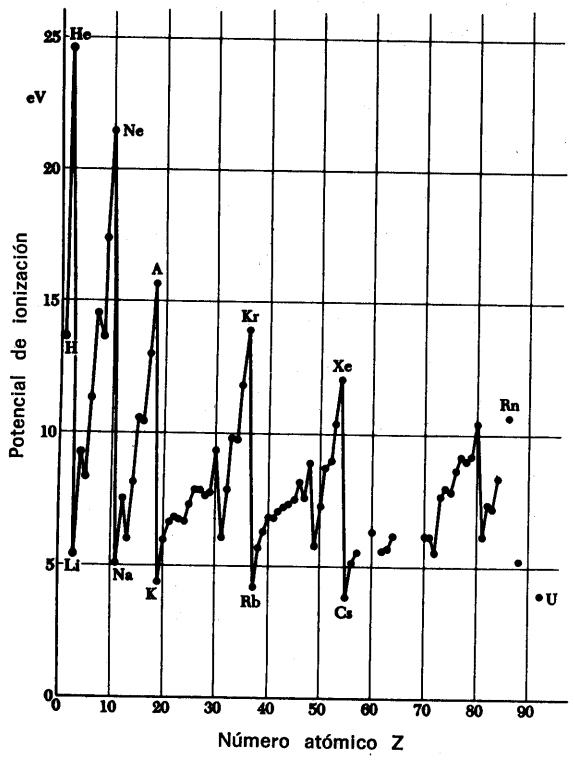


Fig. 27A Gráfico que muestra los potenciales de ionización de los átomos en función del número atómico. El potencial de ionización es la energía necesaria para separar un electrón del átomo neutro. Vemos que esta energía es *en primera aproximación* del mismo orden de magnitud para todos los átomos, es decir, del orden de 10 eV.

El lector que esté algo familiarizado con la química notará inmediatamente que existe una marcada correlación entre el valor del potencial de ionización y las propiedades químicas del elemento. El potencial de ionización es particularmente grande para los gases nobles y particularmente pequeño para los metales alcalinos.

ecuación de Schrödinger. Sin resolver efectivamente esta ecuación, podríamos fácilmente deducir que no se presentan números tales como 4711 o $(2\pi)^{-4}$. Para llegar a esta conclusión debemos poseer, naturalmente, cierta experiencia en lo que concierne a la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. (La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial.) Los argumentos dimensionales son particularmente útiles cuando se mezclan con un buen conocimiento de los rasgos generales de una teoría.

Nuestro simple argumento dimensional es una introducción a argumentos de este tipo. Se ha dicho al lector que existe una teoría "buena"; ¿qué cabe esperar que nos dé esta teoría? Ésta es la cuestión que hemos formulado y contestado.

27 Prosigamos ahora con nuestras consideraciones de física atómica e intentemos alcanzar un conocimiento aproximado de la estructura de los átomos pesados, es decir, de aquellos en que el número atómico Z es grande. Sin duda alguna, el lector ha oído decir que la nube de electrones en torno de un núcleo de este tipo posee una estructura en capas, en cierto sentido, e intentaremos basar nuestra discusión en esta idea. Imaginemos que construimos el átomo partiendo del núcleo desnudo y añadiendo luego los electrones uno a uno. ¿Cuán fuertemente estará ligado el primer electrón?

La expresión de la energía del sistema toma ahora la forma

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 Z}{r} \tag{27a}$$

y basta reflexionar un momento para ver que la discusión relativa al caso del átomo de hidrógeno sigue siendo válida, con tal que substituyamos la constante de estructura fina α por αZ. En otras palabras, el *primer* electrón estará ligado para un valor de la energía

$$e_1 = -Z^2 R_\infty = -Z^2\,(13{,}6\text{ eV}) \tag{27b}$$

y a una "distancia" del núcleo igual a

$$r_1 = \frac{a_0}{Z} \tag{27c}$$

Cuando Z es grande, esta distancia es pequeña comparada con el radio de Bohr del hidrógeno a_0. El electrón que se añade luego estará también ligado a una distancia pequeña y la energía de enlace será grande comparada con la energía de ionización del hidrógeno; la fuerza de repulsión electrostática entre los dos electrones es, evidentemente, Z veces más pequeña

que la fuerza de atracción hacia el núcleo. Consideremos el aspecto del *ion* después de haber añadido unos pocos electrones. Todos éstos estarán ligados dentro de una distancia al núcleo que es pequeña y, si hay n de estos electrones, el ion se parece a un "núcleo" de carga $(Z-n)e$ visto desde más allá de la distancia a la que los electrones se encuentran ligados. El electrón siguiente, por lo tanto, deberá necesariamente estar también fuertemente vinculado *a menos que* $(Z-n)$ sea pequeño, pero, de estarlo, lo estará *menos* que el *primer* electrón. Podemos así imaginar que los sucesivos electrones estarán cada vez menos y menos ligados, y que después de haber añadido $(Z-1)$ electrones, el ion aparece como una nube de carga cuyo valor es e y de un tamaño comparable a la órbita de Bohr a_0. La energía de enlace del *último* electrón añadido será, por consiguiente, del orden de R_∞, es decir, del orden de diez electrón-volts. El tamaño final del átomo será del orden del radio de Bohr a_0.

28 Ciertamente, esta imagen es muy tosca. Obsérvese que no hemos probado, ni incluso hecha plausible, la idea de que la nube de electrones posee una "estructura en capas". Nuestra discusión, sin embargo, estuvo basada en dicha idea; hemos "construido" el átomo de manera particular.

Ahora bien, es un hecho que para entender realmente la estructura de los átomos, hemos de tener en cuenta un principio fundamental de la física no mencionado hasta aquí y por completo extraño a la física clásica. Este principio se conoce con el nombre de *principio de exclusión*. Según él, nunca dos electrones pueden encontrarse en un átomo en el mismo estado de movimiento. Los electrones "se evitan". (Este "evitarse" es algo del todo diferente de la repulsión de Coulomb entre dos partículas de igual carga. Para comprender realmente el significado del principio de exclusión es necesario un cierto grado de conocimiento de mecánica cuántica.) El principio de exclusión es la clave para explicar la estructura atómica. Tiene profundas consecuencias, y el universo sería inconcebiblemente distinto si dicho principio no se observara por la naturaleza. Que efectivamente así es no resulta en absoluto obvio en este estadio.

El principio de exclusión fue descubierto por Wolfgang Pauli en 1924 al analizar los hechos empíricos de la física atómica tal como se conocían en aquel tiempo. *

* W. Pauli, "Über den Zusammenhang des Abschlusses der Electronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren", *Zeitschrift für Physik* **31**, 765 (1925).



Wolfgang Pauli. Nació en Viena, Austria, en 1900; falleció en 1958. Después de doctorarse en 1921, Pauli pasó cierto tiempo en la Universidad de Göttingen y en el Instituto Bohr en Copenhague. En 1928 aceptó la cátedra de física teórica en la Escuela Técnica Superior (ETH) de Zürich, Suiza. Recibió el Premio Nobel en 1945.

Pauli fue uno de los más sobresalientes físicos teóricos de este siglo. Su contribución fue muy importante en muchas áreas, que van desde la estructura atómica hasta la teoría cuántica de los campos y las partículas elementales. El trabajo de Pauli se caracterizó por una profunda penetración física, al igual que por una gran habilidad matemática, y fue conocido (y temido) como crítico severo de las oscuras maneras de pensar. Su descubrimiento del principio de exclusión y de la conexión entre spin y estadística son, acaso, sus más famosos logros. (Fotografía proporcionada por Physics Today.)

29 Por lo tanto, hay que reconocer que nuestra discusión tiene *muchos* defectos, pero, con todo, nos proporciona una cierta imagen de la naturaleza de los átomos pesados. De esta imagen se sigue que las transiciones en el estado de movimiento de los electrones más externos u *ópticos* supondrá energías del orden de un electrón voltio, lo que más o menos corresponde a longitudes de onda de los fotones emitidos en la *región óptica,* es decir, en el intervalo de energías 1,8 - 3,0 eV, o en el intervalo de las longitudes de onda 7000 - 4000 Å. Las transiciones en que intervienen los *electrones más internos,* por otra parte, corresponden a energías relativamente mucho mayores, que llegan a alcanzar los 70 keV (= 70000 eV), lo que corresponde a longitudes de onda que bajan hasta los 0,2 Å. Estos fotones se encuentran en la región del ultravioleta extremo o en la de los rayos X. La dependencia de estas energías de transición respecto del número atómico Z es la dada por la fórmula (27b).

Obsérvese que el átomo, cuyo tamaño típico es de 1 Å, es *pequeño* comparado con la longitud de onda de los fotones ópticos. Esta circunstancia es consecuencia de la pequeñez de la constante de acoplamiento α, y para ver que es así acudiremos a las siguientes consideraciones:

La energía de enlace de un electrón óptico es del orden de $\alpha^2 mc^2$. Las energías de transición características de este tipo de electrones son del mismo orden de magnitud; no hay duda de que no podrían ser mayores. La transición entre dos estados cuasiestacionarios de uno de los electrones más externos está asociada con la emisión o absorción de un fotón de energía igual a la diferencia de energías entre los dos niveles y, por lo tanto, la correspondiente longitud de onda de este fotón será del orden de

$$\lambda_{\text{opt}} \sim \frac{2\pi\hbar c}{\alpha^2 mc^2} = \frac{2\pi a_0}{\alpha} \approx 1000\, a_0 \qquad (29a)$$

lo que explica el orden de magnitud de la razón de la longitud de onda al tamaño del átomo.

30 Hemos conseguido ahora un considerable entendimiento del porqué de los órdenes de magnitud que cuentan en el campo de la *física atómica.* Intentemos ahora decir algo acerca de las moléculas. Aquí el problema crucial consiste en explicarse el enlace molecular; ¿por qué los átomos forman a veces moléculas estables y otras no? Para entender *realmente* estas

cuestiones se requieren métodos mucho más refinados que los que hemos utilizado para los átomos. Sin embargo, podemos intentar responder a una pequeña parte de la cuestión general y preguntarnos: dando por sentado que los átomos forman realmente moléculas estables en ciertos casos, ¿cuál es la energía de enlaces característica y cuál es la separación característica de dos átomos en una molécula?

Consideremos el caso más simple, a saber, una molécula de hidrógeno, que es un estado de enlace del sistema de dos protones y dos electrones. Veamos de estimar la energía de enlace y la distancia internuclear mediante un argumento dimensional; éste se refiere así a aquellos casos favorables en los que, efectivamente, se produce el enlace, como en el caso de la molécula de hidrógeno.

Dado que el protón es mucho más pesado que el electrón, de nuevo el *movimiento* de los protones no representará papel esencial alguno en la determinación del estado fundamental de la molécula de hidrógeno. En primera aproximación se pueden considerar, en efecto, los dos protones como estacionarios, separados por una distancia fija d, y estos dos protones están entonces rodeados por la "nube" de los dos electrones. Imaginemos que hallamos la energía del estado fundamental de éstos en función de la separación entre protones d. Para un cierto valor de d, dicha energía tomará su valor mínimo, y para esta energía tenemos una molécula estable. Nuestro problema es no-relativista, y dado que los protones se consideran como infinitamente pesados, disponemos solamente de las constantes m, $\hbar$ y e. La única energía "natural" es, en tal caso, R_∞, y la única distancia "natural", el radio de Bohr a_0. Estas cantidades deben, por consiguiente, ser características de las moléculas. Un estudio más cuidadoso confirma esta sospecha, que está también de acuerdo con los hechos experimentales. La energía de enlace real de la molécula de hidrógeno es de unos 4,5 eV y el valor medio de la separación de los dos protones es aproximadamente de 0,75 Å. Estos valores son típicos para las moléculas en general; las energías de enlace molecular son del orden de 1-10 eV y las separaciones internucleares son del orden de un ångström, es decir, del orden de 10^{-8} cm.

El mismo "mecanismo" que mantiene unida una molécula, mantiene también unidos los sólidos y la separación típica entre dos átomos vecinos en un sólido es también del orden de 1 Å.

TABLA 30A Características de algunas moléculas diatómicas elegidas relativamente al azar

Molécula	Distancia entre núcleos A	Energía de disociación eV
AgH	1,62	2,5
BaO	1,94	4,7
Br_2	2,28	1,97
CaO	1,82	5,9
H_2	0,75	4,5
HCl	1,27	4,4
HF	0,92	6,4
HgH	1,74	0,38
KCl	2,79	4,42
N_2	1,09	9,76
O_2	1,20	5,08

31 Estas estimaciones nos permite explicarnos ahora el orden de magnitud de la energía liberada o absorbida en una *reacción química.* El proceso elemental en una reacción química consiste en que dos o más moléculas diferentes chocan y forman una o más moléculas nuevas. La energía asociada con esta redistribución de los átomos en nuevas moléculas debe ser del orden de las energías de enlace molecular típicas y, por consiguiente, del orden de 1-10 electrón-volts por cada proceso elemental. En consecuencia, las *energías de reacción macroscópicas* son del orden de (1-10) $\times N_0$ electrón-volts/mol, es decir, de unas 20000-200000 cal/mol. Como ejemplo, podemos considerar la combustión de gas hidrógeno en una atmósfera de cloro, de acuerdo con la reacción

$$H_2 + Cl_2 = 2HCl + (44\,000 \text{ calorías}) \qquad (31a)$$

El orden de magnitud concuerda con la estimación a que llegamos.

32 Nuestras unidades macroscópicas presentan un rasgo curioso que merece un comentario. Hemos dicho que las unidades cm, g y s se refieren a características humanas y no nos sorprende, por lo tanto, que estas unidades no sean particularmente adecuadas para tratar de los átomos. Sin embargo, *una* unidad macroscópica parece ocupar una posición especial: el volt como unidad de potencial, en tanto que la unidad derivada electrón-volt es la "medida justa para los átomos". ¿Es esto una casualidad?

La respuesta es no. Originalmente, la unidad volt se eligió de modo que la fem de un elemento voltaico fuese del orden de un volt. De hecho, la fem de un cierto elemento patrón de mercurio-cadmio difiere muy poco de un volt. Sabemos que el funcionamiento de uno de estos elementos se basa en una reacción electroquímica que tiene lugar en el mismo, y por cada electrón que abandona el terminal de la batería debe ocurrir un proceso químico elemental. En cada uno de estos procesos elementales se libera una energía de, digamos, X eV y esta energía ha de convertirse en energía mecánica o térmica fuera de la pila. Si la fem de esta es U, debemos tener $Ue = X$ y dado que, por la elección del volt como unidad, U es del orden de un volt, de aquí se sigue que la energía de reacción electroquímica típica es del orden de un electrón-volt. Esto explica el misterio de por qué el electrón-volt es adecuado como unidad de energía en la física atómica y molecular; ¡el volt es en realidad una unidad atómica!

Los hechos más fundamentales de la física nuclear

33 Los sillares con que se construyen los núcleos son los protones y los neutrones. Protones y neutrones poseen en común importantes propiedades físicas y, con frecuencia, se consideran como dos estados de carga diferentes de una "única" partícula llamada *nucleón*. El nucleón se presenta así en dos versiones: la versión cargada, que es el protón, y la versión neutra, que es el neutrón *.

El número A de nucleones en un núcleo es el *número másico* o *número de nucleones*. El número Z de protones se conoce con el nombre de *número de carga* o, cuando hablamos del correspondiente átomo, como *número atómico.*

Las masas del protón y del neutrón son

$$M_p = (1{,}00727663 \pm 0{,}00000008)\ \text{u} = (938{,}256 \pm 0{,}005)\ \text{MeV}/c^2 \qquad (33a)$$

$$M_n = (1{,}0086654 \pm 0{,}0000004)\ \text{u} = (939{,}550 \pm 0{,}005)\ \text{MeV}/c^2 \qquad (33b)$$

Consideremos un núcleo de número másico A y número de carga Z. Sea $M(A,Z)$ su masa. La cantidad

$$\Delta(A,Z) = (ZM_p + (A - Z)M_n) - M(A,Z) \qquad (33c)$$

se llama *defecto de masa* del núcleo. Esta cantidad es *positiva,* circunstancia ésta que tiene una interpretación sencilla: la cantidad $\Delta(A,Z)c^2$ es igual a la *energía de enlace* del núcleo, o a la energía que hay que suministrar para descomponer por completo el núcleo en sus constituyentes elementales, es decir, en protones y neutrones.

Es un *hecho de experiencia* que la energía de enlace por nucleón es *aproximadamente* la misma para todos los núcleos estables a saber,

$$\frac{\Delta(A,Z)c^2}{A} \sim 8\ \text{MeV} \qquad (33d)$$

Hay algunas marcadas excepciones entre los núcleos muy ligeros, y también se advierte una ligera disminución sistemática de la energía de enlace media a medida que aumenta el número de masa A, como vemos en la fig. 33a.

* El neutrón fue descubierto por Chadwick en 1932. (J. Chadwick, "The Exstence of a Neutron", *Proceedings of the Royal Society* (Londres), serie A, **136, 692 [1932]).**

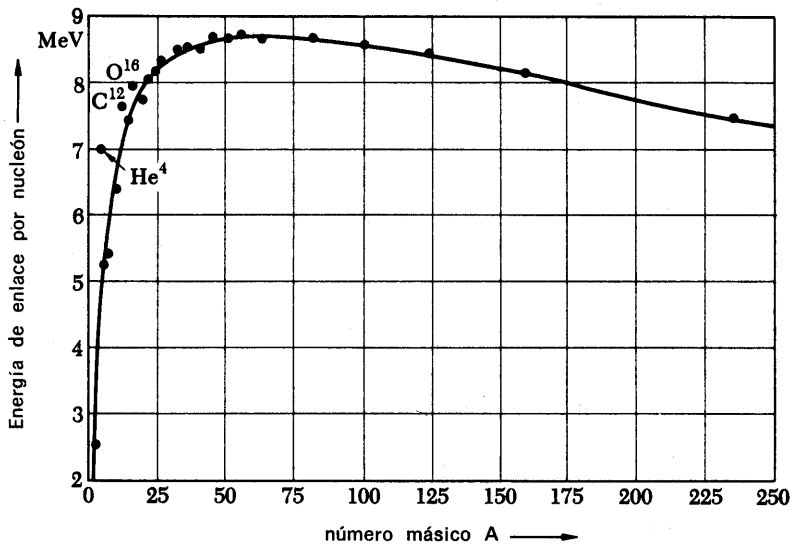


Fig. 33A Representación gráfica de la energía de enlace por nucleón, $\Delta(A,Z)c^2/A$, en función del número másico A. Los puntos se refieren a determinados núcleos, algunos de los cuales se identifican por su símbolo. Las irregularidades correspondientes a los núcleos más ligeros no quedan bien representadas por la curva lisa del gráfico, pero para $A > 25$ dicha curva constituye una buena representación de los hechos.

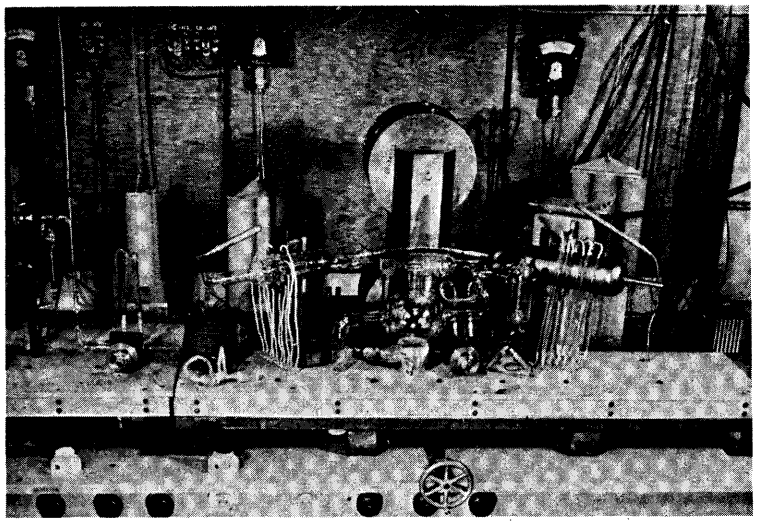
La energía de enlace por nucleón es en *primera aproximación* de 8 MeV. A medida que aumenta el número másico, disminuye lentamente la energía de enlace por nucleón. Esta tendencia sistemática es consecuencia de la energía de repulsión electrostática de los protones dentro del núcleo.

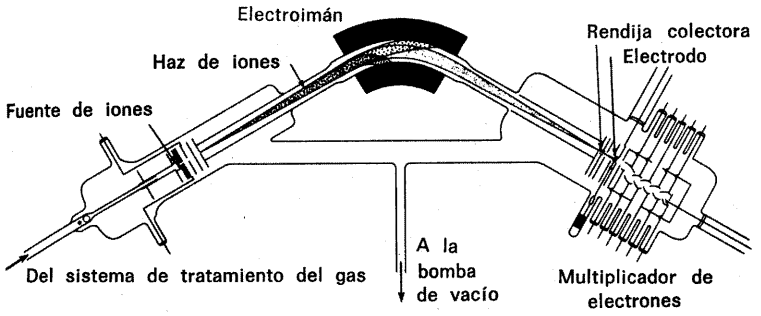
34 El lector ha de tener en cuenta que los valores de las masas que se dan en la mayoría de tablas de masas "nucleares" se refieren, de hecho, a las masas de los correspondientes *átomos* neutros. Si $M(A,Z)$ es la masa de un *núcleo* y $\bar{M}(A,Z)$ la masa del átomo correspondiente, tenemos

$$\bar{M}(A,Z) = M(A,Z) + Zm - B(Z) \qquad (34a)$$

donde m es la masa del electrón y la cantidad positiva $B(Z)$ expresa la energía de enlace de todos los electrones en el átomo.

Al considerar el balance energético en una reacción nuclear, en la mayoría de los casos no habrá diferencia alguna entre usar las verdaderas masas nucleares o las masas atómicas asociadas, porque las contribuciones debidas a las masas de los electrones se compensan si utilizamos las segundas. La energía de enlace $B(Z)$ es muy pequeña comparada con la energía de enlace nuclear de 8 MeV por nucleón, y cabe prescindir de ella casi siempre. La razón por la cual se dan las masas atómicas en vez de las masas nucleares consiste en que las masas atómicas se pueden medir de un modo más directo. Mediante experimentos de deflexión en campos eléctricos y magnéticos combinados con un instrumento especialmente desarrollado para este fin, llamado *espectrógrafo de masas,* podemos determinar las razones de la carga a la masa para iones. Este trabajo lo iniciaron J. J. Thomson y F. Aston, y ha conducido a un





Figs. 34A-B Espectrómetro de masa destinado al análisis de pequeñas muestras de gases nobles contenidos en aerolitos. Lo que aquí se persigue no es medir con precisión valores de masas atómicas, sino determinar las abundancias relativas de los isótopos del elemento (xenón) tal como se presentan en el meteorito. Los datos obtenidos pueden utilizarse para estimar la edad del meteorito, lo que es de gran interés en nuestros intentos de comprender el origen y desarrollo del sistema solar. Para una descripción de este trabajo, véase J. H. Reynolds, "The age of the elements in the solar system", *Scientific American* **203**, 171 (Nov. 1960).

Arriba se presenta una fotografía del instrumento, y el principio del funcionamiento puede comprenderse examinando el dibujo de la parte inferior. La muestra de gas noble, que se introduce por la izquierda en el recipiente de vidrio vacío, se ioniza por bombardeo con electrones en la fuente de iones. Los iones son acelerados y desviados por el electroimán que aparece en medio. Las piezas polares y las bobinas del mismo se pueden ver en la parte media de la fotografía. Diferentes isótopos se desvían en cantidades diferentes y, variando la intensidad del campo magnético, la corriente que pasa por la rendija del colector a la derecha se puede medir para cada isótopo sucesivamente. La abundancia del isótopo es, claro está, proporcional a la corriente. El campo magnético es cuneiforme a fin de conseguir un enfoque parcial de los haces iónicos. (Ilustraciones proporcionadas por el profesor J. D. Reynolds, Berkeley.)

conocimiento preciso de un gran número de masas atómicas *.

El espectrógrafo de masas puede usarse también para determinar las abundancias de los diferentes isótopos en un elemento químico que se presenta naturalmente, y una vez se conocen estas abundancias podemos obtener información acerca de las masas "nucleares" a partir de los pesos atómicos químicos.

Finalmente, se consigue información relativa a las masas de los núcleos mediante un estudio de la cinética de las reacciones nucleares.

35 La razón Z/A del número de carga al número másico presenta una tendencia sistemática cuando la consideramos en

* F. W. Aston, "Isotopes and Atomic Weights", *Nature* **105**, 617 (1920). Vease también F. W. Aston, *Mass Spectra and Isotopes* (Edward Arnold and Company, Londres, 1942).

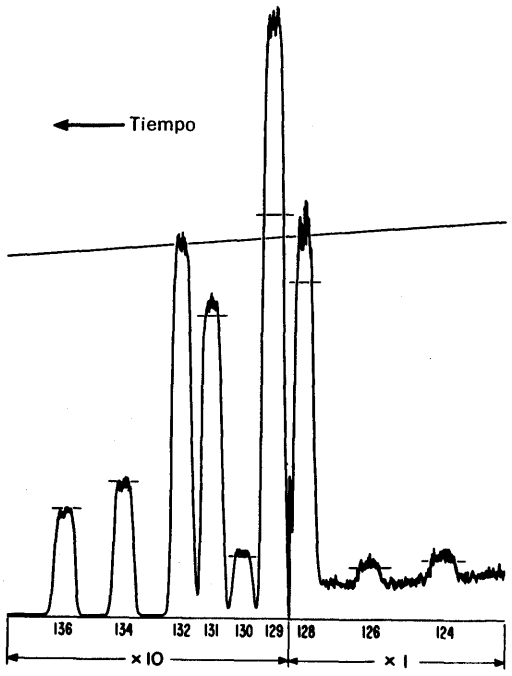


Fig. 34C Espectro de masas registrado con el aparato que presentan las figs. 34A-B, para xenón extraído de un aerolito. El gráfico se ha tomado de J. H. Reynolds, "Determination of the age of the elements", *Physical Review Letters* **4**, 8 (1960). Las cortas barras horizontales indican las abundancias isotópicas para muestras de xenón terrestres. Como podemos ver, la muestra del meteorito es más rica en el isótopo Xe^{129}. Obsérvese que el gráfico se ha trazado según dos escalas verticales diferentes. (Proporcionado por Physical Review Letters.)

función del número másico A. Para núcleos no demasiado pesados —por ejemplo, para A menor que 50— esta razón es igual aproximadamente a 1/2. A medida que A crece, el valor de la razón decrece lentamente; para el isótopo de uranio $_{92}U^{238}$ tiene el valor $Z/A = 0{,}39$. Para A muy pequeño encontramos nuevamente ciertas irregularidades; el hidrógeno, por ejemplo, tiene tres isótopos $_1H^1$, $_1H^2$ (deuterio) y $_1H^3$ (tritio).

Algunos núcleos son estables, mientras que otros son inestables y decaen por emisión de partículas o de rayos gamma. Los núcleos que se presentan en la naturaleza o son absolutamente estables, o tienen vidas muy largas; de no ser así, se hubieran desintegrado en cierto estadio primitivo de la historia de la Tierra y ya no existirían. Los núcleos formados en las reacciones nucleares pueden tener vidas muy cortas, del orden de una pequeña fracción de segundo. Cuando la vida es *muy* corta, hablamos a menudo de un *estado excitado* de un núcleo, sobre todo si el decaimiento tiene lugar por emisión de un rayo gamma, en cuyo caso A y Z no cambian.

Actualmente se conocen unos 900 núcleos, de los cuales aproximadamente 280 son estables. Si representamos gráficamente estos núcleos en el plano (Z,A), los puntos que representan a los núcleos individuales tienden a acumularse a lo largo de una curva lisa, de acuerdo con lo dicho antes. (Véase fig. 35a). Cuanto más alejados se encuentra un núcleo de la "curva central", tanto más tiende a ser inestable.

36 Se ha encontrado experimentalmente que un núcleo posee un tamaño bastante bien definido, y que se puede considerar como una esfera de materia nuclear de radio

$$r \cong r_0 A^{1/3} \qquad \text{donde } r_0 = 1{,}2 \times 10^{-13}\ \text{cm} = 1{,}2\ \text{fermi} \qquad (36a)$$

(El nombre de la unidad *fermi* $= 10^{-13}$ cm, se ha adoptado en honor de Enrico Fermi y se emplea a menudo como unidad de longitud en la física de las partículas elementales.)

Dado que el volumen del núcleo es proporcional a r^3 y, por consiguiente, en virtud de la fórmula (36a), al número de nucleones A, llegamos a la conclusión de que la densidad de la materia nuclear en los diferentes núcleos es aproximadamente constante.

Los tamaños de los núcleos, como resume la fórmula (36a), han sido determinados a partir de varios experimentos *. El método más directo consiste en la medición del área de la sec-

* R. Hofstadter, "Structure of Nuclei and Nucleons" (Nobel address), *Science*, **136**, 1013 (1962).

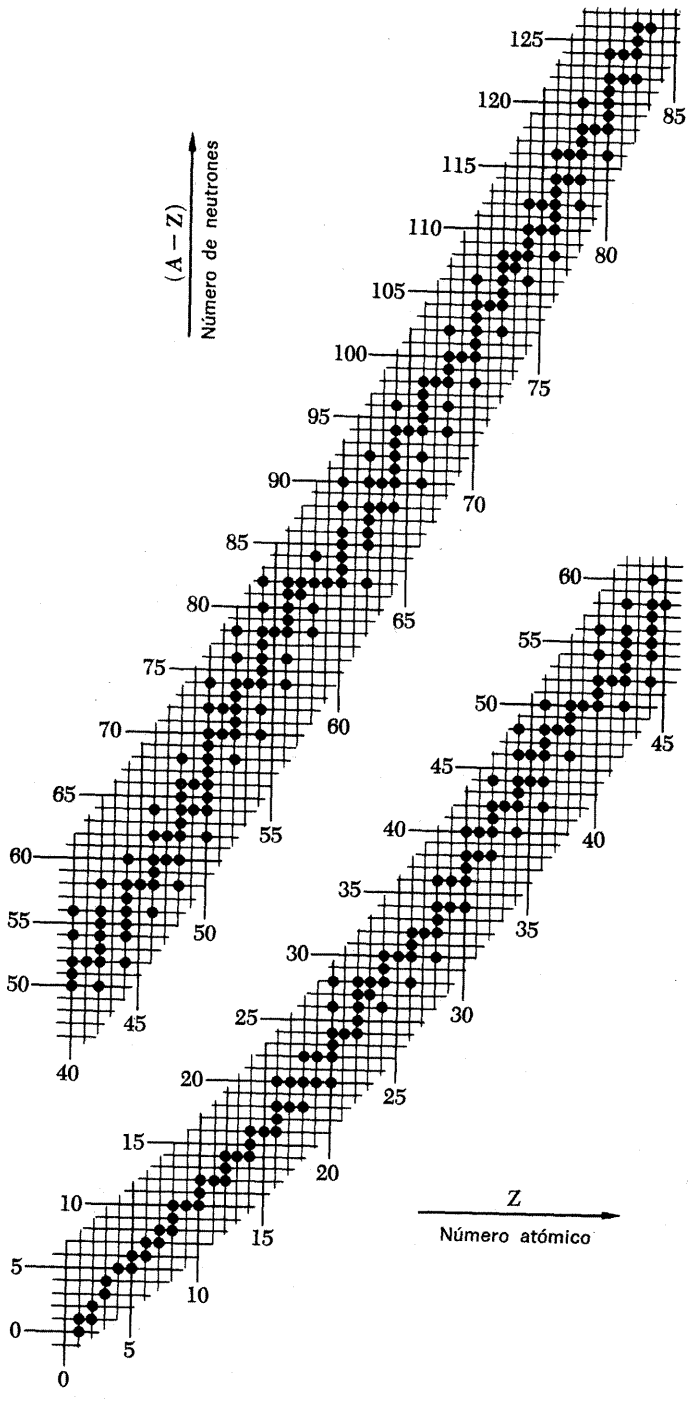


Fig. 35A Los núcleos estables y cuasiestables. Se representan todos los núcleos conocidos cuyos períodos son mayores que 5×10^{10} años. Este límite inferior, un tanto arbitrario, para los períodos, se ha elegido porque es unas diez veces la edad estimada del sistema solar, y, por consiguiente, los núcleos que se incluyen son de vida larga, incluso en una escala de tiempo geológico. En este gráfico (que consta de dos partes) se toma en ordenadas el número de neutrones $(A - Z)$, y en abscisas, el número atómico Z. Se advierte desde luego que los núcleos se acumulan en las cercanías de una curva lisa. Para los núcleos ligeros, el número de protones es aproximadamente igual al número de neutrones, pero a medida que aumenta el número atómico, aumenta más rápidamente el número de neutrones.

El aspecto de escalera que presenta el gráfico de distribución de los núcleos resulta del hecho de que la estabilidad de un núcleo depende de la paridad del número de protones y neutrones como sigue: los núcleos par-par son los más estables, los par-impar (e impar-par) son menos estables y los núcleos impar-impar son los más inestables. Convendría que el lector estudiara cuidadosamente el gráfico para ver cómo se manifiestan estas reglas. Hay en él muy pocos núcleos impar-impar. Para ciertos números de neutrones, y ciertos números de protones, aparecen "huecos" correspondientes a la ausencia de núcleos estables. Nótese que estos huecos se presentan siempre cuando el número de neutrones o de protones es impar.



Enrico Fermi. Nació en Roma en 1901; falleció en 1954. Se doctoró en 1922 en la Scuola Normale Superiore de Pisa, Italia. En 1926 pasó a ser profesor de física teórica de la Universidad de Roma. Fermi dejó Italia en 1938 y después de ocupar un puesto de profesor en la Universidad de Columbia, pasó a la Universidad de Chicago en 1942, donde permaneció hasta su muerte. Recibió el Premio Nobel en 1938.

Las contribuciones de Fermi a la física cubren un campo sorprendentemente amplio y ningún corto sumario puede hacer justicia a los méritos de su obra. De entre sus primeros trabajos podemos citar su invento de la estadística de partículas llamada de Fermi-Dirac (al mismo tiempo que, e independientemente de Dirac, quien realizó un trabajo similar) y su teoría cuantitativa de la desintegración beta, que tanto éxito ha tenido. Su obra principal se refleja en los campos de la física nuclear y de la física de las partículas elementales. Entre los muchos temas que estudió, cabe mencionar la radiactividad artificial, los neutrones lentos, la fisión y las reacciones en cadena nucleares y la interacción pión-nucleón. Fermi fue uno de los muy pocos físicos que han llevado a cabo un trabajo sobresaliente tanto en la teoría como en la experimentación. Fotografía proporcionada por el profesor E. Segré, Berkeley.)

ción transversal efectiva que presenta un núcleo a un haz de partículas de muy alta energía en un experimento de dispersión.

37 Veamos de decir ahora algo acerca de la naturaleza de las fuerzas que mantienen unidas las partes de un núcleo. Todas las pruebas experimentales que poseemos indican que

(i) La fuerza nuclear *no* es de naturaleza electromagnética; comparadas con las fuerzas electromagnéticas, las fuerzas nucleares son mucho más intensas.

(ii) La fuerza nuclear es de *corto alcance;* cuando la separación entre dos nucleones supera los 10^{-12} cm, la fuerza nuclear específica pasa a ser insignificante.

(iii) La fuerza nuclear específica entre dos protones es la misma que entre dos neutrones. Además, la fuerza nuclear entre dos protones es de la misma naturaleza que la fuerza nuclear entre un protón y un neutrón; podemos decir que son realmente las mismas, aunque esta afirmación, en cierto modo, debe matizarse.

Las pruebas en favor de estas tres afirmaciones se basan en experimentos de dispersión, como también en el estudio sistemático de los núcleos estables o radiactivos y de sus sistemas de niveles energéticos. En particular, lo afirmado acerca del corto alcance de la fuerza nuclear puede verificarse como sigue. Bombardeemos un núcleo con protones acelerados en un acelerador hasta que adquieren una energía elevada y estudiemos la dispersión de los protones por el núcleo. Cuando el protón se encuentra lejos de éste (es decir, más allá de $10^{-11} - 10^{-12}$ cm), la única fuerza efectiva es la repulsión de Coulomb. Esta repulsión impide que el protón se acerque al núcleo suficientemente como para que la fuerza nuclear se convierta en efectiva, a menos que la energía del protón sea muy alta. Si vale lo dicho acerca del corto alcance, cabe esperar que los protones (o las partículas alfa, como en el experimento de Rutherford) de energía no muy grande se dispersarán como si la repulsión coulombiana fuese la única fuerza presente. Podemos, pues, someter a prueba la afirmación (ii) mediante un análisis detallado de experimentos de dispersión, y la conclusión a que se llega está de acuerdo con lo afirmado.

Dado que los protones tienen carga, sobre ellos puede hacerse actuar también fuerzas electromagnéticas, y dos protones en un núcleo estarán sometidos, sin duda alguna, a una mutua repulsión coulombiana. A distancias mucho mayores que 10^{-12} cm las fuerzas electromagnéticas son, para todos los

fines prácticos, las *únicas* fuerzas que actúan, pero a distancias más pequeñas predomina la fuerza nuclear. Las fuerzas electromagnéticas representan ciertamente un papel en la estructura nuclear, pero no un papel predominante.

En relación con esto hay que decir de modo muy explícito que los *electrones no son afectados, al parecer, en absoluto por las fuerzas nucleares específicas,* de modo que las únicas fuerzas importantes que actúan sobre los electrones son las fuerzas electromagnáticas.

38 Estudiemos un poco más el hecho de que la intensa fuerza nuclear es una fuerza de corto alcance. De acuerdo con lo que se cree actualmente, la naturaleza general de esta fuerza, efectiva entre dos nucleones, se puede representar razonablemente bien por una función potencial $U(r)$ de la forma

$$U(r) \approx C\left(\frac{b}{r}\right) \exp\left(-\frac{r}{b}\right) \tag{38a}$$

con tal que la separación r sea mayor que 10^{-13} cm *. La constante b es una medida del alcance de la fuerza; su valor es $b = 1{,}4 \times 10^{-13}$ cm. La constante C expresa la intensidad de la fuerza. La naturaleza de la misma a distancias menores que 10^{-13} cm es mucho más complicada y en la actualidad se la conoce muy poco.

Hay que subrayar que la función potencial $U(r)$ no describe de manera precisa la interacción entre dos nucleones, pero sí representa el rasgo más importante de esta interacción, que consiste en que *el potencial decrece exponencialmente al aumentar la distancia.*

Veamos qué significa esto realmente. A la distancia $r = b$ tenemos $U(b) = C/e$. (Esta constante es, más o menos, del orden de 10 MeV.) A la distancia $r = 10b = 1{,}4 \times 10^{-12}$ cm, el potencial es igual a $U(10b) = (0{,}1C) \exp(-10) \sim 5 \times 10^{-6}C$. A la distancia $r = 100b = 1{,}4 \times 10^{-11}$ cm, el potencial es igual a $U(100b) = (0{,}01C) \times \exp(-100) \sim 10^{-45}C$. De este ejercicio numérico cabe concluir que cuando la separación entre los dos nucleones es mayor que 10^{-11} cm, la fuerza nuclear es *totalmente* despreciable. Para todos los fines prácticos no hay fuerza nuclear ninguna más allá de aquella distancia.

Conviene que el lector reflexione cuidadosamente acerca de todo eso. A primera vista, la expresión (38a) pudiera re-

* En el Cap. 9 daremos una explicación teórica de esta forma de la función potencial.

cordar el potencial de Coulomb. Sin embargo, el factor exponencial altera por completo la situación. El ejercicio numérico que precede tenía por objeto impresionar al lector con este hecho.

La fuerza nuclear específica entre núcleos en las moléculas y en los sólidos no existe, pues, para todos los fines prácticos, y éste es el tipo de situación en que las fuerzas electromagnéticas tienen una oportunidad de representar un papel predominante. A distancias *pequeñas* $r \sim 10^{-13}$ cm, la fuerza nuclear específica es considerablemente más intensa que las fuerzas electromagnéticas y éstas quedan relegadas a desempeñar un papel secundario. Que así es en efecto resulta inmediatamente obvio por el hecho de que existen los núcleos. Las fuerzas electrostáticas de repulsión intentan dispersar las partículas cargadas que se encuentran en un núcleo, pero las fuerzas nucleares intentan mantenerlas unidas, y ganan las fuerzas nucleares; son más fuertes.

39 Dado que la energía de enlace típica de un núcleo es del orden de 8 MeV por nucleón, cabe esperar que las transmutaciones de núcleos involucrarán energías del orden de 1 MeV. Las energías con que se emiten las partículas materiales y los fotones (rayos gamma) por los núcleos varían, en efecto, típicamente desde, digamos, 100 keV a 10 MeV.

Las energías que suponen las reacciones nucleares son, por lo tanto, de un orden de magnitud del todo diferente del de las energías que intervienen en las reacciones químicas y podemos comprender fácilmente por qué los núcleos no son afectados por los procesos químicos. Desde el punto de vista de la química y de la física atómica, los núcleos no son ni más ni menos que esferas pequeñas, duras, de gran masa, indivisibles y cargadas.

En nuestra discusión relativa a los átomos llegamos a la conclusión de que la longitud de onda de un fotón óptico es grande comparada con el tamaño del átomo. Vale la pena hacer notar que la situación es análoga en física nuclear. Consideremos un rayo gama de energía 1 MeV, lo que es una energía de transición nuclear típica. La correspondiente longitud de onda vale $1{,}2 \times 10^{-10}$ cm $= 1200$ fermi y resulta así grande comparada con el tamaño nuclear típico.

Fuerzas gravitatorias y electromagnéticas

40 Debemos explicar ahora por qué prescindimos de las fuerzas gravitatorias en nuestra discusión acerca de los átomos,

moléculas y núcleos. Con este fin, calculemos la razón de la fuerza gravitatoria a la fuerza electrostática entre dos protones. Esta razón es independiente de la distancia entre los dos protones y se encuentra

$$\frac{M_p^2 G/r^2}{e^2/r^2} = \frac{M_p^2 G}{e^2} = 8{,}1 \times 10^{-37} \qquad (40a)$$

donde hemos introducido el valor $G = 6{,}67 \times 10^{-8}$ dyn cm^2 g^{-2} para la constante de la gravitación.

La razón de las intensidades de las dos fuerzas es muy pequeña y cuando intervienen las interacciones electromagnéticas los efectos de la gravitación son por completo insignificantes. Las fuerzas gravitatorias sólo pueden representar un papel si todas las demás fuerzas conocidas no actúan, por lo tanto únicamente entre cuerpos (de gran tamaño) eléctricamente neutros separados por distancias grandes comparadas con las distancias atómicas típicas.

La teoría general de la relatividad de Einstein es una teoría puramente *geométrica* de la gravitación. Es una teoría de gran belleza y coherencia interna. A pesar de numerosos intentos por parte de Einstein y otros físicos, no ha sido posible, hasta ahora, incorporar de manera natural las otras fuerzas de la naturaleza a esta teoría. El fenómeno de la gravitación, por consiguiente, se sitúa del todo aparte de las interacciones que rigen la estructura de la materia a escala microscópica; la gravedad parece carecer por completo de importancia en microfísica, y es ésta la razón por la que prescindimos en este libro de la gravitación. Hay que hacer notar al lector que el valor de la razón dado en la ecuación (40a) no es sino la razón de la constante gravitatoria en unidades microscópicas naturales a la constante de estructura fina. No tenemos lugar alguno para un número tan pequeño como éste en las teorías presentes de la física cuántica. Acaso quepa esperar que alguna vez en el futuro sea posible hallar un vínculo que ligue los temas, en apariencia inconexos, de la microfísica y de la gravitación, pero por el momento no tenemos pista alguna acerca de cómo se podría establecer un puente entre una y otra.

41 Consideremos ahora la intensidad del campo electrostático a una distancia de un protón igual a un radio de Bohr a_0. Dado que a_0 es del orden de 10^{-8} cm, y puesto que la energía potencial electrostática del electrón en el átomo de hidrógeno

es del orden de 10 eV, vemos que este campo es del orden de 10^{11} volts/metro, o más precisamente

$$E_{\text{atom}} = 5{,}14 \times 10^{11} \text{ volts/metro} \qquad (41a)$$

Comparado con la intensidad de los campos electrostáticos que se pueden conseguir macroscópicamente, que son del orden de los 10^7 volts/metro, éste es un campo muy intenso. De aquí se sigue, ante todo, que los efectos de los campos eléctricos externos que podemos producir en el laboratorio, serán pequeños sobre los átomos y las moléculas, y por completo despreciables sobre los núcleos. Sin embargo, los efectos son observables; un campo eléctrico desdoblará cada una de las rayas espectrales de un átomo de varias rayas de aproximadamente la misma frecuencia. Este fenómeno se conoce con el nombre de *efecto Stark*.

La circunstancia de que los campos electrostáticos que actúan sobre los electrones en un átomo son grandes comparados con los campos electrostáticos que se pueden conseguir macroscópicamente en el laboratorio, puede comprenderse fácilmente como sigue. Es una característica importante del campo electrostático (como lo describen las ecuaciones de Maxwell) que si un tal campo se mantiene en una región vacía cualquiera del espacio, la intensidad del campo debe tomar su valor máximo en algún punto sobre los conductores. Sin embargo, los conductores están formados por átomos y si la intensidad del campo sobre el conductor llegara a ser comparable con la intensidad del campo que mantiene unidos a los átomos, el conductor empezaría a desintegrarse. La estimación (41a) es, por lo tanto, una cota superior absoluta de los campos electrostáticos macroscópicos que se pueden obtener. En la práctica, la ruptura eléctrica se produce mucho antes de que se alcance esta cota superior.

42 Consideraciones similares se aplican a los campos macroscópicos magnetostáticos. Los campos que podemos conseguir en el laboratorio deben ser débiles necesariamente, en el sentido de que su efecto sobre la estructura de los átomos no puede ser muy marcado. Un campo magnético produce también un desdoblamiento de una raya espectral en varias componentes. Este fenómeno se conoce con el nombre de *efecto Zeeman*.

Para fijar una cota superior a los campos magnéticos que es posible lograr, podemos determinar el campo magnético que produce la misma densidad de energía que un campo eléctrico del orden de 10^{11} volts/metro; este campo magnético es del

orden de 10^7 G. Campos magnéticos constantes de una intensidad que alcanza los 50000 G se pueden producir fácilmente en el laboratorio y campos próximos a los 10^6 G pueden producirse durante cortos intervalos de tiempo. La consideración de la tensión que se ejerce sobre los conductores por los que circula la corriente que produce los campos, tensión que no debe exceder los límites fijados por las fuerzas que mantienen unidos los átomos y los sólidos, nos dice que no podemos posiblemente producir campos estáticos por encima de los 10^7 G.

43 Si consideramos la intensidad de los campos macroscópicos desde el punto de vista de las *intensidades naturales de un campo en electrodinámica cuántica,* llegamos a la conclusión de que incluso los campos eléctricos en los átomos son muy débiles. Podríamos definir la unidad natural de intensidad del campo (eléctrico o magnético) como el campo que produce una densidad de energía en el espacio igual a (energía en reposo de un electrón)/(longitud de onda de Compton del electrón)^3. Esta unidad de intensidad de campo eléctrico es igual a $4{,}0 \times 10^{17}$ volts/metro y la correspondiente unidad para el campo magnético es igual a $1{,}3 \times 10^{13}$ G. La electrodinámica cuántica predice desviaciones marcadas respecto de las ecuaciones de Maxwell en el vacío cuando los campos alcanzan estas intensidades. En particular, el principio de superposición deja de ser válido y los campos electromagnéticos no pueden describirse por ecuaciones lineales. En realidad, la electrodinámica cuántica predice también muy pequeñas desviaciones con relación al carácter lineal en el caso de los campos muy débiles que se pueden conseguir en el laboratorio. Estas desviaciones, sin embargo, son hasta tal punto pequeñas que carecen de importancia práctica macroscópicamente y de hecho no se han detectado en experimentos macroscópicos hasta hoy. La pequeñez de los campos macroscópicos cuando se miden en unidades naturales, lo que en último término reconoce su origen en la pequeñez de la constante de estructura fina, nos proporciona un cierto entendimiento de por qué las ecuaciones de Maxwell lineales resultan tan precisas en la práctica.

Acerca del trabajo numérico

44 Digamos algo acerca de la evaluación numérica de la expresión teórica de una cantidad física, cualquiera. El lector puede tener la impresión de que nada es necesario decir acerca de

este tema; el trabajo numérico es un mal necesario (especialmente cuando se trata de problemas que hay que hacer en casa) y nada nos enseñan tales ejercicios aritméticos en lo que concierne a la física. Esto no es verdad. Hay evaluaciones numéricas "malas" y las hay "buenas". Llevar a cabo una buena evaluación numérica exige *sentido físico.* Consideremos un ejemplo para poner de manifiesto la diferencia entre un trabajo "bien hecho" y otro "mal hecho". En el estudio de los pormenores más sutiles del espectro del átomo de hidrógeno se encuentra que las rayas espectrales, que en una medición de resolución pobre parecen ser una sola, cuando el poder de resolución es grande resulta que consisten realmente en varias rayas muy próximas entre sí. Decimos entonces que el espectro posee una *estructura fina.* En el estudio teórico de la estructura fina encontramos una energía, E_f, que caracteriza la separación típica entre dos de estas rayas muy poco espaciadas y esta energía viene dada teóricamente por la expresión

$$E_f = \frac{e^8 m}{32\hbar^4 c^2} \tag{44a}$$

Ahora bien, no hay duda alguna de que estaría "mal" evaluar E_f sustituyendo los valores de las constantes que aparecen en la expresión (44a) tomados directamente de la tabla 2A. En primer lugar, resultaría muy tedioso, puesto que tendríamos que calcular e^8 y $\hbar^4$. En segundo lugar, la fórmula (44a) está muy lejos de ser transparente; antes de haber llevado a cabo el cálculo no podemes "ver" cuál es el orden de magnitud de esta energía, y la expresión tal como allí aparece nada nos indica acerca de la naturaleza física del efecto. Supongamos, en cambio, que agrupamos primero en la ec. (44a) las constantes formando factores que tienen una significación reconocible, como sigue:

$$E_f = \frac{1}{16}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4\left(\frac{1}{2}mc^2\right) = \frac{1}{16}\alpha^2\left(\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2\right) = \frac{\alpha^2}{16}R_\infty \tag{44b}$$

Si examinamos la expresión que aparece en el último miembro, vemos que el orden de *magnitud* de la separación de estructura fina E_f es algo perfectamente claro; se trata de una pequeña corrección a la estructura gruesa de un orden de magnitud relativo de unos 10^{-5}. Si queremos calcular la energía E_f en electrón-volts, el cálculo es ahora sencillo; hemos de multiplicar 13,6 eV por la constante $\alpha^2/16$. Por lo tanto, es

claro que la agrupación de factores, como en la ec. (44b), conduce a una simplificación del trabajo puramente numérico. Con todo, la expresión (44b) nos proporciona también una cierta visión de la naturaleza del efecto. En un tratamiento teórico puramente no-relativista del átomo de hidrógeno (en la aproximación en la que la masa del protón es infinita) y prescindiendo de los efectos debidos al momento magnético intrínseco del electrón, no aparecería ninguna estructura fina. Para verlo hemos de recordar que, en una teoría de estas características, sólo pueden aparecer las constantes e, m y $\hbar$, pero no c. La energía de ionización R_∞ es de hecho independiente de c. La constante de estructura fina, que aparece en la expresión de E_f, es, sin embargo, inversamente proporcional a c, y en la aproximación no-relativista, en la cual $c = \infty$, obtenemos $E_f = 0$. Podemos, por consiguiente, considerar E_f como una corrección relativista a la estructura gruesa. Cabe esperar, pues, que la magnitud de esta corrección sea del orden de $(v/c)^2 R_\infty$, donde v es la velocidad del electrón. Hemos estimado la velocidad v y encontramos que $(v/c) \sim \alpha$, con lo que nos vemos conducidos a una expresión parecida a la de (44b). La estructura fina en el hidrógeno es, por lo tanto, un efecto relativista.

45 El nombre de "constante de estructura fina" para la constante α apareció, históricamente, en conexión con el trabajo de Sommerfeld acerca de la estructura fina del hidrógeno. La constante α se reconoció por vez primera como una constante importante precisamente en la expresión (44b). Por los tiempos en que Bohr presentó su teoría del espectro del hidrógeno, no parecía natural escribir la energía de ionización del hidrógeno R_∞ en la forma

$$R_\infty = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 \tag{45a}$$

en que la hemos escrito. Más bien se hubiera escrito como sigue:

$$R_\infty = \frac{e^4 m}{2\hbar^2} \tag{45b}$$

y, por esta razón, α no se llamó "constante de estructura gruesa", lo que hubiera sido más apropiado. La expresión (45a) debe considerarse como una expresión "mejor" de R_∞ en tanto que nos proporciona una mejor visión de la naturaleza de los áto-

mos. Como hemos explicado ya, α es la constante de acoplamiento fundamental entre el campo electromagnético y la carga elemental. Los átomos son "estructuras débilmente enlazadas", con electrones que se mueven "lentamente", porque α es pequeña comparada con la unidad. Por esta razón una teoría no-relativista lleva a una buena aproximación. Las correcciones relativistas son del orden de $(v/c)^2$, es decir, del orden de α^2.

46 Esperamos que este ejemplo muestre algo del espíritu con que debe abordarse el trabajo numérico. Hay que tratar siempre de reconocer en nuestras expresiones combinaciones de las constantes que tengan significado físico y llevar a cabo una agrupación de los factores, o de los términos, antes de evaluar algo numéricamente. Esta agrupación requiere, evidentemente, una cierta vista; a menos que comprendamos la naturaleza del fenómeno, no podremos hacerlo de manera natural y con sentido.

Con los problemas para hacer en casa que presentamos en este libro *no* se persigue realizar meramente ejercicios de aritmética. Nos proponemos con ellos familiarizar al lector con los órdenes de magnitud propios de la física cuántica y enseñarle cómo aplicar las ideas de que se trata en el texto a situaciones físicas concretas.

Un tema avanzado: Las constantes fundamentales de la naturaleza *

47 Reflexionemos un poco acerca de la siguiente cuestión importante: ¿Cuántas constantes de la naturaleza fundamentales independientes existen realmente?

La idea tras esta cuestión es la siguiente. Las teorías físicas actuales implican relaciones determinadas entre los parámetros que caracterizan los sistemas físicos. La energía de ionización del hidrógeno, por ejemplo, puede expresarse teóricamente en términos de las constantes m, e y h o, si se quiere, en términos de las constantes m, c y α. Si conocemos ya las constantes m, e y h, podemos *predecir* el valor del potencial de ionización y contrastar luego nuestra teoría comparando la predicción con el resultado experimental. En el mismo sentido se "comprenden teóricamente" un número muy grande de

* Puede omitirse en una primera lectura.

otros parámetros físicos; es posible expresarlos en términos de unas pocas constantes *fundamentales.*

La frase "comprendidos teóricamente" debe interpretarse en un sentido muy liberal. Consideremos que una constante se comprende desde el punto de vista teórico cuando podemos formular una ecuación bien definida que *en principio* determina la constante, con independencia de si nuestra capacidad matemática limitada basta realmente para el cálculo del valor numérico de la constante.

Nuestra clasificación de los parámetros físicos en constantes fundamentales y constantes derivadas es, en principio, bastante arbitraria. En la práctica elegimos como constantes fundamentales aquellos parámetros que aparecen de manera particularmente "simple" en nuestras ecuaciones y que admiten una interpretación física razonablemente transparente. Evidentemente, es más razonable considerar la constante de estructura fina como constante fundamental y la energía de ionización del hidrógeno como constante derivada que invertir la posición de estos dos parámetros.

Un conjunto de constantes experimentales independientes es, por lo tanto, un conjunto de parámetros físicos seleccionados adecuadamente que no están vinculados entre sí de manera teórica. Nada sabemos del porqué de sus magnitudes numéricas: cada una de estas constantes debe determinarse empíricamente. La cuestión que nos hemos planteado se refiere a cuál es el número *máximo* de constantes independientes, es decir, cuál es el número de constantes que se deben conocer antes de que se puedan calcular (predecir) todos los demás parámetros físicos.

Es claro que esta cuestión tiene sentido tan sólo en referencia con nuestras actuales teorías físicas. Una constante que hoy se reconoce como puramente empírica podría acaso ser "explicada" mañana dentro del marco de una nueva teoría.

48 Para explorar la situación presente intentemos formar la lista de un cierto número de constantes fundamentales:

(i) La constante de estructura fina:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137}$$

(ii) La razón de la masa del electrón a la masa del protón:

$$\beta = \frac{m}{M_p} \cong \frac{1}{1836}$$

(iii) La constante de la gravitación en unidades atómicas naturales:

$$\gamma = \frac{(M_p{}^2 G)/(\hbar/M_p c)}{(M_p c^2)} = 5{,}902 \times 10^{-39}$$

(iv) Una constante que caracteriza la intensidad de las llamadas *interacciones débiles,* que son responsables de las transiciones beta de muchos núcleos. De acuerdo con lo que creemos actualmente, las interacciones débiles nada tienen que ver con la intensa fuerza nuclear, el electromagnetismo o la gravedad. Todos los fenómenos en que intervienen las interacciones débiles parecen ser manifestaciones de una interacción (universal) fundamental en la naturaleza, interacción caracterizada por *una* única constante de acoplamiento. La intensidad de esta interacción es unas 10^{-14} veces menor que la intensidad de la fuerza nuclear.

(v) La razón $m/m_\mu \sim 1/200$ de la masa del electrón a la masa del muón. El *muón* (o *mesón-mu*) es una partícula elemental que, al parecer, no difiere del electrón más que en el hecho de que su masa es mayor. El papel del muón en el esquema de las cosas es casi por completo desconocido.

(vi) Finalmente, necesitamos algunas constantes que describan las *interacciones fuertes,* que incluyen, en particular, las intensas fuerzas nucleares. La situación teórica no está en absoluto clara y no conocemos cuántas constantes independientes caen dentro de esta categoría. Podemos considerar las dos que siguen:

$$s_1 = \frac{(\text{masa del pion})}{(\text{masa del protón})} \cong 0{,}15$$

$$s_2 = \frac{B_D}{M_p c^2} \cong 2{,}35 \times 10^{-3}$$

donde $B_D = 2{,}23$ MeV es la energía de enlace del deuterón.

Hemos elegido arbitrariamente la constante s_2 debido a su significado físico inmediato como *una* posible constante para describir la intensidad de la fuerza nuclear. Nada existe de muy fundamental en lo que concierne a este número, pero cabe imaginar que nos proporciona una medida de la intensidad de la fuerza. En otras palabras, creemos que todas las demás energías de enlace pueden, en principio, expresarse en función de s_2 y s_1. En este caso hemos de adoptar realmente un punto de vista muy amplio acerca de lo que entendemos por "compren-

der las cosas teóricamente". De hecho *no* sabemos, en este caso, cuál es la "ecuación correcta" y nuestra esperanza de que exista una tal ecuación, en la que aparezcan solamente s_1 y s_2, puede resultar totalmente infundada.

La verdad es que cuando estamos escribiendo esto no podemos realmente calcular las razones de las masas de partículas tales como los mesones *K*, los nucleones, la partícula lambda, etc. No contamos con una teoría fundamental que nos permita hacerlo, y acaso sea necesario añadir todas estas razones de masas a nuestra lista. Por otra parte, es posible que, un día u otro, aparezca una teoría mediante la cual podamos calcular las masas de algunas, o quizá todas las partículas que interactúan fuertemente. Según las ideas más extremadamente optimistas, la teoría "correcta" será tal que la física de las interacciones fuertes no contendrá *ninguna* constante empírica; todo podrá calcularse, incluidos los números s_1 y s_2. Sin embargo, en la actualidad, la cuestión de cuál sea el número de constantes que caracterizan las interacciones fuertes debe considerarse como por completo abierta, sin contestar.

49 No hemos incluido en nuestra lista una muy notable constante determinada *empíricamente*, a saber, la razón de la carga del electrón a la carga del protón. Según un experimento realizado por J. K. King en 1960, esta razón es igual a -1 con una precisión de una parte en 10^{20}. King midió de manera análoga la razón de la carga del núcleo de helio a la carga del protón y encontró que esta razón es igual a 2 con una precisión similar *. Estos resultados apoyan fuertemente la idea de que la carga de una partícula debe ser un múltiplo entero de la carga electrónica. Muchas son las pruebas en favor de esta idea, aunque éstas, en muchos casos, no son tan concluyentes como en el caso de las mediciones de King. Los físicos han creído, en efecto, durante mucho tiempo, en la "cuantificación de la carga". Sin embargo, no hay ninguna razón teórica de *por qué* todas las cargas deben ser múltiplos enteros de la carga del electrón.

¿Por qué, entonces, no incluimos la constante (-1 ± 10^{-20}) en nuestra lista? Simplemente, porque nuestras teorías son tales que nos sorprendería mucho el que esta constante no fuera realmente igual a -1. Podemos contemplar con calma la posibilidad de que las constantes que hemos incluido en la lista pue-

* Lo que aquí decimos constituye una conclusión razonable. Lo que realmente hizo King fue establecer que la molécula de hidrógeno y la molécula de helio son *neutras* dentro de la precisión indicada (J. G. King, "Search for a small charge carried by molecules", *Physical Review Letters*, **5**, 562 [1960]).

dan tener valores ligeramente diferentes; precisamente en este sentido, son constantes empíricas. No alteraría la electrodinámica cuántica el que la constante de estructura fina fuese un uno por ciento mayor; nuestras leyes de la naturaleza, tal como las conocemos, no deberían ser cambiadas en ningún punto esencial. La situación es diferente en lo que concierne a la cuantificación de la carga; la *estructura* de nuestra teoría depende de este principio.

50 La electrodinámica cuántica, en tanto que teoría de los átomos, de las moléculas y de la materia macroscópica, contiene esencalmente sólo *dos* constantes empíricas fundamentales, a saber, α y $\beta = m/M_p$. Con esto queremos decir que creemos conocer, en principio, la dependencia de todas las cantidades físicas, en este dominio de la misma, con relación a dichas dos constantes. Las propiedades de los diferentes núcleos atómicos intervienen únicamente a través de los *enteros* Z y A y las otras características físicas de los núcleos tienen tan sólo un pequeño efecto sobre los átomos, moléculas y la materia macroscópica.

Nuestra afirmación es, por lo tanto, una simplificación del verdadero estado de cosas, pero es interesante seguir esta idea. A primera vista podría aparecer equivocada, puesto que el número de "constantes fundamentales" que aparecen en la tabla 2A es ciertamente mayor que dos. Sin embargo, hay que observar que dichas constantes se basan en unidades por completo arbitrarias (unidades humanas) y que sus valores numéricos carecen en absoluto de significado.

Al intentar comprender las propiedades de la materia macroscópica es esencial, por consiguiente, que distingamos entre las cantidades físicas fundamentales y aquellas otras que dependen de nuestras unidades arbitrarias. Consideremos, por ejemplo, la velocidad del sonido en un cristal. Preguntar cuál es esta velocidad en cm/s no es una cuestión "fundamental", porque la respuesta depende de la definición arbitraria del cm y del s. La mejor perfilada cuestión teórica es preguntar cuál es el valor de la razón de la velocidad del sonido, c_s, a la velocidad de la luz; *esta* cantidad, es con toda evidencia, independiente de los patrones macroscópicos. Creemos firmemente que, en principio, se puede calcular este número dentro del marco de la electrodinámica cuántica.

51 Para comprender la verdadera significación de las constantes de la tabla 2A, consideremos las definiciones de nuestro sistema macroscópico de unidades.

El *kilogramo* se ha definido, por acuerdo internacional, como la masa de una cierta pieza de metal que se conserva en París. Para indicar que nos referimos precisamente a este pedazo, designaremos la unidad por $(\text{kg})_P$, el "kilogramo de París". El gramo se define por $(\text{g})_P = (\text{kg})_P/1000$.

Este trozo de metal contiene un cierto número de nucleones, digamos n_1 nucleones. No se conoce el valor preciso de n_1, pero en principio podríamos determinarlo sin más que contarlos. Si suponemos ahora que podemos calcular, dentro de la física nuclear, y dentro de la teoría de las interacciones fuertes, la razón de cada masa nuclear a la masa del protón, podremos escribir la masa del trozo de metal en París en la forma

$$(\text{kg})_P = n_1 c_1 M_p = n_1 c_1 \beta^{-1} m \tag{51a}$$

donde c_1 es una constante, próxima a la unidad, que determinamos mediante nuestro cálculo. Hablando estrictamente, ésta depende de hecho de α y β, pero sólo muy poco. El número n_1, aunque no se conoce con precisión, es una constante numérica elegida por acuerdo internacional; es el número de nucleones en el trozo de metal.

52 Para el *metro* existe, o mejor dicho han existido, dos patrones. En el patrón antiguo el metro es la distancia entre dos trazos sobre una cierta barra de metal conservada en París; designaremos este metro por $(\text{m})_P$, el "metro de París". El nuevo patrón es de naturaleza "atómica" y el correspondiente metro, que designaremos por $(\text{m})_a$, el "metro atómico", se define como un cierto múltiplo de la longitud de onda de una determinada raya anaranjada en el espectro del kripton, siendo el múltiplo $n_2 = 1650763{,}73$ por acuerdo internacional.

La longitud de onda de la raya anaranjada del kripton es algo que es posible calcular en principio (pero no en la práctica), y podemos escribir esta longitud de onda en la forma

$$\lambda = c_2 \alpha^{-2} \left(\frac{\hbar}{mc}\right) \tag{52a}$$

donde c_2 es una constante que sólo muy poco depende de α y β. En primera aproximación, se trata de una constante puramente numérica y si consiguiéramos dominar las matemáticas de la física atómica, podríamos hallar este número.

Para el metro atómico puede escribirse, por consiguiente,

$$(\text{m})_a = n_2 c_2 \alpha^{-2} \left(\frac{\hbar}{mc}\right) \tag{52b}$$

53 La adopción de un "patrón atómico" de tiempo parece inminente, aunque el *segundo* se define en la actualidad astronómicamente. Con todo, adelantémonos a la historia y supongamos que el patrón atómico *ha* sido adoptado y que el segundo se ha definido en términos de una cierta frecuencia de transición en el átomo de cesio que se encuentra en la región de las radiofrecuencias. Esta frecuencia, que se puede interpretar como la frecuencia de precesión del spin del núcleo de cesio en el campo de los electrones orbitales, se ha medido con gran precisión y se ha encontrado que su valor (expresado en segundos astronómicos) es

$$\frac{1}{T_0} = \nu_0 = 9\,192\,631\,770 \pm 10 \text{ Hz} \tag{53a}$$

La precisión de este número es característica de la precisión que se puede conseguir en las mediciones de radiofrecuencia. La expresión teórica de esta frecuencia es de la forma (según la electrodinámica cuántica)

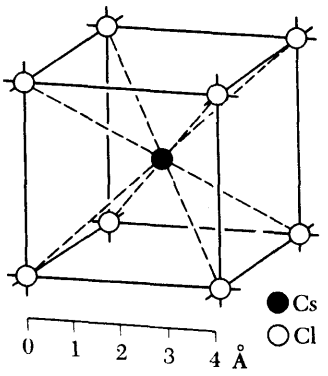
$$\nu_0 = c_3\alpha^4\beta\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) \tag{53b}$$

donde c_3 es una constante numérica casi independiente de α y β; es posible evaluarla en principio, pero no en la práctica, con tal que se nos den ciertos datos concernientes al núcleo de cesio. Supongamos, por lo tanto, que *definimos* el segundo, designado por $(s)_a$, o el "segundo atómico", como sigue:

$$(s)_a = (9\,192\,631\,770)T_0 = n_3c_3^{-1}\alpha^{-4}\beta^{-1}\left(\frac{\hbar}{mc^2}\right) \tag{53c}$$

donde T_0 es el período de esta oscilación atómica y donde el número $n_3 = 9\,192\,631\,770$ queda así determinado por acuerdo internacional.

54 Consideremos finalmente el antiguo patrón de longitud, el metro de París $(m)_P$. Se define como la distancia entre dos trazos en una barra de metal y, por tanto, es igual a la longitud de una cierta sarta de átomos. El número, n_3, de átomos en ella está determinado, en un cierto sentido, por acuerdo internacional (aunque el número no se conoce con precisión), puesto que n_4 es el número de átomos entre los dos trazos. La separación entre dos átomos vecinos en la barra de metal es algo que podemos calcular en principio; esta separación es de la forma



Para recordar al lector que la distancia entre átomos en un sólido cualquiera es del orden del radio de Bohr a_0. Esta figura muestra la estructura cristalina del cloruro de cesio. Este tipo de red se llama red cúbica centrada (o centrada en el cuerpo). Podemos describirla diciendo que en él los átomos de cloro forman una red cúbica con un átomo de cesio en el centro de cada cubo. Obsérvese que esta estructura es diferente de la del cloruro de sodio que muestra la fig. 30A, Cap. 1.

La fórmula química del cloruro de cesio es CsCl y la red contiene un número igual de átomos de cesio y de cloro. Conviene que el lector se convenza de que este hecho está implícito en la figura, aunque a primera vista pudiera parecer que en la red hay más átomos de cloro que átomos de cesio.

$c_4 a_0$, donde a_0 es el átomo de Bohr y c_4 una constante que sólo muy poco depende de α y β. Podemos escribir, por consiguiente, el valor del metro de París en la forma

$$(\mathrm{m})_P = n_4 c_4 \alpha^{-1} \left(\frac{\hbar}{mc}\right) \tag{54a}$$

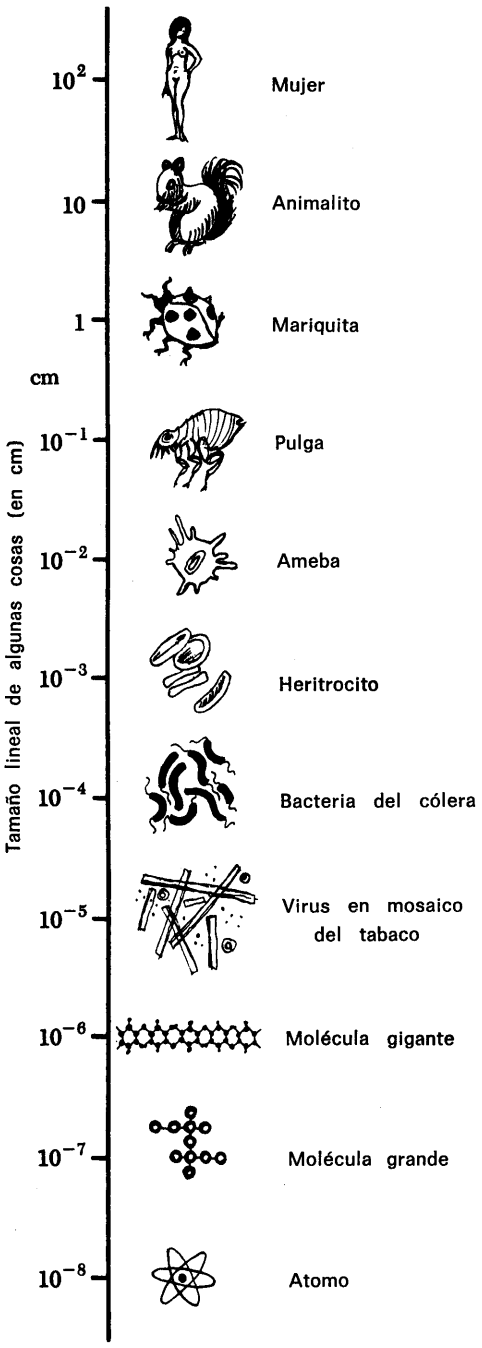
Esta longitud patrón ha sido abandonada por razones técnicas obvias; la separación entre los dos trazos es una cantidad bien poco definida. Dos longitudes de onda ópticas pueden compararse con mayor precisión y no existe, pues, razón alguna por la que debamos intentar expresar estas longitudes de onda en términos de la longitud de la barra de metal.

55 Nuestra discusión pone de manifiesto la verdadera naturaleza de los patrones macroscópicos. Éstos están definidos en términos de "parámetros atómicos" elegidos hasta cierto punto arbitrariamente y en términos de los números n_1, n_2 y n_3 que se han adoptado por acuerdo internacional. (Conforme hemos dicho, n_1 no se conoce en realidad con precisión; está definido implícitamente.) Haremos observar lo siguiente:

(i) Medir una longitud de onda óptica equivale a comparar esta longitud de onda con la longitud de onda de la raya anaranjada del kripton. Esto se puede hacer de manera muy precisa, y por esta razón las longitudes de onda ópticas son cantidades bien conocidas. La constante de Rydberg es, en esencia, un número de onda óptico, y precisamente por esto se conoce tan bien esta constante. Nuestras medidas de longitud más precisas no son sino medidas de razones de longitudes de onda ópticas. Estos datos poseen un significado teórico *potencial*; si dominásemos la teoría de los espectros atómicos suficientemente bien como para poder predecir estas razones de longitud de onda con una precisión comparable, estaríamos en condiciones de llevar a cabo comparaciones con pleno sentido entre la teoría y la experimentación. Nuestra capacidad de efectuar los cálculos, sin embargo, es muy limitada, y por esta razón es limitado el significado teórico real de las medidas de longitud de onda.

(ii) Dos frecuencias en la región de las radiofrecuencias se pueden comparar con muy alta precisión. Si medimos una frecuencia atómica o molecular en esta región, lo que hacemos es, de hecho, compararla con la frecuencia del cesio.

(iii) Medir la velocidad de la luz equivale a comparar la *frecuencia* asociada a la raya anaranjada del kripton con la frecuencia del cesio. No es, por lo tanto, una medida de una "cons-



tante física fundamental", sino más bien una evaluación de nuestro patrón arbitrario de longitud en términos de nuestro patrón arbitrario de tiempo.

56 Consideremos las igualdades (51a), (52b), (53c) y (54a). Nos proporcionan expresiones *teóricas* de los patrones macroscópicos en función de (i) los números n_1, n_2, n_3 y n_4, determinados por acuerdo internacional, (ii) de los patrones básicos m, $\hbar/mc$ y $\hbar/mc^2$ de la electrodinámica cuántica, y (iii) de las cantidades c_1, c_2, c_3 y c_4 que creemos estar en condiciones de calcular *en principio*.

Incluso si no podemos calcular en la práctica las cantidades c_1, c_2, c_3 y c_4 de manera precisa, sabemos que son, en primera aproximación, únicamente puros parámetros numéricos independientes de α y β. Si pudiéramos *calcular* realmente estos números, ello significaría que podríamos *calcular* el valor de la velocidad de la luz tomando como unidad $(\mathrm{m})_a/(\mathrm{s})_a$.

Nuestras expresiones teóricas de los patrones macroscópicos nos permiten afrontar la siguiente cuestión: ¿qué aspecto tendría el universo si nuestras constantes de la naturaleza fuesen *ligeramente* diferentes? Esto significa: ¿qué aspecto tendría el universo si las dos constantes empíricas α y β fuesen *ligeramente* diferentes? Es ésta una cuestión interesante porque somete a prueba hasta qué punto comprendemos el papel de α y β en el universo. Dejamos que el lector reflexione sobre esta cuestión; debiera volver a considerar el problema después de haber terminado la lectura del libro.

57 Supongamos que preguntamos, ¿por qué el tamaño de un átomo es del orden de 10^{-10} metros?; ¿por qué los átomos son tan pequeños? Esto parece una cuestión metafísica, pero realmente no lo es. Supongamos que planteamos la cuestión de otra forma, a saber: ¿por qué el tamaño lineal de un ser humano es de unos 10^{10} a_0? A esto equivale precisamente la cuestión, porque el metro se definió de tal manera que el tamaño lineal de un hombre es de aproximadamente un metro. Podemos contestar a esta pregunta de manera asimismo aproximada si somos capaces de explicar el porqué del número de átomos en un ser humano, y este problema no se encuentra en principio más allá del alcance de la física. Sería absurdo intentar calcular este número con precisión, pero debiéramos ser capaces de estimarlo dentro de un factor de, digamos, 10^6. (Esto es, si supiésemos más acerca de la biología y temas con ello relacionados.) Dejamos estas vanas especulaciones para el lector. Hemos mencionado este resultado tan sólo para ilustrar cómo *todas* las pro-

piedades del mundo macroscópico en que vivimos dependen, en último término, de las propiedades de las partículas elementales y de sus interacciones.

Bibliografía para ulterior estudio

Entre las extensas tablas de constantes físicas citaremos las siguientes:
1) *Handbook of Chemistry and Physics* (Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, Ohio). Cada año han aparecido nuevas ediciones. En las últimas se ha adoptado la escala de masas atómicas que resulta de haber elegido el C^{12} como nuevo patrón.
2) *American Institute of Physics Handbook* (McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1957).
3) Como exposición muy interesante de los esfuerzos de la humanidad encaminados a determinar las constantes de la física, recomendamos la obra de Cohen, Crowe y DuMond: *The Fundamental Constants of Physics* (Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1957).
4) Para un examen crítico de las constantes fundamentales, véase E. R. Cohen y J. W. M. DuMond: "Our Knowledge of the Fundamental Constants of Physics and Chemistry in 1965", *Reviews of Modern Physics* **37**, 537 (1965).
5) En relación con lo discutido en la Sec. 57, al lector puede resultar interesante leer: "Gulliver was a bad biologist", por Florence Moog, *Scientific American*, Nov. 1948, p. 52.

Problemas

1 En 1903, P. Curie y Laborde estudiaron la emisión de calor por el radio. Encontraron que 1 gramo de radio puro (sabemos ahora que se trata del isótopo $_{88}Ra^{226}$) emite unas 100 cal/h. A partir de este valor y del período conocido, calcular la energía aproximada en MeV con que salen las partículas alfa emitidas. En el experimento de Curie y Laborde estas partículas eran capturadas dentro de la fuente y del calorímetro y su energía cinética, por lo tanto, se convertía en energía térmica. (El período es de 1622 años.)

2 (*a*) El núcleo de radio tiene un defecto de masa *positivo*, pero aun así es inestable y se desintegra. ¿Cómo es posible esto? ¿No es condición necesara y suficiente para la estabilidad que el defecto de masa sea positivo? Explicar la situación en detalle.

(*b*) El isótopo del radio a que nos referimos es el $_{88}Ra^{226}$; éste es el isótopo descubierto por P. y M. Curie. Dicho isótopo se desintegra por emisión de partículas alfa, que no son sino núcleos de helio, $_2He^4$.

Podríamos sentirnos llevados a creer que solamente los núcleos estables o los isótopos de vida larga se presentan en la naturaleza, ya que cualquier isótopo de vida corta habría decaído en tiempos a escala geológica. Ahora bien, comparado con la edad de la Tierra, el período de 1622 años no es particularmente largo; más bien es pequeño. ¿Cómo explica entonces que se encuentre radio en la naturaleza?

3 En conexión con la desintegración de un núcleo radiactivo como el Ra^{226}, advertimos una notable circunstancia: la duración de la vida es "excesivamente larga". A partir de las constantes fundamentales de la física nuclear y de la electrodinámica, tratar de hallar un "tiempo natural" y expresarlo en segundos. No importa cómo juegue usted con sus constantes (con gracia, claro está), deberá admitir que el Ra^{226} vive, *con mucho*, demasiado. Es claro que encontramos aquí un problema que deberemos intentar resolver más adelante; es de hecho posible explicar el fenómeno observado, y la razón de por qué la vida es tan larga (o, si se quiere, la causa de la desintegración) reside en un interesante efecto mecánico-cuántico conocido como *efecto túnel.*

4 El Sol radia energía por su superficie con una potencia de $3{,}86 \times 10^{26}$ watts. Antes del desarrollo de la física nuclear era todo un problema el explicar de dónde procede esta enorme cantidad de energía. Intentemos hacer algunas estimaciones simples.

Se cree que el Sol tiene una edad de por lo menos 4000 millones de años. Su masa es de $1{,}98 \times 10^{30}$ kg.

(*a*) ¿Qué fracción de la masa del Sol ha de convertirse en energía radiante por año para explicar la potencia radiada? Encontrará que este número concuerda bastante bien con la idea de que el Sol no ha cambiado mucho en lo que lleva de vida, es decir, durante los últimos 4000 millones de años.

(*b*) Excluya las reacciones químicas como fuente de energía.

(*c*) ¿Conoce algún proceso nuclear que pudiera ocurrir en el interior del Sol y que podría proporcionarnos la explicación acerca de de dónde procede la energía? Consulte algún libro de introducción a la astronomía y convénzase, mediante simples estimaciones, de que su explicación es plausible o, por lo menos, de que no se encuentra en violenta contradicción con los hechos.

5 Hemos dicho que la densidad de la materia nuclear, es decir, la densidad de la "sustancia" dentro de un núcleo, es más o menos la misma para todos los núcleos. Expresar esta densidad en unidades macroscópicas, en g/cm^3.

6 (*a*) Apoyándose en lo discutido en la Sec. 17, estimar la energía media y la velocidad media de una molécula de nitrógeno en gas nitrógeno mantenido a la temperatura normal. La molécula de nitrógeno consta de dos átomos de nitrógeno. (Expresar la energía en eV.)

(*b*) A la presión atmosférica y a la temperatura normales, 1 mol de gas nitrógeno (o de *cualquier* gas) ocupa un volumen de 22,4 litros. Estimar el número de colisiones que experimenta por segundo una molécula de nitrógeno admitiendo que su tamaño es "el tamaño molecular típico". Comparar esta frecuencia de colisiones con una frecuencia óptica típica.

7 Una de las rayas del espectro del hidrógeno tiene la longitud de onda 4861,320 Å. H. Urey descubrió, en 1932, que esta raya tiene una compañera débil situada a 4859,975 Å (véase *Phys. Rev.* **39**, 164 (1932); **40**, 1 (1932)). La explicación consiste en que el hidrógeno ordinario no es isotópicamente puro, sino una mezcla de dos isótopos, ${}_1H^1$ y ${}_1H^2 = D$. El átomo del isótopo más pesado, el deuterio, se presenta en una proporción de unas 0,015 por ciento y este isótopo es responsable de dicha raya débil.

En el estudio del espectro del hidrógeno se puede prescindir, en primera aproximación, del movimiento del núcleo. Supongamos ahora que intentamos tener en cuenta el movimiento nuclear. En tal caso, no es ya el núcleo lo que permanece en reposo, sino el centro de masa del núcleo y del electrón. Una teoría que tiene en cuenta el movimiento nuclear predice, por consiguiente, ligeros desplazamientos de las posiciones de las rayas espectrales respecto de las predichas en una teoría en la que el núcleo tiene masa infinita y la cuantía de dichos desplazamientos depende de la masa real del núcleo (en nuestro caso, la masa del protón o del deuterón).

Intente formular una teoría simple que explique el porqué del valor de la razón de las dos longitudes de onda dadas. Utilícense éstas para calcular la razón de la masa del deuterón a la masa del protón y compare su resultado con la razón que se puede obtener acudiendo a una tabla de masas nucleares.

8 El helio simplemente ionizado, es decir, un átomo de helio del que se ha separado *un* electrón, es, como el átomo de hidrógeno, un sistema constituido por un solo electrón que se mueve en torno de un núcleo. Cabe esperar, por consiguiente, que las rayas espectrales emitidas por el helio simplemente ionizado sean del todo análogas a las emitidas por el átomo de hidrógeno. Sin embargo, los dos sistemas no son idénticos; el núcleo de helio tiene dos cargas elementales, mientras que el núcleo de hidrógeno (el protón) posee solamente una. En virtud de lo dicho en este capítulo, ha de ser posible hallar qué consecuencias tiene para el espectro el aumento de la carga central en en el helio simplemente ionizado con relación al hidrógeno y, por consiguiente, ha de ser también posible predecir la longitud de onda de cualquier raya emitida por el helio simplemente ionizado dada la longitud de onda de la correspondiente raya del hidrógeno. En otras palabras, es posible, sin acudir a una teoría detallada de la estructura atómica, hallar las *razones* de las correspondientes longitudes de onda.

Una de las rayas visibles del hidrógeno tiene una longitud de onda de 6562,99 Å. ¿Cuál es la longitud de onda de la correspondiente raya emitida por el helio simplemente ionizado? ¿Se encuentra esta raya en la región visible?

Podemos suponer aquí que ambos núcleos tienen una masa infinita. Este ejemplo nos enseña que argumentos dimensionales rudimentarios, como el que se presentó en la Sec. 27, pueden a veces emplearse para efectuar predicciones cuantitativas, precisas.

9 Supóngase que una partícula alfa y un núcleo de número de carga Z y número másico A experimentan un choque frontal. Deducir una expresión para la energía, en MeV, que debe tener la partícula alfa para justo alcanzar la superficie del núcleo, en función del número másico A. Para simplificar, supondremos que el núcleo sigue en reposo en la colisión, que $A = 2Z$ y que la partícula alfa es una carga puntual, sin tamaño alguno. Si la partícula alfa no alcanza la superficie, no pueden entrar en juego las fuerzas nucleares de corto alcance, y la colisión tiene lugar como si sólo actuaran las fuerzas electrostáticas. La energía que hemos calculado es, por lo tanto, una estimación de una energía característica por encima de la cual el resultado de la dispersión comenzará a diferir apreciablemente de la predicción en la que se tienen en cuenta solamente las fuerzas electrostáticas.

10 Consideraremos en este problema la energía electrostática de repulsión en un núcleo. Dado que la densidad de la materia nuclear es constante en primer aproximación, supondremos que un núcleo es una esfera cargada uniformemente. Este modelo es razonable para un núcleo que no sea demasiado ligero.

(*a*) Probar que para un núcleo de número másico A y número de carga Z la energía electrostática U_e viene dada por

$$U_e \cong A^{5/3}\left(\frac{Z}{A}\right)^2 \times (0.7\,\text{MeV}) \qquad \text{(i)}$$

Supongamos además que el número de neutrones es igual al número de protones, es decir, que $A \cong 2Z$. A partir de (i) obtenemos entonces una expresión para la energía electrostática por nucleón, a saber

$$\frac{U_e}{A} \sim A^{2/3} \times (0.17\,\text{MeV}) \qquad \text{(ii)}$$

Compárese esta energía con la energía de enlace media de un nucleón, que es de unos 8 MeV. Vemos así que para un valor de A no demasiado grande la energía electrostática por nucleón resulta ser bastante pequeña. Sin embargo, crece con A, y esta circunstancia permite explicar la marcha sistemática de que se habló en la Sec. 33. La naturaleza de la fuerza nuclear específica es tal que, si tuviera que actuar sola, los núcleos más estables tendrían aproximadamente el mismo número de neutrones y protones. Sin embargo, dado que también actúan las fuerzas electromagnéticas, el efecto neto de la presencia simultánea de estos dos tipos de fuerza es que los núcleos con un exceso de neutrones se ven favorecidos y esta tendencia hacia un exceso neutrónico aumenta con el número másico A.

(*b*) Para ver hasta qué punto es bueno este modelo de núcleo, haremos las siguientes consideraciones. La masa del isótopo (inestable) del fluor ${}_9F^{17}$ y la del isótopo del oxígeno ${}_8O^{17}$ difieren en $M(17;9) - M(17;8) = 3{,}0 \times 10^{-3}$ u. Obsérvese que el primer núcleo tiene 9 protones y 8 neutrones, mientras que el segundo tiene 8 protones y 9 neutrones. En otras palabras, podemos obtener uno de ellos a partir del otro intercambiando los neutrones y los protones. En casos como éste se habla de un par de *núcleos espejo*.

Hemos afirmado en el texto que los neutrones y los protones son muy parecidos físicamente y, si esto es verdad, cabría esperar que los *defectos* de masa de los dos núcleos mencionados fuesen iguales. Sin embargo, el protón y el neutrón sí difieren en su carga, y lo mismo cabe decir de los dos núcleos espejo. Suponiendo ahora que éstos son por lo demás iguales, excepto en lo que se refiere a la carga, podemos intentar explicar la diferencia de defectos de masa tomando como base la energía electrostática de repulsión. Efectúese un cálculo para ver hasta qué punto concuerdan bien estas ideas con la realidad.

11 Algunos de los núcleos conocidos más pesados pueden desintegrarse espontáneamente por *fisión*. En este proceso el núcleo se escinde en dos partes aproximadamente iguales, con una liberación de energía de unos 200 MeV por fisión. La fisión puede también inducirse mediante bombardeo con neutrones. El núcleo absorbe el neu-

trón incidente y queda en un estado excitado del que luego decae por fisión. El isótopo del uranio U^{235} es un ejemplo de núcleo que experimenta fácilmente fisión después de haber absorbido un neutrón. Dado que los elementos pesados tienen un mayor exceso de neutrones con relación a los protones comparados con los elementos en la parte media de la tabla periódica, el proceso de fisión conducirá a la emisión de unos pocos neutrones. Estas circunstancias hacen posible una reacción en cadena: los neutrones emitidos en la fisión inducen a otros núcleos fisionables a fisionarse, lo que conduce a la emisión de más neutrones, etc. Los reactores nucleares y la bomba atómica (de fisión) se basan en este principio.

(*a*) Estimar la energía que se liberaría (en calorías y en kilowatt-horas) si 1 g de U^{235} experimentase fisión completa y compárese esta energía con la energía que se libera en una reacción química típica en la que interviene 1 g de materia.

(*b*) Un pequeño trozo de U^{235} metálico no explotará espontáneamente, mientras que sí lo hará un trozo grande. ¿Cómo explica esto?

(*c*) Para estudiar el origen de la energía liberada en la fisión considérese, tomando como base la relación (i) del probl. 10, la energía electrostática del núcleo (por ejemplo, U^{235}) antes de la fisión y la energía electrostática total de los fragmentos. Es evidente que parte de la energía electrostática será liberada. Estimar esta energía y comparar su valor con el de 200 MeV por fisión.

12 La masa de dos núcleos de deuterio es mayor que la masa de la partícula alfa (= el núcleo $_2He^4$). (Véase la tabla 4A para las masas *atómicas*.)

(*a*) Calcular la energía liberada si 1 g de deuterio experimenta *fusión* para formar helio y comparar este resultado con la energía que se libera en la fisión.

(*b*) ¿Por qué un recipiente lleno de deuterio no explota espontáneamente?

13. Supongamos que el electrón es una partícula puntual clásica y que un electrón en un átomo se mueve en una órbita situada en un plano perpendicular al eje z y de tal manera que su momento cinético es constante e igual a $\hbar$.

(*a*) ¿Cuál es el momento magnético efectivo del electrón? Llamaremos a este momento magnético *un magnetón de Bohr*.

(*b*) ¿Cuál es la diferencia de energía (en eV) en las dos situaciones, (*a*), cuando un momento magnético de 1 magnetón de Bohr tiene el mismo sentido que el de un campo magnético de 1000 gauss y, (*b*), cuando su sentido es el opuesto?

(*c*) Supóngase que en un cristal de hierro hay un momento magnético de 1 magnetón de Bohr situado en la posición de cada átomo en el cristal y supóngase, además, que todos los momentos magnéticos apuntan en el mismo sentido. ¿Es parecido el valor de la imanación resultante al de la imanación que se encuentra en un imán de hierro saturado?

Nos interesa aquí estimar el valor de los momentos magnéticos que cabe esperar encontrar en los átomos. Nuestro simplicísimo modelo clásico del magnetismo atómico no debe tomarse demasiado en serio. Sin embargo, resulta que el magnetón de Bohr es efectivamente una cantidad típica en el caso de los átomos. En la discusión mecánico-cuántica del magnetismo atómico se reconocen dos con-

tribuciones al momento magnético. Una se debe al "movimiento orbital" del electrón, y es análoga a nuestro momento magnético clásico. La otra se debe al *spin* del electrón; un electrón posee también un momento cinético intrínseco, similar al momento cinético de una pequeña bola de billar que gira en torno de un eje que pasa por su centro. El valor de este momento cinético de spin es $\hbar/2$ y el correspondiente momento magnético es muy próximo a un magnetón de Bohr.

El objeto de la estimación de que se habla en la parte (*c*) del problema es averiguar si podemos *esperar* hallar una explicación del ferromagnetismo en términos de los momentos magnéticos de los átomos. El resultado de esta estimación es alentador. Hay que decir, sin embargo, que el ferromagnetismo es un fenómeno complicado, y nuestra simple estimación no cuenta toda la historia.

14 * En las Secs. 51-56 hemos discutido la "naturaleza atómica" de algunos de nuestros patrones macroscópicos de medida.

Supóngase, entonces, que en la actualidad se han comparado nuestros patrones y se han ajustado de modo que $(\mathrm{m})_p = (\mathrm{m})_a$ y que las constantes atómicas básicas e, m, M_p, c y $\hbar$ tienen los valores que se dan en la tabla 2A en términos de dichos patrones. Supóngase, además, que a la 1 de la madrugada del 30 de mayo de 1988, las constantes α y β cambian súbitamente y pasan a ser

$$\alpha' = \alpha(1 + u), \qquad \beta' = \beta(1 + w)$$

permaneciendo luego constantes e iguales a sus nuevos valores numéricos. Admitiremos que los números u y w son pequeños, digamos del orden del 1 por ciento; de no ser así, el cambio en la ordenación del universo podría ser demasiado drástico. Esta catástrofe natural será advertida, sin duda alguna, y durante un cierto tiempo (después de recobrarse del choque inicial) los físicos estarán ocupados volviendo a medir sus sagradas constantes. Designemos las cantidades después de la catástrofe con el símbolo (′).

(*a*) Hallar $(\mathrm{m})'_p/(m)'_a$.

(*b*) ¿Cuáles son los nuevos valores de la masa del electrón y de la masa del protón? [En $(\mathrm{g})'_p$.]

(*c*) ¿Cuál es el nuevo valor de la velocidad de la luz, c', tomando como unidad $(\mathrm{m})'_a/(\mathrm{s})'_a$?

(*d*) ¿Cuál es el nuevo valor $\hbar'$ de la constante de Planck?

(*e*) ¿Cuál es el nuevo valor de la carga del electrón en unidades electrostáticas y cuál es el nuevo valor en coulombs?

(*f*) ¿Cuál será la densidad del cobre [en $(\mathrm{g})'_p/(\mathrm{cm}^3)'_a$] después de la catástrofe?

* Este problema se refiere a un tema avanzado.

Capítulo 3

Niveles de energía

Esquemas de términos 104

Las anchuras no nulas de los niveles energéticos 115

Más sobre niveles y esquemas de términos 124

Ensanchamiento de las rayas espectrales por efecto Doppler y por colisión 140

Un tema avanzado: Sobre la teoría de las transiciones electromagnéticas 144

Bibliografía para ulterior estudio 151

Problemas 152

Capítulo 3

Niveles de energía

4742,5—4728,6 A.

Wave-length	Ele-ment	Intensities Arc	Spk.,[Dis.]	R
4742,589	Mo	–	10	–
4742,549	Er	3 w	–	–
4742,5	bh Sc	5	–	Me
4742,481	Sm	3	–	–
4742,392	Nd	4	–	–
4742,333	U	10	3	–
4742,325	Pr	7	–	–
4742,266	Th	4 l	2	–
4742,25	Se I	–	[500]	Rd
4742,227	Sm	2	–	–
4742,110	Ti I	15	1	–
4742,04	Ho	10	3	Ex
4741,997	Er	3 w	–	–
4741,937	Ge II	–	50	–
4741,922	Sr I	30	–	ISn
4741,78	Cd II	–	3	Vs
4741,775	Eu	10 W	–	–
4741,726	Sm II	80	–	–
4741,71	O II	–	[20]	Fl
4741,539	Dy	3	2	–
4741,533	Fe I	12	1	S
4741,520	W	12	2	–
4741,503	Pr	30	–	–
4741,404	Yt I	2	3	–
4741,398	Er	20	–	–
4741,282	U	1	2	–
4741,269	Ru	4	–	–
4741,10	Tm	3	–	Me
4741,018	Sc I	100	60 h	–
4741,005	Pr	6	–	–
4740,97	Se II	–	[600]	Bl
4740,928	Dy	3	2	–
4740,68	Cl I	–	[10]	Ks
4740,614	Cb	3	3	–
4740,524	Eu	500	2	–

Wave-length	Ele-ment
4737,642	Sc I
4737,626	U
4737,561	Pt I
4737,350	Cr
4737,282	Ce
4737,1	bh C
4737,05	Tl II
4736,965	Zr
4736,958	Sm
4736,945	Er
4736,9	bh Z
4736,79	Dy
4736,782	Ca
4736,780	Fe
4736,688	Pr
4736,637	Mc
4736,608	Eu
4736,6	Rt
4736,491	Cl
4736,490	S
4736,30	T
4736,203	I
4736,151	I
4736,116	
4736,089	
4736,062	
4735,94	
4735,93	
4735,848	
4735,847	
4735,77	
4735,76	
4735,66	
4735,4	
4735,4	

Fig. 1A Una parte muy pequeña de una tabla de longitudes de onda: Massachusetts Institute of Technology *Wavelength Tables,* compiladas bajo la dirección de G. R. Harrison (MIT Press, Cambridge, Mass., 1939). Esta tabla, que consta de 429 páginas, contiene más de 100000 rayas espectrales entre 10000 Å y 2000 Å. Cada página tiene tres columnas y las rayas aparecen ordenadas en el sentido de longitudes de onda decrecientes. Se da el símbolo del elemento químico correspondiente a cada raya, como también ciertos datos acerca del método de excitación y las intensidades.

Es costumbre dar las longitudes de onda en la región visible tal como se miden en el aire, mientras que las longitudes de onda en la región ultravioleta se refieren al vacío. En la región visible tenemos aproximadamente: $\lambda_{vac} = 1{,}0003\ \lambda_{air}$. (Proporcionada por MIA Press.)

Esquemas de términos

1 El hecho de que cada elemento químico está asociado con un único espectro óptico constituye uno de los aspectos sorprendentes de la naturaleza. Además, este rasgo es muy general: no solamente los átomos poseen espectros característicos, sino que también los presentan las moléculas y los núcleos. Estos objetos emiten y absorben radiación electromagnética a ciertas frecuencias definidas que van desde la región de las frecuencias de radio (para las moléculas) hasta la región de los rayos X de longitud de onda muy corta o los rayos gamma (para los núcleos). Históricamente, los espectros ópticos de los elementos fueron descubiertos por G. R. Kirchhoff y R. Bunsen a mediados del siglo XIX, mientras que los espectros de radiofrecuencia de las moléculas y los espectros de rayos gamma de los núcleos fueron descubiertos mucho más tarde, ya en este siglo.

Los espectros se interpretan en términos de *niveles de energía* de los átomos, moléculas y núcleos. El estudio de los espectros nos lleva a conocer una propiedad sumamente importante de los sistemas compuestos, que es la siguiente: asociado con cada uno de tales sistemas hay un conjunto de niveles energéticos, o *estados estacionarios,* característicos del sistema. Encontramos estos niveles en sistemas "pequeños" tales como átomos, moléculas y núcleos, en cuyo caso los niveles se manifiestan de manera muy directa en los espectros que observamos. También se encuentran dichos niveles en "sistemas grandes", como, por ejemplo, sólidos, líquidos y gases. Al principio puede no ocurrírsenos que existe una relación entre la emisión y la absorción de los rayos gamma por un núcleo y las vibraciones de un cristal de cuarzo en un instrumento electrónico, pero la hay.

2 En este capítulo estudiaremos niveles de energía en sistemas "pequeños". Se discutirán algunos de los hechos experimentales importantes e intentaremos comprender el porqué de ciertos aspectos de lo que se observa, tomando como base ideas teóricas muy simples. En este capítulo no intentaremos explicar *por qué* hay niveles energéticos, sino que aceptaremos más bien esta peculiaridad de la naturaleza como un hecho empírico

básico. En el capítulo 8 haremos frente al reto que supone el explicar la existencia de niveles y veremos cómo cabe entender su existencia tomando como base la mecánica cuántica.

El orden en que presentaremos las cosas es de hecho análogo, hasta cierto punto, al desarrollo histórico del tema, en el sentido de que buen número de las características de los espectros *atómicos* que se discuten en el presente capítulo fueron descubiertos mucho antes de que se hubiese creado una teoría satisfactoria de la estructura atómica (es decir, la mecánica cuántica). Nuestra exposición no es, sin embargo, *realmente* histórica. En efecto, pretendemos discutir los hechos empíricos que conciernen a los niveles energéticos de manera más general y, por lo tanto, discutiremos también lo que ocurre en el caso de los núcleos, aunque las propiedades de éstos no se conocieron sino hasta mucho más tarde.

3 Ya al principio se advirtieron ciertas notables regularidades en los espectros atómicos. Mencionaremos como ejemplo el *principio de combinación de Ritz,* según el cual los números de onda de muchas rayas espectrales de un elemento son iguales a diferencias, o a *sumas,* de números de onda de otros *pares* de rayas. Así, en un cierto elemento * se han observado las siguientes rayas: $\tilde{\nu}_1 = 82258{,}27\ \text{cm}^{-1}$; $\tilde{\nu}_2 = 97491{,}28\ \text{cm}^{-1}$, y $\tilde{\nu}_5 = 15232{,}97\ \text{cm}^{-1}$. Tenemos $\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1 = 15233{,}01\ \text{cm}^{-1}$, valor que es tan próximo a $\tilde{\nu}_5$ que difícilmente accederíamos a creer que esta coincidencia es una mera "casualidad", sobre todo teniendo en cuenta que el mismo rasgo se presenta en otras rayas del mismo elemento al igual que en las rayas de muchos otros elementos.

Posteriormente se descubrió un principio más general. El número de onda $\tilde{\nu}$ de *cualquier* raya emitida por un átomo puede expresarse como diferencia $\tilde{\nu} = T' - T''$ de dos *términos espectrales* T' y T''. Cada átomo está caracterizado por un *conjunto* de tales términos (expresado como conjunto de número de onda), conocido con el nombre de *sistema de términos* del átomo.

Este principio contiene el principio de combinación de Ritz. Supongamos que tres rayas espectrales están asociadas como sigue con tres términos:

$$\tilde{\nu}_{12} = T_1 - T_2, \quad \tilde{\nu}_{13} = T_1 - T_3, \quad \tilde{\nu}_{23} = T_2 - T_3 \qquad (3a)$$

* No revelaremos de qué átomo se trata, porque el hacerlo quitaría toda su gracia al prob. 1, al final de este capítulo.

Fig. 1B El espectro del hidrógeno. (Longitudes de onda en ångströms.) Este espectro no parece a primera vista particularmente notable en la región visible. Sin embargo, el interés de las longitudes de onda del hidrógeno es muy grande. Dado que este átomo es el más simple de todos los átomos posibles, representa el papel de piedra de toque para todas las teorías atómicas: este espectro *debe* ser explicado. Que Bohr fuese capaz de encontrar una explicación constituyó un avance espectacular en nuestra comprensión de la naturaleza. La mecánica cuántica moderna proporciona el porqué de todo lo visible en esta placa y mucho más, y la historia de la teoría del átomo de hidrógeno es realmente un fascinante capítulo en los anales de la física. (Espectro fotografiado por el doctor D. Goorvitch, Berkeley, para este libro.)

Tenemos entonces

$$\tilde{\nu}_{23} = (T_1 - T_3) - (T_1 - T_2) = \tilde{\nu}_{13} - \tilde{\nu}_{12} \qquad (3b)$$

que es un ejemplo del principio de combinación.

4 Hoy interpretamos un término espectral como elemento correspondiente a un nivel energético del átomo, y el sistema de términos, por consiguiente, se interpreta como manifestación de un conjunto de niveles de energía característico del átomo en cuestión. Esta idea fue formulada por primera vez por Niels Bohr en su trabajo sobre el átomo de hidrógeno *.

Examinemos este asunto a la luz de lo que ya sabemos acerca de la naturaleza cuántica de la radiación electromagnética. Un cuanto luminoso, o fotón, de frecuencia ν, y por lo tanto con número de onda $\tilde{\nu} = \nu/c$, transporta la energía $E = h\nu = (hc)\tilde{\nu}$. Esta energía es la diferencia entre las dos energías $E' = (hc)T'$ y $E'' = (hc)T''$. Por consiguiente, los términos se pueden expresar o bien como energías, o como números de onda o como frecuencias, puesto que estas cantidades están siempre ligadas entre sí por las constantes h y c. En vista de esto, podemos decir que una tabla de términos espectrales es una tabla de "niveles de energía". Conforme veremos, este modo de expresión posee un significado físico real: es más que un mero cambio de terminología.

5 En ciertas explicaciones elementales de los espectros atómicos y de la estructura atómica, el tema se presenta más o menos como sigue, en forma de dos postulados teóricos:

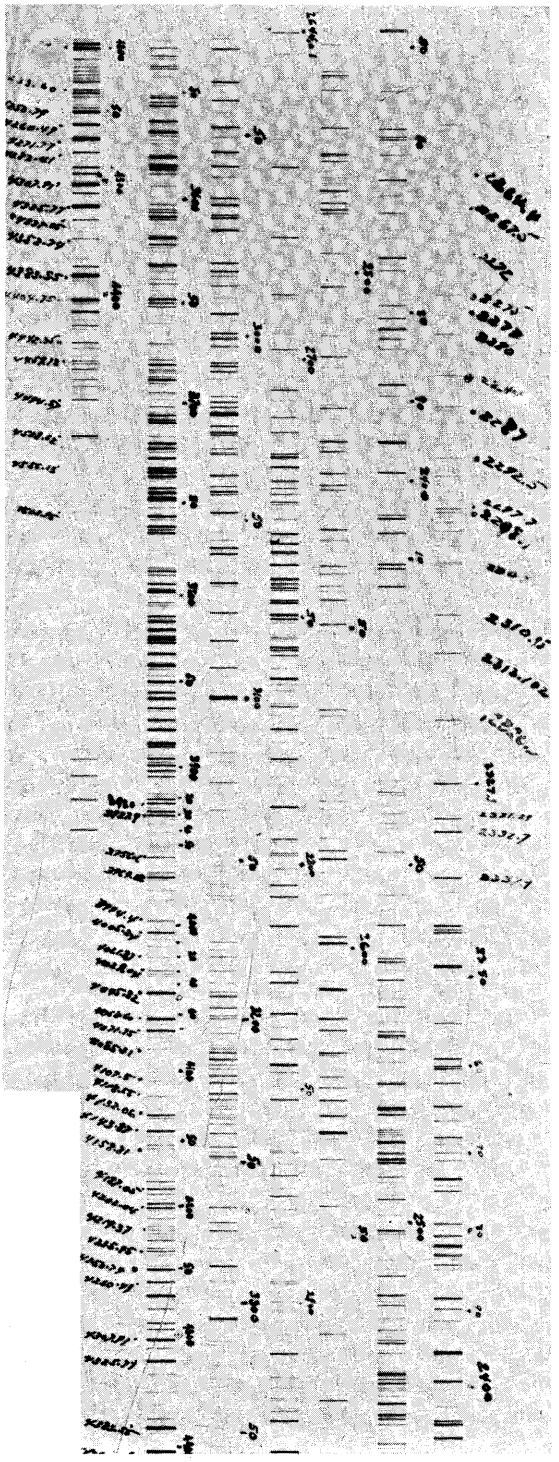
I. "Un átomo puede existir solamente en ciertos estados estacionarios definidos de movimiento interno. Estos estados forman un conjunto discreto y cada estado viene caracterizado por un determinado valor de la energía total."

II. "Cuando un átomo emite o absorbe radiación electromagnética, salta de un estado estacionario a otro. Si el átomo salta de un nivel superior de energía E_s a un nivel inferior de energía E_i, (con lo que tenemos $E_s > E_i$), se emitirá un fotón y la frecuencia ω del fotón emitido viene dada por **

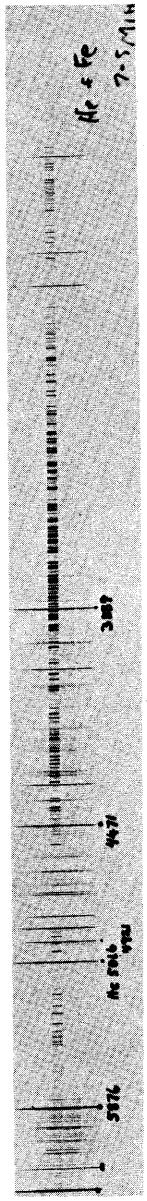
$$h\nu = \hbar\omega = E_s - E_i \qquad (5a)$$

* N. Bohr, *Philosophical Magazine* **26**, 1 (1913).

** Conforme dijimos en la Sec. 8, Cap. 2, tanto ν como la magnitud asociada $\omega = 2\pi\nu$ se llaman "frecuencia". Análogamente, tanto h como $\hbar = h/2\pi$ se llaman "constante de Planck". En lo que sigue utilizaremos las más de las veces ω y $\hbar$, porque el autor las prefiere a ν y h.



Varias partes del espectro del hierro fotografiado sobre la misma placa de vidrio. Las longitudes de onda escritas sobre ella se dan en ångströms. La finalidad de esta fotografía particular no fue medir las longitudes de onda del hierro, sino usar estas longitudes de onda, bien conocidas, para calibrar el espectrógrafo de prisma de cuarzo. (Fotografía proporcionada por el profesor S. P. Davis, Berkeley.)



Espectro del helio (rayas largas) superpuesto al espectro del hierro (rayas cortas). Los números sobre la placa dan algunas de las longitudes de onda del helio en ångströms. Es sorprendente el contraste entre la complejidad del espectro del hierro y la simplicidad del espectro del helio. (Fotografía proporcionada por el profesor S. P. Davis, Berkeley.)

El proceso inverso del de emisión es la absorción de un fotón de frecuencia ω, en cuyo caso el átomo salta de un estado inferior a un estado superior."

Ahora bien, hemos de advertir inmediatamente que si los postulados que preceden se interpretan al pie de la letra, el primer postulado es evidentemente falso. Los "estados superiores" no pueden ser absolutamente estacionarios o estables, en modo alguno, ya que el átomo de hecho decae desde estos estados espontáneamente. Esta pérdida de energía es muy rápida en una escala de tiempos *macroscópica*: podemos citar un tiempo de 10^{-8} segundos como estimación del orden de magnitud de las duraciones típicas de la vida de los estados excitados de los átomos. Hay que advertir, sin embargo, que esta duración resulta bastante larga en una escala de tiempos *atómica.* La frecuencia de un fotón óptico es del orden de 10^{14} s^{-1}, y el correspondiente período es así mucho más corto que la vida típica de un estado excitado.

Acerca del segundo postulado podemos decir que no proporciona mucha información: nos deja totalmente a oscuras en cuanto a qué significa que el átomo "salta" de un estado a otro. Ciertos autores no utilizarían realmente la palabra "salto", sino que mejor dirían que "el átomo efectúa una *transición* de un estado a otro". Esta manera de expresarse suena, sin duda, a más erudita, pero apenas proporciona más información. ¿Qué ocurre precisamente cuando el átomo efectúa la transición?

A pesar de lo que acabamos de decir, el lector no debe rechazar nuestros dos postulados como enunciados sin sentido: deben considerarse como una *primera aproximación* a la descripción de fenómenos muy complejos, y como a tales son útiles.

6 Para explicar todas las rayas espectrales observadas en un átomo (o molécula, o núcleo) intentaremos construir para el mismo un sistema de términos, o sistema de niveles energéticos, es decir, una lista de un cierto número de niveles de energía E_0, E_1, E_2, ..., etc., tales que cada raya espectral observada corresponda a la transición entre dos niveles energéticos del sistema de términos.

El sistema de niveles así construido se representa a menudo gráficamente en la forma de un *esquema de términos* como muestra esquemáticamente la fig. 6A. Las rectas horizontales indican cuatro niveles de energía del sistema. Las rayas verticales entre los niveles indican posibles transiciones, y las puntas de flecha señalan si la transición es hacia arriba (absorción) o hacia abajo (emisión). Las seis frecuencias de transición posibles se tabulan debajo de la figura. Es práctica común el re-

presentar el esquema de términos en una escala de energía lineal vertical, y las frecuencias de transición son así directamente proporcionales a las longitudes de las flechas (o rayas) entre los niveles.

Como indica la figura, un número relativamente pequeño de términos describe un número mucho mayor de rayas espectrales; el número de *pares* de niveles que se pueden elegir entre n niveles es igual a $n(n-1)/2$. Hay que decir, sin embargo, que en general no observamos rayas espectrales correspondientes a transiciones entre *cualquier* par de niveles posible, y en este respecto la fig. 6A desorienta un poco. Más adelante discutiremos esta importante cuestión.

Para apreciar debidamente el grado de ordenación que este procedimiento introduce en el estudio de los espectros, basta mirar alguno de los más complicados espectros atómicos o, todavía mejor, los espectros de bandas moleculares. (Véase figuras 6B y los demás espectros en este capítulo.) El último tipo de espectro presenta como nota distintiva un cierto número de *bandas* que, como se advierte al estudiarlas con muy elevada resolución, están constituidas por un número enorme de rayas espectrales muy juntas. A primera vista un espectro molecular de bandas resulta tan complejo, que parece no ofrecer esperanza alguna de dejarse interpretar. Sin embargo, ha resultado ser posible establecer un orden en esta complejidad: en muchos casos podemos construir esquemas de términos y explicar la posición de cada una de las rayas simples observadas.

7 Consideremos de nuevo la fig. 6A y supongamos que la figura muestra el esquema de términos de un átomo, en cuyo caso las separaciones entre niveles son típicamente del orden de un electrón-volt.

Supongamos que se estudia el *espectro de absorción* del átomo. Utilizando luz originada en un foco con una distribución espectral continua, observamos las rayas de absorción en la luz después de que ha pasado por una capa de gas (monoatómico) formado por los átomos en cuestión. Admitamos, además, que el gas se encuentra razonablemente frío, digamos, a la temperatura normal. Observaremos entonces rayas de absorción en las frecuencias ω_{30}, ω_{20} y ω_{10}, pero no en las restantes tres frecuencias. La explicación de ello es muy simple: la inmensa mayoría de los átomos en el gas se encuentra en el estado fundamental y, por lo tanto, observaremos solamente transiciones desde el estado fundamental a uno de los estados más altos.

A medida que la temperatura crece, aumenta también la probabilidad de que un átomo se encuentre en uno de los esta-

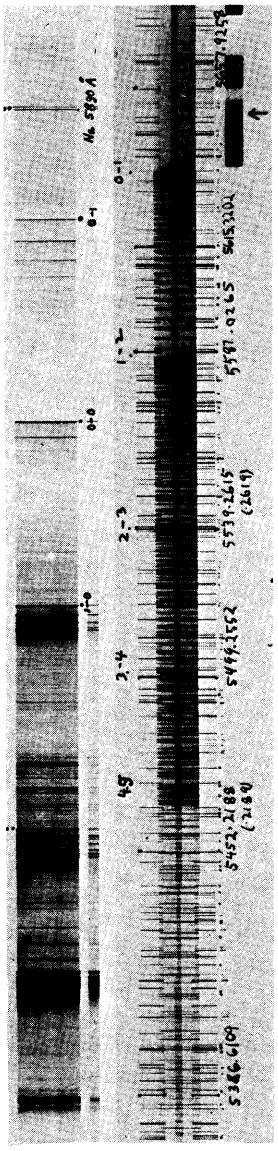


Fig. 6B Partes del espectro de la molécula C_2 tomadas con dos dispersiones diferentes. El espectro a la izquierda se tomó con baja dispersión y presenta las "bandas" características de los espectros moleculares. El espectro de la derecha se obtuvo con una dispersión mucho mayor (véanse las longitudes de onda en ångströms sobre la placa). Las rayas que constituyen las bandas se ven aquí muy claramente. (Fotografía proporcionada por el profesor S. P. Davis, Berkeley.)

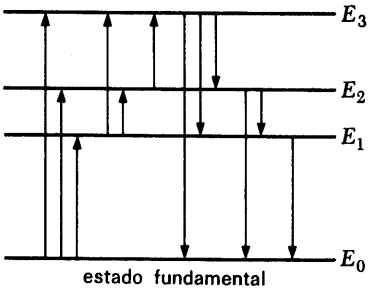


Fig. 6A Esquema de términos que presenta cuatro niveles de energía y las transiciones entre ellos. Las frecuencias de transición posibles son:

$$\omega_{30} = \frac{(E_3 - E_0)}{\hbar} \qquad \omega_{31} = \frac{(E_3 - E_1)}{\hbar}$$

$$\omega_{20} = \frac{(E_2 - E_0)}{\hbar} \qquad \omega_{21} = \frac{(E_2 - E_1)}{\hbar}$$

$$\omega_{10} = \frac{(E_1 - E_0)}{\hbar} \qquad \omega_{32} = \frac{(E_3 - E_2)}{\hbar}$$

dos excitados. En el volumen V de esta serie * veremos que en un gas mantenido a temperatura T la razón del número de átomos en el n-ésimo estado excitado al número de átomos en el estado fundamental viene dada por

$$\frac{N_n}{N_0} = \exp\left(-\frac{E_n - E_0}{kT}\right) \tag{7a}$$

A la "temperatura normal", para la cual $kT \approx (1/40)$ eV, esta razón es un número *sumamente* pequeño, prácticamente cero. De aquí se sigue que un gas frío no emitirá luz (visible) a menos que los átomos se exciten por algún otro medio (externo).

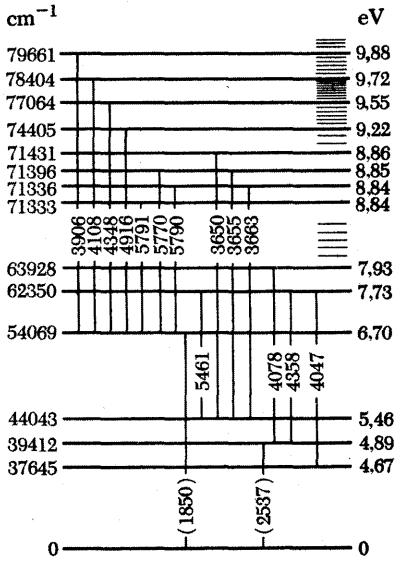
8 Si estudiamos el *espectro de emisión* del gas de átomos, excitado, por ejemplo, por una descarga eléctrica, cabe observar todas las rayas espectrales indicadas. Si un átomo, originalmente en su estado fundamental, choca con un electrón de elevada energía cinética, el electrón puede ceder parte de su energía al átomo. Esto hace que el átomo salte a uno de los estados más altos, desde el cual decae luego a un nivel más bajo con emisión de luz. Es de suyo evidente que este proceso no puede tener lugar a menos que la energía del electrón sea suficiente

* Berkeley Physics Course, volumen 5, Física estadística, Ed. Reverté, 1969.

para llevar al átomo a uno de los estados excitados. Si la energía del electrón es menor que $(E_1 - E_0)$, su colisión con el átomo sólo puede ser *elástica.* Si la energía es mayor, pasan a ser posibles las colisiones inelásticas, que conducen a la emisión de luz.

Existe una prueba experimental obvia para contrastar este modelo y, en realidad, todas las ideas generales que se encuentran en la base de nuestros postulados de la Sec. 5. Consiste, simplemente, en variar la energía de los electrones utilizados para excitar los átomos; a medida que la energía aumenta, deben aparecer nuevas rayas de emisión. La fig. 8A muestra algunos resultados de un experimento de este tipo para un gas de átomos de mercurio. Conforme vemos, el espectro de emisión cambia de aspecto de la manera esperada y los cambios pueden explicarse a partir del esquema de términos de la fig. 8B.

9 El gráfico de la fig. 9A presenta los resultados de un experimento similar. Átomos de mercurio, en forma de gas a baja presión, se excitan por bombardeo con electrones. Los átomos excitados decaen de nuevo al estado fundamental por emisión de fotones y la presencia de éstos (en particular, los fotones ultravioleta) se observa por la corriente foteléctrica a que dan lugar cuando caen sobre un electrodo de hierro. A medida que se aumenta la energía de los electrones de bombardeo, pueden excitarse nuevos niveles, y, en consecuencia, pasan a ser posi-



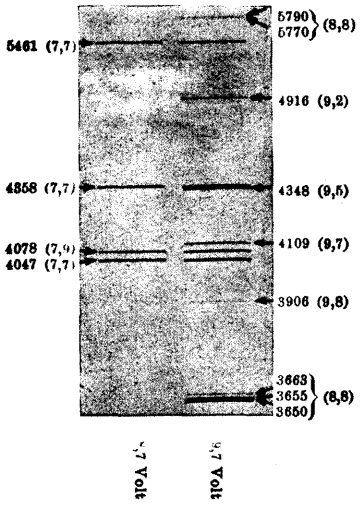


Fig. 8A El espectro del átomo de mercurio cuando se le excita por colisiones con electrones y para dos energías diferentes de éstos. La fotografía se ha tomado de G. Hertz, "Über die Anregung von Spektrallinien durch Elektronenstoss, I", *Zeitschrift für Physik,* **22**, 18 (1924).

Cuando la energía del electrón se aumenta desde 8,7 eV (espectro a la izquierda) a 9,7 eV (espectro de la derecha) aparece todo un sistema de rayas nuevas de las que no hay ni trazas en el espectro a la izquierda. Los números entre paréntesis en la figura indican las energías de los electrones para las que las rayas aparecen por vez primera, y los números sin paréntesis son las longitudes de onda en ångströms. (Cedida por Springer Verlag.)

Fig. 8B Esquema de términos, muy simplificado, del átomo de mercurio neutro con los niveles que intervienen en las transiciones representadas en la fig. 8A. Los números a la izquierda son las energías de los niveles expresadas en números de onda. Las correspondientes energías en eV se dan a la derecha. Obsérvese que este esquema de términos *no* se ha dibujado a escala. Los niveles para los que no se indican datos numéricos figuran a la derecha. Los números sobre las rayas de transición son longitudes de onda en ångströms. Todas las transiciones al estado fundamental se encuentran en la región ultravioleta. En el diagrama se presentan dos de dichas transiciones (con longitudes de onda entre paréntesis). Estas rayas no son visibles en el espectro de la fig. 8A. El límite de ionización se encuentra a 84184 cm^{-1} (lo que corresponde a 10,4 eV).

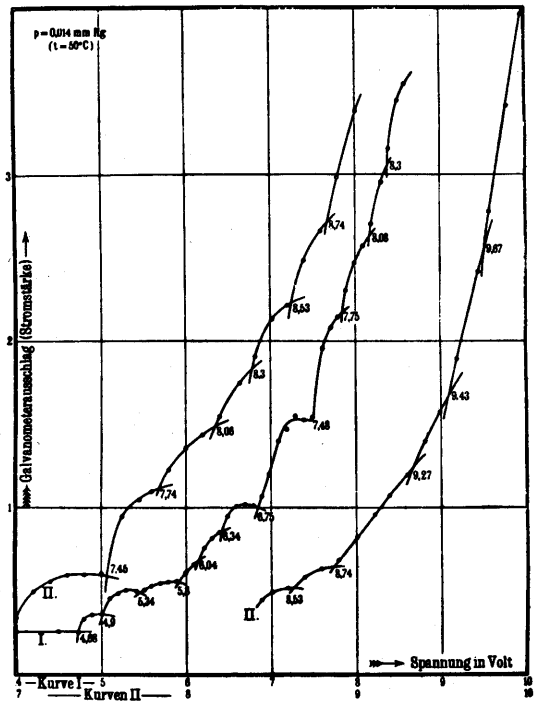


Fig. 9A Excitación de los átomos de mercurio por choque con electrones. La figura se ha tomado de J. Franck y E. Einsporn, "Über die Anregungspotentiale des Quecksilberdampfes," *Zeitschrift für Physik* 2, 18 (1920).

En abscisas se da la energía de los electrones (en dos escalas diferentes) y las ordenadas constituyen una medida de la luz emitida por los átomos de mercurio. (Véase la explicación en el texto.) Al ir aumentando la energía del electrón, se excitarán nuevos estados, y para cada nuevo nivel la pendiente de la curva cambia bruscamente, porque pasan a ser posibles nuevas transiciones en las que intervienen fotones adicionales. Los átomos forman gas de mercurio a una presión de 0,014 mm Hg y a una temperatura de 50°C. (Facilitada por Springer Verlag.)

bles nuevas transiciones. En cada nuevo nivel de energía del átomo de mercurio, la razón del incremento del número de fotones emitidos al aumento de energía del electrón experimenta un súbito cambio y la pendiente de la gráfica presentará así discontinuidades a dichas energías. Compárese la posición de estas discontinuidades en la figura 9A con los niveles representados en el esquema de términos de la fig. 8B.

Es difícil determinar con precisión la energía de los electrones de bombardeo, pero, con todo, mediciones como éstas pueden ser muy útiles, evidentemente, para la determinación del sistema de niveles de un átomo. La curva de la fig. 9A establece la situación aproximada de muchos de los niveles. Estos datos se suplementan con precisas mediciones de longitud de onda de las rayas de emisión, y puesto que podemos observar para qué energías del electrón aparece por primera vez una raya (si empleamos el método de excitación por bombardeo electrónico), obtenemos información acerca de los niveles que intervienen en las transiciones. Por otra parte, el estudio del espectro de absorción proporciona información adicional: en este caso sabemos que el estado fundamental debe ser el nivel más bajo.

Éstos y muchos otros métodos han sido empleados en el pasado, y se emplean todavía, para acopiar una enorme cantidad de datos acerca de espectros y niveles atómicos.

10 Tomando como base la fig. 6A, es fácil comprender en qué consiste el fenómeno de la *fluorescencia.* Un fotón de energía $(E_3 - E_0)$ es absorbido por el átomo en su estado fundamental y, por ello, el átomo efectúa una transición al nivel de energía E_3. Puede decaer luego desde este nivel pasando por otros niveles y observaremos entonces fotones de todas las frecuencias enumeradas en la fig. 6A.

Basándonos en este modelo, es posible entender inmediatamente la regla de Stokes: la frecuencia de la luz emitida en la fluorescencia no puede ser mayor que la frecuencia de la luz excitadora. Esta regla vale de manera muy general, si bien pueden presentarse excepciones si alguno de los átomos que absorben la luz excitadora no se encuentran originalmente en el estado fundamental.

En el trabajo * en que Einstein discutió el efecto fotoeléctrico, analizó también la regla de Stokes desde el punto de vista fotónico. En aquel tiempo no había surgido todavía la idea de niveles energéticos, pero la regla puede entenderse también si

* A. Einstein, *Annalen der Physik* **17**, 132 (1905).

se supone que la energía del cuanto emitido debe proceder de la energía de un cuanto absorbido.

11 A determinada energía por encima de la del estado fundamental, el átomo se ioniza. Esta energía es la energía mínima del sistema formado por un electrón y el átomo simplemente ionizado, completamente separados el uno del otro. A esta energía, y por encima de ella, el "átomo" no existe ya en tanto que átomo, pero podemos aun considerar el sistema constituido por el átomo simplemente ionizado y el electrón. Es evidente que este sistema puede poseer *cualquier* energía que queramos por encima de la energía de ionización. El conjunto de las posibles energías del *sistema* consiste, por lo tanto, de un conjunto discreto de niveles de energía *por debajo* de la energía de ionización y de un continuo *por encima* de esta energía. Esta situación se representa esquemáticamente en la fig. 11A. El área sombreada por encima del nivel de ionización E_i corresponde al continuo.

La raya vertical a la izquierda representa la transición desde el estado fundamental hasta la energía E' en el continuo por absorción de un fotón de energía $(E' - E_0)$. Este proceso es el efecto fotoeléctrico para un átomo aislado. El electrón expulsado aparecerá con una energía *cinética* $(E' - E_i)$.

El proceso inverso de la foto-ionización (efecto fotoeléctrico) es la *recombinación radiativa* del electrón y del átomo simplemente ionizado. Este proceso se indica por la raya vertical a la derecha en la fig. 11A. Un electrón de energía cinética $(E'' - E_i)$ choca con el ion (en reposo) y el sistema "salta" hacia abajo al nivel de energía E_2 con emisión de un fotón de energía $(E'' - E_2)$. Desde este nivel, el átomo continúa descendiendo hasta alcanzar el estado fundamental pasando por el primer estado excitado, conforme se indica mediante las flechas. En cada transición en esta *cascada* se emite un fotón de la frecuencia apropiada.

En física atómica, se suele asignar el valor de energía cero al nivel de ionización, con lo cual todos los estados ligados tienen energías negativas. Son posibles, y adecuados, otros convenios según sean las circunstancias. En física nuclear se asigna a menudo el valor cero al estado fundamental del núcleo. Hemos de hacer notar que la elección del punto cero es cuestión de puro convenio.

12 Hasta aquí hemos considerado a la luz de nuestros dos postulados solamente los átomos. La noción de niveles de energía y de transiciones entre estos niveles posee, sin embargo,

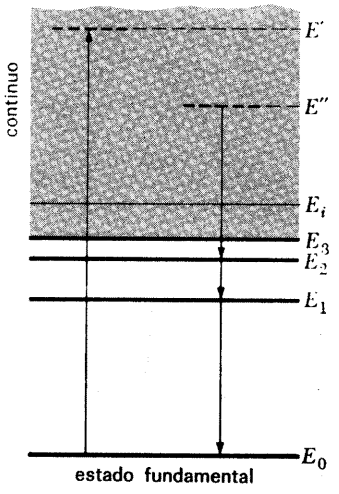


Fig. 11A Esquema de términos que muestra los niveles de energía discretos y el continuo (en gris) por encima del nivel de ionización. Las transiciones desde o a los niveles discretos que llevan al continuo o proceden de él se indican por flechas verticales. Las rayas horizontales de trazos insertas en el continuo no simbolizan niveles de energía del átomo, sino dos energías particulares en un intervalo continuo de energías dentro del cual puede encontrarse la energía del sistema constituido por un electrón y un ion.

una aplicabilidad muy general y podemos discutir de la misma manera tanto las moléculas como los núcleos. Considérese un sistema arbitrario de partículas, de cualquier especie y en número cualquiera. El nivel de ionización, o nivel de disociación, por encima del cual las energías posibles del sistema forman un continuo, es la energía más baja a la que el sistema puede existir formando dos partes separadas, a gran distancia una de otra. Por debajo de esta energía podemos encontrar un cierto número de niveles de energía discretos correspondientes a estados ligados del sistema. (Esta caracterización, que está en el espíritu de nuestros dos postulados, debe matizarse si queremos ser muy precisos.)

Como ejemplo de esquema de términos en física nuclear consideremos el esquema de términos del deuterón representado en la fig. 12A. El deuterón carece de estados excitados discretos. La energía de enlace, B, del deuterón es $B = 2{,}23$ MeV, lo que significa que el continuo comienza a la energía B por encima del estado fundamental. Si la energía es mayor que B, el "deuterón" no es ya un deuterón, sino un sistema formado por un neutrón y un protón separados entre sí.

La flecha vertical en la figura representa la fotodesintegración del deuterón. Un fotón de energía $E_f > B$ provoca la disociación del deuterón en un protón y un neutrón, la suma de cuyas energías cinéticas es $(E_f - B)$. Este proceso, que se ha estudiado experimentalmente con gran detalle, es, claro está, por completo análogo al de la fotoionización de un átomo que hemos discutido en la sección precedente. El proceso inverso es la captura radiativa de un neutrón por un protón.

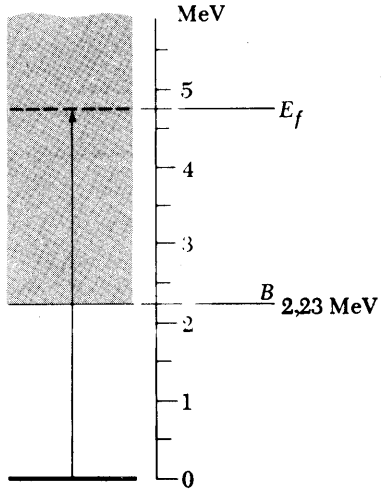


Fig. 12A Esquema de términos del sistema protón-neutrón que muestra el estado fundamental del deuterón y el continuo, que empieza en la energía de disociación a 2,23 MeV por encima del estado fundamental. La flecha simboliza la fotodesintegración del deuterón.

13 El autor espera que estas observaciones a modo de introducción acerca de los esquemas de términos, hayan convencido al lector de que nuestros dos postulados, en efecto, son útiles para el estudio de la estructura de los átomos, las moléculas y los núcleos. Nos vemos conducidos a organizar el material de que disponemos, y que es resultado de experimentos relativos a los espectros, con ayuda de los esquemas de términos. La parte importante del segundo postulado es, evidentemente, la relación (5a). Al hablar del "átomo que salta" *no se pretende* describir los detalles de los procesos de emisión o de absorción: es meramente un modo gráfico de decir que algo ocurre.

Por costumbre, la palabra "salto" ha llegado a quedar bien establecida como término coloquial en física cuántica. En opinión del autor la elección del término no ha sido feliz y cabe presumir que ha causado muchos malos ratos innecesarios en

el estudio de la física. La palabra es peligrosa debido a lo que evoca: cuando decimos que un "sistema salta de un estado a otro" parece que ello implique que el proceso tiene un cierto carácter abrupto y discontinuo y la imagen mental que nos formamos de acuerdo con esto puede despistarnos seriamente.

Las anchuras no nulas de los niveles energéticos

14 Hasta aquí no hemos tropezado con dificultades en nuestra discusión al utilizar el "modelo del salto", y la razón de ello consiste simplemente en que, en realidad, no hemos hecho uso alguno del mismo: nos hemos limitado a utilizar la ecuación (5a). Consideremos ahora una situación en la que pueden surgir complicaciones si tomamos el "modelo del salto" demasiado al pie de la letra.

Un fotón de frecuencia ω_0 incide sobre un átomo que originalmente se encuentra en su estado fundamental. La frecuencia ω_0 resulta corresponder justamente a la energía de transición del átomo desde el estado fundamental a uno de los estados excitados y, en consecuencia, el átomo absorbe el fotón y realiza el salto. Al cabo de un cierto tiempo salta de nuevo al estado fundamental con re-emisión de un fotón de frecuencia ω_0. Este fotón puede ser emitido en una dirección cualquiera y el átomo dispersará así luz incidente con la frecuencia correcta ω_0. Supongamos, en cambio, que la luz incidente *no* tiene la frecuencia correcta ω_0, sino una frecuencia ω que difiere muy poco de ω_0. ¿El átomo dispersará entonces la luz? La respuesta es sí. Se encuentra experimentalmente que cuando aumentamos la frecuencia incidente ω partiendo de un valor por debajo de ω_0, la eficacia del átomo como dispersor cambia: crece primero hasta alcanzar un máximo muy acusado para $\omega = \omega_0$ y luego decrece de nuevo. De una manera u otra los fotones de frecuencia incorrecta pueden también inducir los "saltos": los experimentos nos dicen que así ocurre. Podemos además preguntar cuál será la frecuencia de la radiación dispersada, si la frecuencia incidente es $\omega \neq \omega_0$. El "modelo del salto" puede sugerirnos que esta frecuencia debe ser la "correcta", es decir, ω_0, lo que no se encuentra experimentalmente: la frecuencia re-emitida es, en realidad, ω, como es de esperar en virtud de la conservación de la energía (y el modelo adoptado para el fotón).

En la discusión de este fenómeno, conocido como *fluorescencia por resonancia,* difícilmente se puede considerar el tér-

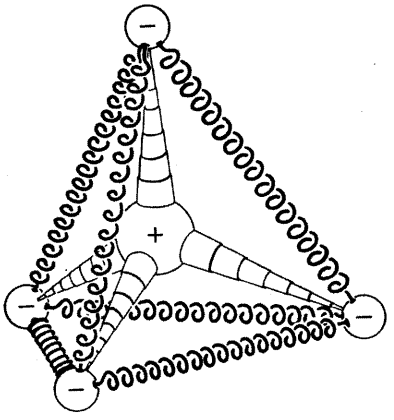


Fig. 15A Un modelo mecánico de átomo que puede ayudar a comprender la fluorescencia por resonancia. Si este mecanismo se excita por un golpe (por ejemplo, en la colisión con un electrón), oscilará, y dado que los electrones están cargados, se emitirá radiación electromagnética a las frecuencias de resonancia del sistema. El movimiento es amortiguado, necesariamente, porque el sistema pierde energía por radiación.

Bajo la influencia de una onda electromagnética incidente, el átomo experimentará oscilaciones forzadas con frecuencia igual a la de la onda incidente y, en consecuencia, emitirá radiación con esta misma frecuencia. En esto consiste el fenómeno de la fluorescencia por resonancia.

mino "salto" como apropiado: incluso podría extraviarnos seriamente.

15 Los hechos observados pueden interpretarse muy bien utilizando otro modelo. Imaginemos el átomo como un sistema cuántico en el que los electrones se encuentran ligados al núcleo por resortes. Un sistema de este tipo tendrá un cierto número de frecuencias de resonancia, una de las cuales es la frecuencia ω_0. En el estado fundamental del átomo este sistema se encuentra en reposo, pero una onda electromagnética incidente excitará oscilaciones en el mismo. En consecuencia, los electrones en su movimiento de oscilación radiarán una onda electromagnética de la *misma* frecuencia que la onda incidente. La amplitud de las oscilaciones será tanto mayor cuanto más cerca nos encontremos de la frecuencia de resonancia ω_0 y la eficacia del átomo como dispersor será máxima, evidentemente, cuando la frecuencia incidente sea igual a la frecuencia ω_0. Además, y esto es lo más importante, la onda radiada se encontrará en una determinada relación de fase con la onda incidente y, de acuerdo con ello, interferirá con ésta de una manera bien definida que el "modelo del salto" no podría explicar satisfactoriamente, El defecto más serio de este modelo en este caso es que divide el proceso de dispersión en dos etapas de una manera que no corresponde en modo alguno a la realidad: el proceso de dispersión debe considerarse como un único proceso coherente, y no como constituido por dos saltos, de modo que la fase del fotón emitido en el segundo no se encuentra en relación alguna definida con la del fotón absorbido en el primer salto.

El que la onda reemitida sea o no coherente con la onda incidente es algo que se puede comprobar experimentalmente y las pruebas que así se obtienen son concluyentes en favor del modelo del oscilador, que predice la coherencia.

16 Nuestra discusión de la fluorescencia por resonancia nos sugiere una nueva interpretación de los niveles energéticos de los átomos, núcleos y moléculas: las diferencias de niveles de energía corresponden a frecuencias para las que el sistema puede entrar en resonancia. *Las diferencias de niveles de energía son resonancias.*

Naturalmente, no hay que tomar en serio ningún modelo mecánico con resortes y palancas: es obvio que ello carecería de sentido. La razón por la cual ciertos modelos que se reconocen como incorrectos pueden, aun así, servir también para describir fenómenos tales como la fluorescencia por reso-

nancia, son independientes de los detalles del modelo: lo único que cuenta es el sistema de frecuencias de resonancia (con las constantes de amortiguamiento asociadas) y la naturaleza de los acoplamientos de los varios modos resonantes a la fuente externa de excitación.

17 Supongamos ahora que intentamos determinar la energía de un nivel por encima del estado fundamental de un átomo midiendo la frecuencia de los fotones que pueden ser causa de transiciones desde el estado fundamental al estado excitado. Se intenta, en otras palabras, fijar el valor de la frecuencia a la que el átomo entra en resonancia. Sin embargo, no existe una *única* frecuencia con estas características: el átomo responde a todas las frecuencias contenidas en un cierto pequeño *intervalo.* Podríamos decir, claro está, que la frecuencia "correcta" que define la energía del nivel es la frecuencia ω_0 para la cual la respuesta es máxima. Con todo, subsiste el hecho de que el átomo responde también en la vecindad inmediata de ω_0 y la raya en su espectro de absorción no puede ser, por lo tanto, absolutamente fina: tiene una *anchura no nula.* Que así es constituye un hecho experimental: las rayas en un espectro de absorción presentan anchuras no nulas,

Podemos entonces plantear la siguiente cuestión: ¿qué hay de las rayas espectrales *emitidas* por el átomo? ¿Poseen también ellas una anchura? La respuesta es sí. La anchura de una raya de emisión es la misma que la anchura de la correspondiente raya de absorción. (Hay que decir aquí que las rayas de los espectros ópticos, tal como las observamos en la práctica, se ensanchan debido a varios efectos diferentes. Tratamos aquí de la anchura de una raya espectral emitida, o absorbida, por un átomo aislado originalmente en reposo respecto del observador. Esta anchura es una propiedad intrínseca del átomo. Olvidemos por el momento todas las demás causas de ensanchamiento: las discutiremos más adelante en este capítulo.)

¿Qué significa que una raya de emisión tiene una anchura no nula? Significa literalmente lo que con ello se dice: si fotografiamos la raya con un espectrógrafo de *extremadamente* alta resolución, encontramos que la raya tiene una anchura no nula. La frecuencia de la luz emitida no es precisamente ω_0, sino que observamos también frecuencias en la vecindad inmediata de ω_0.

18 Dado que la posición de un nivel de energía viene determinada mediante observaciones de rayas de emisión y absor-

ción y dado que estas rayas tienen siempre una anchura que no es cero, hay que concluir que la energía de un estado excitado no puede ser una cantidad definida con precisión. Si creemos en la bondad del modelo del fotón y en el principio de conservación de la energía, nos vemos forzados a llegar a esta conclusión. Nuestro primer postulado en la Sec. 5 no es, por lo tanto, literalmente verdadero. *Los niveles de energía por encima del estado fundamental tienen una anchura no nula.*

Supongamos que se determina la energía de un estado excitado particular en un átomo (o molécula, o núcleo) observando la raya de absorción que enlaza el estado excitado con el estado fundamental. Si la respuesta del átomo presenta un máximo para la frecuencia ω_0, podemos asignar al estado excitado la *energía media*, $E = E_0 + \hbar\omega_0$, donde E_0 es la energía del estado fundamental. Si la anchura de la raya espectral es $\Delta\omega$ (definida de manera adecuada), decimos que la anchura del nivel excitado es $\Delta E = \hbar\Delta\omega$. Una vez se ha reconocido que los niveles energéticos poseen una anchura diferente de cero no tiene mucho interés utilizar el embarazoso término "energía media": hablaremos simplemente de la "energía" del nivel, en el bien entendido de que esta energía se refiere a una energía media definida convenientemente.

19 La naturalza de la hipótesis simplificadora que se encuentra en la base de nuestro primer postulado puede ilustrarse muy bien mediante un ejemplo tomado de la mecánica clásica. Consideremos un péndulo que se pone en movimiento y se abandona luego a sí mismo de modo que oscile. Suponemos que las fuerzas de fricción (de las cuales la más importante es la resistencia del aire) son pequeñas, pero no nulas, de modo que el péndulo puede efectuar varios centenares de oscilaciones antes de que su energía de oscilación haya disminuido hasta llegar a ser $1/e$ veces su valor original. (El tiempo requerido para ello es la "vida media del estado oscilatorio".) Supongamos que el intervalo de tiempo entre dos elongaciones máximas sucesivas a la derecha sea de un segundo.

Imaginemos ahora que alguien nos pregunta cuál es la frecuencia del péndulo. Sin reflexionar mucho contestaríamos que la frecuencia es de uno por segundo. Es cierto que esta respuesta es razonable, pero estrictamente hablando es errónea: por "frecuencia" entendemos el número de veces que se repite por unidad de tiempo un fenómeno *periódico*. Sin embargo, el movimiento del péndulo es periódico tan sólo aproximadamente, puesto que la amplitud de oscilación disminuye, de hecho, a medida que el tiempo transcurre. La frecuencia de

un movimiento armónico *amortiguado* no es un concepto definido de manera precisa, aunque, para todos los fines prácticos, cabe realmente definirlo muy bien.

Un átomo que emite radiación es, en cierto modo, análogo a un péndulo amortiguado. El proceso de emisión no dura indefinidamente y esto debe significar que la "oscilación dentro del átomo" es una oscilación amortiguada. No existe, por lo tanto, una frecuencia *precisamente* definida, ya que el fenómeno oscilatorio no es estrictamente periódico. La radiación electromagnética emitida por aquel "algo que está oscilando dentro del átomo" resulta, pues, no monocromática. La raya emitida tiene una anchura diferente de cero.

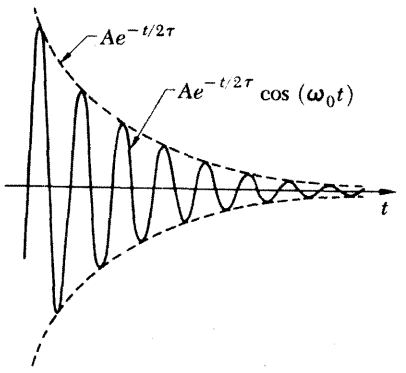


Fig. 19A Proceso oscilatorio amortiguado exponencialmente que muestra la amplitud en función del tiempo. Dado que el proceso no es estrictamente periódico en el tiempo, no es correcto decir que la frecuencia de la oscilación es ω_0, porque el concepto de frecuencia se refiere a un fenómeno *periódico*. Si el amortiguamiento no es damasiado grande, cabe decir que la frecuencia es *aproximadamente* ω_0. Es intuitivamente claro que cuanto menor es el amortiguamiento, esto es, cuanto menor es la disminución de la amplitud para dos máximos consecutivos, tanto mejor definida está la frecuencia.

20 Si examinamos la fig. 19A se nos puede ocurrir que cuanto menor sea el amortiguamiento, mejor definida está la frecuencia y cabría conjeturar que, acaso, la indeterminación $\Delta\omega$ en el valor de la frecuencia es inversamente proporcional a la vida media τ.

Para investigar esta cuestión consideraremos la emisión y la dispersión de la luz por un átomo dentro del espíritu del "modelo de oscilador" de la Sec. 15. Supondremos que intervienen solamente dos estados: el estado fundamental y un estado excitado de energía $\hbar\omega_0$ por encima del mismo.

En primer lugar consideraremos el átomo en sí mismo, justo después de haber sido excitado. Designaremos por $A(t)$ la amplitud de sea lo que sea que oscila dentro del átomo y supongamos que la dependencia respecto del tiempo es de la forma

$$A(t) = A\exp\left(-i\omega_0 t - \frac{t}{2\tau}\right) \tag{20a}$$

donde A es una constante. Ésta es la dependencia temporal de la amplitud del oscilador armónico amortiguado de frecuencia media ω_0 en la representación compleja.

Dado que el fenómeno oscilatorio hace intervenir partículas cargadas, hemos de esperar que se emitirá radiación electromagnética (de frecuencia media ω_0) y la dependencia de la amplitud de la onda emitida, respecto del tiempo, debe ser de la misma forma (20a). La *intensidad* $I(t)$ de la radiación emitida es proporcional al cuadrado del valor absoluto de la amplitud:

$$I(t) = C|A(t)|^2 = C|A|^2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{20b}$$

donde C es una cierta constante. Podemos escribir, en consecuencia,

$$I(t) = I(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{20c}$$

Hemos escrito en (20a) el factor de amortiguamiento exponencial en la forma $\exp(-t/2\tau)$ para poder tener el factor $\exp(-t/\tau)$ en la expresión de la intensidad. Evidentemente, es cuestión de puro convenio la de cómo escribir este factor, es decir, la de cómo definir τ. Con esta definición, τ es el tiempo necesario para que la *intensidad* de la radiación quede reducida por el factor $1/e$. Dado que τ es una medida de la duración del proceso, cabe interpretar τ como *vida media del estado excitado.* "La mayor proporción de decaimiento tiene lugar en un intervalo de tiempo que es del orden de τ."

21 La amplitud del oscilador $A(t)$ dada por (20*a*) satisface la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dA(t)}{dt} + \left(i\omega_0 + \frac{1}{2\tau}\right)A(t) = 0 \tag{21a}$$

Esta ecuación diferencial *homogénea* describe el comportamiento del oscilador cuando no hay influencias externas. Supongamos ahora que luz monocromática de frecuencia ω incide sobre el oscilador. Es necesario entonces modificar la ecuación (21a) sumando un término que represente la fuerza aplicada, que varía armónicamente. La ecuación diferencial *no homogénea* que así resulta para el oscilador tiene entonces la forma

$$\frac{dA(t)}{dt} + \left(i\omega_0 + \frac{1}{2\tau}\right)A(t) = F \exp(-i\omega t) \tag{21b}$$

donde F es una constante que representa la intensidad de la fuerza externa aplicada.

La ecuación diferencial (21b) tiene la solución estacionaria (prescindiendo de los transitorios)

$$A(t) = \frac{iF \exp(-i\omega t)}{(\omega - \omega_0) + i/2\tau} \tag{21c}$$

que corresponde a una oscilación con amplitud constante y de frecuencia igual a la frecuencia aplicada ω.

La intensidad de la radiación emitida por el oscilador es proporcional al cuadrado del valor absoluto de $A(t)$. La emisión procedente del oscilador *forzado* se observa en forma de radiación dispersa y la cuantía de la dispersión es proporcional a la intensidad. Designemos la cantidad total de la radiación dispersa por unidad de tiempo y por unidad de amplitud de la radiación incidente por $S(\omega)$, donde ω es la frecuencia de ésta. Teniendo en cuenta (21c), podemos escribir entonces

$$S(\omega)\text{proporcional a } \left|\frac{1}{(\omega - \omega_0) + i/2\tau}\right|^2$$

o bien

$$S(\omega) = S(\omega_0)\,\frac{(1/2\tau)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (1/2\tau)^2} \tag{21d}$$

donde $S(\omega_0)$ es la cantidad de dispersión "en la resonancia", es decir, cuando $\omega = \omega_0$.

Un diagrama esquemático de $S(\omega)$ en función de ω se presenta en la fig. 21A.

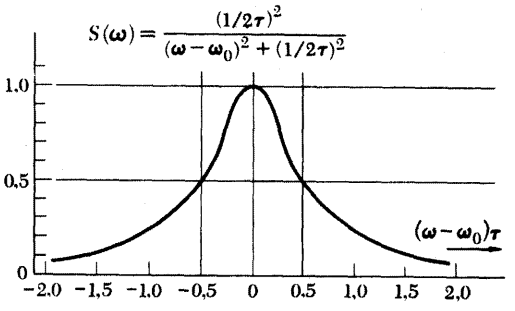


Fig. 21A La curva universal de resonancia. Describe la respuesta de *cualquier* sistema lineal (o aproximadamente lineal) a la acción de una fuerza externa que varía sinusoidalmente y en la vecindad de una frecuencia de resonancia, con tal que ninguna otra resonancia se encuentre cerca.

(Dos curvas en forma de campana representan un papel particularmente importante en la física: la curva de resonancia y la curva gaussiana. Tal como se las dibuja de ordinario, pueden parecer muy similares. Sin embargo, hay que recordar que la gaussiana cae muy rápidamente fuera de la región central, mientras que la curva de resonancia presenta una larga "cola".)

22 La función $S(\omega)$ expresa "la intensidad de respuesta" del sistema sometido a una perturbación externa de frecuencia ω. *Este tipo de respuesta por resonancia es un fenómeno muy general en física cuántica, y en modo alguno queda restringido a la interacción de la luz con los átomos.* La misma respuesta por resonancia encontramos al estudiar la dispersión de partículas materiales, tales como protones, de energía bien definida, por un núcleo, o la dispersión de piones por un protón. Muy bien cabría decir que un nivel de energía cuasiestable de un sistema mecánico cuántico "existe" *precisamente* en el sentido de que el sistema presenta una respuesta por resonancia, dada por la ecuación (21d), a la frecuencia apropiada.

En física nuclear la fórmula de resonancia (21d) se conoce con el nombre de *fórmula de resonancia, en un nivel, de Breit-Wigner,* recogiendo así el nombre de sus descubridores G. Breit y E. P. Wigner.

23 Hagamos notar ahora una importante característica de la fórmula de resonancia (21d). Consideremos la frecuencia ω a la que la respuesta es la mitad de la respuesta en el máximo. Se encuentra para ella

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{1}{2\tau} \tag{23a}$$

La anchura de la curva de resonancia (véase fig. 21A) a mitad del máximo viene dada, según esto, por

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} \tag{23b}$$

Este resultado concuerda con nuestra conjetura expresada en la Sec. 20 acerca de la relación entre la indeterminación en la frecuencia y la vida media del estado excitado.

Dado que podemos definir la anchura del nivel de energía (excitado) por $\Delta E = \hbar\Delta\omega$, de (23b) se deduce sin más la relación muy importante

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau} \tag{23c}$$

que da la indeterminación ΔE de la energía de un nivel en función de la vida media τ del estado. Cuando más tiempo vive éste, tanto mejor definida está la energía.

24 Acaso el lector dude seriamente de que una simple ecuación diferencial tal como la (21b) pueda describir realmente un fenómeno tan complicado como la interacción entre la luz y un átomo. De hecho no lo describe, pero la cuestión es que no tratamos de describir *cada* aspecto de la interacción, sino tan sólo la respuesta del átomo a luz (casi) monocromática cuya frecuencia se encuentra en la vecindad *inmediata* de la frecuencia de resonancia ω_0 correspondiente a una transición desde el estado fundamental a un estado excitado. La fórmula (21d) describe solamente una única resonancia, y si hay varias, como ocurre siempre en el caso de los átomos, moléculas y núcleos, entonces es necesario modificar la teoría. Cabe esperar que la fórmula (21d) valga con buena precisión en un entorno de la raya de resonancia muy alejado de todas las demás.

Exponer la historia completa de las transiciones radiativas nos llevaría demasiado lejos y hemos de contentarnos con nuestra, hasta cierto punto, vaga teoría. La esencia de la cuestión es, evidentemente, que *algo* oscila, y que este algo posee carga, y que la respuesta (en amplitud) a una perturbación externa es lineal.

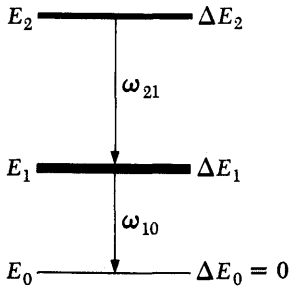


Fig. 25A Esquema de términos simplificado para ilustrar lo expuesto en la Sec. 25. La anchura de la raya (de frecuencia media ω_{21}) emitida en la transición desde el estado excitado superior al estado excitado inferior depende de la anchura de *ambos* niveles y tenemos: $\Delta_{\omega_{21}} = (\Delta E_2 + \Delta E_1)\hbar$.

25 Consideremos ahora la anchura de una raya emitida en una transición entre dos estados *excitados*. Esta situación se refleja esquemáticamente en la fig. 25A. Las anchuras de los

niveles de energía se representan (de manera muy exagerada) por el grosor de las líneas horizontales. Consideremos una cascada de dos transiciones: del segundo estado excitado al primer estado excitado, seguida de una transición desde este último al estado fundamental. La anchura de la raya (de frecuencia ω_{10}) emitida en la segunda transición es $\Delta\omega_{10} = \Delta E_1/\hbar$.

Podemos también preguntarnos cuál es la indeterminación de la *suma* de las dos frecuencias emitidas en la cascada por un *solo* átomo. Si designamos la suma de las dos frecuencias por $\omega_{20} = \omega_{21} + \omega_{10}$, tendremos $\Delta\omega_{20} = \Delta E_2/\hbar$. Este resultado se sigue del principio de conservación de la energía: la indeterminación en el valor de la energía total disponible es, evidentemente, la misma que la indeterminación en la energía del segundo nivel excitado.

Cabe presumir, por consiguiente, que la anchura de la raya (de frecuencia ω_{21}) emitida en la primera transición viene dada por $\Delta\omega_{21} = (\Delta E_2 + \Delta E_1)\hbar$, y si el primer estado excitado es ancho, la raya emitida será ancha, incluso si la anchura del segundo estado excitado es muy estrecha (lo que corresponde a una vida larga). La anchura del primer nivel excitado introduce una indeterminación en la manera como se reparte la energía total disponible entre los dos fotones emitidos.

Los resultados que acabamos de presentar, y que se basan en la conservación de la energía y en la idea de una anchura no nula de los niveles energéticos, son sin duda alguna sumamente plausibles. Nuestra discusión, sin embargo, no es rigurosa, pero basta para entender el porqué de los rasgos cualitativos del problema, y el punto importante es que la anchura de una raya emitida debe depender de las anchuras de los *dos* niveles que intervienen.

26 Consideremos de nuevo la relación $\Delta\omega = 1/\tau$. Dado que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de onda, la indeterminación relativa en el valor de ésta es igual a la indeterminación relativa en la frecuencia y tenemos

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{\omega\tau} \tag{26a}$$

Para transiciones ópticas en átomos la cantidad $\omega\tau$ es siempre muy grande. La frecuencia $\nu = \omega/2\pi$ es del orden de 5×10^{14} s, mientras que la vida media es del orden de $\tau \sim 10^{-7} - 10^{-8}$ s, y la indeterminación relativa en la longitud de onda (o en la frecuencia) es así del orden de $\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-7}$, o sea, una cantidad muy pequeña. La anchura resultante de la

44 JACK SUGAR

TABLE V.—Observed spectral lines of Ce

λ_{air} Å	Intensity	σ (cm^{-1})	Classification	o−c	λ_{air} Å
4623,197	20	21624,00	101354 $_2$ −122978$^o_3$	− 0,03	4356,835
4616,233	60	21656,62	103612 $_1$ −125269$^o_1$	+ 0,01	4336,353
4613,803	60	21668,02	21849$^o_3$ − 43517 $_4$	+ 0,03	4344,025
4612,528	2	21674,01	101354 $_2$ −123028$^o_2$	− 0,05	4339,205
4612,384	4	21674,69	101354 $_2$ −123029$^o_1$	+ 0,03	4336,143
4610,723	30	21682,50	103612 $_1$ −125295$^o_0$	− 0,03	4335,515
4599,803	1	21733,97			4331,168
4582,264	200	21817,16	103351 $_4$ −125168$^o_3$	0,00	4327,503
4576,904	300	21842,71	103351 $_4$ −125193$^o_4$	+ 0,01	4321,384
4575,494	3	21849,44	0 $_4$ − 21849$^o_3$	− 0,03	4314,767
4570,430	2	21873,65			4309,634
4568,802	20	21881,44	103351 $_4$ −125232$^o_2$	− 0,02	4304,710
4551,460	60	21964,81	103231 $_2$ −125196$^o_3$	+ 0,01	4300,97(
4544,250	100	21999,66	103231 $_2$ −125230$^o_2$	− 0,01	4296,17(
4536,526	1	22037,12	103231 $_2$ −125268$^o_1$	− 0,05	4289,79(
4536,330	10	22038,07	103231 $_2$ −125269$^o_1$	+ 0,01	4287,78
4535,726	1000	22041,01	21476$^o_4$ − 43517 $_4$	+ 0,01	4285,50
4527,861	6	22079,29	103079 $_4$ −125158$^o_3$	− 0,01	4284,77
4526,655	4	22085,17	103079 $_4$ −125164$^o_2$	− 0,02	4282,30
4525,931	2	22088,71	103079 $_4$ −125168$^o_1$	+ 0,01	4280,4
4525,330	100	22091,64	100814 $_4$ −122905$^o_4$	+ 0,03	4271,2
4524,689	10	22094,77	100814 $_4$ −122908$^o_3$	− 0,04	4264,6
4521,924	1000	22108,28	100814 $_4$ −122922$^o_2$	− 0,01	4247,(
4520,709	3	22114,22	103079 $_4$ −125193$^o_4$	− 0,02	4239
4519,918	10	22118,09	100814 $_4$ −122932$^o_1$	− 0,04	42(
4503,372	10	22199,36	100734 $_2$ −122933$^o_2$	+ 0,02	
4502,825	100	22202,05	70433 $_3$ − 92635$^o_3$	0,(	
4494,689	2	22242,24	100734 $_2$ −122976^o		
4491,454	100	22258,26	102897 $_$ −		
4490,855	4	22261,23			

Fig. 27A Parte de una tabla que aparece en un trabajo por J. Sugar, "Description and Analysis of the Third Spectrum of Cerium (Ce III)". *Journal of the Optical Society of America* **55**, 33 (1965); se ha tomado de la página 44. La primera columna da las longitudes de onda, en aire, de rayas observadas del átomo de cerio doblemente ionizado. La segunda, da la intensidad relativa de la raya. En la tercera se encuentra la energía del fotón expresada como número de onda. La cuarta columna muestra los términos espectrales que intervienen, con energías dadas en números de onda.

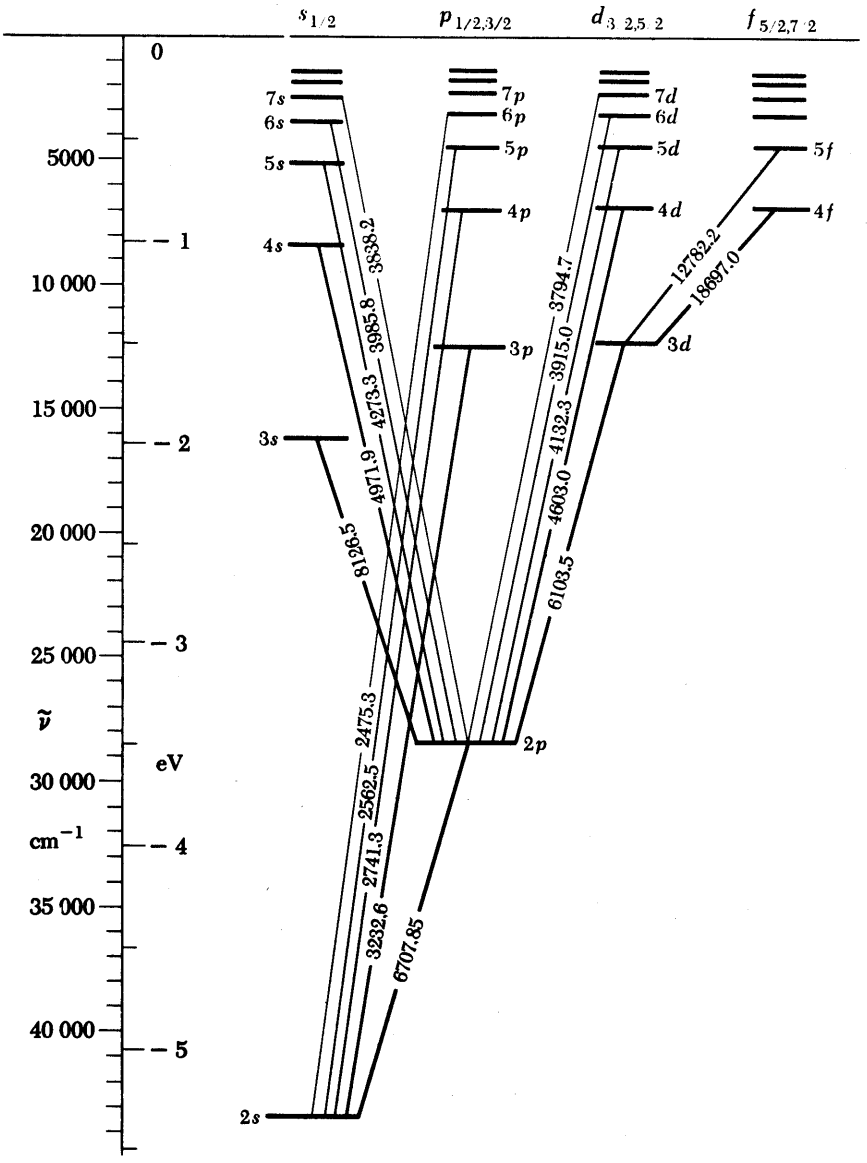


Fig. 28A Esquema de términos del átomo de litio neutro. Las rayas inclinadas representan transiciones dipolares eléctricas observadas. Los números sobre las mismas son las longitudes de onda en ångströms. Para otros detalles véase la explicación en el texto. Basado en una figura que se encuentra en la obra de W. Grotrian, *Graphische Darstellung der Spektren von Atomen...*, vol. II, pág. 15 (Verlag von Julius Springer, Berlín, 1928).

raya espectral se conoce con el nombre de *anchura natural de la raya:* es una propiedad intrínseca del átomo (es decir, de los niveles que intervienen en la transición.)

Más sobre niveles y esquemas de términos

27 Consideremos ahora un cierto número de esquemas de términos típicos. Se han construido tomando como base me-

diciones reales interpretadas dentro del marco de la mecánica cuántica. Debemos considerarlos con el debido respeto: cada diagrama, o mejor dicho, la tabla asociada de longitudes de onda, es el fruto de una considerable cantidad de trabajo humano.

Hemos trazado nuestros esquemas de términos en la forma tal como el lector los encontrará en la literatura. La manera de presentar tales esquemas y la notación para designar los diferentes niveles de energía está regido por un cierto número de convenios adoptados hace ya tiempo. Para lograr un realismo mayor, nos hemos adherido a estos convenios, aun cuando no podemos explicar aquí cada detalle de las figuras. Acaso el lector objete que no debiéramos mostrar *nada* en los diagramas que no estemos ahora en condiciones de explicar teóricamente. Esta actitud, llevada hasta su conclusión lógica, nos prohibiría considerar cualquier esquema de términos antes de haber probado teóricamente que sí existen niveles de energía. Nuestro propósito en este capítulo es, sin embargo, discutir ciertos aspectos de los sistemas físicos partiendo del hecho empírico de que existen niveles de energía. Es también un hecho, esta vez histórico, que los esquemas de términos para átomos, de los cuales el que se representa en la fig. 28A constituye un ejemplo típico, fueron construidos sobre la base de medidas espectroscópicas *antes* de que se hubiera comprendido todo el significado de los detalles de los mismos, es decir, *antes* del descubrimiento de la mecánica cuántica.

28 Los niveles de energía de un sistema mecánico-cuántico se designan por un conjunto de *números cuánticos*. Estos números son valores numéricos de parámetros físicos importantes que se presentan en la descripción mecánico-cuántica del sistema. Discutiremos la interpretación física de algunos de estos números en conexión con los esquemas de términos. El lector, sin embargo, no tiene obligación ninguna de comprender y de recordar en detalle el significado de todos los signos que aparecen en los niveles.

La figura 28A representa el esquema de términos del átomo neutro de litio. La escala de energías a la izquierda expresa la energía tanto en electrón-volts, como en los números de onda equivalentes. Las barras horizontales representan los niveles de energía. Las rectas que conectan los niveles representan transiciones electromagnéticas observadas entre los niveles y los números que las acompañan dan las longitudes de onda, en ångströms, de las rayas espectrales. Las rayas particular-

Fe III—Continued

Authors	Config.	Desig.	J	Level	Interval
z $^1P_1$	$3d^5(a\ ^4P)4p$	z $^1P^o$	2	119697, 64	−284, 62
$^1P_1$			1	119982, 26	−197, 69
$^1P_0$			0	120179, 95	
y $^1F_3$	$3d^5(a\ ^4D)4p$	y $^1F^o$	1	120697, 10	
$^1F_3$			2	120826, 17	129, 07
$^1F_3$			3	121008, 78	182, 61
$^1F_4$			4	121241, 67	232, 89
$^1F_5$			5	121468, 82	227, 15
z $^1G_4$	$3d^5(a\ ^4G)4p$	z $^1G^o$	3	121919, 74	
$^1G_4$			4	121941, 29	21, 55
$^1G_5$			5	121949, 62	8, 33
z $^1D_2$	$3d^5(a\ ^4P)4p$	z $^1D^o$	3	122346, 61	
$^1D_2$			2	122628, 34	−281, 73
$^1D_2$			1	122843, 03	−214, 69
y $^1D_4$	$3d^5(a\ ^4D)4p$	y $^1D^o$	4	122944, 15	
$^1D_2$			3	122829, 55	114, 60
$^1D_2$			2	122898, 84	−69, 29
$^1D_2$			1	122921, 37	−22, 53
$^1D_2$			0	123455, 92	−534, 55
y $^1P_1$	$3d^5(a\ ^4D)4p$	z $^1P^o$	1	123552, 95	
$^1P_1$			2	123697, 18	144, 23
$^1P_1$			3	123750, 39	53, 21
y $^1D_2$	$3d^5(a\ ^4D)4p$	y $^1D^o$	3	124854, 04	
$^1D_2$			2	124903, 92	−49, 88
$^1D_2$			1	124954, 88	−50, 96
y $^1F_4$	$3d^5(a\ ^4D)4p$	y $^1F^o$	4	125443, 58	
$^1F_3$			3	125637, 98	−194, 40
$^1F_2$			2	125672, 83	−34, 85
z $^1S_1$	$3d^5(a\ ^4P)4p$	z $^1S^o$	1	126390, 57	

Fig. 28B Los esquemas de términos (diagramas) son útiles para un visión de conjunto, pero la mejor manera de presentar extensos conjuntos de datos precisos es en forma de tablas. En esta figura se reproduce una parte de una tabla de niveles de energía en hierro doblemente ionizado. Las energías, medidas a partir del estado fundamental, se expresan en número de onda, cm^{-1} (quinta columna). La columna con la letra J da el momento cinético de un estado. En las tres primeras columnas se señalan varias características de los niveles que no es necesario explicar aquí.

Esta porción de tabla se ha tomado de C. E. Moore, *Atomic Energy Levels*, vol. II, pág. 62. (Circular of the National Bureau of Standards 467, U.S. Government Printing Office, Washington, 1952.)

mente intensas en el espectro se indican por rectas gruesas entre los niveles.

Los niveles de energía en el esquema de términos de la figura 28A se han dispuesto en columnas. Cuatro de éstas se designan por las letras *s, p, d* y *f*. En realidad, el átomo de litio posee más niveles, que dispondríamos formando columnas a la derecha de las aquí representadas, pero estos niveles se encuentran próximos al nivel de ionización y no contribuyen al espectro visible del litio.

Obsérvese que las rayas espectrales indicadas en la fig. 28A obedecen a una interesante regla: las transiciones se producen entre dos niveles de columnas *vecinas*. En realidad, las transiciones representadas en la fig. 28A no incluyen todas las transiciones posibles. La mecánica cuántica predice que habrá también transiciones desde la columna *s*, o de la columna *d*, al nivel $3p$; desde la columna *p* al nivel $3s$; desde la columna *p*, o de la columna *f*, al nivel $3d$, y así sucesivamente. Muchas de estas transiciones han sido realmente observadas, pero no las hemos representado en el diagrama a fin de no recargar la figura. Estas transiciones adicionales, que se encuentran en la región del infrarrojo, obedecen también la mencionada regla, a saber, que las transiciones se producen entre niveles situados en columnas vecinas. Esta regla es un interesante ejemplo de *regla de selección* que nos dice que solamente ciertos pares de niveles pueden intervenir en una transición. El apoyo empírico de esta regla es sorprendentemente manifiesto cuando consideramos las rayas observadas que se presentan en la figura 28A. Obsérvese, en particular, la ausencia de transiciones entre los niveles $3s$ y $2s$; entre los niveles $3p$ y $2p$, y así sucesivamente. Debido a que esta regla de selección rige el espectro del átomo de litio, parece natural disponer los niveles en columnas, tal como lo hemos hecho.

29 La regla de selección mencionada es un rasgo muy notable del espectro del átomo de litio. ¿Cabe explicarla teóricamente? La respuesta es afirmativa: podemos entender completamente este fenómeno. La explicación se basa en dos cosas: la isotropía del espacio físico y la pequeñez de la constante de estructura fina $\alpha = e^2/\hbar c \sim 1/137$. No intentaremos presentar en este libro la explicación completa, porque no podemos suponer el conocimiento de las herramientas matemáticas apropiadas, pero trataremos de dar al lector por lo menos una ligera idea acerca de lo que se trata.

Debido a que la constante de estructura fina es pequeña, un cierto tipo de transición electromagnéticamente representa

un papel dominante en física atómica, a saber, las transiciones en las cuales la onda electromagnética emitida posee las mismas propiedades de simetría que una onda emitida por un pequeño oscilador dipolar eléctrico. Esto lo demostraremos más adelante. Una onda (o un fotón) de estas características se llama *onda dipolar eléctrica* (o *fotón dipolar eléctrico*). Se puede demostrar, dentro del marco de la mecánica cuántica, que una tal onda lleva consigo una cantidad de momento cinético $\hbar$.

La isotropía del espacio físico significa que no existe en el universo ninguna dirección privilegiada: el comportamiento de un sistema aislado no depende de cómo está *orientado* en el espacio. En condiciones muy generales, ello implica (tanto en la mecánica cuántica como en la clásica) que el vector momento cinético de un sistema aislado se conserva: no cambia con el tiempo. Esto a su vez significa que si un átomo emite un fotón dipolar eléctrico, el momento cinético del átomo antes de la emisión debe ser igual al momento cinético del mismo después de la emisión *más* el momento cinético que lleva consigo el fotón dipolar. Este principio de conservación implica reglas de selección, porque cada estado estacionario de un átomo se caracteriza por un valor definido del momento cinético.

30 De acuerdo con la mecánica cuántica, el cuadrado del momento cinético de un átomo (prescindiendo de cualquier momento cinético que posiblemente puede poseer el núcleo) es de la forma

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2 \tag{30a}$$

donde j es el *número cuántico de momento cinético*. Los valores posibles de j están limitados por la regla de que $2j$ puede ser cualquier entero no negativo, $2j = 0, 1, 2, \ldots$, tal que $2j$ es par si el átomo tiene un número par de electrones, e impar, si el número de electrones es impar. Es práctica común el decir que un estado caracterizado por el número cuántico de momento cinético j "tiene momento cinético j".

En mecánica cuántica se puede luego probar que en una transición dipolar eléctrica desde un estado inicial de momento cinético j_i a un estado final de momento cinético j_f los cambios permitidos en el momento cinético obedecen a la regla:

$$\Delta j = j_f - j_i = -1, \quad 0, \quad \text{o} \quad +1 \tag{30b}$$

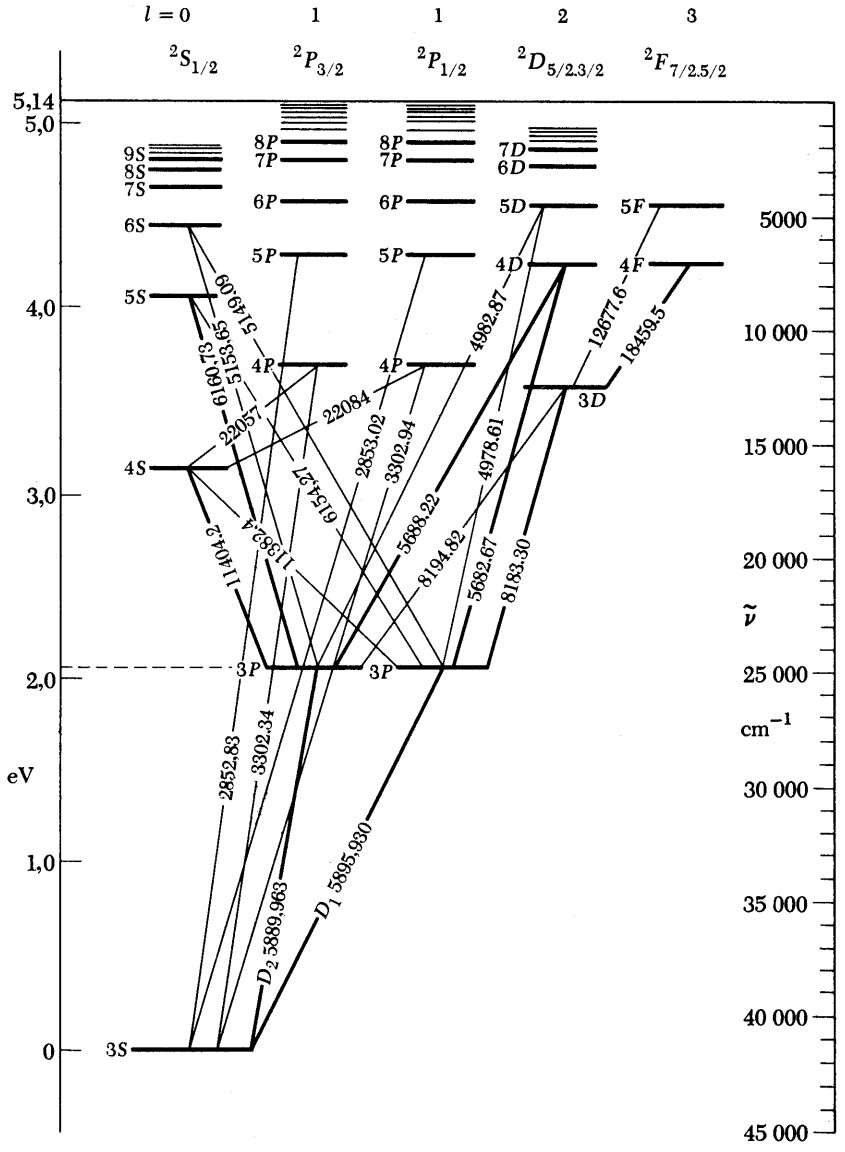


Fig. 32A Esquema de términos del átomo neutro de sodio. Los números sobre las rayas inclinadas dan las longitudes de onda, en ångströms, de las transiciones observadas. *(Según Grotrian.)*

Ésta es una regla rigurosa que vale para todo sistema mecánico-cuántico aislado, se trate de un átomo, una molécula o un núcleo, y se deduce del principio de conservación discutido en la sección que precede. En este libro no estudiaremos la teoría del momento cinético y, en consecuencia, dejamos sin satisfacer la curiosidad del lector por saber cómo se deducen las relaciones (30a) y (30b).

31 El teorema que acabamos de enunciar no constituye, sin embargo, toda la historia de las reglas de selección que valen para el átomo de litio. En física atómica hay otra regla de selección adicional *aproximada* que rige las transiciones dipolares eléctricas y que se puede formular como sigue: en una transición dipolar eléctrica el *momento cinético orbital* del electrón debe cambiar precisamente en una unidad, es decir,

$$\Delta l = l_f - l_i = -1 \quad \text{o} \quad +1 \tag{31a}$$

donde la letra l, con un subíndice adecuado, designa el *número cuántico del momento cinético orbital* de los electrones en el átomo. ¿Cuál es el significado de l? También este número cuántico admite una interpretación "clásica": si consideramos el átomo desde el punto de vista clásico, l expresa el módulo del momento cinético asociado con el movimiento *orbital* de los electrones. Es un hecho que cada electrón tiene también un momento cinético angular *intrínseco,* o *spin.* Para un electrón el número cuántico de spin tiene el valor $j_{\text{spin}} = 1/2$ y decimos que "el electrón tiene spin 1/2". El momento cinético *total* de un electrón en un átomo consta así de dos partes: es el vector suma del momento cinético orbital y del spin.

Los valores teóricamente posibles de l son todos los enteros no negativos: $l = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Las letras *s, p, d, f,* con las que hemos caracterizado las columnas en la fig. 28A, son en realidad, letras de un código para designar los valores del momento cinético orbital: "*s*" significa $l = 0$; "*p*" significa $l = 1$; "*d*" significa $l = 2$ y "*f*" significa $l = 3$. La regla de selección mencionada en la Sec. 28 equivale a la regla de selección (31a).

No siempre es posible asignar un valor definido del número cuántico de momento cinético orbital a un nivel energético en un átomo, aunque ocurre que sí puede hacerse sin ambigüedad en el caso de un átomo alcalino, tal como el litio. La razón de ello estriba en que, mientras que el momento cinético total es una constante del movimiento, no lo son ni el momento cinético orbital, ni el momento cinético de spin. En otras palabras,

90

Na I—Continued

Config.	Desig.	*J*	Level	Interval
6*f*	6*f* ^{2}F°	2½, 3½	*38400, 1*	
6*h*	6*h* ^{2}H°	4½, 5½	*38403, 4*	
7*p*	7*p* ^{2}P°	½	*38540, 40*	0, 74
		1½	*38541, 14*	
8*s*	8*s* ^{2}S	½	38968, 35	
7*d*	7*d* ^{2}D	2½	39200, 962	−0, 001
		1½	39200, 963	
7*f*	7*f* ^{2}F°	2½, 3½	*39209, 2*	
8*p*	8*p* ^{2}P°	½	*39298, 54*	0, 47
		1½	*39299, 01*	
9*s*	9*s* ^{2}S	½	39574, 51	
8*d*	8*d* ^{2}D	2½, 1½	39729, 00	
8*f*	8*f* ^{2}F°	2½, 3½	[*39734, 0*]	
9*p*	9*p* ^{2}P°	½	*39794, 53*	0, 47
		1½	*39795, 00*	
10*s*	10*s* ^{2}S	½	39983, 0	
9*d*	9*d* ^{2}D	2½, 1½	40090, 57	
9*f*	9*f* ^{2}F°	2½, 3½	*40093, 2*	
10*p*	10*p* ^{2}P°	½, 1½	*40137, 23*	

Fig. 32B Parte de una tabla de niveles de energía en el átomo de sodio neutro. Las energías (cuarta columna) se expresan en número de onda, cm^{-1}, medidas a partir del estado fundamental. La columna con la letra *J* da el momento cinético del estado.

Esta porción de tabla se ha tomado de C. E. Moore, *Atomic Energy Levels*, vol. I, pág. 90 (Circular of the National Bureau of Standards 467, U. S. Government Printing Office, Washington, 1949).

los niveles no poseen, en general, un valor definido de *l*. Es precisamente en este sentido en el que la regla (31a) es válida sólo aproximadamente. Conforme hemos dicho, es una buena regla para los átomos alcalinos (y para el hidrógeno).

32 Consideremos de nuevo la fig. 28A. ¿Qué pasa con *j* y la regla de selección (30b)? Esta regla no se manifiesta completamente en la fig. 28A, porque hemos presentado una forma simplificada del esquema de términos. En realidad, debiéramos haber duplicado las columnas *p*, *d* y *f*. Los subíndices 1/2, 3/2, 5/2 y 7/2 en los símbolos de columna *s*, *p*, *d* y *f* indican el momento cinético total *j*. Para los átomos alcalinos (y el hidrógeno) valen las siguientes reglas: si $l = 0$, se tiene $j = 1/2$ (todo el momento cinético se debe al spin del electrón). Para los otros valores de *l*, *j* puede tener los valores $j = l + 1/2$ y $j = l - 1/2$. (Para otros átomos las reglas son diferentes.) El nivel $2p$, por lo tanto, es en realidad doble, pero la separación en energía entre los dos niveles del *doblete* es muy pequeña y, dentro de la precisión que proporciona la figura, los niveles coinciden.

La figura 32A presenta el esquema de términos del átomo de sodio. También el sodio es un átomo alcalino, y salta a la vista que su esquema de términos es, en muchos aspectos, similar al esquema de términos del litio. En este caso hemos duplicado la columna *p*, pero hemos dejado como simples las columnas *d* y *f* para ahorrar espacio (y trabajo). Todas las transiciones representadas en la figura 32A son transiciones dipolares eléctricas. Las transiciones responsables de la raya amarilla característica de una lámpara de sodio son las transiciones de los niveles $3p_{1/2}$ y $3p_{3/2}$ al nivel fundamental $3s_{1/2}$. "La raya amarilla del sodio" es, de hecho, un doblete.

Conviene que el lector analice el esquema de términos de la fig. 32A y se convenza de que las transiciones representadas en ella obedecen a las reglas de selección (30b) y (31a) para *j* y *l*, respectivamente.

33 Los niveles de energía del átomo de helio representado en la fig. 33A forman, por así decirlo, dos sistemas casi por completo independientes: el sistema singlete y el sistema triplete. Las rayas espectrales observadas son el resultado de transiciones *dentro* de estos sistemas: de niveles singlete a niveles singlete, y de niveles triplete a niveles triplete.

El átomo de helio es un átomo con dos electrones. En los niveles singlete los spins de los dos electrones son opuestos

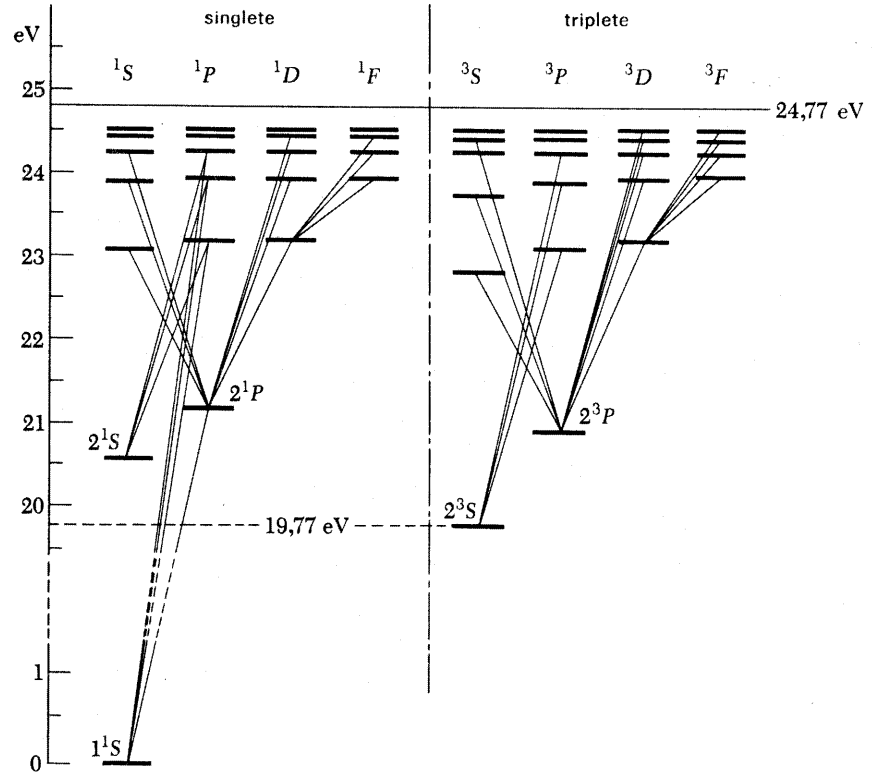


Fig. 33A Esquema de términos del átomo neutro de helio. Obsérvese la notable separación entre los sistemas de niveles singlete y triplete. En los estados triplete los spins de los electrones son paralelos, y en los estados singlete, antiparalelos. Hay una obvia correspondencia entre los niveles triplete y singlete, con la excepción de que el estado fundamental singlete no tiene su análogo entre los estados triplete. Esta circunstancia es una consecuencia del principio de exclusión de Pauli: dos electrones cuyos spins están orientados en el mismo sentido no pueden ocupar ambos el nivel más bajo. No existe ninguna restricción parecida si los spins son opuestos.

(antiparalelos), mientras que en los niveles triplete los spins de los dos electrones tienen el mismo sentido (son paralelos).

Las letras *S, P, D, F, ...* designan el momento cinético orbital de los electrones. El superíndice a la izquierda 1 ó 3 designa la *multiplicidad* (singlete o triplete). Para los niveles singlete, el momento cinético total es igual al momento cinético orbital. Para los niveles triplete, el momento cinético total j puede tomar los valores $j = l - 1,\ l,\ l + 1$, con la condición de que se tenga siempre $j \geqq 0$. En el sistema triplete los niveles S son simples, y los demás niveles, triples. Los niveles singlete son, naturalmente, simples.

34 Haremos notar un interesante detalle en el esquema de términos para el átomo de talio, fig. 34A. Un átomo en el estado $7^2S_{1/2}$ puede decaer *bien* yendo al estado $6^2P_{3/2}$ *o* al estado fundamental $6^2P_{1/2}$. El átomo puede elegir cómo dar el "salto". Hay otros ejemplos de esta característica en el esquema de términos del talio, como también en alguno de los otros

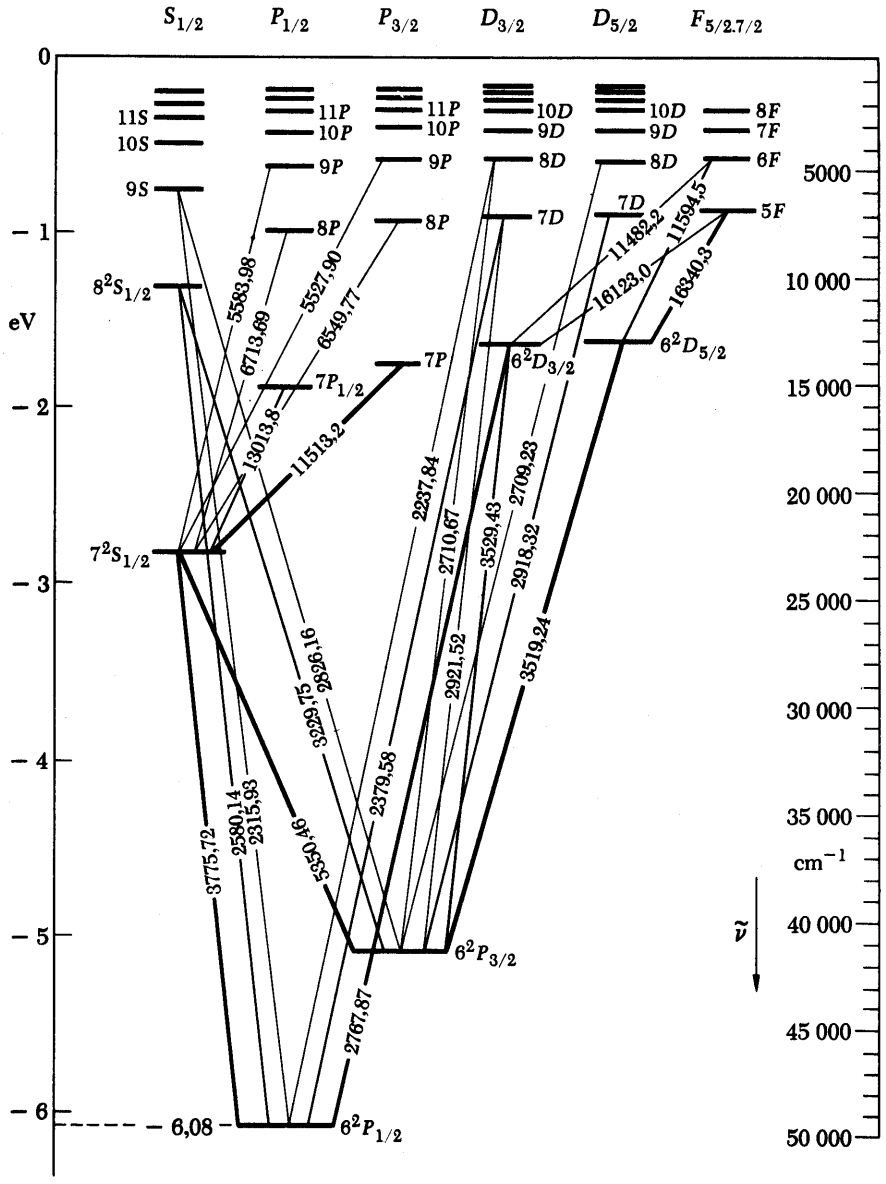
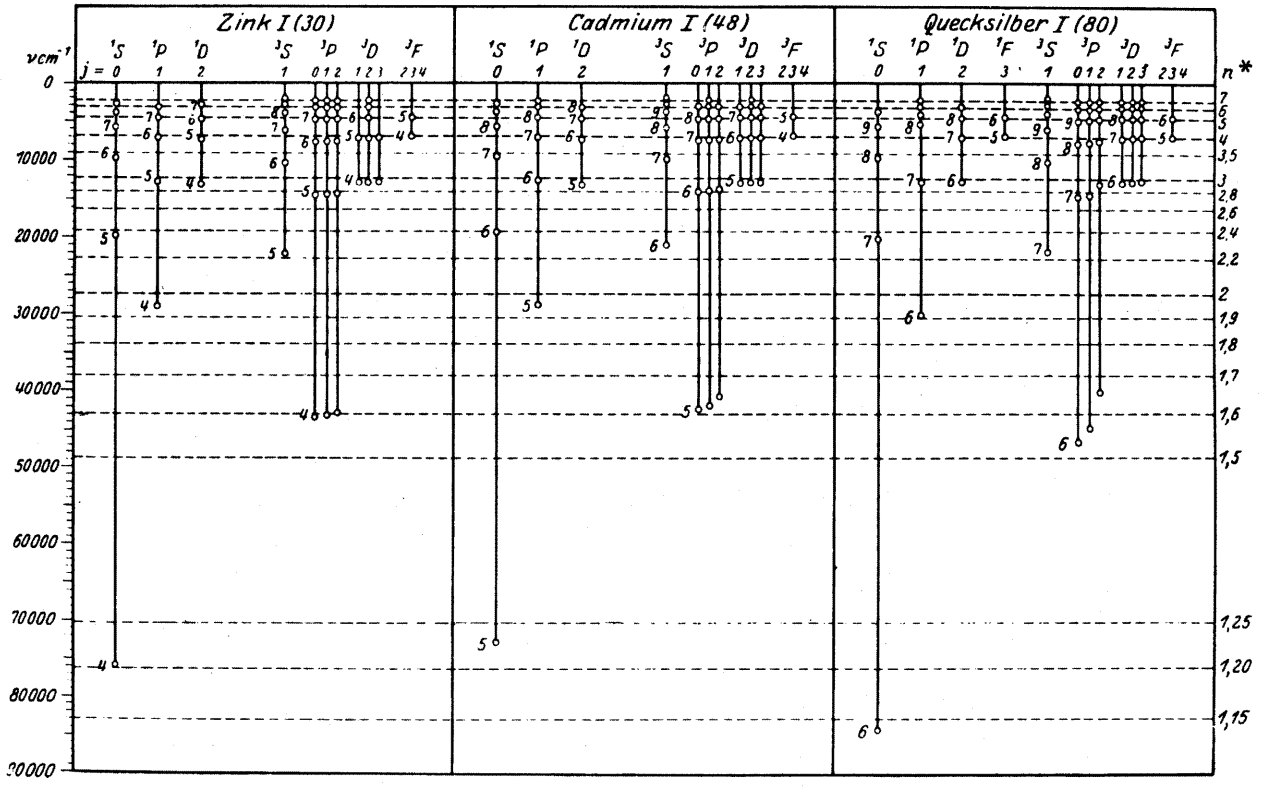


Fig. 34A Esquema de términos del átomo neutro de talio. Los números sobre las rayas inclinadas dan las longitudes de onda en ångströms de las transiciones observadas. (Según Grotrian.)



esquemas de términos presentados en este capítulo. (El lector debe ir a la caza de estos ejemplos.) Si un estado excitado puede decaer siguiendo diferentes caminos, cada modo de transición ocurre con una probabilidad determinada. Esta probabilidad se conoce con el nombre de *razón de ramificación* correspondiente al modo de desintegración de que se trate. Que las razones de ramificación son propiedades intrínsecas del estado excitado, es decir, son insensibles a *cómo* se ha alcanzado el estado excitado, es un hecho experimental.

35 Los esquemas de términos, tan parecidos, del sodio y del litio, ambos metales alcalinos, son muy diferentes de los esquemas de términos del helio y del talio. El examen de un gran número de esquemas de términos revelaría el hecho notable de que los elementos químicamente similares tienen esquemas de términos asimismo similares. La figura 35A muestra un ejemplo de este hecho. La razón de ello consiste en que

Fig. 35A Esquemas de términos del cinc, cadmio y mercurio presentados juntos para ilustrar el hecho de que elementos químicamente similares poseen esquemas de términos asimismo similares. Esta figura se ha tomado de W. Grotrian, *Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und Ionen...*, vol II, *Struktur der Materie*, Band VIII, pág. 131 (Verlag von Julius Springer, Berlín, 1928). (Cedida por Springer Verlag.)

1 **H** 1.0080																	2 **He** 4.003
3 **Li** 6,940	4 **Be** 9,013											5 **B** 10.82	6 **C** 12.011	7 **N** 14.008	8 **O** 16.000	9 **F** 19.00	10 **Ne** 20,183
11 **Na** 22.991	12 **Mg** 24,32											13 **Al** 26.98	14 **Si** 28.09	15 **P** 30.975	16 **S** 32,066	17 **Cl** 35,457	18 **Ar** 39.944
19 **K** 39,100	20 **Ca** 40.08	21 **Sc** 44,96	22 **Ti** 47,90	23 **V** 50,95	24 **Cr** 52,01	25 **Mn** 54,94	26 **Fe** 55,85	27 **Co** 58,94	28 **Ni** 58,71	29 **Cu** 63,54	30 **Zn** 65.38	31 **Ga** 69.72	32 **Ge** 72.60	33 **As** 74.91	34 **Se** 78.96	35 **Br** 79.916	36 **Kr** 83.80
37 **Rb** 85,48	38 **Sr** 87,63	39 **Y** 88,92	40 **Zr** 91,22	41 **Nb** 92,91	42 **Mo** 95,95	43 **Tc**	44 **Ru** 101.1	45 **Rh** 102.91	46 **Pd** 106,4	47 **Ag** 107,880	48 **Cd** 112.41	49 **In** 114.82	50 **Sn** 118.70	51 **Sb** 121.76	52 **Te** 127,61	53 **I** 126.91	54 **Xe** 131.30
55 **Cs** 132,91	56 **Ba** 137,36	57–71 **La** **Series**	72 **Hf** 178,50	73 **Ta** 180,95	74 **W** 183,86	75 **Re** 186,22	76 **Os** 190.2	77 **Ir** 192,2	78 **Pt** 195,09	79 **Au** 197,0	80 **Hg** 200,61	81 **Tl** 204,39	82 **Pb** 207.21	83 **Bi** 208.99	84 **Po**	85 **At**	86 **Rn**
87 **Fr**	88 **Ra** 226,03	89–103 **Ac** **Series**	(104)	(105)	(106)	(107)	(108)										

serie de los lantánidos	57 **La** 138,92	58 **Ce** 140,13	59 **Pr** 140,92	60 **Nd** 144,27	61 **Pm**	62 **Sm** 150,35	63 **Eu** 152,0	64 **Gd** 157.26	65 **Tb** 158,93	66 **Dy** 162,51	67 **Ho** 164,94	68 **Er** 167,27	69 **Tm** 168.94	70 **Yb** 173,04	71 **Lu** 174,99
serie de los actínidos	89 **Ac** 227,04	90 **Th** 232,05	91 **Pa** 231,05	92 **U** 238,04	93 **Np**	94 **Pu**	95 **Am**	96 **Cm**	97 **Bk**	98 **Cf**	99 **Es**	100 **Fm**	101 **Md**	102 **No**	103 **Lw**

Fig. 35B La tabla periódica de los elementos. El número atómico Z se indica encima del símbolo químico, y el peso atómico (para elementos razonablemente estables), debajo.

Obsérvese la serie de los lantánidos (serie de las tierras raras), que consta de quince elementos muy parecidos químicamente. Todos éstos tienen la misma configuración electrónica en la capa más exterior. La serie es el resultado de que van siendo llenadas, a medida que avanzamos en la serie, ciertas capas internas que se habían dejado a un lado inicialmente. Tomando como base este modelo, Bohr predijo que el elemento de número atómico 72, el hafnio, entonces no descubierto aún, sería químicamente análogo al circonio, en vez de serlo a las tierras raras. En efecto, el hafnio se encontró luego en un mineral de circonio, lo que significó un sorprendente triunfo para la teoría.

Los llamados elementos actínidos forman una serie análoga.

el espectro óptico y las propiedades químicas de un elemento están determinados, ambos, por la configuración electrónica del átomo y, en particular, por la configuración de los electrones más exteriores.

La notable tabla periódica de los elementos químicos, que se presenta en la fig. 35B, puede explicarse acudiendo a la idea de una estructura en capas de los átomos. En esta tabla rectangular los elementos están dispuestos de determinada manera, en orden de números atómicos Z crecientes, y con los elementos de propiedades químicas análogas colocados en una misma columna. El número de electrones en un átomo es igual a Z, y a medida que avanzamos en la tabla, en el sentido de valores de Z crecientes, las "capas" se llenan con electrones de manera regular. Las propiedades químicas dependen de cómo se llenan las capas. Por ejemplo, los gases nobles se presentarán en la tabla cuando ciertas capas han quedado ocupadas por completo. El número de electrones que caben en

una capa viene determinado por el principio de exclusión de Pauli y este principio es, por lo tanto, de importancia decisiva para la química. Estas circunstancias eran del todo insospechadas, claro está, antes del gran descubrimiento de Pauli.

Explicar los detalles de la tabla periódica dentro de este orden de ideas es una tarea fascinante que no emprenderemos en este libro. La manera mejor de llevar a cabo este estudio consiste en analizar sistemáticamente los espectros y niveles de energía atómicos, pero ello sería un tanto excesivo en un curso de introducción. Para estimular el apetito del lector presentamos, en la fig. 35C, una parte de una tabla de configuraciones electrónicas de los átomos.

36 Cuando la tabla periódica fue propuesta por D. I. Mendeleev en 1869, no se conocían ni los electrones ni los núcleos. Por consiguiente, Mendeleev no dispuso los elementos de acuerdo con la carga Z, sino más bien en el orden de los pesos atómicos crecientes. Afortunadamente, esto proporciona el orden correcto con muy pocas excepciones. Una de ellas, es la sucesión argón-potasio. El argón tiene un peso atómico mayor que el potasio, aunque las propiedades químicas de estos elementos (el argón es un gas noble y el potasio un metal alcalino) establecen sin lugar a dudas que el argón *debe* ir primero. Desde el punto de vista químico, el orden de los elementos en la tabla es bien claro y sobre esta base resulta, pues, posible asignar un número atómico Z a cada elemento.

Debemos mencionar aquí que Mendeleev tuvo la cautela de dejar ciertos espacios vacíos en su tabla para acomodar en ella elementos todavía no descubiertos *.

37 La comprobación de que el número atómico mide efectivamente la carga nuclear, y es, por consiguiente, igual al número de electrones, fue un importante paso hacia adelante en la teoría atómica. El trabajo de H. G. J. Moseley, allá por 1913, fue particularmente valioso para poner en claro esta cuestión. Este físico midió sistemáticamente las longitudes de onda de rayos X de un gran número de elementos y pudo probar que las longitudes de onda de rayas análogas (en diferentes elementos) depende del número atómico de manera muy simple **. Discutamos brevemente esta cuestión.

Elemento	Número atómico	Capas								
		K	L		M			N		
		Subcapas								
		$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$
H	1	1								
He	2	2								
Li	3	2	1							
Be	4	2	2							
B	5	2	2	1						
C	6	2	2	2						
N	7	2	2	3						
O	8	2	2	4						
F	9	2	2	5						
Ne	10	2	2	6						
Na	11	2	2	6	1					
Mg	12	2	2	6	2					
Al	13	2	2	6	2	1				
Si	14	2	2	6	2	2				
P	15	2	2	6	2	3				
S	16	2	2	6	2	4				
Cl	17	2	2	6	2	5				
A	18	2	2	6	2	6				
K	19	2	2	6	2	6		1		
Ca	20	2	2	6	2	6		2		
Sc	21	2	2	6	2	6	1	2		
Ti	22	2	2	6	2	6	2	2		

Fig. 35C **Estructura en capas de los átomos ligeros. Las capas principales, designadas por las letras *K, L, M, N,* ..., se dividen en subcapas conforme puede verse. Los diferentes períodos se indican por rayas horizontales finas. Las configuraciones completas de gases nobles se representan en gris. Para los tres primeros períodos las capas se llenan sucesivamente de una manera suavemente regular, pero a partir del potasio se comienza a ocupar una capa exterior antes de que haya quedado completada una capa interior. Este fenómeno ocurre también más adelante en la tabla periódica y se conoce bien su explicación teórica.**

Una subcapa *s* puede alojar dos electrones, una capa *p*, seis, y una capa *d*, diez.

* Para una exposición del trabajo de Mendeleev y de la historia de la tabla periódica, véase *The World of the Atom*, Vól. I, preparado por H. A. Boorse y L. Motz (Basic Books, Inc., Nueva York, 1966).

** H. G. J. Moseley, "The High-Frequency Spectra of the Elements", *Philosophical Magazine* **26**, 1024 (1913), y **27**, 703 (1914).

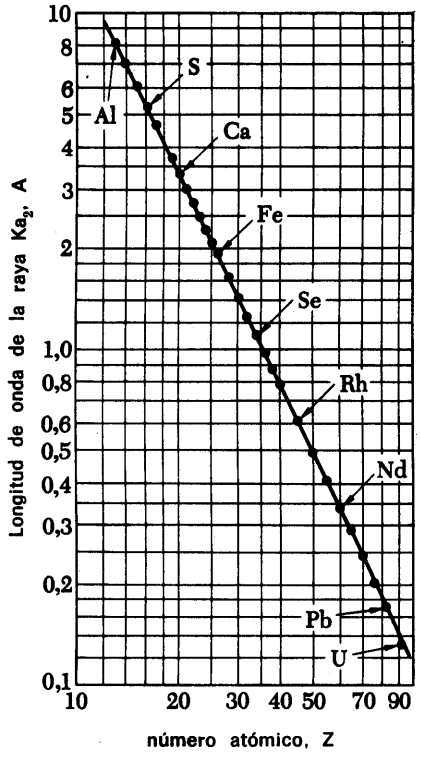


Fig. 37A Gráfico de ln (λ) en función de ln(*Z*). λ es aquí la longitud de onda de la llamada raya $K\alpha_2$ en el espectro de rayos X de un elemento cuyo número atómico es *Z*. Dentro de la precisión que permite el dibujo, los puntos experimentales caen todos sobre una recta. Se dispone de datos para casi todos los elementos, aunque solamente algunos átomos seleccionados aparecen en este gráfico. Véase el texto para una teoría simple del gráfico.

Cuando una especie atómica se bombardea con electrones de elevada energía (hasta unos 100 keV), se encuentra que, en forma de rayos X, se emite radiación electromagnética de onda corta. Se encuentra, además, que el espectro de esta radiación consiste en un cierto número de rayas bien definidas, que son características del elemento en cuestión, superpuestas a un fondo continuo. (Una curva experimental puede verse en la figura 23A, cap. 4.) Manteniéndose en el espíritu de nuestra discusión en la Sec. 27, cap. 2, supondremos que los electrones más internos deben intervenir en la emisión de las rayas características. El electrón incidente puede expulsar un electrón de la capa más interna (conocida como capa K) y uno de los electrones que se encuentra en una capa más alejada "caerá" luego en el "hueco" producido. La diferencia entre los valores de la energía de enlace aparecerá en forma de un fotón de rayos X.

En la sec. 27, cap. 2, dijimos que la energía de enlace del electrón más interno debía ser aproximadamente de la forma

$$B_K = Z^2 R_\infty \tag{37a}$$

donde $R_\infty = (1/2)\,\alpha^2 mc^2$ es la constante de Rydberg. No hemos presentado una teoría que nos diga cuánto vale la energía de enlace en la capa siguiente, pero supongamos que es *proporcional* a B_K, pero más pequeña. Por lo tanto, si un electrón va a parar a la capa más interna partiendo de la capa siguiente, cabe esperar que la longitud de onda λ del fotón emitido sea de la forma

$$\lambda = \frac{C}{Z^2 R_\infty} \tag{37b}$$

donde C es una constante que depende de Z, pero muy poco. Un gráfico de ln (λ) en función de ln (Z) ha de ser, por lo tanto, una recta, si estas ideas son correctas. Un gráfico de este tipo se presenta en la fig. 37A y, conforme vemos, las longitudes de onda determinadas experimentalmente caen, en efecto, sobre una recta con buena precisión. La constante C es aproximadamente igual a 4/3, que es lo que predice la teoría de Bohr.

Dado que el electrón que llena el hueco puede proceder de un cierto número de capas diferentes, y dado que el hueco puede haber sido creado en una de varias capas, es de esperar que se hallen varias rayas características. Esto es, en efecto, lo que se ha encontrado. En la fig. 37A hemos representado solamente una de estas rayas debida a las mismas capas en todos los átomos.

Así pues, es posible determinar la carga nuclear a partir de mediciones de rayos X y el trabajo de Moseley condujo de este modo a una nueva interpretación del significado de la tabla periódica.

38 Discutamos ahora algunos aspectos de los núcleos. El esquema de términos en la fig. 38A presenta los niveles de energía nucleares del isótopo del boro $_5B^{11}$ determinados experimentalmente.

En esta figura hemos asignado la energía cero al estado fundamental. El momento cinético total de este estado es $j = 3/2$.

Los niveles que son particularmente anchos se han rayado transversalmente, y este rayado proporciona una medida aproximada de sus anchuras.

El límite de disociación de este núcleo se encuentra a 8,667 MeV: por encima de esta energía el núcleo puede disociarse en una partícula alfa y el isótopo del litio $_3Li^7$. Este modo de disociación se indica a la derecha del esquema de términos principal. Por encima de una energía de unos 11 MeV, el núcleo de boro puede disociarse de dos maneras diferentes: o en un neutrón y el isótopo del boro $_5B^{10}$, o en un protón y el isótopo del berilio $_4Be^{10}$. Estos modos de disociación se indican análogamente a la derecha del esquema de niveles para el isótopo $_5B^{11}$.

Obsérvese, sin embargo, que el isótopo $_5B^{11}$ tiene un sistema de niveles de energía *por encima* de la energía de disociación de 8,667 MeV. Por debajo de la misma, el núcleo solamente puede emitir rayos gamma, pero por encima el núcleo puede también emitir partículas materiales. (Las transiciones de rayos gamma observadas en el $_5B^{11}$ se indican por rectas verticales).

Como muestra este ejemplo, hemos de ser un tanto cuidadosos cuando se trata de interpretar el "continuo". Es muy posible que existan niveles por encima del límite de disociación. La energía de disociación es meramente una energía a la cual el sistema puede disociarse en dos partículas *materiales*. Debajo de este límite, el sistema puede todavía "disociarse", pero únicamente en un fotón y *una* partícula material. Si queremos tratar los fotones en pie de igualdad con las partículas materiales, cabe concluir que los niveles por encima del límite de disociación (que se suelen llamar "niveles virtuales") no son en principio diferentes de los niveles por debajo del límite de disociación: todos los niveles por encima del estado fun-

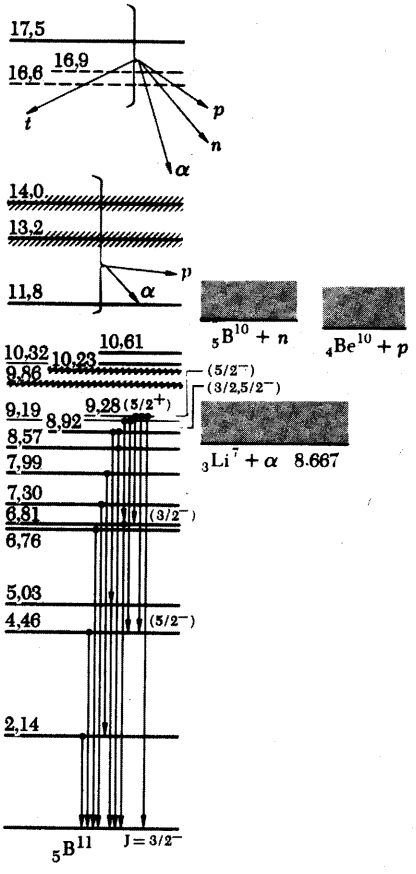


Fig. 38A **Esquema de términos que muestra los niveles de energía del núcleo de boro $_5B^{11}$. Esta figura es una versión simplificada de un gráfico que aparece en el artículo de F. Ajzenberg y T. Lauritsen, "Energy levels of light nuclei," *Reviews of Modern Physics* 27, 77 (1955). Se recomienda al lector que vea el original.**

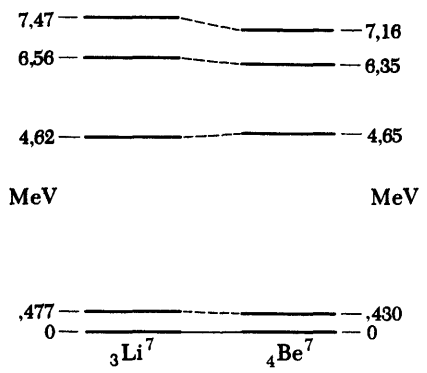


Fig. 39A **Los isótopos del litio y del berilio con número de masa 7 forman un par de núcleos espejo: si los neutrones en el núcleo de litio se cambian en protones, y viceversa, obtenemos un núcleo de berilio. Los núcleos espejo tienen sistemas de niveles similares, pero no idénticos. La diferencia se debe a un efecto electromagnético.**

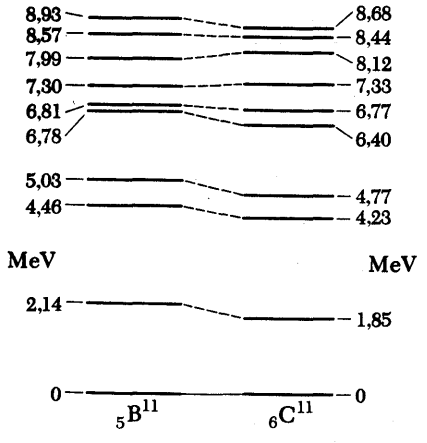


Fig. 39B **Los isótopos del boro y del carbono con número de masa 11 forman otro par de núcleos espejo.**

damental son inestables. En realidad, incluso el estado fundamental puede serlo: considérese, por ejemplo, el estado fundamental de un núcleo radiactivo. En nuestro ejemplo de la fig. 38A el estado fundamental es estable: el isótopo $_5B^{11}$ es un componente del boro que se encuentra en la naturaleza.

39 Decimos que dos núcleos forman un par de *núcleos espejo* si uno puede obtenerse a partir del otro cambiando todos los protones en neutrones, y viceversa.

Como dijimos en la sec. 37, cap. 2, se cree que las *interacciones fuertes,* que son las interacciones que predominan en física nuclear, son invariantes respecto de este cambio. La fuerza protón-protón es la misma que la fuerza neutrón-neutrón. Si esta creencia es correcta, y si no hubiese otras interacciones aparte las interacciones fuertes, los sistemas de niveles en dos núcleos espejo deberían ser idénticos.

En la fig. 39A y en la fig. 39 B presentamos los niveles de energía hallados experimentalmente de dos pares de núcleos espejo. Como se ve, es posible establecer en cada par una correspondencia entre los niveles.

Las energías de los niveles correspondientes, sin embargo, no son idénticas, como muestran las figuras. La razón de ello es que las fuerzas electromagnéticas están también presentes, y estas fuerzas *no* son invariantes en el intercambio neutrón-protón.

40 El esquema de términos de la fig. 40A explica por qué las partículas alfa emitidas por un núcleo radiactivo no siempre aparecen con una única energía bien definida. La figura representa la desintegración alfa del isótopo del bismuto que conduce al isótopo del talio $_{81}Tl^{208}$. La desintegración se produce a partir del *estado fundamental* del *núcleo padre* para terminar en uno de varios estados excitados, o en el estado fundamental, del *núcleo hijo.* El esquema de términos se ha trazado de manera que el estado fundamental del núcleo padre se encuentra a 6,2 MeV por encima del estado fundamental del hijo: esta energía es la energía cinética máxima con la que se puede emitir la partícula alfa. Es claro que si la transición tiene lugar a un estado excitado del núcleo hijo, la partícula alfa se emitirá con energía menor. En el caso del sistema de niveles representado en la figura, la partícula alfa se puede emitir con una de cinco energías diferentes bien definidas. Las líneas inclinadas representan estos tipos de desintegración. Los números entre paréntesis son las razones de ramificación para los diferentes modos de desintegración.

Si el núcleo hijo queda en uno de los estados excitados, emitirá rayos gamma indicados por las líneas verticales y, finalmente, alcanzará el estado fundamental.

Para muchos otros núcleos que presentan actividad alfa, la desintegración se produce siempre yendo a parar al estado fundamental del núcleo hijo, porque no se dispone de estados excitados adecuados. Las partículas alfa se emitirán entonces con una única energía bien definida y no habrá rayos gamma asociados con la desintegración alfa.

41 Entendemos por *desintegración beta* un proceso en el cual un núcleo emite un electrón o un positón. El proceso más simple de este tipo es la desintegración beta de un neutrón, fenómeno éste bien establecido experimentalmente. La vida del neutrón libre es de 16 minutos. Dado que la diferencia de masas neutrón-protón es $(m_n - m_p) = 1{,}3$ MeV, cabe trazar un esquema de términos como el representado en la fig. 41A. Si sólo se emitiera un electrón, se emitiría siempre con la *misma* energía (unos 1,3 MeV), exactamente como en el caso de la desintegración alfa. Se encuentra experimentalmente que el electrón, en realidad, puede emitirse con una energía *cualquiera* entre la energía en reposo, 0,5 MeV, y la energía disponible 1,3 MeV.

La explicación de que esto ocurra es que en el proceso se emite también otra partícula, en este caso el antineutrino, cuya masa es nula, y la energía disponible la comparten el electrón y el antineutrino. Las fórmulas de las reacciones de desintegración beta son, pues

$$\text{Emisión de un electrón: } {}_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{Z+1}X^{A} + e^{-} + \bar{\nu}$$

$$\text{Emisión de un positón: } {}_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{Z-1}X^{A} + e^{+} + \nu$$

donde X substituye el símbolo químico del radisótopo; $e^{\pm}$ designa el positón o el electrón; ν, el neutrino, y $\bar{\nu}$, el antineutrino.

42 El esquema de términos de la fig. 42A presenta el origen de una cascada beta-gamma emitida por el isótopo del cobalto ${}_{27}Co^{60}$. Este isótopo experimenta primero una desintegración del níquel ${}_{28}Ni^{60}$, que se encuentra 2,4 MeV por encima del nivel fundamental. La energía cinética *máxima* del electrón emitido es de 0,3 MeV. El electrón puede aparecer con cualquier energía entre cero y esta energía máxima. La fórmula para la reacción correspondiente a esta parte del proceso puede escribirse

$${}_{27}Co^{60} \rightarrow {}_{28}Ni^{60*} + e^{-} + \bar{\nu}$$

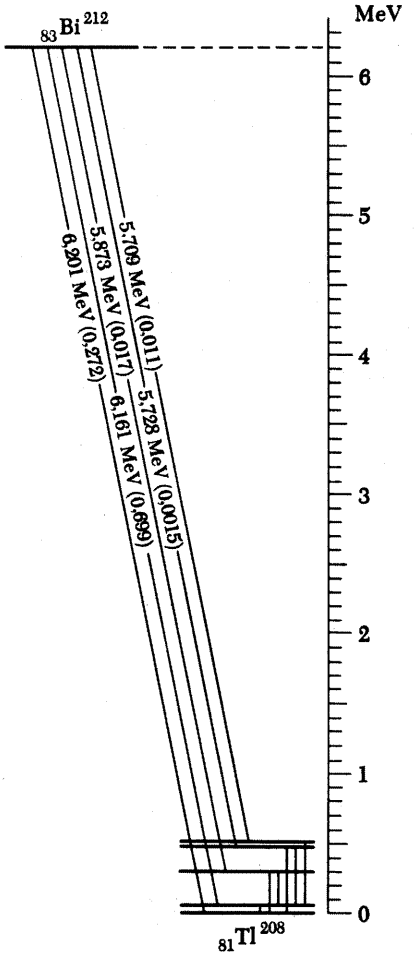


Fig. 40A **En la desintegración alfa del isótopo del bismuto ${}_{83}Bi^{212}$, el núcleo hijo puede quedar en el estado fundamental o en uno cualquiera de cuatro estados excitados. Las partículas alfa pueden, de acuerdo con esto, ser emitidas con cinco energías diferentes. El núcleo hijo decae desde los estados excitados por emisión gamma.**

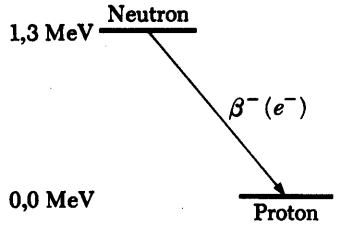


Fig. 41A Esquema de términos que muestra la desintegración beta del neutrón. La masa de éste es 939,55 MeV y la masa del protón vale 938,25 MeV. Parte de la diferencia, igual a 1,30 MeV, a saber, 0,50 MeV, aparece como masa en reposo del electrón y el resto, como energía cinética del electrón, del antineutrino y del protón que resultan de la desintegración. La energía cinética del protón es muy pequeña y la mayor parte de la energía disponible la comparten, por consiguiente, el electrón y el antineutrino.

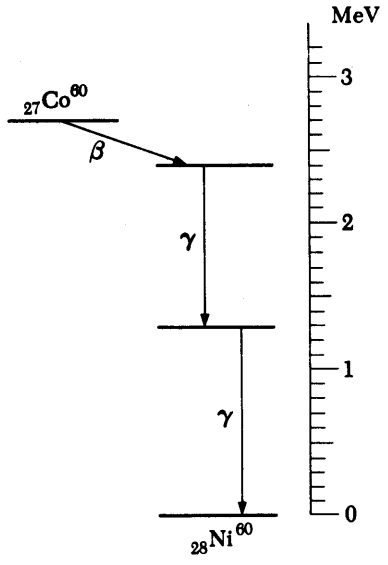


Fig. 42A Esquema de términos que muestra la cascada beta-gamma emitida por el isótopo del cobalto $_{27}Co^{60}$. Este isótopo, en una transición beta, se transforma en un estado excitado del isótopo del níquel $_{28}Ni^{60}$, que se encuentra 2,4 MeV por encima del estado fundamental. La máxima energía *cinética* es 0,3 MeV. El estado excitado del isótopo del níquel decae luego por emisión de dos rayos gamma en sucesión rápida.

donde el asterisco indica que el isótopo del níquel queda en un estado excitado. A continuación, decae (desde el punto de vista práctico, inmediatamente) desde este estado, pasando por otro estado excitado a 1,3 MeV por encima del estado fundamental, hasta alcanzar éste, por emisión de rayos gamma. La desintegración beta, por lo tanto, va siempre acompañada de dos rayos gamma de energías 1,1 MeV y 1,3 MeV.

El período del núcleo de cobalto es 5,3 años y este proceso en cascada nos proporciona, por consiguiente, una fuente de rayos gamma de vida bastante larga.

Frecuentemente, los núcleos que presentan actividad beta tienen períodos muy largos, al igual que los emisores alfa. En el caso de los emisores beta, la razón de ello consiste en la debilidad intrínseca de la interacción responsable de la desintegración beta. Esta interacción, conocida como la *interacción débil,* es unas 10^{14} veces más débil que las interacciones fuertes y, por consiguiente, también considerablemente más débil que la interacción electromagnética. La interacción débil es responsable de la (relativamente lenta) desintegración de muchas partículas fundamentales que podrían ser estables de no ser por la interacción débil. Ejemplo de esto lo son los piones cargados, el neutrón, el muón, los mesones K y el hiperón-lambda.

Ensanchamiento de las rayas espectrales por efecto Doppler y por colisión

43 Hemos discutido antes en este capítulo la relación entre la anchura natural $\Delta\omega$ de una raya espectral emitida por un átomo y las vidas medias de los estados que intervienen en la transición. En el caso particular en que el estado más bajo es el estado fundamental, se halló que

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} \tag{43a}$$

donde τ es la vida media del estado más alto.

En la Sec. 26 citamos algunos valores típicos de τ para los átomos y se estimó que la anchura relativa es $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-7}$. Claro está, esto representa solamente una estimación muy tosca del orden de magnitud.

Las rayas espectrales de los átomos, tal como se observan en la naturaleza, son, en general, mucho más anchas que la estimación que precede. La teoría que presentamos en las secciones 14-26 es aplicable a un átomo aislado, originalmente en

reposo, pero en la práctica los átomos objeto de estudio ni se encuentran aislados, ni están en reposo. Para determinar las causas del ensanchamiento adicional, consideremos la emisión de luz por un gas de átomos a una temperatura T y a la presión P. Sea A el peso atómico. Los átomos en el gas se moverán al azar y chocarán repetidamente unos con otros.

44 Debido al carácter aleatorio del movimiento térmico, algunos de los átomos se moverán hacia el observador y otros se alejarán de él. Como consecuencia de ello, la raya espectral, que es una superposición de rayas emitidas por muchos átomos, se verá ensanchada debido al efecto Doppler. Para un átomo que se mueve hacia el observador con velocidad v el desplazamiento Doppler viene dado por $\delta\omega/\omega = v/c$. Para estimar el valor del ensanchamiento Doppler, $(\Delta\omega/\omega)_D$, substituimos la velocidad media v_0 de los átomos del gas en la fórmula que da el desplazamiento Doppler. De hecho, v_0 es la velocidad media en la dirección de observación, que podemos tomar como tercer eje. En la sec. 17, cap. 2, dijimos que la energía cinética media de los átomos y la temperatura T están ligadas entre sí por

$$E_{\text{cin}} = \tfrac{1}{2}M(v_{01}^2 + v_{02}^2 + v_{03}^2) = \tfrac{3}{2}kT \qquad (44a)$$

donde $M \cong AM_p$ es la masa del átomo. (M_p es la masa de un protón.) Las velocidades medias en las tres direcciones diferentes de coordenadas son, evidentemente, iguales entre sí, y obtenemos

$$v_0 = v_{03} = \sqrt{\frac{kT}{AM_p}} \qquad (44b)$$

En consecuencia, el ensanchamiento Doppler viene dado por

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D \sim \frac{1}{c}\sqrt{\frac{kT}{AM_p}} = (0{,}52 \times 10^{-5})\sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{T}{293^\circ\text{K}}\right)} \qquad (44c)$$

45 Las colisiones entre los átomos conducen también a un ensanchamiento de las rayas espectrales. Para estimar este efecto supondremos que, para un único átomo cualquiera, hay un intervalo de tiempo τ_c entre dos colisiones sucesivas. El valor inverso de este tiempo, $1/\tau_c$ es el *número de colisiones por unidad de tiempo* en el gas. Supondremos, además, que cada colisión interrumpe por completo el proceso de emisión.

El tiempo τ_c es entonces la vida media *efectiva* de los átomos y, por analogía con la relación (43a), podemos suponer que el correspondiente ensanchamiento de la raya espectral vale

$$(\Delta\omega)_c \sim \frac{1}{\tau_c} \tag{45a}$$

Hemos de estimar ahora la frecuencia de colisión $1/\tau_c$. Imaginaremos que los átomos son esferas de radio r. Fijemos nuestra atención en un átomo particular que acaba de experimentar una colisión. Sea v su velocidad. Se trata de hallar el tiempo medio τ_c que transcurre antes de que el átomo choque de nuevo. Con vistas a estimar el orden de magnitud de este tiempo, cabe suponer que todos los demás átomos se encuentran en reposo: para determinar un valor *preciso* de τ_c deberíamos considerar también, claro está, el movimiento de los otros átomos. En un corto intervalo de tiempo dt nuestro átomo recorre una distancia $v\,dt$. Consideremos un cilindro, de radio $2r$, que tenga como eje la trayectoria de la partícula y centrado en el segmento recorrido. La altura de este cilindro será entonces $v\,dt$. Si dentro de él no se encuentra ningún otro átomo, no se producirá colisión alguna en el intervalo de tiempo dt. La probabilidad de que ocurra una colisión durante el intervalo de tiempo es igual a la probabilidad de encontrar otro átomo dentro del cilindro. El volumen del cilindro es $4\pi r^2 v\,dt$ y si n es el número medio de átomos por unidad de volumen en el gas, el valor medio del número de átomos dentro del cilindro será $4\pi r^2 nv\,dt$. Si este número es pequeño comparado con la unidad, nos dará también la probabilidad de hallar un átomo dentro del cilindro y, por consiguiente, la probabilidad de que se produzca una colisión en el intervalo de tiempo dt. Para estimar τ_c, impondremos la condición

$$4\pi r^2 nv\tau_c \sim 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{\tau_c} \sim 4\pi r^2 nv \tag{45b}$$

que nos dice que el número medio de átomos que se encuentran dentro de un cilindro de radio $2r$, barrido por un átomo en el tiempo τ_c, debe ser del orden de la unidad.

Un mol de un gas cualquiera contiene $N_0 \cong 6 \times 10^{23}$ moléculas (en nuestro caso, las moléculas son átomos). A una temperatura de 273°K y a una presión de 1 atm, 1 mol ocupa un volumen de 22,4 litros. En otras palabras, a esta tempera-

En el volumen III de esta serie * se vio que un dipolo eléctrico de estas características emite energía radiante con una potencia de

$$W = \frac{1}{3c^3}\omega^4 (ea)^2 \tag{48b}$$

Esta fórmula da la *potencia* emitida. Puesto que sabemos que nuestro átomo (o núcleo) emitirá un solo fotón, nos interesa determinar el tiempo τ necesario para que el objeto emita una cantidad de energía $\hbar\omega$. Este tiempo viene dado por

$$\frac{1}{\tau} = \frac{W}{\hbar\omega} = \frac{\omega}{3}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2 \tag{48c}$$

o bien, como estimación del orden de magnitud,

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega\alpha\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2 \tag{48d}$$

Interpretaremos τ como vida media del estado excitado: éste es el tiempo necesario para que dicho estado decaiga por emisión de un fotón. Consideremos la cantidad de dimensión nula

$$\omega\tau \sim \frac{1}{\alpha}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^{-2} \tag{48e}$$

Esta cantidad es proporcional al número de oscilaciones que tiene tiempo de realizar el sistema durante el intervalo τ antes de decaer. Evidentemente, el estado excitado es tanto más estable cuanto mayor es la cantidad $\omega\tau$. Vemos, pues, que $\omega\tau$ es grande por dos razones: es proporcional a la cantidad "grande" $1/\alpha \cong 137$ y es proporcional al inverso del cuadrado de la cantidad $(a\omega/c)$ y, conforme hemos dicho, la razón $(a\omega/c)$ es, en general, pequeña.

49 Para el caso de un átomo podemos tomar para a el radio de Bohr, $a_0 = (1/\alpha)\,(\hbar/mc)$. Si se trata de una transición óptica, la frecuencia es del orden de magnitud de $\omega \sim \alpha^2 mc^2/\hbar$, y obtenemos así

$$\omega\tau \sim \alpha^{-3}, \qquad \tau \sim \left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)\alpha^{-5} \tag{49a}$$

que pone de manifiesto la dependencia de τ y de $\omega\tau$ con relación a la constante de estructura fina. En la región óptica la

* Berkeley Physics Course, vol. III, *Ondas y oscilaciones*, Cap. 7. Ed. Reverté, Barcelona, 1971.

pues de no hacerlo, el lector podría haberse quedado con la impresión de que la anchura de una raya espectral observada es siempre la anchura natural.

Un tema avanzado: Sobre la teoría de las transiciones electromagnéticas *

47 Consideremos dos importantes cuestiones. ¿Por qué la vida media de un estado excitado (en un átomo o núcleo) que es estable respecto de la emisión de una *partícula,* pero inestable respecto de la emisión de un *fotón,* es larga comparada con el inverso de la frecuencia del fotón emitido? ¿Por qué la radiación dipolar eléctrica es el modo más importante de radiación en física atómica?

Intentemos discutir estas cuestiones tomando como base una teoría electromagnética "semiclásica". Esto significa que nuestros argumentos son, en su espíritu, en parte clásicos y en parte propios de la mecánica cuántica. La justificación de esta simple manera de abordar el problema radica en su eficacia: *podemos* contestar a las dos preguntas que preceden de modo razonable.

48 La respuesta a la primera cuestión es: "porque la constante de estructura fina es muy pequeña". Intentemos ver qué significa esto.

Ante todo, recordaremos la conclusión a que llegamos en las secs. 29 y 39 del cap. 2, según la cual la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida es, en general, grande comparada con el tamaño del átomo o del núcleo que emite la radiación. Esta circunstancia tiene importantes consecuencias físicas y simplifica también la discusión matemática de los fenómenos de radiación. Supongamos primero que un átomo, o un núcleo, en un estado excitado actúa como un dipolo eléctrico oscilante. Sea ω la frecuencia de la oscilación: ésta es también la frecuencia de la luz emitida. Sea a el tamaño del objeto. Dado que lo que oscila es una carga elemental o más de una, podemos suponer que el momento dipolar eléctrico es del orden de magnitud de ea. Que el objeto es pequeño comparado con la longitud de onda se expresa por la condición

$$\frac{a\omega}{c} \ll 1 \qquad (48a)$$

* Puede omitirse en una primera lectura.

tura y a esta presión el número de átomos por unidad de volumen viene dado por

$$n_0 = \frac{N_0}{(22{,}4 \text{ litros})} \cong 2{,}7 \times 10^{19} \text{ átomos/cm}^3 \tag{45c}$$

El número de átomos por unidad de volumen a cualquier otra presión P y temperatura T es igual a

$$n = n_0 \left(\frac{P}{1 \text{ atm}}\right)\left(\frac{T}{273°\text{K}}\right)^{-1} \tag{45d}$$

(Este resultado se sigue de la ecuación de estado de un gas.)

Como estimación razonable del radio r podemos tomar el radio de Bohr, $r \cong 0{,}5 \times 10^{-8}$ cm. La velocidad característica v se obtiene a partir de

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT \tag{45e}$$

donde $M \cong AM_p$ es la masa de un átomo. Combinando todas las ecuaciones (45) que preceden, obtenemos finalmente

$$(\Delta\omega)_c \sim \frac{1}{\tau_c} \sim (2 \times 10^9 \text{ s}^{-1}) \times \left(\frac{P}{1 \text{ atm}}\right) \times \sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{273°\text{K}}{T}\right)}\,, \tag{45f}$$

46 Si comparamos ahora el ensanchamiento por colisión, dado por (45f), y el ensanchamiento Doppler, dado por (44c), con el ensanchamiento debido a que la vida del estado excitado de un átomo *aislado* es finita, se advierte que el ensanchamiento que resulta de esta última causa será, en general, muy pequeño comparado con el ensanchamiento determinado por las dos primeras. La magnitud del ensanchamiento por colisión disminuye a medida que se reduce la presión, y para bajas presiones predomina el ensanchamiento Doppler, que es entonces la causa principal de que las rayas espectrales tengan una anchura no nula. La anchura natural puede observarse solamente en condiciones muy especiales.

No seguiremos discutiendo el ensanchamiento por colisión y por efecto Doppler. Estos fenómenos, aunque sumamente importantes en la práctica, son extraños al problema básico que plantea la emisión y la absorción de la luz por un átomo. El autor estimó necesario de todos modos hablar de ellos aquí,

fórmula predice vidas medias comprendidas entre 10^{-7} y 10^{-9} s, lo que concuerda con los valores observados.

Para obtener una estimación *tosca* de la duración de la vida de un estado excitado en un núcleo, que puede decaer por transición dipolar eléctrica, tomemos $a = 10^{-13}$ cm. Un rayo gamma de 200 keV tiene una longitud de onda de unos 6×10^{-10} cm y obtenemos $\tau \sim 10^{-12}$ s. Esta estimación, hay que subrayarlo, es muy tosca, pero como estimación primera del orden de magnitud concuerda con lo que se observa experimentalmente. Nótese que, de acuerdo con (48e), la duración de la vida es inversamente proporcional al cubo de la frecuencia emitida.

Hemos contestado la primera de las dos cuestiones planteadas en la Sec. 47 y comprendemos ahora por qué los estados excitados que sólo pueden decaer electromagnéticamente viven mucho comparado con el inverso de la frecuencia de la luz emitida.

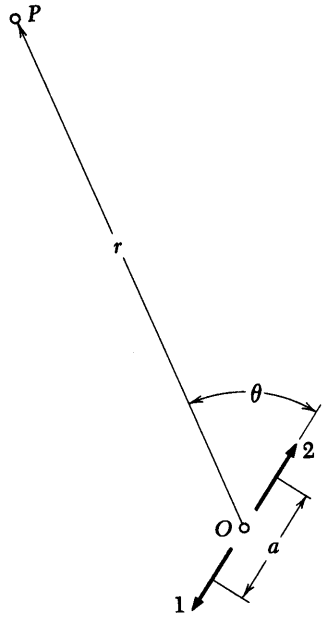


Fig. 50A Imagen esquemática de una fuente de radiación cuadripolar eléctrica. Las flechas representan dos dipolos eléctricos que oscilan con la misma frecuencia ω. Sus intensidades son iguales, pero sus sentidos son opuestos. El momento dipolar eléctrico de esta configuración se anula, al igual que el magnético, pero no el momento cuadripolar eléctrico. Si a es pequeña comparada con la longitud de onda λ, la potencia radiada por el sistema es menor en un factor $(a/\lambda)^2$ que la procedente de uno sólo de los dipolos.

50 Pasemos ahora a la segunda cuestión, la concerniente al papel predominante de las transiciones dipolares eléctricas en los átomos. Para ello debemos considerar la emisión, por unidad de tiempo, debida a una configuración de cargas en movimiento tal que el momento dipolar eléctrico se anula idénticamente.

La fig. 50A representa una fuente que emite *radiación cuadripolar.* Las dos flechas representan dos dipolos eléctricos que oscilan con la frecuencia ω. La intensidad de estos dipolos es la misma, pero están orientados en sentidos opuestos. La distancia entre los dipolos es a y están colocados simétricamente respecto del origen O, que es el centro del "átomo". La radiación se observa en el punto P, a una distancia grande, r, del átomo.

El momento dipolar eléctrico de esta fuente es cero, evidentemente. Lo mismo cabe decir del momento dipolar magnético, porque en la fuente no existen corrientes que circulen.

Consideremos ahora el campo eléctrico en una dirección fija y a una distancia r, muy grande, de la fuente. Este campo se encuentra en el plano de la figura y es perpendicular al vector posición OP. Sea E_1 el campo eléctrico que encontraríamos en P si sólo existiera un dipolo, situado en el origen O. Este campo es de la forma

$$E_1 = \frac{C(\theta)}{r} \exp\left[i\left(\frac{r}{c} - t\right)\omega\right] \tag{50a}$$

donde $C(\theta)$ es una función de θ que es proporcional al momento dipolar eléctrico. No nos interesa aquí cuál sea su forma precisa.

Si existen ahora los dos dipolos, como en la figura, los campos eléctricos debidos a ellos casi se compensan entre sí, pero no del todo, porque la distancia de P al dipolo 1 es $\cong (r + \frac{a}{2}\cos\theta)$ mientras que la distancia de P al dipolo 2 es $\cong (r - \frac{a}{2}\cos\theta)$: en consecuencia, el campo debido al dipolo 1 difiere, en el valor de la fase, del campo debido al dipolo 2. Por lo tanto, el campo eléctrico E_2 viene dado por

$$E_2 = \left\{\frac{C(\theta)}{r}\exp\left[i\left(\frac{r}{c} - t\right)\omega\right]\right\} \times \times \left[\exp\left(\frac{ia\omega\cos\theta}{2c}\right) - \exp\left(\frac{-ia\omega\cos\theta}{2c}\right)\right] \qquad (50b)$$

51 Nos valdremos ahora de nuestra hipótesis (48a), según la cual $(a\omega/c)$ es una cantidad muy pequeña comparada con la unidad: esta hipótesis es válida, claro está, para transiciones ópticas en átomos, ya que a difícilmente puede ser mayor que el tamaño atómico típico. Podemos, así, desarrollar las dos funciones exponenciales entre paréntesis del segundo miembro de (50b), y prescindiendo de todos los términos de orden superior al primero respecto de a obtenemos

$$E_2 \cong i\left(\frac{a\omega}{c}\right)(\cos\theta)\, E_1 \qquad (51a)$$

donde E_1 viene dada por (50a). El campo eléctrico E_2 producido por el cuadripolo eléctrico representado en la fig. 50A es, por consiguiente, menor en cualquier punto del espacio por lo menos en un factor $(a\omega/c)$ que el campo eléctrico E_1 producido por uno solo de los dipolos "que constituyen el cuadripolo". Dado que la radiación emitida por unidad de tiempo es proporcional al cuadrado del campo eléctrico, cabe concluir que el valor típico de la radiación cuadripolar eléctrica emitida por unidad de tiempo es menor que el correspondiente a la radiación dipolar eléctrica en un factor $(a\omega/c)^2$. Las correspondientes vidas medias están entonces ligadas entre sí por

$$\tau_{E2} \sim \left(\frac{a\omega}{c}\right)^{-2}\tau_{E1} \qquad (51b)$$

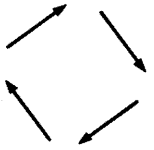


Fig. 52A **Una configuración de dipolos eléctricos en oscilación cuyo momento dipolar eléctrico se anula, como también el momento cuadripolar eléctrico, pero cuyo momento dipolar magnético no es cero. Las cuatro flechas representan cuatro dipolos eléctricos de igual intensidad que oscilan con la misma frecuencia.**

donde τ_{E1} representa la vida media de las transiciones dipolares eléctricas y τ_{E2} la correspondiente a las transiciones cuadripolares.

Hemos estimado que $(a\omega/c)$ es del orden de α en un átomo, y así la razón de vidas medias varía entre 10^{-4} y 10^{-6}.

Consideraciones análogas valen para los núcleos, en cuyo caso a es una longitud característica de los mismos y ω la frecuencia emitida. También ahora $(a\omega/c)$ es pequeño, digamos del orden de 10^{-3} o menor.

52 La fig. 52A muestra un ejemplo de fuente cuyo momento dipolar *eléctrico* es nulo, pero con un momento dipolar *magnético* diferente de cero. También aquí, las pequeñas flechas representan dipolos eléctricos (oscilantes) y podemos imaginar que uno de estos dipolos consiste en una carga que oscila hacia adelante y hacia atrás a lo largo de la dirección de la flecha. Esto corresponde a una corriente alterna que circula siguiendo los lados de un cuadrado, y el momento dipolar magnético del sistema es proporcional al producto de la intensidad de la corriente por el área del cuadrado.

Es obvio que argumentos muy similares a los que se han presentado en las Ecs. 50 y 51 son válidos también aquí, con lo que llegamos a la conclusión de que

$$\tau_{M1} \sim \left(\frac{a\omega}{c}\right)^{-2} \tau_{E1} \tag{52a}$$

donde τ_{M1} representa la vida media de las transiciones dipolares magnéticas.

53 La clasificación de la radiación emitida en categorías tales como dipolo eléctrico, dipolo magnético, cuadripolo eléctrico, cuadripolo magnético, octopolo eléctrico, etc., es una clasificación de acuerdo con las propiedades de simetría de la radiación que se emite. Cada tipo de radiación está caracterizado por un tipo distintivo de distribución de la intensidad en función de la dirección y por un tipo distintivo de polarización. El tipo de simetría de la radiación emitida está definido unívocamente, claro está, por las propiedades de simetría de la fuente y podemos en igual medida clasificar los tipos de radiación de acuerdo con las propiedades de la fuente. Un dipolo eléctrico emite radiación dipolar eléctrica (abreviadamente, $E1$), un dipolo magnético emite radiación dipolar magnética (abreviadamente, $M1$), un cuadripolo eléctrico emite radiación cuadripolar eléctrica, (abreviadamente, $E2$), etc. En los esque-

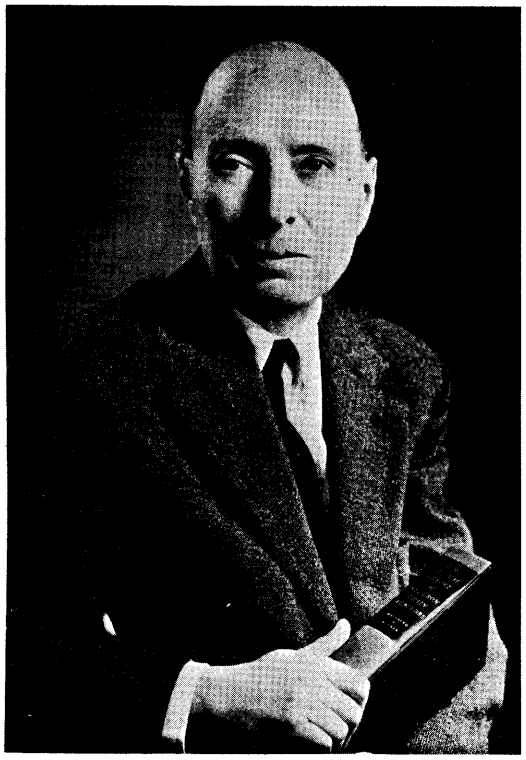
mas de términos que representan transiciones electromagnéticas en los núcleos, encontramos frecuentemente los símbolos $E1$, $M3$, $E4$, etc., que indican la naturaleza de la radiación emitida.

Nuestra discusión relativa a la radiación cuadripolar eléctrica y dipolar magnética se puede generalizar fácilmente para el estudio de multipolos de orden superior. Se construye un octopolo eléctrico colocando dos cuadripolos eléctricos cerca el uno del otro, pero orientados en sentidos opuestos, con lo cual el momento cuadripolar resultante se anula. Es fácil comprender que la potencia radiada por un sistema de este tipo es menor que la correspondiente a un solo cuadripolo en un factor $(a\omega/c)^2$. Cada vez que subimos un escalón más en la jerarquía de los multipolos eléctricos, la potencia característica se reduce en un factor del orden de $(a\omega/c)^2$), donde a es una dimensión lineal típica del sistema. Análogamente ocurre en el caso de los multipolos magnéticos.

Podemos así explicarnos el papel predominante de las transiciones dipolares eléctricas en los átomos. Si un estado excitado puede decaer de varias maneras diferentes, una de las cuales es por radiación $E1$, dicho estado decaerá por radiación $E1$ con probabilidad muy elevada. También los otros tipos de radiación pueden existir, pero las intensidades de las rayas espectrales que no corresponden a la radiación $E1$ son *mucho* menores que las correspondientes a las rayas $E1$.

54 Cuando discutimos las reglas de selección para las transiciones dipolares eléctricas en las Secs. 29-31, dijimos que estas reglas se siguen del principio de conservación del momento cinético. Dijimos también que el origen de este principio se encuentra en la isotropía del espacio físico. Por lo tanto, podemos describir las reglas de selección de una manera al parecer diferente: *las reglas de selección se siguen de la isotropía del espacio físico.* Exploremos un poco esta idea.

Hemos dicho que el número cuántico de momento cinético j mide el momento cinético del estado de un sistema, por ejemplo un átomo. Dentro del marco de la mecánica cuántica, j tiene otra interpretación posible: j describe el *tipo de simetría de rotación* del estado. Podemos decir que j representa el aspecto del átomo cuando se le observa desde todas las direcciones posibles. Por ejemplo, si el átomo se encuentra en un estado tal que $j = 0$, el átomo presenta entonces el mismo aspecto en todas las direcciones: $j = 0$ significa que el estado posee simetría esférica. Si $j = 1$, el estado tiene entonces las mismas pro-



Eugene Paul Wigner. Nacido en Budapest, Hungría, en 1902. Estudió en Berlín y se doctoró en Ingeniería química en la Technische Hochschule en 1925. Después de permanecer cierto tiempo en Berlín y en Göttingen, Wigner marchó a los Estados Unidos en 1930. En la actualidad es profesor de física en la Universidad de Princeton. A Wigner se le concedió el Premio Nobel en 1963.

La labor de Wigner en física teórica cubre un campo notablemente amplio. Han sido muchas e importantes sus contribuciones en capítulos tan diversos como física atómica, química, química teórica, física del estado sólido, física nuclear, teoría de los reactores nucleares, relatividad y teoría de las partículas elementales. En opinión del autor su más sobresaliente contribución es su asombrosamente profundo y penetrante análisis del papel de los principios de simetría en mecánica cuántica. Sus ideas acerca de este tema han sido presentadas en toda una serie de artículos (y en un libro) publicados en tiempos que van desde 1931 hasta el presente. (Fotografía proporcionada por *Reviews of Modern Physics*.)

piedades de simetría que un vector. El campo de radiación emitida en una transición dipolar eléctrica es un ejemplo de un estado de este tipo *del fotón*: la imagen que ofrece la totalidad del campo en el espacio ha de tener las mismas propiedades de simetría respecto de las rotaciones que la fuente y ésta es un vector dipolar eléctrico. Hemos dicho que un fotón dipolar eléctrico lleva consigo una unidad de momento cinético, y esto constituye un ejemplo de relación general entre tipos de simetría y momento cinético. El tipo de radiación debida a un cuadripolo eléctrico se caracteriza por el número cuántico de simetría de rotación $j = 2$, y en correspondencia con ello un fotón cuadripolar eléctrico lleva consigo *dos* unidades de momento cinético. Las reglas de selección para transiciones cuadripolares eléctricas, por lo tanto, son diferentes de las reglas de selección para transiciones dipolares eléctricas. En una transición cuadripolar el momento cinético del átomo puede cambiar en hasta dos unidades.

55 En vista de lo que precede, todas las reglas de selección que rigen las transiciones electromagnéticas pueden deducirse del principio de que se conservan las propiedades de simetría de rotación de un sistema. Para ilustrar esta profunda idea demostraremos una regla de selección particular, a saber, la que afirma que la transición $(j_i = 0)$ a $(j_f = 0)$ está prohibida para todas las transiciones electromagnéticas en las que interviene un solo fotón. Formulada de otra manera, esta regla dice que un átomo que se encuentra en un estado excitado y posee simetría esférica (es decir, $j_i = 0$) no puede decaer por emisión de un fotón yendo a parar a otro estado que tiene también simetría esférica (es decir, $j_f = 0$).

He aquí el razonamiento: *antes* de la emisión el átomo se encuentra en un estado con simetría esférica. Su aspecto es es el mismo en todas direcciones. *Después* de la emisión, el sistema, que ahora consiste en un átomo en el estado final *más* la onda electromagnética emitida, debe encontrarse también en un estado con simetría esférica. En el estado inicial, no había en el espacio dirección preferida alguna, y si el espacio físico es isótropo, tampoco puede haber ninguna dirección preferida después de la emisión. Esto es lo que queremos decir cuando hablamos de conservación de las propiedades de simetría respecto de las rotaciones. Consideremos ahora la situación después de la emisión. Si el estado final del *átomo* tiene simetría esférica, lo que corresponde a $j_f = 0$, de ello se sigue que también la onda electromagnética emitida posee simetría esférica: no puede depender de la dirección. Ahora

bien, *una onda electromagnética con estas características no existe y, en consecuencia, la transición es totalmente imposible.* En efecto, es claro que no puede haber ninguna onda dipolar eléctrica (o magnética) que presente simetría esférica, porque un dipolo eléctrico (o un dipolo magnético) define una dirección. Tampoco puede existir ninguna otra onda multipolar con simetría esférica, porque en un instante dado y en un punto dado en el espacio el campo eléctrico define una dirección perpendicular al vector posición. El vector eléctrico en dicho punto y en dicho instante no puede, por consiguiente, conservarse sin cambio alguno en una rotación de la configuración del campo en torno del vector posición, y así el campo como distribución no puede tener simetría esférica.

56 Una transición prohibida por la regla de selección dipolar puede estar permitida para transiciones cuadripolares o multipolares de orden superior. Si examinamos los esquemas de términos para átomos presentados en este capítulo, vemos que casi todos los estados excitados pueden decaer, yendo a parar a algún estado más bajo, por transiciones dipolares eléctricas. La estructura de niveles de los núcleos es a menudo muy diferente y cabe hallar un estado justo por encima del estado fundamental cuyo valor de j difiere en varias unidades del correspondiente a este último. Un estado excitado de este tipo no puede decaer por emisión dipolar y, en consecuencia, vive más tiempo. Si la diferencia entre los valores de j es muy grande, y la diferencia de energía pequeña, la duración de la vida puede llegar a ser del orden de minutos, ya que el fotón emitido tiene un elevado orden de multipolaridad. Estos estados se llaman *estados isómeros.*

Bibliografía para ulterior estudio

1) Los niveles de energía de los átomos, moléculas y núcleos se discuten, naturalmente, en muchísimos textos acerca de estos temas. Entre ellos citaremos los siguientes, bastante elementales:

a) G. Herzberg: *Atomic Spectra and Atomic Structure* (Dover Publications, Nueva York, 1944).

b) H. White: *Introduction to Atomic Spectra* (McGraw-Hill Books Co., Nueva York, 1934).

c) G. Herzberg: *Molecular Spectra and Molecular Structure:* I, *Spectra of Diatomic Molecules* (D. van Nostrand Co., Nueva York, 1953).

d) D. Halliday: *Introducción a la física nuclear* (Editorial Reverté, S. A., Barcelona, Buenos Aires, Caracas, México)

e) E. Segré: *Núcleos y partículas* (Editorial Reverté, S. A., Barcelona, Buenos Aires, Caracas, México)

2) a) Esquemas de términos de muchos átomos se pueden encontrar en el libro: W. Grotrian: *Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und*

Ionen mit Ein, Zwei und Drei Valenzelektronen, vol. II (Verlag von Julius Springer, Berlín, 1928).

b) Para diagramas de niveles de energía de núcleos seleccionados, véase: F. Ajzenberg y T. Lauritsen: "Energy levels of light nuclei", *Rev. Mod. Phys.*, **27**, 77 (1955).

3) Para tablas más cortas relativas a los espectros y niveles de energía, remitimos al lector a:

a) *Handbook of Chemistry and Physics* (Chemical Rubber Publishing Co.).

b) *American Institute of Physics Handbook* (McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1957).

4) Hay varios artículos en el *Scientific American* que el lector, llegados a este punto, puede leer con provecho:

a) A. L. Bloom: "Optical Pumping", octubre 1960, pág. 72.
b) H. Lyons: "Atomic Clocks", febrero 1957, pág. 71.
c) G. E. Pake: "Magnetic Resonance", agosto 1958, pág. 58.
d) J. P. Gordon: "The Maser", diciembre 1958, pág. 42.
e) A. L. Schawlow: "Advances in Optical Masers", julio 1963, pág. 34.
f) S. de Benedetti: "The Mössbauer Effect", abril 1960, pág. 72.

Problemas

1 Las siguientes rayas espectrales fueron observadas (a principio de este siglo) para un cierto átomo:

$$\begin{array}{lll} \tilde{\nu}_1 = 82258.27 & \tilde{\nu}_5 = 15232.97 & \tilde{\nu}_8 = 5331{,}52 \\ \tilde{\nu}_2 = 97491.28 & \tilde{\nu}_6 = 20564.57 & \tilde{\nu}_9 = 7799{,}30 \\ \tilde{\nu}_3 = 102822.84 & \tilde{\nu}_7 = 23032.31 & \tilde{\nu}_{10} = 2469, \\ \tilde{\nu}_4 = 105290.58 & & \end{array}$$

donde los números en la lista son *números de onda* tomando como unidad el cm^{-1}.

(*a*) Encuentre tantos ejemplos cuantos pueda que ilustren el principio de combinación de Ritz, es decir, casos en los que un número de onda se puede expresar como diferencia de otros dos números de onda.

(*b*) Probar que todas las rayas se pueden considerar como combinaciones de cinco términos. Hallar éstos (salvo una constante aditiva común arbitraria) y trazar un esquema de términos que muestre los términos y las transiciones que corresponden a las rayas citadas.

(*c*) ¿Puede hallar una fórmula *simple* que dé los términos? ¿Aparece este esquema de términos en algún lugar de este libro?

(*Después* de que haya terminado su análisis, puede resultarle interesante dar un vistazo a una tabla de longitudes de onda para identificar el átomo).

2 En un estudio de fluorescencia por resonancia, el contenido de una vasija de cuarzo *C* se ilumina con luz ultravioleta de longitud de onda 2537 Å emitida por una lámpara de mercurio (en la lámpara se mantiene una descarga eléctrica a través de vapor de mercurio contenido en una vasija de cuarzo).

Se pueden observar los siguientes hechos:

(*a*) Si la vasija *C* contiene vapor de mercurio, y nada más, el gas contenido en *C* dispersará la luz incidente muy fuertemente: los áto-

mos en el gas entrarán en resonancia. La radiación dispersada tiene también la longitud de onda 2537 Å.

(*b*) Si la vasija *C* contiene vapor de talio, y nada más, *C* será transparente a la radiación incidente y se producirá muy poca dispersión de la luz que incide.

(*c*) Si la vasija *C* contiene *a la vez* vapor de talio y de mercurio, *C* emitirá la raya del mercurio 2537 Å y emitirá también un cierto número de rayas características del talio con longitudes de onda 2768 Å, 3230 Å, 3529 Å, 3776 Å y 5350 Å. Si se coloca una placa de vidrio entre *C* y la lámpara, no se emitirá ninguna de estas rayas.

(*d*) En las condiciones descritas en (*c*) se encuentra que la raya del talio 3776 Å es mucho más ancha que la raya del talio 2768 Å y la primera de ellas es, de hecho, mucho más ancha de lo que cabría esperar tomando como base el ensanchamiento Doppler correspondiente a la temperatura en la vasija *C*, y es también mucho más ancha de lo que sería dicha raya si se emitiera por un tubo de descarga lleno de vapor de talio.

Intente explicar todos estos fenómenos. Como sugerencia, remitimos al lector al esquema de términos del talio, figura 34A de este capítulo. Es interesante hacer notar que sólo unas pocas rayas del talio se observan en el experimento. Por ejemplo, es particularmente notable la falta de las rayas 2826 Å y 5584 Å.

3 La vida media del estado $3p_{1/2}$ en el sodio (véase figura 32A de este capítulo) es de unos 10^{-8} s. Considérese una vasija llena de gas argón a una presión de 10 mm Hg y a una temperatura de unos 200°C. Dentro de la vasija tenemos una partícula de sodio que se calienta de modo que la vasija contenga una cantidad pequeña de vapor de sodio. Observemos la raya de absorción 5896 Å en luz, procedente de un filamento de tungsteno, que atraviesa la vasija. (El filamento de tungsteno calentado emite radiación con una distribución espectral continua.) Estimar:

(*a*) la anchura natural de la raya;

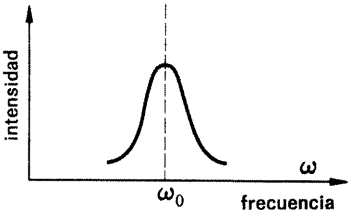
(*b*) la magnitud del ensanchamiento de la raya por efecto Doppler;

(*c*) la magnitud del ensanchamiento de la raya por colisión. Exprese sus resultados en *números de onda* (expresar también la frecuencia de la raya en cuestión en números de onda, cm^{-1}). Comparar estas anchuras con la separación de estructura fina de las rayas del sodio (amarillas) D_1 y D_2.

(*d*) En el esquema de términos de la fig. 32A se observa una raya de longitud de onda 5688,22 Å. ¿Veremos esta raya en el experimento de absorción que acabamos de describir?

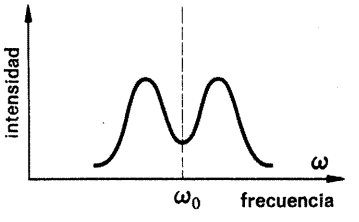
El gas argón en la vasija no tiene otro efecto sobre el proceso que el de establecer una presión y una temperatura media en la misma. Su presencia debe tenerse en cuenta cuando se trata de considerar el efecto de las colisiones sobre la raya de absorción; dado que el número de átomos de sodio en la vasija es extraordinariamente pequeño comparado con el número de átomos de argón, los átomos de sodio chocan principalmente con átomos de argón.

4 Consideremos la forma de las rayas espectrales *emitidas* por un átomo. Supondremos que los átomos se encuentran en el foco luminoso en forma de gas. Medimos la intensidad en función de la frecuencia con un espectrógrafo de muy alta resolución. Para cier-



Estas dos figuras se refieren al problema 4. La de arriba presenta el aspecto común de una raya espectral (en el caso de resolución sumamente alta) procedente de un tubo de descarga de gas.

En ciertas condiciones, la *misma* raya espectral emitida por un tubo de descarga de gas similar puede, en cambio, tener el aspecto que se indica debajo.



tos focos luminosos, la raya puede presentar el aspecto de la figura superior, al margen, mientras que para otras formas de focos luminosos la misma raya espectral puede tener el aspecto que se muestra en la figura inferior, al margen. Además, cabe hacer notar que, como regla general, únicamente las rayas que resultan de una transición al estado fundamental muestran el aspecto indicado en la figura inferior. ¿Puede explicar estos fenómenos y puede explicar las características físicas de los focos luminosos en los que cabe esperar que la raya sea del tipo indicado en la figura superior?

5 En las condiciones experimentales descritas en el prob. 3, estimar, tomando como base la fórmula (7a) de este capítulo, la fracción del número de átomos de sodio que, en un instante cualquiera, se encuentra en el primer estado excitado. (Supóngase $T = 200°C$.)

6 (*a*) A partir de los datos experimentales presentados en la figura 37A, calcular la constante C que aparece en la ec. (37b).

(*b*) En el estudio de la emisión de rayos X se encuentra que, para conseguir que aparezca una de las rayas características (de frecuencia ω), la energía E de los electrones proyectil debe ser bastante mayor que $\hbar\omega$. Para las rayas $K\alpha$, a las que se refiere la fig. 37A, la condición para que aparezcan las rayas es, aproximadamente, $E > 4/3\ \hbar\omega$. ¿Por qué no aparece la raya no bien se tiene $E > \hbar\omega$?

7 Aunque el autor no puede asumir responsabilidad *alguna* por las dañosas imágenes mentales que pueden formarse si el lector estudia el modelo planetario de Bohr del átomo, no puede ir tan lejos como para *prohibir* enteramente que el lector considere este modelo. Bohr supuso que el electrón se mueve en el átomo de hidrógeno siguiendo una órbita circular y de tal manera que el momento cinético del electrón es un múltiplo entero positivo de $\hbar$. Es una notable casualidad el que este modelo dé la situación correcta de todos los niveles de energía con una precisión muy elevada. Dado el considerable interés histórico del mismo, acaso el lector quiera seguir los pasos de Bohr y construir el esquema de términos e identificar las rayas que muestra la fig. 1B. (Las longitudes de onda anotadas sobre la placa fotográfica son: 4861,3 Å, 4340,5 Å, 4101,7 Å, 3970,1 Å, 3889,1 Å y 3835,4 Å.)

8 El núcleo radiactivo $_{84}Po^{212}$ (llamado antes ThC') emite partículas alfa de varias energías diferentes. En este caso, la explicación no es la dada en la fig. 40A de este capítulo. Hallar cuál pudiera ser. Trace un esquema de términos para ilustrar sus ideas y el conocimiento adquirido. Designe correctamente los estados que corresponden a los diferentes núcleos que intervienen.

9 La fig. 38A es una versión simplificada de un diagrama que aparece en un artículo por F. Ajzenberg y T. Lauritsen, *Reviews of Modern Physics* **27** (1955), pág. 107, fig. 15. Estudiar la figura original. Obsérvese que encima de la raya designada por $Li^7 + \alpha$, se presenta una curva con un cierto número de máximos. Éstos coinciden con algunos de los niveles del núcleo B^{11}. Esta curva muestra los resultados de algunas mediciones efectivamente realizadas. Explicar en detalle el significado de esta curva y discutir las medidas en que se basa.

En la figura original, advertimos, además, a la derecha, una raya horizontal designada por $B^{11} + p - p'$, y encima de ella, una corta

barra horizontal con el número 15,6. Esta última aparece unida con alguno de los niveles del B^{11} por rectas con puntas de flecha. Este rasgo del diagrama se refiere también a ciertas mediciones. Discutir éstas y explicar qué representan las flechas.

10 Considérese un experimento en el cual un haz de átomos se mueve paralelamente a una pantalla en la que existe una estrecha rendija. La rendija es perpendicular a la dirección del haz. Para simplificar supondremos que todos los átomos del haz tienen la misma velocidad v. Algunos de los átomos se llevan, en cierto punto de la trayectoria, a un estado excitado, antes de que pasen por encima de la rendija. Sea x la distancia entre ésta y el punto en que se excitan los átomos. Éstos pueden decaer desde el estado excitado al estado fundamental por emisión de un fotón de frecuencia ω. Sea τ la vida media del estado excitado. Estudiamos la luz que pasa a través de la rendija.

(*a*) ¿Cómo depende de la distancia x la intensidad de la luz que emerge a través de la rendija? Justificar la respuesta.

(*b*) Supóngase que dejamos que la luz que emerge a través de la rendija incida sobre una célula fotoeléctrica y supóngase que determinamos el potencial de frenado para el que la célula deja de registrar. Formular, y justificar, qué es lo que espera hallar en relación con la dependencia de este potencial respecto de la distancia x. No importa el hecho de que llegue o no a la respuesta correcta: lo que sí importa es que *reflexione* sobre este problema y formule una predicción definida basada en lo que ahora conoce.

11 * Es interesante estudiar la distribución angular *(en intensidad)* de la radiación cuadripolar eléctrica emitida por la fuente representada en la fig. 50A y comparar esta distribución angular con la que observaríamos en el caso de un *único* dipolo eléctrico. La intensidad es proporcional al cuadrado del campo eléctrico. Probar que la intensidad emitida, considerada en función de la dirección de observación, viene dada por

$$I_{E1}(\theta) = A \operatorname{sen}^2\theta$$

en el caso de un dipolo eléctrico, y por

$$I_{E2}(\theta) = B \operatorname{sen}^2(2\theta)$$

en el caso del cuadripolo eléctrico representado en la fig. 50A, A y B son aquí constantes. La intensidad es independiente del acimut. Este ejemplo indica cómo se pueden distinguir entre sí los diferentes tipos de radiación multipolar a partir de sus distribuciones de intensidad características.

* Este problema se refiere a un tema avanzado: Sec. 50.

Capítulo 4

Fotones

El fotón como partícula 158

Efecto Compton, radiación de frenado; creación y aniquilación de pares 169

¿Pueden «dividirse» los fotones? 181

Bibliografía para ulterior estudio 195

Problemas 195

Capítulo 4

Fotones

El fotón como partícula

1 En este capítulo y en el que sigue exploraremos tanto el aspecto corpuscular como el ondulatorio de entidades fundamentales tales como el fotón, el electrón, el protón, el neutrón y las demás partículas elementales que se han encontrado en la naturaleza. Consideraremos algunos hechos experimentales básicos e intentaremos formarnos una imagen preliminar coherente de lo que se observa. En muchos casos, el resultado de un experimento concreto puede inspirar la realización de un nuevo experimento: cuando así ocurre, intentaremos hacer una predicción y luego estudiar lo que de hecho ha sido observado. Nuestro método consiste en experimentar con ideas y deberemos tener cuidado en no comprometernos todavía de manera demasiado firme con un determinado modelo, cualquiera que sea: veamos cómo van las cosas.

2 Acaso convenga empezar estudiando los fotones. Los fotones son los "cuantos" del campo electromagnético: sabemos que la radiación casi monocromática de frecuencia ω se manifiesta en forma de paquetes que transportan una energía $E = \hbar\omega$. La prueba más inmediata de ello la proporciona el estudio del efecto fotoeléctrico, pero, como veremos, otras observaciones conducen también a la misma conclusión. Consideradas en conjunto, estas observaciones implican que la relación $E = \hbar\omega$ debe valer en un intervalo de frecuencias muy amplio. Haremos ahora la (atrevida) extrapolación de que esta relación entre la energía del paquete y la frecuencia es completamente general y que vale para *todos* los fotones.

3 Formulemos la siguiente cuestión: supongamos que se tiene un paquete de radiación electromagnética de frecuencia ω que se mueve en determinada dirección con la velocidad de la luz c. ¿Transportará también impulsos este paquete?, y, si efectivamente lo hace, ¿cuál es el valor del impulso? Si el paquete, que llamamos fotón, tiene algunas de las propiedades típicas de una partícula, cabría esperar que transporte impulso y cabe imaginar experimentos en los que podamos medirlo directamente.

En el volumen 3 * de esta serie vimos que, para una onda

* Berkeley Physics Course, Vol. III, *Ondas*, Cap. 7 (Editorial Reverté, S. A., Barcelona, Buenos Aires, Caracas, México).

electromagnética monocromática que se mueve en una dirección bien definida, la energía E y el impulso p están ligados entre sí por $p = E/c$, y la dirección orientada del impulso coincide con la de la propagación. Esto es lo que predice la teoría electromagnética clásica y es razonable que la misma relación valga para los cuantos electromagnéticos.

4 Es instructivo deducir la relación entre energía e impulso desde un punto de vista diferente. Supongamos, por lo tanto, que todavía no sabemos que $p = E/c$, pero que sí creemos que la relación $E = \hbar\omega$ es universalmente válida. Esto significa, en particular, que esta relación se cumple en *cada* sistema de referencia inercial. El principio de relatividad especial implica que si podemos hallar relaciones generales entre la energía, el impulso, la frecuencia y la dirección de propagación válidas para *todos* los fotones en *un* sistema de referencia inercial, estas mismas relaciones deben ser asimismo válidas en *cualquier* sistema inercial. La condición de invariancia relativista introduce, por consiguiente, una limitación respecto de las posibles relaciones entre dichas magnitudes físicas, y la idea en que se basa nuestra argumentación es la de utilizar dicha limitación para hallar una expresión para el impulso $\mathbf{p}$ de un fotón.

Imaginemos que el fotón se mueve, en un sistema de referencia inercial S, en la dirección del eje x positivo. Consideraremos el fotón como una partícula de energía $E = \hbar\omega$ y de impulso desconocido $\mathbf{p}$. Por razones de simetría, el sentido de $\mathbf{p}$ debe coincidir con el del eje x. Imaginemos ahora la misma situación tal como se observa en otro sistema de referencia inercial, el sistema S′, que se mueve, respecto del sistema S, con velocidad uniforme v a lo largo del eje x positivo. Un observador en el primer sistema ve un fotón de frecuencia ω', que transporta una energía $E' = \hbar\omega'$ y un impulso $\mathbf{p}'$. Dado que $c > v$, el fotón en dicho sistema se moverá en la dirección del eje x' positivo. Además, llegamos a la conclusión (por razones de simetría) de que en *ambos* sistemas los impulsos deben estar orientados en la dirección del movimiento del fotón. Podemos así prescindir de la notación vectorial para los impulsos y escribir simplemente p y p' para las componentes x y x', dado que las demás son iguales a cero.

5 Recordemos dos resultados de las transformaciones de Lorentz obtenidos en el volumen 1, de esta serie *. El primero de

* Berkeley Physics Course, Vol. I, *Mecánica*. La fórmula del desplazamiento Doppler longitudinal se dedujo en el Cap. 11, y la ley de transformación para la energía y el impulso fue deducida en el Cap. 12. (Editorial Reverté, S. A., Barcelona, Buenos Aires, Caracas, México)

ellos es la fórmula que da el desplazamiento Doppler longitudinal que liga las frecuencias ω y ω' de acuerdo con

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \tag{5a}$$

El segundo es la ley de transformación relativista para la energía y el impulso de una partícula. Según esta ley, la energía E' viene dada por

$$E' = \frac{E - vp}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{5b}$$

Si nos valemos ahora de nuestra hipótesis

$$E = \hbar\omega, \qquad E' = \hbar\omega' \tag{5c}$$

para eliminar E y E' en (5b), y eliminamos luego ω' en la ecuación que resulta utilizando (5a), obtenemos

$$\hbar\omega \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} = \frac{\hbar\omega - vp}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

De esta ecuación se puede despejar, sin más, p, con lo que se obtiene

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} \tag{5d}$$

o bien

$$p = \frac{E}{c} \tag{5e}$$

Naturalmente, estas relaciones valen en *todos* los sistemas de referencia inerciales, porque nada de especial había en lo que concierne a nuestro sistema S. En particular, dichas relaciones son válidas en el sistema de referencia S'. Conforme dijimos, la relación (5e) se puede deducir dentro del marco de la teoría electromagnética clásica. La relación (5d) es indiscutiblemente de carácter cuántico: dice que un cuanto de luz de frecuencia ω transporta siempre el impulso $\hbar\omega/c$. Esta relación, claro está, es consecuencia inmediata de (5e) y (5c) y, recíprocamente, (5c) se sigue de (5d) y (5e).

6 La masa en reposo, m_f, del fotón es cero. En el volumen I se dedujo una relación general entre masa en reposo, energía e impulso, relación que aplicada a este caso particular nos dice que

$$(m_f\, c^2)^2 = E^2 - (cp)^2 \tag{6a}$$

En virtud de (5e) el segundo miembro de esta igualdad se anula y, según esto, tenemos $m_f = 0$.

A primera vista este resultado podría parecer un tanto raro: dado que el fotón tiene ciertas propiedades típicas de una partícula, debería poseer una masa cuando se le observa en su sistema de referencia en reposo. Sin embargo, *no existe ningún sistema inercial en el que el fotón se encuentre en reposo:* la radiación electromagnética se propaga con velocidad c en *cualquier* sistema de referencia inercial. Por consiguiente, el concepto de un fotón en reposo carece de sentido.

Se podría argüir que un objeto que jamás puede encontrarse en reposo no debiera llamarse "partícula". Sin embargo, ha llegado a ser una costumbre establecida el hablar de "partículas sin masa", de las cuales el fotón y el neutrino son ejemplo, y a ella nos atendremos. En último término, es puramente cuestión de gusto el cómo definir la palabra "partícula". Es claro que conviene tratar los fotones y los neutrinos en plan de igualdad con las partículas que poseen masa. Por otra parte, hay que subrayar con mucho énfasis que un fotón no es una bola de billar: se trata meramente de que el fotón posee *algunas* propiedades en común con las bolas de billar.

7 Consideremos ahora algunos experimentos ideales en los que intentamos ver si el modelo corpuscular del fotón es compatible con algunos resultados que se pueden obtener en la teoría electromagnética clásica. De esta manera podremos familiarizarnos más con la idea de que los paquetes de radiación electromagnética tienen propiedades análogas a las de las partículas.

Conviene hacer una aclaración. Cuando hablamos aquí de "propiedades corpusculares", nos referimos a las propiedades que se atribuyen a las partículas en la física clásica. De hecho, la palabra "partícula" se usa hoy, naturalmente, como nombre común para objetos tales como fotones, electrones, protones, neutrones, etc. Estrictamente hablando. "propiedades corpusculares" son, por lo tanto, todas aquellas características compartidas por estos objetos. En particular, es una propiedad de una partícula física real el que puede comportarse como una

onda. En este punto de la discusión, estamos intentando hallar, sin embargo, cuáles son las propiedades de las partículas *reales*, y un aspecto de este estudio es el de intentar ver hasta qué punto las partículas reales se comportan como las "partículas clásicas" *imaginarias*.

8 Considérese una fuente estacionaria de luz que emite fotones de frecuencia ω. Hagamos incidir esta luz perpendicularmente sobre un espejo perfecto en reposo en el sistema de referencia propio del foco luminoso.

La teoría electromagnética clásica predice que la luz reflejada tendrá también la frecuencia ω y que el flujo de energía que incide sobre el espejo es igual al flujo de energía que escapa de él.

Además, la teoría electromagnética clásica predice que la radiación incidente ejercerá una presión sobre el espejo, a saber, la presión de radiación. Si suponemos que la intensidad de la radiación es la misma en todo el espejo, esta presión P vendrá dada por

$$P = W \tag{8a}$$

donde W es la densidad de energía del campo de radiación en la vecindad inmediata de la superficie reflectora.

Supongamos ahora que Φ es el flujo de radiación incidente, es decir, Φ es la cantidad de energía que fluye al espejo por unidad de tiempo y por unidad de área perpendicular a la dirección de incidencia. Si, análogamente, designamos por Φ' el flujo de radiación reflejada, debemos tener $\Phi = \Phi'$. En la unidad de tiempo la radiación recorre una distancia c y la densidad de energía W, por lo tanto, debe entonces venir dada por

$$W = \frac{\Phi}{c} + \frac{\Phi'}{c} = \frac{2\Phi}{c}. \tag{8b}$$

donde el primer término da la densidad de energía debida a la radiación incidente, y el segundo término la debida a la radiación reflejada. En consecuencia, el flujo y la presión de radiación están ligados entre sí por

$$P = \frac{2\Phi}{c} \tag{8c}$$

que se obtiene combinando (8a) y (8b).

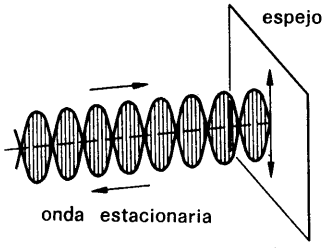


Fig 8A Reflexión de la luz por un espejo (con una superficie perfectamente conductora) de acuerdo con la imagen ondulatoria. Una onda estacionaria se forma en frente del espejo y se inducen corrientes en la superficie. La onda ejerce una fuerza sobre el espejo por la interacción del campo magnético en la onda con las corrientes inducidas. En el caso de incidencia normal, la presión de radiación P viene dada por $P = W$, donde W es la densidad de energía frente del espejo.

9 Examinemos ahora esta situación desde el punto de vista del modelo fotónico. En este modelo hay un flujo de, digamos, N fotones por unidad de tiempo y unidad de área incidentes sobre el espejo. Cada fotón transporta una energía $E = \hbar\omega$ y un impulso $p = \hbar\omega/c$. Después de chocar con el espejo, el impulso de cada fotón se invierte (considérese el espejo como infinitamente pesado, ya que permanece en reposo) y cada fotón, por lo tanto, cede al espejo una cantidad de impulso $2p$: en este modelo la presión de radiación se produce como consecuencia del bombardeo del espejo con fotones.

La presión de radiación P es igual a la cantidad de impulso cedida por unidad de tiempo a la unidad de área del espejo y tenemos así

$$P = 2Np = \frac{2N\hbar\omega}{c} \tag{9a}$$

Por otra parte, el flujo de energía Φ viene dado simplemente por

$$\Phi = N\hbar\omega \tag{9b}$$

y la densidad de energía (puesto que cada fotón se mueve con la velocidad de la luz) es

$$W = \frac{2N\hbar\omega}{c} \tag{9c}$$

Si combinamos las fórmulas (9a)-(9c), volvemos de nuevo a las relaciones (8a)-(8-c), lo que significa que en el caso considerado el modelo fotónico es compatible con el modelo ondulatorio.

10 Consideremos ahora la siguiente situación: un foco luminoso se encuentra en reposo en el laboratorio. Emite fotones de frecuencia ω y estos fotones inciden perpendicularmente sobre un espejo perfecto que se aleja del foco con una velocidad v *pequeña*. Supondremos que la masa M del espejo es muy grande. (Admitimos que v es pequeña y M grande para poder discutir el problema sin tener en cuenta correcciones relativistas.)

Desde el punto de vista del modelo fotónico, veamos qué ocurre cuando un solo fotón choca con el espejo. Antes de la colisión, el fotón tiene una energía E y un impulso $p = E/c$, y después de que aquélla ha ocurrido el fotón tiene una energía

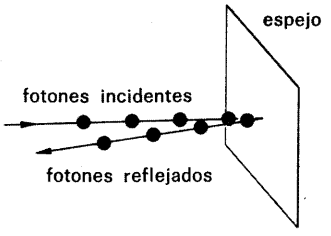


Fig. 9.1 Reflexión de la luz por un espejo según la imagen corpuscular. La presión de radiación es el resultado de la colisión de los fotones con el espejo, los cuales, al chocar, invierten sus impulsos (en el caso de incidencia normal). La relación entre presión de radiación y densidad de energía es la misma que en la teoría ondulatoria. (Véase Fig. 8A.)

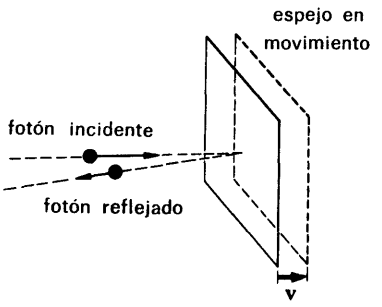


Fig. 10A Las leyes que rigen las colisiones elásticas predicen que la energía E' del fotón reflejado será menor que la energía E del fotón incidente, si el espejo se aparta del foco luminoso. De las relaciones $E = h\omega$ y $E' = h\omega$ podemos deducir al desplazamiento de la frecuencia. Suponiendo que el espejo tiene masa infinita, obtenemos el mismo resultado que en el modelo ondulatorio. (Véase fig. 12A.)

E' y un impulso $p' = E'/c$. Las condiciones de conservación de la energía y del impulso nos dicen que

$$p + Mv = -p' + Mv' \qquad \text{(impulso)} \qquad (10a)$$

$$E + \tfrac{1}{2}Mv^2 = E' + \tfrac{1}{2}Mv'^2 \qquad \text{(energía)} \qquad (10b)$$

Se ha tenido aquí en cuenta el hecho de que el espejo puede tener una velocidad (ligeramente) diferente v' después de la colisión: sin embargo, la dirección de la velocidad no queda modificada. El fotón reflejado se moverá en sentido opuesto, y de aquí el término $-p'$ en (10a).

Sea $\omega' = E'/\hbar$ la frecuencia del fotón reflejado. Podemos describir las ecuaciones (10a) y (10b) también en la forma

$$\frac{\hbar\omega}{c} + Mv = -\frac{\hbar\omega'}{c} + Mv' \qquad \text{(impulso)} \qquad (10c)$$

$$\hbar\omega + \tfrac{1}{2}Mv^2 = \hbar\omega' + \tfrac{1}{2}Mv'^2 \qquad \text{(energía)} \qquad (10d)$$

Eliminando v' entre estas dos ecuaciones, obtendremos

$$\hbar(\omega - \omega') = \left(\frac{v}{c}\right)\hbar(\omega + \omega') + \frac{1}{2M}\left(\frac{\hbar}{c}\right)^2(\omega + \omega')^2 \qquad (10e)$$

Consideremos el caso límite de un espejo infinitamente pesado, con lo que el segundo término del segundo miembro de (10e) desaparece y se obtiene

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)\Big/\left(1 + \frac{v}{c}\right) \qquad (10f)$$

Puesto que hemos admitido que el cociente v/c es pequeño, podemos desarrollar (10f) en potencias de v/c, y conservando solamente los términos lineales obtenemos para la frecuencia reflejada la expresión aproximada

$$\omega' \cong \omega\left(1 - \frac{2v}{c}\right) \qquad (10g)$$

11 Veamos también cuál es la intensidad de la radiación reflejada. Con este fin, imaginamos que el observador se encuentra en un plano fijo en el laboratorio y paralelo al del espejo. Sea N el flujo de fotones por unidad de tiempo a través de la

unidad de área de este plano hacia el espejo y sea N' el de los fotones que vuelven por unidad de tiempo y unidad de área. Supondremos que el foco luminoso tiene una extensión lateral grande y que todos los fotones se mueven en una dirección estrictamente perpendicular a este plano. Afirmamos que, en estas condiciones,

$$N' = N\left(1 - \frac{2v}{c}\right) \tag{11a}$$

Para probarlo razonaremos como sigue: Admitamos que los fotones incidentes que atraviesan una unidad de área del plano de observación se encuentran igualmente espaciados en el tiempo. El intervalo entre el paso de dos fotones consecutivos es así $1/N$. Sea t el instante en que vuelve un fotón dado: el *próximo* fotón debe, sin embargo, recorrer una distancia mayor, puesto que el espejo se ha movido entretanto, desplazándose una longitud v/N, y dicho fotón regresará en el instante $t + 1/N + 2(v/c)/N$. El espaciado en el tiempo entre los fotones que vuelven, es, por lo tanto, $1/N' = (1/N)(1 + 2v/c)$ que, para v/c pequeño, conduce a la expresión aproximada (11a).

Ahora bien, la *intensidad* de los haces de fotones, es decir, el flujo de energía por unidad de área por unidad de tiempo, viene dado por $\Phi = \hbar\omega N$ para el haz incidente y por $\Phi' = \hbar\omega' N'$ para el haz reflejado y llegamos así a la conclusión de que las intensidades están ligadas por la fórmula (aproximada)

$$\Phi' = \Phi\left(1 - \frac{4v}{c}\right) \tag{11b}$$

Hemos sido conducidos así a dos resultados interesantes: la frecuencia del fotón reflejado difiere de la del incidente de acuerdo con (10g), y la intensidad Φ' del haz reflejado está ligada con la intensidad Φ del incidente por (11b). ¿Podemos obtener los mismos resultados mediante la teoría electromagnética clásica? *

12 Tomando como base la teoría ondulatoria, el razonamiento es el siguiente: para un observador en reposo en el laboratorio la luz reflejada parece proceder de un "foco detrás del espejo", es decir, de la imagen especular del foco luminoso. Esta imagen se mueve con velocidad v respecto del espejo y

* Claro que podemos. Este juego no es realmente necesario, pero es instructivo. Otra manera de discutir problemas de este tipo consiste en pasar al sistema de referencia del espejo para volver luego al de partida.

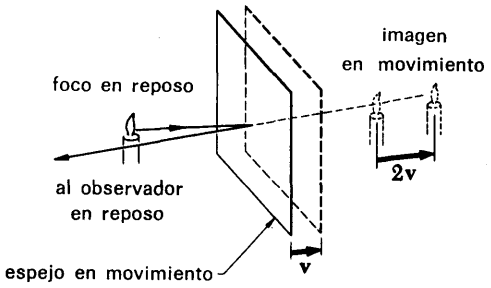


Fig. 12A La luz procedente de un foco en reposo y reflejada por un espejo en movimiento parece proceder de un foco asimismo en movimiento: la imagen se mueve con una velocidad doble de la del espejo. De acuerdo con esto, la teoría ondulatoria predice que la frecuencia de la luz reflejada experimentará el desplazamiento Doppler. (Para simplificar, suponemos que, en la figura, el foco es una candela monocromática.)

éste a su vez lo hace con una velocidad v respecto del observador estacionario. Dado que v es pequeña, podemos emplear la ley no relativista de adición de velocidades y llegamos a la conclusión de que la imagen del foco luminoso se aleja del observador con la velocidad $2v$. La frecuencia debe experimentar, por lo tanto, el desplazamiento Doppler, y la frecuencia reflejada ω' vendrá dada (en la aproximación no-relativista) por $\omega' = \omega(1 - 2v/c)$, lo que concuerda con (10g).

13 Pasemos a considerar la intensidad. En el volumen II de esta serie * se discutieron las leyes de transformación de los campos electromagnéticos cuando se aplican transformaciones de Lorentz. Sean E y B las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda en el sistema de referencia en el que el foco se encuentra en reposo. Los campos E y B son perpendiculares a la dirección de propagación. Designemos las correspondientes amplitudes en el sistema en el cual el foco se aleja del observador con velocidad v' por E' y B'. Para una onda plana polarizada linealmente se tiene $E = B$ y $E' = B'$. Las leyes de transformación dicen entonces que entre las amplitudes E' y E existe la relación

$$E' = E\sqrt{\frac{c - v'}{c + v'}} \tag{13a}$$

—La intensidad (es decir, el flujo de energía) es en este caso proporcional al cuadrado de la amplitud, y según esto tenemos

$$\Phi' = \Phi\left(\frac{c - v'}{c + v'}\right) \tag{13b}$$

donde Φ es la intensidad en el sistema de reposo del foco y Φ' es la intensidad en el sistema de referencia en el cual el foco se aleja del observador con velocidad v'. Si hacemos ahora $v' = 2v$ y desarrollamos el segundo miembro de (13b) en potencias de v/c, suponiendo que esta cantidad es pequeña, encontramos de nuevo la expresión (11b) en la aproximación lineal.

Vemos, pues, que el modelo corpuscular conduce a conclusiones idénticas a las que se pueden deducir del modelo ondulatorio, es decir, de la teoría electromagnética clásica.

* Berkeley Physics Course, Vol. II, *Electricidad y Magnetismo*, Cap. 6, Sec. 7. (Editorial Reverté, S. A., Barcelona)

14 Finalmente, haremos notar que es posible explicar el flujo neto de energía a través del "plano de observación" hacia el espejo: dado que la radiación reflejada tiene intensidad menor que la radiación incidente, existirá un flujo neto no nulo. ¿Dónde va a parar esta energía? Dado que el espejo se mueve, la presión de radiación realizará un trabajo: este trabajo explica la *mitad* del flujo neto. La otra mitad se emplea en formar el campo electromagnético en el espacio comprendido entre el espejo y el plano de observación: dado que el volumen de este espacio aumenta constantemente, sin que varíe la densidad de energía, hay que proporcionar energía a velocidad constante. En el modelo fotónico diríamos más bien que el número de fotones en tránsito entre el espejo y el plano de observación aumenta uniformemente, dado que aumenta la distancia. Convendría que el lector efectuara en detalle los cálculos muy simples indicados para convencerse de que el flujo de energía queda efectivamente compensado.

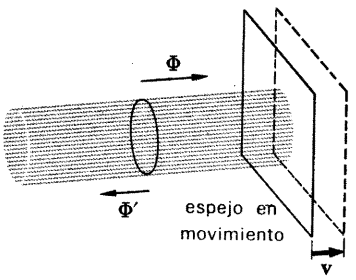


Fig. 14A La intensidad, es decir, el flujo de energía por unidad de área por unidad de tiempo, de la luz reflejada por un espejo que se aleja del foco y del observador es menor que la intensidad incidente. La presión de radiación realiza un trabajo sobre el espejo, y el volumen ocupado por la energía de radiación aumenta.

Tanto el modelo corpuscular como el ondulatorio explican correctamente el balance energético.

15 Examinemos a continuación un ejemplo que nos enseña la necesidad de proceder con precaución. Un haz de luz sumamente monocromático de frecuencia ω_0 (como el que puede obtenerse utilizando un *laser* como foco luminoso) incide perpendicularmente sobre un espejo que vibra con la frecuencia ω_m en la dirección del haz. Se trata de hallar la frecuencia de la luz reflejada.

Tomando como base un modelo corpuscular más bien ingenuo, cabría razonar como sigue: si el fotón choca con el espejo en un instante en el que la velocidad de éste es v, apartándose del foco, el fotón reflejado tendrá una frecuencia $\omega = \omega_0(1 - 2v/c)$, de acuerdo con nuestra discusión anterior. Los fotones llegan al espejo al azar y, por consiguiente, encontraremos un *continuo* de frecuencias que van de $\omega_0(1 - 2v_0/c)$ a $\omega_0(1 + 2v_0/c)$ en la luz reflejada: la distribución espectral de la luz, que inicialmente era casi monocromática, se ensanchará. En la fórmula que precede v_0 es la velocidad máxima del espejo.

16 Tomando como base el modelo ondulatorio clásico llegamos a una conclusión diferente. La luz reflejada es el producto de dos procesos periódicos y, por consiguiente, esperamos que las frecuencias observadas en el haz reflejado serán *combinaciones de frecuencias* formadas a partir de las dos frecuencias ω_0 y ω_m. Un estudio cuidadoso de este problema basado en la teoría electromagnética clásica, prueba que las frecuencias que

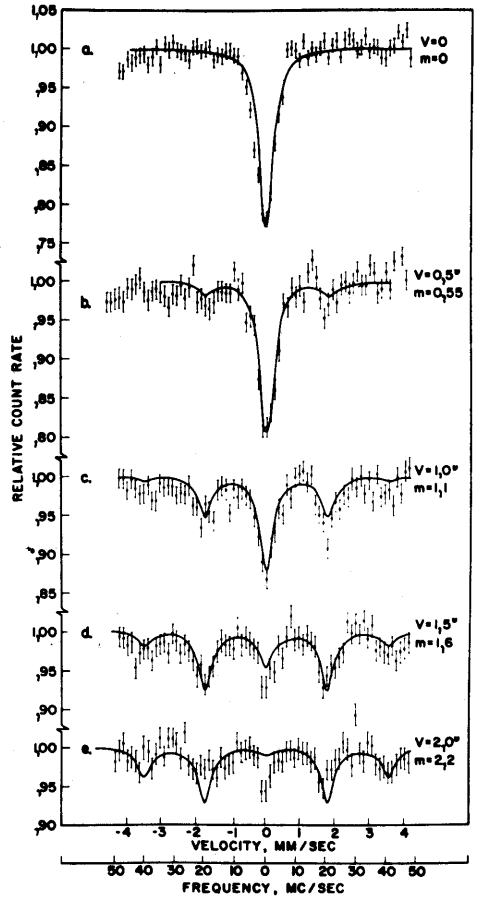


Fig. 16A Gráficos que representan el espectro de frecuencias de los rayos gamma emitidos por un foco en movimiento vibratorio constituido por núcleos Fe^{57} excitados. Las diferentes curvas corresponden a amplitudes de oscilación diferentes, para la misma frecuencia vibratoria de 20 Hz. Las depresiones en las curvas indican las rayas espectrales emitidas. Como vemos, se tienen rayas en la frecuencia central y a ± 20 Hz y ± 40 Hz de la frecuencia central.

Las curvas muestran, en realidad, la velocidad de transmisión de rayos gamma por un absorbente en movimiento uniforme, que contiene núcleos Fe^{57} en el estado fundamental, en función de la velocidad del absorbente. Con el foco en reposo se tiene una fuerte absorción para velocidad cero. Cuando el foco oscila, se presenta una absorción fuerte para aquellas velocidades tales que las rayas emitidas y afectadas del corrimiento Doppler coinciden con la raya de resonancia en el Fe^{57}.

Figura tomada de S. L. Ruby y D. I. Bolef, "Acoustically modulated γ rays from Fe^{57}", *Physical Review Letters* **5**, 5 (1960). (Cedida por *Physical Review Letters*.)

cabe esperar en la luz reflejada formarán un conjunto discreto de la forma $\omega = \omega_0 + n\omega_m$, donde n es un entero cualquiera (positivo, negativo o cero). Las mayores *intensidades* asociadas con estas diferentes frecuencias serán, en un caso físico real en el que la velocidad del espejo es pequeña comparada con c, las correspondientes a pequeños valores de n.

Espera el autor que este resultado parezca plausible al lector. No estudiaremos el caso general aquí, pero podemos aumentar la credibilidad de nuestra afirmación considerando un caso particular. Supongamos que ω_0 es, en efecto, un múltiplo entero de ω_m. En este caso, todo el proceso que da lugar al haz reflejado es estrictamente periódico, con período $2\pi/\omega_m$. Transcurrido el tiempo $2\pi/\omega_m$, todo se repite de nuevo. Esto implica, evidentemente, que el campo eléctrico observado en el haz reflejado debe ser también una función periódica del tiempo de período $2\pi/\omega_m$. Las frecuencias observadas en dicho haz deberán ser, por lo tanto, múltiples enteros de la frecuencia ω_m, lo que concuerda con la afirmación de que las frecuencias son de la forma $\omega = \omega_0 + n\omega_m$. Es ciertamente plausible que las intensidades asociadas con las varias frecuencias son particularmente grandes para frecuencias en la vecindad de la frecuencia ω_0. (Para verlo, considérese qué debe suceder en el límite cuando la amplitud tiende a cero.) En cualquier caso, es claro que no podemos esperar observar un *continuo* de frecuencias, como predice el modelo corpuscular ingenuo.

Las frecuencias predichas por la teoría ondulatoria clásica corresponden a lo que realmente se observa. Experimentos de este tipo se han llevado a cabo en condiciones en las que vibra el propio foco luminoso. En uno de ellos, realizado por Ruby y Bolef, el "foco luminoso" consistía en núcleos Fe^{57}, que emiten radiación gamma, situados sobre la superficie de un cristal de cuarzo oscilante. Varias de las frecuencias predichas se observaron en este experimento, como muestra la fig 16A.

17 La absoluta contradicción entre las predicciones de la teoría ondulatoria y de la teoría corpuscular puede solventarse observando que nuestra teoría corpuscular era, en este caso, excesivamente simple. Supusimos que la reflexión tiene lugar *súbitamente*, como si el fotón fuese una *partícula puntual*, sin extensión espacial alguna. Esta hipótesis no está justificada: el tren de ondas tiene una longitud no nula, inversamente proporcional a la precisión con que se define la frecuencia. Podemos estimar fácilmente dicha longitud apoyándonos en nuestra discusión de la Sec. 23, Cap. 3, acerca de la relación entre

la indeterminación $\Delta\omega_0$ de la frecuencia y la duración τ del proceso de emisión. Llegamos allí a la conclusión de que

$$\tau \cong \frac{1}{\Delta\omega_0} \tag{17a}$$

La longitud L del tren de ondas (en el espacio) es entonces

$$L = c\tau \cong \frac{c}{\Delta\omega_0} \tag{17b}$$

y vemos que si la frecuencia está muy bien definida, es con toda certeza incorrecto el considerar el fotón como una partícula puntual.

Podemos describir también la situación como sigue: supongamos que $\omega_m \gg \Delta\omega_0$. El tiempo que el fotón "pasa" en el espejo vibrante es entonces mayor que el período de oscilación del espejo, y es claro que no cabe imaginar que el fotón es reflejado por el mismo en un instante en que el espejo tiene una velocidad determinada v. La reflexión ocurre durante un intervalo de tiempo en el que el espejo tiene tiempo de efectuar varias oscilaciones completas.

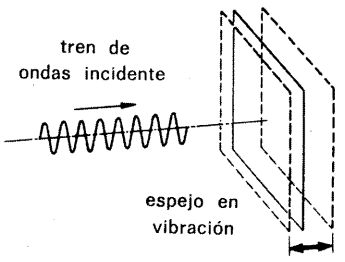


Fig. 17A No es correcto el describir la interacción de un fotón con un espejo animado de movimiento vibratorio como si el fotón chocase con el espejo en un determinado instante: el fotón no es una partícula puntual. En este caso, el modelo ondulatorio es más apropiado. La longitud del tren de ondas, y por consiguiente la duración del proceso de colisión, es inversamente proporcional a la precisión con que se define la frecuencia del fotón. Un fotón estrictamente monocromático tiene una longitud infinita. Si la frecuencia de vibración del espejo es ω_m y la frecuencia de la luz incidente es ω_0, las frecuencias que se encuentran en la luz reflejada son de la forma $(\omega_0 + n\omega_m)$, donde n es un entero cualquiera.

Efecto Compton, radiación de frenado; creación y aniquilación de pares

18 Pasemos ahora a analizar un experimento en el que pueden estudiarse la energía y el impulso de un fotón, a saber, el experimento de A. H. Compton en el que se observa la colisión de un fotón con un electrón. La figura 18A presenta esquemáticamente esta colisión.

Un fotón de energía ω choca con un electrón, de masa m, inicialmente en reposo. Después de la colisión aparece un fotón de frecuencia ω' en una dirección que forma el ángulo θ con la de incidencia. El electrón retrocede en el choque con una energía E_e y en una dirección que forma el ángulo φ respecto de la de incidencia.

La energía y el impulso pueden sólo conservarse si todo el proceso tiene lugar en un plano, y en este plano (por ejemplo, el plano de la figura) las leyes de conservación nos dicen que

$$\hbar\omega + mc^2 - \hbar\omega' = E_e \qquad \text{(energía)} \tag{18a}$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{p}_e \qquad \text{(impulso)} \tag{18b}$$

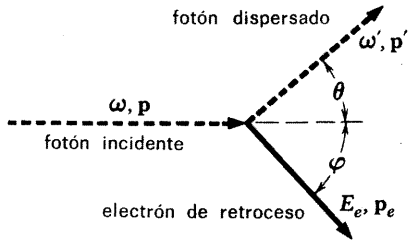


Fig. 18A Para ilustrar la cinemática de la dispersión por efecto Compton, en la que un fotón choca con un electrón inicialmente en reposo. Las leyes de conservación de la energía y del impulso implican una frecuencia ω' y un impulso $\mathbf{p}'$ únicos del fotón dispersado como función del ángulo de dispersión θ.

Si ahora restamos el cuadrado de la segunda ecuación del cuadrado de la primera dividida por c, obtenemos

$$\frac{1}{c^2}(\hbar\omega + mc^2 - \hbar\omega')^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = \frac{E_e^2}{c^2} - p_e^2 = m^2c^2 \qquad (18c)$$

Dado que

$$p = \frac{\hbar\omega}{c}; \quad p' = \frac{\hbar\omega'}{c} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = pp' \cos\theta \qquad (18d)$$

podemos despejar de (18c) ω', con lo que resulta

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + (\hbar\omega/mc^2)(1 - \cos\theta)} \qquad (18e)$$

19 Si introducimos las longitudes de onda $\lambda = 2\pi c/\omega$, $\lambda' = 2\pi c/\omega'$, podemos escribir (18e) en esta otra forma:

$$\lambda' = \lambda + 2\pi(\hbar/mc)(1 - \cos\theta) \qquad (19a)$$

La cantidad $2\pi(\hbar/mc) = h/mc$ se conoce con el nombre de *longitud de onda de Compton* de la partícula, en este caso la longitud de onda de Compton del electrón:

$$h/mc = 2{,}43 \times 10^{-10} \text{ cm} = 2{,}43 \times 10^{-2} \text{ Å}.$$

La longitud de onda de la radiación dispersada es mayor que la de la radiación incidente o, lo que es lo mismo, la frecuencia de la radiación dispersada es menor que la de la radiación incidente: así debe ser, puesto que una cierta cantidad de energía se cede al electrón. Del examen de (18e) se deduce que la variación relativa de frecuencia es muy pequeña si la cantidad $(\hbar\omega/mc^2) \cong (\hbar\omega)/(0{,}5 \text{ MeV})$ es pequeña: es necesario, por consiguiente, acudir a energías típicas de los rayos X duros antes de que podamos observar un efecto apreciable. Podríamos haber llegado a la misma conclusión examinando la ecuación (19a): la variación relativa de longitud de onda es pequeña en tanto la longitud de onda de Compton sea pequeña comparada con la de la onda incidente.

20 El fenómeno de dispersión que acabamos de discutir fue observado experimentalmente por A. H. Compton en 1922 *.

* A. H. Compton, "The Spectrum of Scattered X-rays", *Physical Review* **22**, 409 (1923). Para el análisis teórico de Compton, véase "A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements", *The Physical Review* **21**, 483 (1923).

Parece ser que se vio impulsado a realizar su experimento por una observación previa debida a Barkla según la cual cuando los rayos X duros son dispersados en direcciones que forman ángulos grandes con la de incidencia por un material sólido, los rayos dispersos constan, al parecer, de dos componentes: una componente que tiene propiedades idénticas a las de la radiación incidente, y otra componente que es distinta, manifestándose la diferencia entre las dos por una diferencia en la rapidez con que la radiación es absorbida por los medios interpuestos. Tomando como base el modelo ondulatorio, podemos comprender inmediatamente la presencia de la primera componente. Las ondas electromagnéticas incidentes, es decir, los rayos X incidentes, obligan a los electrones ligados en los átomos a oscilar con una frecuencia ω que es la misma que la de la onda, y estos electrones en oscilación emitirán entonces radiación electromagnética de frecuencia ω en todas direcciones. En este proceso, el estado del átomo se perturba tan sólo temporalmente y los electrones no son expulsados. Cabe esperar que son precisamente los electrones más *fuertemente* ligados los que dan lugar a este tipo de dispersión.

Sin embargo, algunos electrones en el átomo están vinculados al mismo muy débilmente, con energías de enlace del orden de 10-100 eV y cabe concebir que dichos electrones se expulsen en el proceso de dispersión. En el experimento de Compton, rayos X de un tubo de rayos X con un blanco de molibdeno, que trabajaba a una tensión de unos 50000 V, eran dispersados por grafito formando ángulos diversos. La longitud de onda de la radiación incidente era la llamada radiación-*K* del Mo, igual a 0,7 Å, que corresponde a una energía de unos 20000 eV. Esta energía es muy grande comparada con la energía de enlace de los electrones más exteriores en el átomo de carbono: de hecho es grande comparada con las energías de enlace de todos los electrones. En estas circunstancias, cabe esperar que el proceso de dispersión se desarrollará de manera muy parecida a como ocurre en la situación en la que los electrones no están ligados, con lo que será aplicable el análisis de la Sec. 18. Compton, en efecto, halló que la longitud de onda de la radiación dispersada contenía una segunda componente cuya longitud de onda λ dependía del ángulo de dispersión de acuerdo con la fórmula (19a). (Véase fig. (20A.)

En experimentos posteriores realizados por Compton y otros investigadores, se detectó también el electrón de retroceso y fue posible probar que éste y el fotón dispersado están

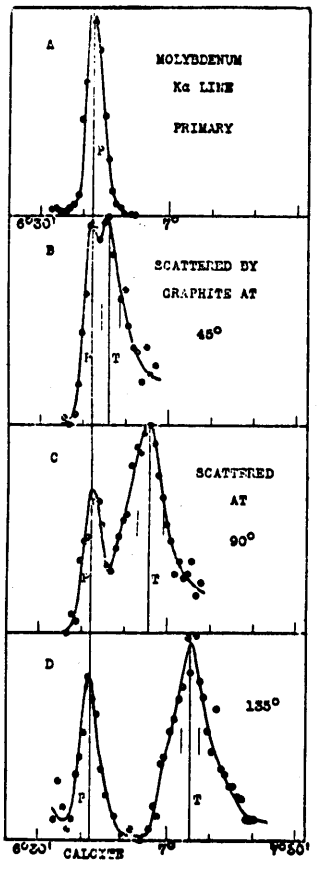


Fig. 20A Gráfico tomado del artículo de Compton (*Phys. Rev.* **22**, 409 (1923)) que muestra el espectro de la radiación dispersada para tres ángulos de dispersión diferentes. El gráfico A presenta la raya de la radiación incidente, de longitud de onda 0,71 Å. Las abscisas son proporcionales a la longitud de onda, y las ordenadas constituyen una medida de la intensidad. Los picos a la izquierda en los otros tres gráficos muestran qué parte de la radiación dispersada tiene la misma longitud de onda que la incidente. Los picos a la derecha corresponden a la radiación dispersada de Compton, con una frecuencia desplazada. El desplazamiento de la frecuencia aumenta con el ángulo de dispersión de acuerdo con la fórmula de Compton. (Cedida por *The Physical Review*.)

asociados entre sí y que la energía y el impulso se conservan en el proceso *.

21 Valoremos ahora la significación de las observaciones en relación con el efecto Compton. Ante todo, cabe hacer notar que un paquete clásico de radiación electromagnética debiera ser también dispersado por un electrón, y que el fenómeno de dispersión como a tal no requiere, por lo tanto, la mecánica cuántica para ser explicado. Sin embargo, la relación específica (18e) entre la frecuencia de la radiación dispersada y el ángulo de dispersión *sí* depende de la constante de Planck, y precisamente de una manera que presta un firme soporte al modelo fotónico. Debemos subrayar que hemos deducido la fórmula (18e) suponiendo que se dispersa *todo* un fotón, y no un tercio, o un quinto de fotón.: si sólo se dispersara un quinto de fotón, las leyes de conservación darían un resultado bien diferente. La importancia del efecto Compton consiste, por consiguiente, en que los resultados de la observación apoyan aún más la universalidad de la relación $E = \hbar\omega$. Los fotones no pueden "partirse" en el experimento de Compton; un fotón de frecuencia ω *siempre* transporta la energía $\hbar\omega$ y el impulso $\hbar\omega/c$.

En experimentos de óptica con la célula fotoeléctrica (en la región visible o ultravioleta) podemos comprobar la relación $E = \hbar\omega$ únicamente en un intervalo de frecuencia muy limitado. El estudio del efecto Compton extiende este intervalo hasta la región de los rayos X duros. Naturalmente, si creemos firmemente en la relatividad especial, como efectivamente creemos, llegamos a la conclusión de que la relación es completamente general como hemos afirmado al principio de este capítulo. Con todo, cualquier experimento que compruebe directamente esta relación en un nuevo dominio de frecuencias es valioso: comprobamos así la coherencia de nuestras ideas y, entre otras cosas, también la propia relatividad especial.

Existen actualmente pruebas abrumadoras en favor de la generalidad de la relación $E = \hbar\omega$. Cabe decir que forma parte integral de la física de hoy. Para seguir estudiando todo lo que implica esta relación, consideremos otros dos fenómenos: la emisión de rayos X en un tubo de rayos X y la aniquilación de un par electrón-positón.

* A. H. Compton y A. W. Simon, "Directed quanta of scattered X-rays", *Physical Review* **26**, 289 (1925). Véase también C. T. R. Wilson "Investigations on X-Rays and β-rays by the Cloud Method", *Proceedings of the Royal Society* (Londres) **104**, 1 (1923).

22 En un tubo de rayos X, representado esquemáticamente en la Fig. 22A, electrones emitidos por un cátodo incandescente (calentado por un filamento) se aceleran en una caída de potencial, V_0, entre el filamento y el *ánodo*. Cuando los electrones chocan con el ánodo (o *blanco*), son detenidos y en virtud de la teoría electromagnética clásica hemos de esperar que esta deceleración irá acompañada de emisión de radiación electromagnética. El primero en detectar la presencia de esta radiación fue W. C. Röntgen, en 1895 *. Los rayos emitidos se conocen con el nombre de rayos X o rayos Röntgen.

La verdadera naturaleza de los rayos fue objeto, al principio, de cierta controversia, pero en los primeros años de este siglo se hizo cada vez más patente que los rayos X son, en efecto, radiación electromagnética. Mediante un ingenioso experimento de dispersión doble, C. G. Barkla fue capaz de probar, en 1904, que los rayos están polarizados transversalmente. El testimonio más concluyente se obtuvo en 1912, cuando W. Friedrich y P. Knipping pudieron probar, siguiendo la sugerencia de M. von Laue, que los rayos X son difractados en los cristales, conforme se mencionó ya en el capítulo 1 **.

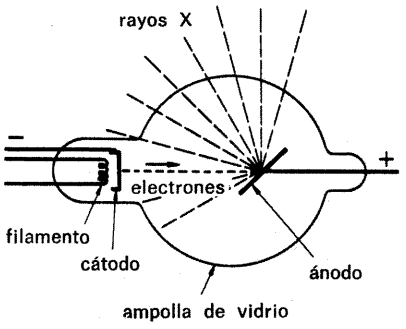


Fig. 22A Figura muy esquemática que representa el funcionamiento de un tubo de rayos X. Electrones emitidos por un cátodo calentado por un filamento son acelerados hacia el ánodo. Los rayos X se emiten cuando los electrones chocan con él. Parte de la radiación es característica del material que forma el ánodo y parte es radiación de frenado.

23 Una vez desarrolladas técnicas que hacen posible el estudio espectroscopio de los rayos X, se ha podido medir la intensidad de los rayos emitidos en función de la longitud de onda en una amplia variedad de condiciones experimentales. Un diagrama típico de la intensidad en función de la longitud de onda para tres substancias diferentes, pero la misma tensión V_0, se presenta en la Fig. 23A. Vemos que, superpuestos a un fondo continuo, hay varios "picos" pronunciados, o máximos de intensidad. Se ha hallado que las *posiciones* de estos picos constituyen una propiedad del material del blanco. El fondo continuo, por otra parte, es, para el mismo potencial acelerador, V_0, de la misma forma para todos los materiales. El examen de todos los datos experimentales ha llevado a la conclusión de que existen dos mecanismos diferentes responsables de la emisión de rayos X. Los picos pronunciados son análogos a la luz emitida por átomos que experimentan colisiones:

* W. C. Röntgen, "Uber eine neue Art von Strahlen", *Sitzungsberichte Med. Phys. Ges. Wurzburg*, 1895, p. 137; 1896, p. 11. Estos artículos han sido traducidos al inglés: W. C. Röntgen, "On a New Kind of Rays", *Science* 3, 227 (1896); "A New Form of Radiation", *Science* 3, 726 (1896).

** C. G. Barkla, "Polarized Röntgen Radiation", *Phil. Trans. Roy. Soc.* 204, 467 (1905). C. G. Barkla, "Polarization in Secondary Röntgen Radiation", *Proc. Roy. Soc.* (Londres) 77, 247 (1906). (El último artículo se refiere a experimentos de dispersión doble.)

W. Friedrich, P. Knipping y M. von Laue, *Annalen der Physik* 41, 971 (1913).

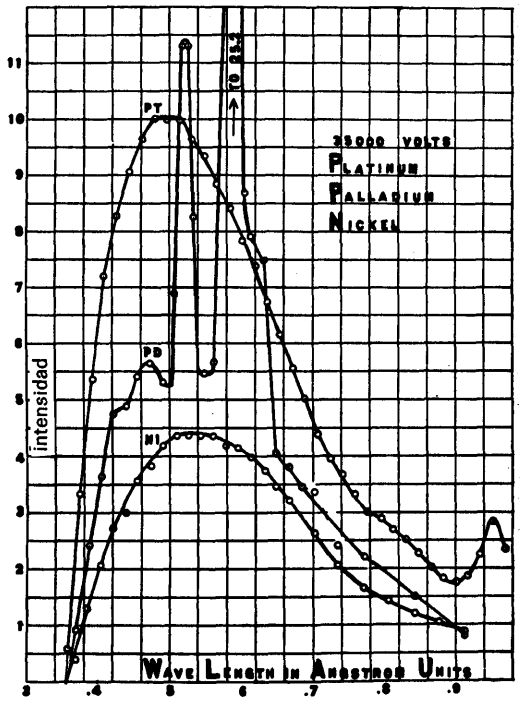


Fig. 23A Gráfico que representa la intensidad de los rayos X emitidos en función de la longitud de onda para tres substancias diferentes, pero el mismo potencial acelerador $V_0 = 35000$ volts. Los picos pronunciados corresponden a la radiación característica de la substancia. El fondo continuo se debe a la radiación de frenado.

La figura se ha tomado del trabajo de C. T. Ulrey, "An Experimental Investigation of the Energy in the Continuous X-Ray Spectra of Certain Elements", *Physical Review* **11**, 401 (1918). (Cedida por *The Physical Review*.)

esta radiación se conoce con el nombre de radiación característica de la substancia y es emitida por un *átomo* que ha sido excitado en el choque con uno de los electrones incidentes de alta energía. El fondo continuo, por otra parte, es una emisión debida al *electrón* que pierde velocidad en el blanco. Esta radiación se conoce con el nombre de radiación de frenado (en alemán *Bremsstrahlung*). La forma alemana Bremsstrahlung, que literalmente significa "radiación de frenado", ha llegado a incorporarse a varios idiomas, en particular al inglés.

Se ha encontrado, además, experimentalmente, que para un potencial acelerador dado V_0 *no hay* radiación alguna con longitud de onda menor que un cierto valor mínimo, $\lambda_{\min}$, que depende del potencial V_0, pero no de la substancia del blanco: esto puede verse en la fig. 23A.

24 Veamos cómo podemos explicarnos teóricamente esta última circunstancia.

En primer lugar, observemos que, de acuerdo con la teoría electromagnética clásica, un electrón en movimiento uniforme no puede emitir radiación. A la misma conclusión podemos llegar, como sigue, partiendo de la teoría fotónica. Consideremos el sistema de referencia en que el electrón se encuentra en reposo *antes* de cualquier emisión posible: en este sistema, la energía total es mc^2. *Si* pudiera tener lugar la emisión de uno o más fotones, éstos llevarían consigo una cierta cantidad de energía y la energía final total después de la emisión sería mayor que mc^2, lo que viola la conservación de la energía. Por lo tanto, no puede producirse emisión.

Sin embargo, la situación es diferente cuando el electrón atraviesa el intenso campo eléctrico de un núcleo en el blanco. Es entonces posible que el electrón transfiera una cierta cantidad de energía y de impulso al núcleo y las ecuaciones de conservación de una y otro pueden cumplirse. Veamos qué se obtiene procediendo así. El núcleo, de masa M, se encuentra inicialmente en reposo (en el sistema del laboratorio) y el electrón, de masa m e impulso inicial $\mathbf{p}_i$, choca con él. Después de la colisión el electrón tiene un impulso $\mathbf{p}_f$, y el núcleo, un impulso $\mathbf{p}_n$. Además, aparece un fotón de impulso $\mathbf{p}$ y frecuencia $\omega = pc/\hbar$. Las ecuaciones de conservación nos dicen que

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f + \mathbf{p}_n + \mathbf{p} \qquad \text{(impulso)} \qquad (24a)$$

$$E_i + Mc^2 = E_f + E_n + \hbar\omega \qquad \text{(energía)} \qquad (24b)$$

donde E_i y E_f son las energías inicial y final, respectivamente, del electrón, y E_n es la energía final del núcleo.

Tomadas juntas, estas ecuaciones nos dan cuatro ecuaciones de conservación. Sin embargo, las variables que caracterizan la situación final son nueve, a saber, las nueve componentes de los tres vectores $\mathbf{p}_f$, $\mathbf{p}_n$ y $\mathbf{p}$. La investigación detallada del intervalo en que pueden variar estos vectores es un tanto complicada y no intentaremos desarrollarla aquí. Cabe probar que, para una dirección cualquiera dada, el fotón puede ser emitido con una energía que varía desde cero hasta un cierto máximo. Este máximo se presenta realmente cuando tanto el electrón como el núcleo tienen la misma velocidad, $\mathbf{v}$ por ejemplo, después de la colisión: que así debe ser es inmediatamente obvio si consideramos el problema en el sistema del centro de masa. Escribamos de nuevo las ecuaciones de conservación para el caso en que, efectivamente, las velocidades finales del electrón y del núcleo son iguales:

$$\mathbf{p}_i - \mathbf{p} = \frac{(M+m)\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{24c}$$

$$E_i + Mc^2 - cp = \frac{(M+m)c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{24d}$$

Multiplicando la primera ecuación por c y restando el cuadrado del resultado del cuadrado de la segunda ecuación, obtenemos

$$\hbar\omega = pc = \frac{E_i - mc^2}{1 + (E_i - p_i c\cos\theta)/(Mc^2)} \tag{24e}$$

donde θ es el ángulo formado por las direcciones del fotón emitido y del electrón incidente. La fórmula anterior nos da así la energía *máxima* del fotón para el ángulo θ. Obsérvese que es aproximadamente igual a $(E_i - mc^2)$, que es la energía cinética del electrón incidente, la cual a su vez es igual a eV_0. El segundo término del denominador del segundo miembro de (24e) es muy pequeño para tubos de rayos X dado que la constante $Mc^2 \sim 940\ A$ MeV, para un núcleo de número másico A, es grande comparada con E_i que puede variar entre 1 keV y 100 keV.

25 En el límite en que el núcleo se supone infinitamente pesado, obtenemos así para la longitud de onda mínima $\lambda_{\min}$ la expresión

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{ch}{eV_0} \tag{25a}$$

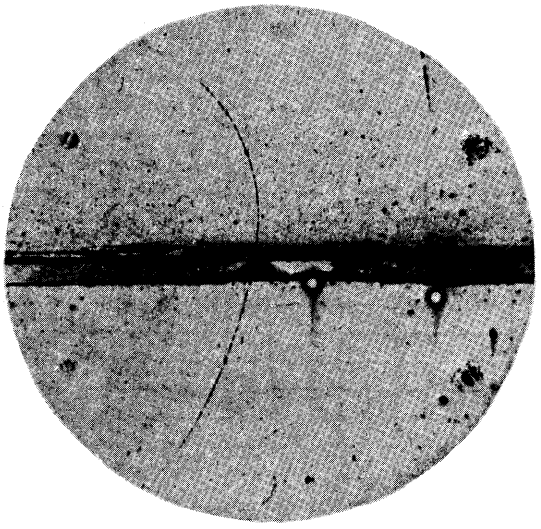


Fig. 26A La fotografía de cámara de niebla en la que el descubrimiento del positón por Anderson fue presentado al mundo. (Tomada de C. D. Anderson, "The Positive Electron", *Physical Review* **43**, 491 (1933).) Un positón de unos 63 MeV de energía atraviesa la placa de plomo horizontal (de 6 mm de grosor) y emerge con una energía de 23 MeV. Las trazas aparecen curvadas porque la cámara estaba colocada en un campo magnético perpendicular al plano de la figura. La calidad de la fotografía es pobre cerca del borde de la cámara, y las partes muy débiles de las trazas cerca del mismo, que indican que el positón atravesó efectivamente la cámara, resultan, por consiguiente, un tanto difíciles de ver.

Para algunas cuestiones interesantes concernientes a esta fotografía, véase el prob. 11 al final del presente capítulo. (Cedida por *The Physical Review.)*

Naturalmente, podríamos haber llegado directamente a esta conclusión: la energía del fotón emitido no puede ser mayor que la energía cinética del electrón incidente, y para un núcleo infinitamente pesado la energía máxima debe presentarse cuando el electrón queda completamente en reposo después de la colisión.

La longitud de onda mínima λ_{min} se conoce con el nombre de *límite cuántico.* Su existencia es una manifestación de los fenómenos cuánticos: la teoría clásica predice que se emitirá radiación con longitudes de onda arbitrariamente pequeñas.

Se han llevado a cabo mediciones muy precisas del límite cuántico en función V_0 * y dichas mediciones conducen a valores asimismo precisos de la constante e/ch (y e/h).

26 Consideremos finalmente la aniquilación de un par electrón-positón. C. D. Anderson fue el primero en observar positones (en 1932) en la radiación cósmica (véase Fig. 26A). Sabemos hoy que en la desintegración de muchas partículas inestables se producen positones, por ejemplo, en la desintegración del isótopo radiactivo del fósforo P^{30}. También se observan positones cuando rayos gamma de muy alta energía atraviesan la materia y, como dijimos en el capítulo 1, este fenómeno lo interpretamos en el sentido de que un rayo gamma puede crear un par electrón-positón en el campo eléctrico de un núcleo. Este proceso se conoce con el nombre de producción electromagnética de pares.

Cuando un positón choca, o interactúa, con un electrón, este par de partículas puede *aniquilarse,* lo que significa que las partículas desaparecen y su energía se convierte por completo en radiación electromagnética. Este fenómeno de aniquilación se observa cuando los positones inciden sobre la materia macroscópica. De acuerdo con nuestras presentes ideas, el positón que penetra en el material pierde primero la mayor parte de su energía cinética en colisiones con los átomos del mismo (se modera), aunque algunos positones pueden aniquilarse en una colisión directa con un electrón antes de perder energía. Los positones que han sido moderados, se difunden por el material y finalmente son capturados por los electrones que se encuentran en los átomos. En circunstancias favorables un positón puede formar de hecho, junto con un electrón, un "átomo" parecido al de hidrógeno, "átomo" que se llama posi-

* J. A. Bearden, F. T. Johnson y H. M. Watts, "A New Evaluation of h/e by X-rays", *The Physical Review* **81**, 70 (1951).

tonio. Pero, en cualquier caso, el resultado final de la interacción con los electrones es la aniquilación del par.

Por cuanto sabemos, la masa del positón es igual a la masa del electrón.

27 Examinemos ahora el proceso de aniquilación, que representaremos por la fórmula de reacción

$$e^+ + e^- = n\gamma$$

donde el símbolo γ designa un fotón (un cuanto gamma). Supongamos que el electrón y el positón se encuentran prácticamente en reposo (en el sistema del laboratorio) cuando tiene lugar la reacción y, además, que ésta se produce en el espacio libre, lejos de cualquier otra partícula.

Ante todo obsérvese que deben haber por lo menos dos rayos gamma: $n \geqq 2$, puesto que, de no ser así, no es posible conseguir que se cumplan la conservación de la energía y del impulso. (Si el electrón y el positón se encuentran inicialmente en reposo, el impulso inicial es cero: si solamente se emite *un* fotón, el impulso final *no* será cero.) Supongamos, por lo tanto, que se emiten *dos* fotones. Dado que el impulso inicial es nulo, de aquí se sigue que el impulso final (total) debe ser también cero y los impulsos de los dos fotones son, en consecuencia, iguales y opuestos, lo que significa que sus energías y por lo tanto también sus frecuencias, son iguales. Designemos la frecuencia por ω: la conservación de la energía implica entonces que

$$2\hbar\omega = 2mc^2 \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{h}{mc} \tag{27a}$$

La longitud de onda de los fotones emitidos es así igual a la longitud de onda de Compton del electrón, $h/mc = 0{,}0243$ Å: a esta longitud de onda corresponde la energía en reposo del electrón, $mc^2 = 0{,}511$ MeV *.

Para los positones que han sido moderados y capturados en el material, cabe suponer que la predicción que acabamos de hacer es válida: la presencia de otras partículas en él puede tener un cierto efecto, pero éste debe ser pequeño dado que las energías de enlace atómicas son muy pequeñas comparadas con la energía en reposo del electrón.

* Hay que hacer notar que la cantidad $h/mc = 0{,}00386$ Å se llama también a menudo longitud de onda de Compton.

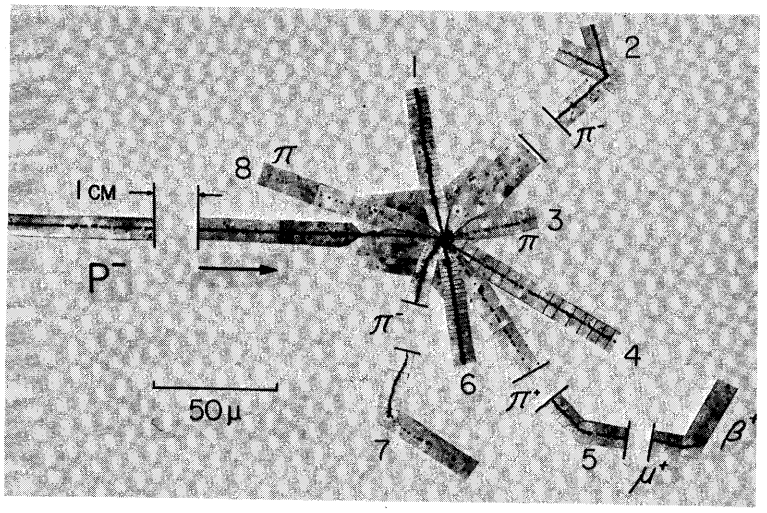
Podemos, por lo tanto, esperar que se formen dos rayos gamma en el proceso de aniquilación. Deben aparecer en sentidos opuestos y sus longitudes de onda han de coincidir con la longitud de onda de Compton del electrón. Se ha encontrado experimentalmente que estas predicciones son correctas en todos sus pormenores: la aniquilación en dos rayos gamma se produce, en efecto *. Además, se ha encontrado que también tiene lugar la aniquilación en tres rayos gamma.

28 Hay un punto que es necesario aclarar. Hemos afirmado que un par electrón-positón no se puede aniquilar originando un fotón *único* en el espacio vacío, puesto que, de lo contrario, no se pueden conservar la energía y el impulso. De aquí se sigue que el proceso inverso, en el cual un solo fotón se transforma de pronto en un par electrón-positón, debe también ser imposible. Por otra parte, dijimos que los pares electrón-positón se crean cuando fotones de alta energía atraviesan la materia macroscópica. La resolución de esta contradicción aparente consiste en hacer notar que este proceso *puede* ocurrir, y de hecho ocurre, en el campo de un núcleo. Una cierta cantidad de energía e impulso se ceden a éste y es entonces posible conseguir que se cumplan las condiciones de conservación.

El proceso inverso del de aniquilación que acabamos de discutir es el proceso en el que dos fotones que chocan producirían un par. Este proceso no ha sido observado realmente nunca, y la razón de que así sea es que no podemos producir haces de fotones de alta energía suficientemente intensos para que el proceso ocurra con una frecuencia observable; sin embargo, creemos firmemente que observaríamos este fenómeno si estuviésemos en condiciones de producir tales haces de fotones. El proceso inverso del de la producción de pares en el campo del núcleo es el proceso en el cual se aniquila un par electrón-positón en el campo del núcleo dando lugar a un fotón, a la vez que el núcleo adquiere la energía y el impulso necesarios para que queden satisfechas las ecuaciones de conservación. Este proceso tiene lugar efectivamente, pero resulta que, en general, el proceso de aniquilación en dos fotones es más probable y, en consecuencia, es el que predomina.

29 Ya que estamos tratando de positones, podemos pararnos a analizar un poco el sentido de lo que entendemos por partícu-

* Véase, por ejemplo, O. Klemperer, "On the Annihilation Radiation of the Positron", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **30**, 347 (1934).



Una estrella de aniquilación en una emulsión fotográfica. Obsérvese que se trata de una fotografía compuesta, en la cual diferentes secciones de emulsión se han pegado juntas de modo que se puedan seguir las trazas de las diferentes partículas. La escala se presenta en la parte inferior a la izquierda, en la que $1\mu = 10^{-3}$ mm. Obsérvese también que se han omitido porciones de cuatro de las trazas a fin de conseguir que la fotografía ocupe un tamaño razonable.

La traza horizontal a la izquierda corresponde al antiprotón incidente. A medida que atraviesa la emulsión pierde energía (y, en consecuencia, se modera). Finalmente es capturado por un núcleo en la emulsión (quizá un núcleo de carbono) y se aniquila junto con uno de los nucleones del núcleo. Se crean unos pocos piones en el proceso (trazas 2, 3, 5, 7 y 8) y el núcleo se rompe en fragmentos. Las trazas 1 y 3 son probablemente protones y la traza 6 es causada por un fragmento pesado, posiblemente un núcleo H^3. La energía cinética total de las partículas visibles (cargadas) más la energía total en reposo de los piones se estima en unos 1,3 GeV. Obsérvese la traza 5 que revela un pión positivo que se desintegra en un neutrino (invisible) y un muón positivo, el cual, a su vez, se desintegra en un positón y dos neutrinos.

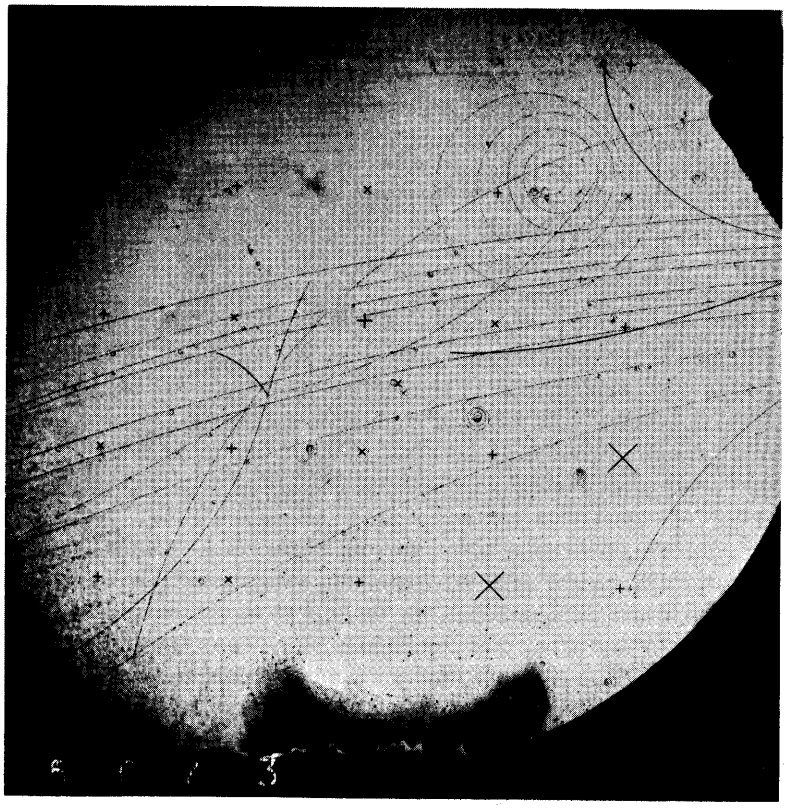
Esta fotografía apareció en un artículo por E. Segrè, "Antinucleons", *Annual Review of Nuclear Science* **8**, 127 (1958), que pasa revista a los primeros trabajos sobre antinucleones. *(Fotografía proporcionada por el profesor E. G. Segrè, Berkeley.)*

las y antipartículas. En su formulación actual, la electrodinámica cuántica es una teoría en la que el electrón y el positón representan un papel completamente simétrico. Éste es un rasgo general de nuestras teorías de las partículas fundamentales: creemos que en correspondencia con cada partícula existe también una antipartícula (algunas partículas, tales como el pión neutro, pueden ser sus propias antipartículas), y se cree que el universo es simétrico (en un cierto sentido) respecto del intercambio de partículas por antipartículas *. Una antipartícula tiene la misma masa, pero la carga opuesta a la de la partícula. Se ha encontrado así experimentalmente que existen antiprotones y antineutrones, ** lo que no deja de complacer desde el punto de vista teórico: ello nos permite mantener nuestras teorías simétricas de la naturaleza.

Es una propiedad fundamental de las partículas y sus antipartículas la de que pueden aniquilarse entre sí, por ejemplo dando lugar a fotones. Sin embargo, ocurre a menudo que la

* Muy recientemente se han llevado a cabo algunos experimentos que parecen indicar que las interacciones *débiles* no son invariantes en la operación de cambiar partículas por antipartículas. Esto implica que mientras las interacciones electromagnética y fuerte podrían obedecer al principio de simetría mencionado, las interacciones débiles no lo hacen. Dado que las interacciones electromagnética y fuerte son las interacciones que predominan en el universo, está quizá justificado el decir que el principio de simetría es *casi* verdadero (pero no del todo).

** Para el descubrimiento del antiprotón véase O. Chamberlain, E. Segrè, C. Wiegand y T. Ypsilantis, "Observation of Antiprotons", *The Physical Review* **100**, 947 (1955).



Fotografía de cámara de burbajas en la que se observa una dispersión, con intercambio de carga, de un antiprotón por un neutrón, seguida de una reacción de aniquilación de un protón y del antineutrón producido en el primer suceso. Véanse las figuras esquemáticas en la página siguiente para identificar las trazas. Los sucesos tienen lugar en una cámara de burbujas de hidrógeno líquido colocada en un campo magnético perpendicular al plano de la figura. (Convendría que el lector intentase determinar hacia dónde está orientado el campo magnético.) Las partículas neutras no dejan trazas visibles, pero sí las dejan las partículas cargadas, y sus trazas aparecen curvadas debido al campo magnético. En la situación representada las partículas positivas giran en el sentido de las agujas de un reloj, mientras que las negativas giran en sentido opuesto.

Resulta, además, que esta fotografía muestra otro suceso interesante, a saber, la desintegración de un pión positivo en un muón positivo y un neutrino, seguida de la desintegración del muón en un positón, un neutrino y un antineutrino. Los neutrinos (y el antineutrino) son neutros y no dejan trazas visibles. *(Fotografía proporcionada por el Dr. P. Schmidt, Berkeley.)*

aniquilación produce otras partículas. Por ejemplo, el sistema protón-antiprotón tiende a aniquilarse en mesones, siendo este proceso más probable que la aniquilación en fotones.

30 El lector puede preguntarse por qué, si realmente las partículas y las antipartículas representan un papel casi por completo simétrico en el universo, las antipartículas no son algo más evidente. ¿Por qué los positones no "se encuentran más frecuentemente", y por qué no se descubrieron antes? Nuestro universo, tal como lo conocemos, no parece encontrarse en un *estado* simétrico, en absoluto: el universo está formado por protones, neutrones, electrones y átomos de hidrógeno, etc., pero *no* de antiprotones, antineutrones, positones o átomos de antihidrógeno. La razón de esta falta de simetría es que el estado simétrico no sería estable frente a la aniquilación: la materia y la antimateria no pueden coexistir pacíficamente en una mezcla íntima. Dado que la Tierra existe, debe consistir

o de materia o de antimateria. Posiblemente no podría existir como mezcla.

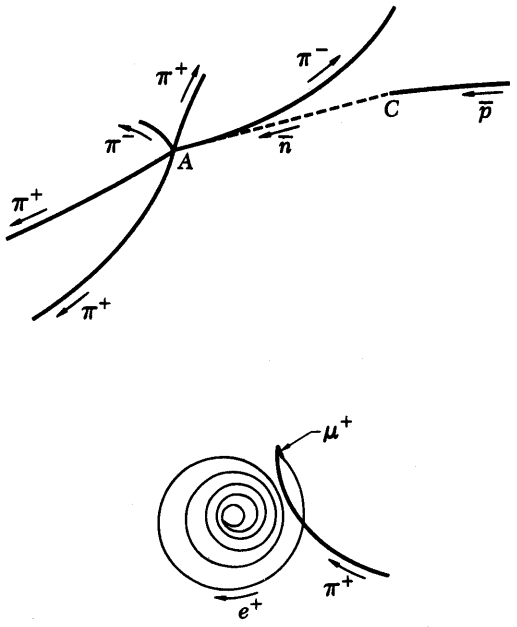
Es una cuestión interesante la de si esta falta de simetría del estado del universo se extiende al universo *entero*. Bien podría ocurrir que existan galaxias constituidas por antimateria: dado que la separación media entre las galaxias es del orden de tres millones de años luz, la aniquilación no puede tener lugar fácilmente. No es posible actualmente responder a esta cuestión, aunque uno pueda sentirse inclinado a creer que no existen antigalaxias. Cómo se formaron las galaxias no lo sabemos, pero si admitimos que se formaron en un proceso de condensación de cierto tipo a partir de "polvo", cuesta comprender cómo una segregación de materia y antimateria pudo haber tenido lugar de forma tal que algunas galaxias consistan en materia, mientras que otras estén formadas de antimateria. Si rechazamos la idea de las antigalaxias, subsiste entonces el misterio de por qué el estado del universo es tan nosimétrico, en el sentido de que predomina un determinado tipo de materia, a pesar del hecho de que las leyes básicas de la física parecen ser casi completamente simétricas.

¿Pueden "dividirse" los fotones?

31 La discusión que precede sugiere una cuestión interesante y muy fundamental: ¿es posible dividir un fotón de frecuencia ω en dos partes tales que cada una transporte una cierta fracción de la energía $\hbar\omega$, pero conservando cada parte la frecuencia ω?

Sabemos que la teoría electromagnética clásica describe con mucha precisión una amplia variedad de experimentos con luz. Hemos dicho también que la relación entre energía e impulso de un "fotón" es algo que puede deducirse dentro del marco de la teoría electromagnética clásica. En estas condiciones, ¿no cabe decir que un fotón es simplemente un paquete de ondas, o un tren de ondas, de radiación regido por las leyes de la teoría electromagnética clásica? Hemos formulado ahora claramente una cuestión de importancia fundamental. Si los fotones se pueden dividir en el sentido arriba indicado, toda la estructura de ideas que hemos intentado construir en este capítulo se tambaleará.

Para contestar esta pregunta hay que acudir a los experimentos. Para ver qué tipo de experimentos deberíamos realizar, adoptaremos ahora un punto de vista completamente clá-



Estas dos figuras identifican las trazas que se ven en la fotografía de cámara de burbujas de la página precedente. En la figura superior, un antiprotón incidente choca con un protón en el punto *C*. De esta reacción resultan un neutrón y un antineutrón. La traza invisible del antineutrón se ha indicado por una línea de trazos. En el punto *A* el antineutrón experimenta una reacción de aniquilación con un protón. En esta reacción se producen cinco piones cargados. El antiprotón incidente es una entre un cierto número de partículas negativas en un haz de partículas que atraviesa la cámara de derecha a izquierda. Probablemente, todas ellas son antiprotones.

La figura inferior muestra las trazas de las partículas cargadas que intervienen en las desintegraciones subsiguientes de un pión positivo. La traza en espiral se debe al positón. A medida que se mueve a través del hidrógeno líquido, pierde energía y, por ello, el rayo de curvatura de la traza disminuye. Su destino último es el de desaparecer en una reacción de aniquilación con un electrón del líquido.

sico y haremos luego algunas predicciones que podamos someter a prueba en experimentos reales para decidir si la imagen clásica es o no correcta.

32 Un tren de ondas clásico de radiación electromagnética puede formarse como sigue. Como fuente de radiación tenemos una antena y un transmisor que se puede conectar y desconectar a voluntad. Dejamos que el transmisor, que opera a la frecuencia ω, esté en marcha durante un cierto intervalo de tiempo, con lo que la antena emite entonces un tren de ondas de duración finita: este tren de ondas es el "fotón" casi monocromático clásico. Podemos imaginar que un átomo excitado actúa como una antena de este tipo.

Subrayemos de nuevo que estamos intentando comparar el comportamiento de un fotón físico, tal como se nos manifiesta en los experimentos reales, con el comportamiento del tren de ondas clásico. Esta discusión implica la comparación de un objeto que *realmente se presenta en la naturaleza,* a saber, el fotón, con algo que, conforme veremos, *no ocurre en absoluto en la naturaleza,* a saber, un tren de ondas electromagnéticas que sigue las leyes de la electrodinámica clásica *exactamente.* Estamos así comparando un hecho con una fantasía: para evitar mezclar uno y otra, llamaremos al objeto real el *fotón,* y al imaginario, el *tren de ondas.* Para convencernos de que el tren de ondas no es el objeto real, hemos de formular algunas predicciones definidas, basadas en la imagen de un tren de ondas, que pueden luego contrastarse mediante experimentos.

33 Consideremos la emisión de luz por un átomo de mercurio que ha sido excitado en una colisión. La luz emitida es azul, de frecuencia ω. Que el tren de ondas emitido debe ser siempre de la misma frecuencia ω no es difícil de comprender: esta frecuencia ha de corresponder a cierta frecuencia natural de oscilación del átomo. Sin embargo, *es* difícil entender, apoyándose en la teoría clásica, por qué la energía transportada por el tren de ondas ha de ser siempre $\hbar\omega$. Cabe imaginar que las colisiones son de diferente violencia: a veces más y a veces menos energía pasa a quedar disponible para emisión de luz. Lo que es aún más difícil de entender es por qué dos átomos totalmente *diferentes,* por ejemplo un átomo de sodio y un átomo de mercurio, que emiten luz de frecuencias diferentes, ω_{Na} y ω_{Hg}, han de emitir trenes de onda de energía total $\hbar\omega_{Na}$ y $\hbar\omega_{Hg}$, respectivamente. Desde un punto de vista clásico, la aparición de la constante de proporcionalidad *universal* $\hbar$ es muy misteriosa.

Si pensamos en la totalidad de los numerosísimos hechos experimentales que se discutieron en el capítulo 3, es *muy* claro que los fenómenos no se pueden comprender apoyándose en una base clásica. Sin embargo, intentemos olvidar temporalmente lo que ya sabemos acerca de los procesos de emisión y de absorción y concentrémonos, en cambio, en el estudio de fotones "aislados". Consideremos trenes de onda que han sido emitidos por una cierta fuente y estudiemos estos trenes de onda con una célula fotoeléctrica en la región experimental.

34 Estudiemos, en otras palabras, el efecto fotoeléctrico. Fijamos el potencial de frenado en la célula a un valor V_0. Si W es el trabajo de extracción correspondiente a la superficie fotosensible, detectaremos, en estas condiciones, un tren de ondas (el registro unido a la célula fotoeléctrica dará una señal) con tal que la energía transportada por el mismo sea mayor que el valor

$$E_{\min} = eV_0 + W \tag{34a}$$

Fijemos V_0 de modo que

$$\hbar\omega > E_{\min} > \tfrac{2}{3}\hbar\omega \tag{34b}$$

donde ω es la frecuencia de la luz. (Hemos elegido arbitrariamente 2/3 como número mayor que 1/2, pero menor que la unidad.) Por lo tanto, si concentramos en la célula fotoeléctrica toda la energía del tren de ondas emitido, el registro dará una señal. Sin embargo, si sólo la mitad de esta energía alcanza la célula, no habrá señal, porque entonces la energía cedida al electrón no tendrá posibilidad de superar el potencial de frenado.

35 El modelo clásico sugiere un experimento obvio en el que dividimos un tren de ondas, por ejemplo con el dispositivo representado en la fig. 35A. La luz procedente de un foco de intensidad muy débil incide sobre un *divisor de haz* —un espejo semiplateado, o un prisma adecuado, pongamos por caso. Podemos disponer el divisor de tal modo que la intensidad del haz transmitido sea igual a la intensidad del haz reflejado, con lo cual la intensidad de cada uno de estos haces es la mitad de la intensidad del haz que llega procedente del foco a través de la rendija. Éste es, en otras palabras, un posible experimento real, y efectivamente se encuentra que las *intensidades* de los haces transmitido y reflejado son las indicadas. Clásicamente, podemos comprender con facilidad estos hechos: cada tren de ondas que llega al espejo se divide en dos partes.



Robert Andrews Millikan. Nació en 1868 en Morrison, Illinois. Falleció en 1953. Después de haber estudiado en los Estados Unidos y en Alemania, Millikan fue profesor de la Universidad de Chicago, y, más tarde, del Instituto Tecnológico de California en Pasadena. Millikan es conocido, en particular, por su determinación de la carga del electrón y por sus trabajos relativos al efecto fotoeléctrico. Recibió el Premio Nobel en 1923. *(Fotografía proporcionada por el profesor L. B. Loeb, Berkeley.)*

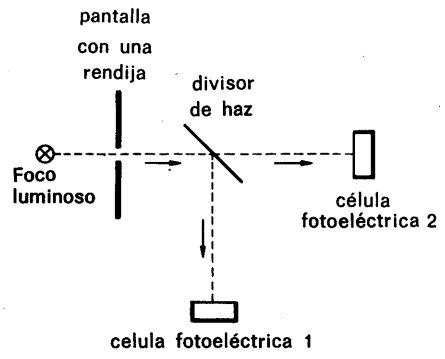


Fig. 35A Figura esquemática para ilustrar lo discutido en la Sec. 35. El haz luminoso procedente del foco se divide en dos partes por el divisor de haz, que puede ser un espejo semiplateado. ¿Se dividen los *fotones individuales*?

Consideremos ahora qué ocurre cuando un único tren de ondas llega al espejo. Según el modelo clásico, cabe esperar que se dividirá en dos partes y precisamente de tal manera que la energía que transporta la parte transmitida del tren de ondas es la mitad de la energía del tren de ondas incidente. Por lo tanto, ¡la célula fotoeléctrica 2 no dará ninguna señal!

Esta predicción basada en la teoría clásica se encuentra en contradicción flagrante con la experiencia. La luz que pasa a través sigue siendo azul, de frecuencia ω, y el registro de la célula 2 da efectivamente una señal en tanto que sea $\hbar\omega > E_{\min}$, lo que prueba que la energía de la luz transmitida llega formando paquetes de energía $\hbar\omega$. Lo que sí ocurre cuando se intercala el espejo es que el número de cuentas por unidad de tiempo es únicamente la mitad del valor que se halla en ausencia del espejo.

36 ¿Hasta qué punto es convincente la prueba de que los fotones no se pueden dividir con el dispositivo experimental representado en la fig. 35A, o con cualquier otro dispositivo similar? La prueba es *sumamente buena* y, de hecho, constantemente se están realizando experimentos de división de fotones. Cualquier aparato óptico del que forma parte una célula fotoeléctrica, o una placa fotográfica, puede considerarse como un instrumento en el que intentamos dividir fotones, pero fallamos en nuestro intento. La más simple observación de este tipo es la del efecto fotoeléctrico a diferentes distancias r del foco luminoso. Si un átomo es como una antena, debe emitir luz en la forma de un tren de ondas esférico. La intensidad de la luz emitida es proporcional a $1/r^2$ y, según el modelo clásico, la cantidad de energía transportada por un solo tren de ondas a través de la unidad de área a una distancia r es proporcional a $1/r^2$. Por lo tanto, dado que la célula fotoeléctrica posee una determinada sección transversal, podría parecer que, con sólo colocar la célula a una distancia suficientemente grande, ha de ser posible hacer tan pequeña cuanto se quiera la fracción de la energía en el tren de ondas que puede actuar sobre ella y que, para un potencial de frenado fijo, la célula debiera cesar por completo de registrar no bien la distancia supere un cierto límite. Con toda seguridad: no es esto lo que observamos. Lo único que ocurre es que el *número de cuentas por unidad de tiempo* que registra la célula fotoeléctrica disminuye como $1/r^2$. Acaso el ejemplo más sorprendente es la observación del efecto fotoeléctrico para luz que procede de una estrella muy distante. El tren de ondas fue emitido hace miles de años y debe haberse extendido por toda una gran

porción del espacio. Tan sólo una minúscula fracción de la energía transportada en el tren de ondas puede ser capaz de alcanzar la célula fotoeléctrica a través del telescopio. Sin embargo, la cantidad de energía cedida al electrón en la célula resulta ser igual a $\hbar\omega$, justamente como si el foco fuese una lámpara próxima a la misma.

37 Cualquier intento de explicación de estos hechos basado en la idea de que podemos estar viendo un efecto acumulativo, en el cual un número muy grande de "fotones fraccionados" ceden una pequeña cantidad de energía al electrón en la superficie fotosensible y de tal manera que el electrón es finalmente expulsado, precisamente cuando la energía acumulada es suficientemente grande, es por completo insostenible. Si ésta fuese la explicación, el efecto acumulativo debería *también* actuar cuando el potencial de frenado se fija para un valor tal que $E_{\min} > 100\,\hbar\omega$, lo que, con toda certeza, no es lo que observamos: si el potencial de frenado es demasiado grande, la célula fotoeléctrica *nunca* registra.

38 Los hechos experimentales vinculados con el efecto fotoeléctrico conducen, por lo tanto, a la conclusión ineludible de que los fotones casi monocromáticos no se pueden dividir en dos fotones de la misma frecuencia que transportan tan sólo una fracción de la energía del fotón original: los fotones *no* se comportan como trenes de onda clásicos en este respecto. Esta conclusión se ve además apoyada por los resultados experimentales relativos al efecto Compton, a la emisión de rayos X y a la aniquilación y producción de pares, fenómenos que hemos discutido anteriormente en este capítulo. En nuestro análisis teórico de los mismos hicimos la hipótesis bien concreta de que la relación $E = \hbar\omega$ es siempre válida, es decir, que no existen "fotones fraccionados", y sobre esta base pudimos, en efecto, comprender buen número de los hechos experimentales.

Algo debe fallar, por lo tanto, en las ideas clásicas, y lo que queremos es descubrir precisamente qué es lo que hay que cambiar. Con todo, hemos de tener cuidado en no sacar ninguna conclusión apresurada en este punto. Mejor consideremos algunos otros hechos experimentales que están también relacionados con la cuestión de si los fotones se pueden o no "dividir". La discusión desarrollada hasta aquí nos ha probado que, en *un* determinado sentido de la palabra, *no es posible* dividir los fotones. Esto no excluye la posibilidad de que puedan ser "divididos" en algún otro sentido.

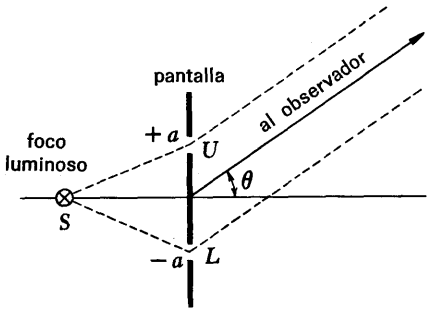


Fig. 39A Figura muy esquemática para ilustrar nuestra discusión relativa a la difracción por dos rendijas. ¿Pasa un fotón individual por sólo una de las rendijas, o puede ir por una y por otra conforme sugiere la imagen clásica de un tren de ondas? ¿Cambia la figura de interferencia provocada por dos rendijas a medida que disminuye la intensidad de la luz incidente?

39 Consideremos un experimento de difracción con dos rendijas como el representado esquemáticamente en la fig. 39A. La pantalla opaca tiene dos rendijas, *S* e *I*, perpendiculares al plano del dibujo. El foco luminoso *F* las ilumina con luz (fotones) de una frecuencia bien definida ω. Para simplificar, supondremos que las rendijas son de idéntico tamaño y con una anchura que es pequeña comparada con la longitud de onda. Supondremos, además, que la separación, $2a$, entre ellas, es comparable con la longitud de onda $\lambda = 2\pi c/\omega$.

Efectuamos medidas de la intensidad de la luz difractada en función del ángulo de observación θ y a una distancia r de la pantalla, distancia que es *grande* comparada con la separación entre rendijas $2a$. Para medir esta intensidad, podemos imaginar que se emplea un célula fotoeléctrica: la intensidad es entonces proporcional al número de cuentas por unidad de tiempo registrado por la célula.

40 Veamos ahora qué nos dice la teoría electromagnética clásica acerca de la distribución de intensidad a la derecha de la pantalla. Nuestra hipótesis de que la anchura de las rendijas es pequeña comparada con la longitud de onda significa que, si una cualquiera de las rendijas se tapa, la distribución angular de la radiación difractada es una función lisa del ángulo θ. Sea A_0 la amplitud de la onda difractada en el caso en que solamente hay *una* rendija, sea la superior o la inferior de las indicadas en la fig. 39A. $A_0 = A_0(r, \theta)$ es, naturalmente, una función de r y θ y, utilizando la representación compleja, podemos escribir

$$A_0 = f(r,\theta)\, e^{-i\omega t} \tag{40a}$$

donde $f(r, \theta)$ describe la dependencia *espacial* de la amplitud.

Con el dispositivo experimental representado en la fig. 39A, la onda difractada que se observa a gran distancia de la pantalla es la suma de las dos ondas procedentes de las dos rendijas. Dichas ondas son de igual amplitud, pero la onda que procede de la rendija inferior presenta un retardo de fase de $(4\pi a/\lambda)\,\mathrm{sen}\,\theta$ respecto de la onda de la rendija superior. La amplitud de la onda combinada es, pues,

$$\begin{aligned} A &= f(r,\theta)e^{-i\omega t}\left[\exp\left(\frac{i\omega a}{c}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + \exp\left(-\frac{i\omega a}{c}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right] \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\,\mathrm{sin}\,\theta\right) \end{aligned} \tag{40b}$$

La *intensidad* de la radiación difractada es proporcional al cuadrado del valor absoluto de la amplitud y, en consecuencia, tenemos

$$I(r,\theta) = |A|^2 = 4I_0(r,\theta)\cos^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta\right) \tag{40c}$$

donde

$$I_0(r,\theta) = |A_0|^2 \tag{40d}$$

es la intensidad observada con tan sólo una única rendija. La intensidad $I(r, \theta)$ en el experimento con dos rendijas resulta así igual al producto de la intensidad en el experimento con una sola rendija por el factor $4\cos^2[(2\pi a/\lambda)\operatorname{sen}\theta]$, que describe el efecto de interferencia de las ondas que emergen de las dos rendijas. Nótese que, debido a esta interferencia, observaremos una intensidad nula en cirtas direcciones con tal que $4a/\lambda > 1$. En otras direcciones, en cambio, la intensidad será *cuatro* veces mayor que en el experimento con una sola rendija. Nos interesan aquí particularmente estos efectos de interferencia tal como los describe la relación (40c). Que las intensidades I e I_0 deben estar ligadas entre sí de esta manera, es la esencia de nuestra predicción clásica.

41 Visto lo que hemos aprendido acerca de la imposibilidad de "dividir" fotones, podríamos sentirnos tentados a concluir que la predicción clásica contenida en la ec. (40c) debe ser falsa. Cabría argumentar como sigue. Cada fotón debe pasar por una de las rendijas, ya que los fotones no pueden dividirse. Supongamos que un fotón particular atraviesa la pantalla por la rendija superior. En este caso la presencia de la rendija inferior no puede afectar a la difracción de este fotón, y la figura de intensidades de todos los fotones que pasan por dicha rendija debe venir dada por $I_0(r, \theta)$. Análogamente ocurre en el caso de los fotones que pasan por la rendija inferior, y podemos concluir que la intensidad I^* con ambas rendijas abiertas es

$$I^*(r,\theta) = 2I_0(r,\theta) \tag{41a}$$

Hemos designado la intensidad predicha por I^* para indicar que hemos llegado a esta predicción rechazando las ideas clásicas que conducen a la formulada en la ec. (40c). Ahora bien, el lector debe advertir que no hemos dicho que nos viéramos *forzados* a la conclusión (41a) por nuestro análisis an-

terior relativo a la división de los fotones: queríamos meramente explorar esta posibilidad.

42 La prueba experimental es concluyente y en favor de la predicción de la teoría ondulatoria (40c). Podemos considerar nuestro simple experimento de difracción con dos rendijas como el prototipo de una amplia clase de experimentos de interferencia, entre los que cabe anotar mediciones con redes de difracción y experimentos de difracción de rayos X con cristales. La ecuación (41a) afirma que las ondas difractadas por las dos rendijas no interfieren entre sí, y si esta predicción fuese correcta para el experimento con dos rendijas, de aquí se seguiría, evidentemente, que no podríamos ver ningún efecto de interferencia con redes de difracción ni tampoco con cristales.

Antes de rechazar la predicción (41a) como absolutamente falsa, debería preocuparnos lo que sigue: ¿no podría acaso ocurrir que el fenómeno de interferencia descrito por la ecuación (40c) es el resultado de un cierto tipo de "interacción" entre *varios* fotones? Con un foco luminoso suficientemente intenso tendremos numerosos fotones en tránsito al mismo tiempo, es decir, varios fotones que pasan por las rendijas simultáneamente, y cabría preguntarnos si los efectos de interferencia no son acaso "fenómenos *n*-fotónicos". Esta idea nos conduce a investigar si la predicción (41a) es correcta para focos sumamente débiles, tanto que sólo un fotón se encuentre efectivamente en tránsito a la vez, mientras que la predicción (40c) es correcta para focos suficientemente intensos. En otras palabras: ¿ocurre realmente que la naturaleza de la figura de difracción cambia, pasando de la descrita por la ec. (40c) a la descrita por la ec. (41a), a medida que disminuye la intensidad del foco luminoso?

La respuesta a esta pregunta es *no*: no hay ni el menor indicio de que las figuras de difracción cambien de naturaleza a medida que la intensidad de la radiación tiende a cero. Los resultados acumulados de nuestros experimentos de difracción e interferencia apoyan, más allá de cualquier duda razonable, las ideas en que se basa la predicción (40c).

43 Un experimento directamente relacionado con esta cuestión fue llevado a cabo en 1909 por G. I. Taylor *. Taylor fotografió la figura de difracción en la sombra de una aguja

* G. I. Taylor, "Interference Fringes with Feeble Light", *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **15**, 114 (1909).

iluminada por un foco luminoso sumamente débil. En uno de estos experimentos, el tiempo de exposición fue de 2000 horas, es decir, unos 3 meses. En este caso la intensidad era tan baja, que únicamente un número muy pequeño de fotones pudo encontrarse efectivamente presente dentro del aparato en un mismo instante. La figura de difracción producida fue, sin embargo, tan clara y acusada como la figura producida por un intenso foco luminoso. El análisis teórico *preciso* del experimento de Taylor requiere cierta maña (entre otras cosas, porque su descripción de lo que realmente hizo no está suficientemente detallada) y no intentaremos realizarlo aquí. Con todo, podemos afirmar con confianza que la intensidad de la luz fue, en efecto, tan pequeña que, si la naturaleza de la figura de difracción cambia en realidad a medida que se reduce el número de fotones en tránsito, este efecto debía haber quedado de manifiesto en el experimento. Como hemos dicho, no hubo ni el más ligero indicio del mismo.

Hemos de subrayar que nuestra creencia en que las figuras de difracción no constituyen el resultado de una cierta especie de "interacción" entre un gran número de fotones no descansa solamente en el un tanto pobre experimento de Taylor. Descansa en un gran número de otros experimentos de interferencia que ha resultado posible describir correctamente tomando como base la imagen ondulatoria, con independencia de la intensidad de la radiación presente.

44 Tratemos ahora de formular una teoría simple en términos de la cual podamos explicar los resultados experimentales discutidos hasta aquí. Nuestra teoría reza como sigue:

I. Cabe imaginar que la radiación casi monocromática, de frecuencia aproximadamente igual a ω, emitida por un foco luminoso, está constituida por "paquetes de radiación" discretos. que llamamos fotones.

II. La propagación de cada fotón en el espacio está correctamente descrita por las ecuaciones de Maxwell de la teoría electromagnética clásica. Con vistas a esta descripción, cada fotón puede considerarse como un tren de onda clásico, definido por los dos campos de vectores $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, que satisfacen las ecuaciones de Maxwell con las apropiadas condiciones de contorno determinadas por la situación física de que se trate. En particular, los fotones serán difractados por obstáculos, y las ondas difractadas pueden describirse dentro del marco de la teoría clásica. Una onda que incide sobre un espejo semiplateado, o sobre una pantalla con dos rendijas, se "divi-

dirá" efectivamente en dos ondas y estas dos ondas pueden interferir entre sí tal como predice la teoría clásica.

III. No es correcto interpretar la suma de los cuadrados de las amplitudes **E** y **B** como representante de la densidad espacial de energía asociada con el fotón. Esta idea clásica es equivocada. En realidad, cualquier cantidad que depende *cuadráticamente* de la amplitud de onda debe interpretarse como proporcional a la *probabilidad* de que algo ocurra. Por ejemplo, la integral de la suma de los cuadrados de las amplitudes **E** y **B** extendida a una región finita del espacio, no es igual a la energía que transporta el fotón en esta región, sino que es proporcional a la probabilidad de que el fotón sea observado en ella si intentamos "capturarlo" con una célula fotoeléctrica. Análogamente, el flujo de radiación, calculado clásicamente, que pasa por un agujero en una pantalla debe re-interpretarse como proporcional a la probabilidad de que el fotón será detectado si colocamos una célula fotoeléctrica inmediatamente detrás del agujero.

IV. Si un fotón es detectado (por una célula fotoeléctrica) en un punto, el que sea, del espacio, la energía cedida al detector es siempre igual a $\hbar\omega$. Dado que la probabilidad de detectar el fotón es proporcional a la suma de los cuadrados de las amplitudes **E** y **B**, podemos concluir que la densidad de energía clásica integrada en una región es igual al producto de la energía que lleva consigo un fotón por la probabilidad de encontrar éste en la región. Por consiguiente, si el foco luminoso se mantiene en funcionamiento constante durante un largo intervalo de tiempo, de modo que se emite un gran número de fotones, la energía *promedia* que se puede observar en una región es igual, en efecto, a la energía en la misma calculada clásicamente.

45 Nos hemos desviado ahora de las ideas de la teoría electromagnética clásica. La idea nueva que hemos introducido es la interpretación *probabilística* de todas las cantidades que dependen cuadráticamente de las amplitudes del campo electromagnético. Podemos seguir estudiando la propagación de los fotones en el espacio en términos de las ecuaciones de Maxwell, pero disponemos de una nueva interpretación para la densidad de energía y para el flujo de energía radiante calculados clásicamente. Estas cantidades deben interpretarse como valores *medios* que observamos en el caso de un número muy grande de fotones. De aquí se sigue que en un experimento en el cual medimos solamente estos promedios, pero no intentamos observar fotones individuales, la teoría clásica se

comportará como correcta. Por otra parte, si efectivamente observamos fotones individuales con una célula fotoeléctrica, entonces quedarán de manifiesto inmediatamente las limitaciones de la teoría clásica.

46 Veamos ahora cómo podemos describir los hechos observados en algunos casos concretos en términos de nuestras nuevas ideas. Consideremos la situación, discutida en la Sec. 36, en la que se observa el efecto fotoeléctrico a varias distancias de un foco luminoso constante situado en el origen de coordenadas. Supongamos que el foco es aproximadamente monocromático y que emite, en promedio, N fotones de frecuencia ω por segundo. La célula fotoeléctrica se coloca a cierta distancia fija del foco y está acoplada a un registro, de modo que podemos contar el número de fotones detectado por la célula.

Consideremos ahora un fotón típico emitido por el foco. Puede considerarse como un tren de ondas de duración finita que se extiende en todas direcciones por el espacio y que transporta una energía total $\hbar\omega$. Calculamos, *clásicamente*, el flujo total de energía E_c que esta onda transporta hasta la célula fotoeléctrica. Esta energía es una cierta fracción $q = E_c/\hbar\omega$ de la energía total emitida. Sin embargo, de acuerdo con nuestra nueva interpretación de las magnitudes que dependen cuadráticamente de la amplitud de onda, q es de hecho igual a la *probabilidad* de que el fotón penetre en la célula. (Para simplificar podemos suponer que nuestra célula fotoeléctrica tiene una eficiencia de recuento del 100 por ciento, en cuyo caso q es igual a la probabilidad de que el contador cuente cuando un fotón es emitido por la fuente.)

Para cada fotón emitido por el foco, no podemos predecir si el contador realmente contará o no, pero podemos decir que la probabilidad de que lo haga es q. *Si* el contador cuenta, la cantidad de energía transmitida desde el foco a la célula fotoeléctrica es igual a $\hbar\omega$. De aquí se sigue que la potencia *media* transmitida desde el foco a la célula, cuando aquél emite continuamente, es igual a $W_{\text{med}} = qN\hbar\omega = NE_c$. Esta potencia media concuerda con la predicción clásica.

La cantidad E_c, calculada clásicamente, es proporcional, claro está, a $1/r^2$, donde r es la distancia del foco a la célula. En consecuencia, $q = E_c/\hbar\omega$ es también proporcional a $1/r^2$, y dado que el número de cuentas, por unidad de tiempo, de la célula fotoeléctrica es igual a qN, vemos que dicho número es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, de acuerdo con lo que realmente se observa.

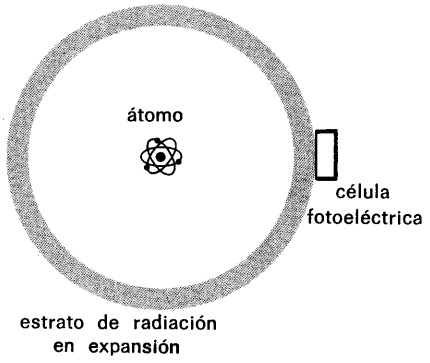
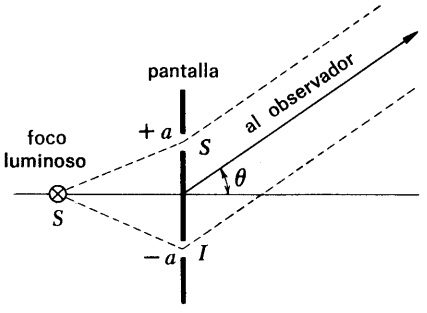


Fig. 47A El átomo, representado en el centro, emitió luz hace un año. El estrato esférico de radiación tiene, por consiguiente, un radio de una año-luz. Está a punto de alcanzar la célula fotoeléctrica que aparece a la derecha. Si ésta actúa el registro, toda la energía de la onda se ha concentrado súbitamente en la célula. ¿Cómo es esto posible? ¿Cómo puede la energía procedente de la parte lejana del estrato alcanzar la célula fotoeléctrica en un tiempo inferior a dos años?

La "paradoja" se desvanece si renunciamos a la idea clásica de que la densidad de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo. Según la mecánica cuántica, la transferencia de energía desde el átomo a la célula está regida por una ley probabilística y el cuadrado de la amplitud del campo debe interpretarse como una densidad de probabilidad.



47 Muchas personas han tenido la sensación de que hay algo paradójico en las circunstancias que acabamos de describir. Arguyen como sigue. Supongamos que la distancia r es muy grande, algo así como un año luz. Después de que el fotón ha sido emitido, se propaga como un estrato esférico. En el instante en que la onda llega al detector, la energía que transporta se ha distribuido por una región muy grande del espacio, por ejemplo dentro de un cierto estrato esférico de radio igual a un año luz. ¿Cómo es entonces posible que toda esta energía pueda de pronto concentrarse en la célula fotoeléctrica y ésta detecte, cuando lo hace? Para que la energía contenida en la "parte opuesta" del estrato alcance la célula, debería transcurrir más de un año, puesto que de lo contrario quedaría violado el principio de que ninguna señal puede propagarse con velocidad mayor que la de la luz.

El fallo en esta manera de razonar consiste en creer en la expresión clásica de la densidad de energía expresada en función de los campos eléctrico y magnético. Hay que recordar que toda la finalidad de introducir en la física el concepto de campo electromagnético es la de describir las interacciones entre *cargas*. En el volumen II de esta serie aprendimos que este concepto es *conveniente*, como también aprendimos que conviene a veces *imaginar* (en situaciones macroscópicas típicas) que la energía se encuentra distribuida en el espacio con una densidad proporcional al cuadrado de la amplitud del campo. Sin embargo, ninguno de los hechos físicos discutidos en el volumen II nos decía que hemos de tomar esta idea literalmente, y ahora sabemos que la expresión clásica para la densidad de energía se refiere a la densidad de energía *media* que observamos cuando se trata de un número muy grande de fotones, pero que no describe la densidad de energía asociada con un *solo* fotón.

La cuestión es realmente esta: ¿Qué leyes rigen la transferencia de energía desde un átomo en el foco luminoso a un electrón en el detector? Esto es lo que estamos estudiando, y hemos descubierto ahora ciertos rasgos de dichas leyes.

48 Volvamos al experimento de difracción discutido en las Secs. 39-42. Supongamos que se observan los fotones en cierta dirección θ con una célula fotoeléctrica. Determinando el número de cuentas por unidad de tiempo en función de θ (manteniendo constante la emisión del foco) podemos observar la figura de difracción. Imaginemos ahora que el contador acaba de contar. *Pregunta:* ¿Por qué rendija ha pasado este fotón?

Respuesta: Pasó por *ambas* rendijas: en parte por la rendija *S* y en parte por la rendija *I*.

Esta respuesta está de acuerdo con el espíritu de nuestra simple teoría desarrollada en la Sec. 44. Si el objeto en cuestión fuese una bola de billar que obedece a las leyes de la mecánica clásica, la respuesta sería chocante. Sin embargo, puesto que se trata de fotones, nada hay de sorprendente en ella: corresponde simplemente a lo que ocurre en realidad.

Pregunta: ¿Podemos disponer las cosas de modo que *sepamos* por qué rendija ha pasado el fotón? *Respuesta:* Sí, es muy fácil. Basta simplemente tapar la rendija *S*, y entonces sabemos que todos los fotones detectados deben haber pasado por la rendija *I*. Si procedemos así, naturalmente, no observaremos la figura de difracción por dos rendijas, sino solamente la que corresponde a sólo una. Esto no contesta a la cuestión real, dice el lector. Pretendemos realizar el experimento con ayuda de algún dispositivo ingenioso, sin cubrir ninguna de las rendijas. En otras palabras: queremos preservar la figura de difracción por dos rendijas en *exactamente* la forma que presenta sin intervención del dispositivo ingenioso, pero, con todo, ser capaces de decir por qué rendija pasó cada fotón particular contado. ¿Podemos conseguir esto?

Supongamos que ello fuera posible. En este caso descartaríamos primero, simplemente, todas las cuentas para las que los fotones han pasado por la rendija *S* y representaríamos luego una figura de difracción tomando como base las cuentas restantes, para las que los fotones han atravesado la rendija *I*. ¿Cuál sería el aspecto de la figura? Su aspecto sería análogo al de la figura de difracción por una única rendija, porque tenemos la seguridad de que "nada pasó por la rendija *S*" y, en este caso, muy bien la rendija *S* pudiera haber estado cerrada. Análogamente, la figura obtenida tomando como base todas las cuentas asociadas con fotones que pasaron por la rendija *S* debe ser la figura de difracción debida a una única rendija. *Todas* las cuentas tomadas en conjunto conducirían entonces a una figura de difracción que coincide con la predicha en la Sec. 41, es decir, la figura *no* sería la figura de difracción por dos rendijas realmente observadas. En un experimento en el que se observa ésta, no podemos decir cuál ha sido la rendija por la que ha pasado un determinado fotón. La figura puede producirse solamente si los fotones pasan en parte por ambas rendijas y entonces *carece de sentido* preguntar cuál fue la rendija por la que pasó el fotón.

49 Muchas cosas interesantes hemos aprendido ahora acerca del comportamiento de los fotones. La simple teoría expuesta en la Sec. 44 es el primer paso hacia la formulación de una teoría cuántica de la radiación electromagnética. Naturalmente, lo discutido en esta sección no es toda la historia de la electrodinámica cuántica: queda mucho más por aprender. En particular, es mucho más lo que hay que decir acerca de los procesos en que intervienen numerosos fotones. Nuestro objetivo en este capítulo era, sin embargo, llegar a una simple formulación cuántica preliminar mediante la cual podamos describir los hechos más fundamentales en que intervienen fotones, y esto lo hemos llevado a cabo. Lo esencial de nuestra teoría es que mientras la *amplitud* de onda asociada con un fotón puede tratarse como en la teoría electromagnética clásica, todas las magnitudes que dependen cuadráticamente de la amplitud deben interpretarse en términos de probabilidades. Es posible "dividir" un fotón en el sentido de que la onda puede dividirse en dos, o en varias partes, por espejos semiplateados u otros dispositivos, exactamente como en la teoría electromagnética clásica. Sin embargo, un fotón casi monocromático no puede ser "dividido" en el sentido de que sea posible detectar, con una célula fotoeléctrica, un "fotón fraccionado" que transporta solamente una cierta parte de la energía $\hbar\omega$, donde ω es la energía del fotón. Estas ideas constituyen una clara desviación de las ideas de la teoría electromagnética clásica. Sin embargo, sería una exageración el decir que la teoría clásica ha sido *completamente* derrocada: hemos descubierto en ella meramente ciertas limitaciones.

Hay que subrayar que nada hay de paradójico o de misterioso, en absoluto, en los hechos experimentales que hemos analizado. Naturalmente, podemos en ocasiones sentirnos perplejos acerca de lo que encontramos en la naturaleza, y la razón de ello es que contemplamos los hechos con mentes animadas de prejuicios. Tenemos determinadas opiniones acerca de cómo deben ser las cosas, y entonces nos sentimos incómodos cuando lo que esperábamos no se cumple. Debemos aprender, sin embargo, a aceptar las cosas como son, y a intentar hallar descripciones simples y coherentes de los fenómenos observados.

El lector debe entender claramente que las ideas teóricas expuestas en este capítulo tienen su origen en hechos experimentales. Los resultados de un conjunto de experimentos nunca nos permitirán deducir, por pura lógica, qué *debe* ocurrir en algún otro conjunto de experimentos diferentes. Podemos vernos llevados a *presunciones,* pero esto es otra cosa. No hay

razón alguna en el mundo por la cual las cosas tengan que ocurrir de la manera tal como las hemos descrito en este capítulo. Igualmente pudiera haber sucedido que existieran "fotones fraccionados" o que una figura de difracción cambiase efectivamente su carácter a medida que se disminuye la intensidad de la luz.

50 Terminamos este capítulo incitando al lector a que reflexione acerca del notable valor teórico de un "equipo de óptica" que contenga unas pocas células fotoeléctricas con circuitos electrónicos de recuento asociados, redes de difracción, algunos focos luminosos monocromáticos y otros pocos dispositivos ópticos típicos. Con un equipo como éste podemos aprender mucho acerca de la física fundamental. Una caja con un equipo de óptica es algo casi excepcional entre los aparatos de la física experimental en lo que concierne a la elevada razón de su valor educativo a su valor monetario.

Bibliografía para ulterior estudio

1) El American Institute of Physics, 335 East 45th Street, New York, N. Y., ha publicado una serie de reimpresiones bajo el título de: *Quantum and Statistical Aspects of Light*. Como indica el título, estos trabajos tratan de varias propiedades de los fotones y es posible que el lector encuentre interesantes algunos de ellos. Se incluye una breve lista bibliográfica.

2) Referimos de nuevo al lector a los libros *The World of the Atom*, compilados por H. A. Boorse y L. Motz, Vols. I y II (Basic Books, Inc., Nueva York, 1966), para traducciones y reimpresiones (con comentarios de los compiladores) de un buen número de los primeros artículos relativos al tema objeto de este capítulo.

3) Los siguientes artículos publicados en el *Scientific American* pueden leerse con provecho en el presente estadio de nuestra discusión:

a) G. E. Henry: "Radiation Pressure", junio 1957, pág. 99.

b) W. H. Jordan: "Radiation From a Reactor", octubre 1951, pág. 54 (discute la radiación de Cerenkov).

c) G. Burbidge y F. Hoyle: "Anti-Matter", abril 1958, pág. 34.

d) G. B. Collins: "Scintillation Counters", noviembre 1953, pág. 36.

Problemas

1 Un átomo, o núcleo, de masa M_i decae por emisión de un fotón. La masa final de la partícula es M_f (después de la emisión del fotón). El fotón emitido se observa en el sistema inercial en el que el átomo se encontraba inicialmente en reposo; sea ω la frecuencia del fotón. Definamos ω_0 por la igualdad $\omega_0 = (M_i - M_f)\,c^2/\hbar$.

(*a*) Probar que

$$\omega = \frac{(M_i + M_f)}{2M_i}\omega_0 = \omega_0\left[1 - \frac{\omega_0\hbar}{2M_ic^2}\right]$$

(*b*) Calcular $(\omega_0 - \omega)/\omega$ para la raya amarilla emitida por el sodio. Análogamente, calcular $(\omega_0 - \omega)/\omega$ para el rayo gamma de 113 keV emitido por el isótopo del hafnio $_{72}Hf^{177}$.

La fórmula que precede describe el *efecto de retroceso* en la emisión de un fotón. Conforme vemos, el fotón emitido es siempre de frecuencia menor (en el sistema de reposo del emisor) que la frecuencia ω_0 que tendría si fuese infinita la masa M_f. Para fotones ópticos emitidos por átomos el efecto es sumamente pequeño.

2 Considérese el proceso inverso del discutido en el problema 1. Un átomo, o núcleo, de masa M_f, inicialmente en reposo en el laboratorio, absorbe un fotón de frecuencia ω. La masa final del átomo (o del núcleo) es M_i. Hagamos de nuevo $\omega_0 = (M_i - M_f)\,c^2/\hbar$. Deducir una relación entre ω, ω_0, M_i y M_f. Obsérvese que para pequeños cambios relativos de masa la frecuencia ω es muy próxima a ω_0.

3 Tomando como base los datos que proporciona el gráfico de la Fig. 23A, determinar h/e con la precisión que permite la del gráfico. (La velocidad de la luz se supone conocida.)

4 Examinar las curvas de Compton de la Fig. 20A. La abscisa es aproximadamente proporcional a la longitud de onda. Utilizando los datos del tercer gráfico, intentar predecir los máximos desplazados en los gráficos segundo y cuarto y comparar el resultado con las curvas reales.

5 Examinar los gráficos de la Fig. 16A. Haremos notar que la abscisa se expresa de dos maneras diferentes: como velocidad y como frecuencia. La energía del rayo gamma emitido por el núcleo Fe^{57} excitado es de 14,4 keV. Sabiendo esto, ¿puede establecer una relación entre la velocidad y la frecuencia en las dos escalas indicadas en el gráfico?

6 Si consideramos atentamente los gráficos de la Fig. 16A, se advierte un rasgo notable: el efecto de retroceso discutido en el problema 2 no se presenta. Este fenómeno se conoce con el nombre de efecto Mössbauer, en honor de su descubridor *. ¿Puede imaginar alguna explicación de este efecto? Después de haber reflexionado acerca del particular, puede dar un vistazo a la literatura: es un fenómeno interesante.

7 Rayos gamma de longitud de onda 0,710 Å se dispersan en una fina lámina de aluminio. La radiación dispersada se observa en la dirección que forma un ángulo de 60° con la de incidencia. ¿Qué longitudes de onda espera ver?

8 Supongamos que un par electrón-positón se aniquila dando lugar a *tres* rayos gamma. Si observamos uno de ellos en el sistema de reposo del par electrón-positón (admitimos que la aniquilación tiene

* R. L. Mössbauer, "Kernresonanzfluoreszenz von Gammastrahlung in Ir^{191}", *Zeitschrift für Physik* **151**, 124 (1958). Una traducción al inglés de este artículo y reimpresiones de otros acerca del mismo tema se puede encontrar en la obra *The Mössbauer Effect*, compilada por H. Frauenfelder (W. A. Benjamin, Inc., Nueva York, 1962).

lugar cuando el electrón y el positón se encuentran casi en reposo), ¿cuáles son las posibles energías del mismo?

9 Sobre la frontera plana que separa un dieléctrico homogéneo, de índice de refracción n, del vacío inciden normalmente fotones. Supongamos que los fotones, de frecuencia ω, penetran desde el vacío.

(*a*) ¿Cuál es la frecuencia, y la energía, de un fotón dentro del dieléctrico?

(*b*) ¿Se puede asignar un impulso al fotón dentro del dieléctrico? Si así es, dar una expresión para el impulso. ¿Qué relación existe entre el impulso y la longitud de onda y cuál es ésta en el interior del dieléctrico?

10 Una partícula cargada que se mueve en el vacío con velocidad constante no puede emitir radiación electromagnética (fotones): lo prohíbe la conservación de la energía y del impulso. Investigar si una partícula cargada que se mueve en un dieléctrico con velocidad constante mayor que la velocidad de la luz en el medio puede emitir fotones. El resultado es que, en efecto, sí es posible y la radiación se conoce con el nombre de radiación de Cerenkov. (Nos interesa aquí solamente el balance energético y de impulso, y no el "mecanismo" detallado responsable de la emisión.) Los fotones emitidos emergen formando un cierto ángulo con la dirección de la partícula cargada. Hallar este ángulo en el supuesto de que el índice de refracción es 1,5, la partícula es un pión de 5 GeV y que el fotón pertenece al intervalo óptico. Detectores de partículas cargadas basados en el fenómeno de la radiación de Cerenkov son de uso común en física de altas energías. La masa de un pión es de 140 MeV.

11 (*a*) Cuando una partícula cargada se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme, su trayectoria es un arco de circunferencia. Suponiendo que la partícula transporta una carga elemental, probar que el impulso de la partícula es proporcional a la cantidad Br, donde B es el módulo de la intensidad del campo y r el radio de la trayectoria. Hallar el factor de conversión que da el impulso tomando como unidad MeV/c, si la cantidad Br se da en gauss-cm. (c es aquí la velocidad de la luz.)

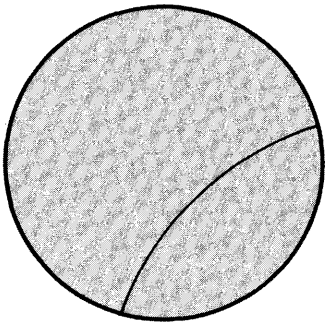
(*b*) Al analizar su fotografía de cámara de niebla (véase fig. 26A), Anderson determinó la energía del positón a partir del campo magnético uniforme y de la curvatura observada de las trazas. Expresó los impulsos en las dos porciones de la trayectoria en la forma $Br = 2{,}1 \times 10^5$ gauss-cm y $Br = 7{,}5 \times 10^4$ gauss-cm. Probar que estos valores corresponden a las energías 63 MeV y 23 MeV.

(*c*) ¿Es posible determinar el signo de la carga y el sentido del movimiento de la partícula a partir de una figura como la que, en esta página, simula una fotografía de cámara de niebla? ¿Cómo supo Anderson (véase fig. 26A) que la partícula era un positón, y no un electrón que se movía en sentido opuesto?

(*d*) En la fig. 26A el campo magnético es perpendicular al plano de la figura. ¿Su sentido, es *hacia* el papel o *alejándose* del mismo?

Véase el artículo de Anderson (*Phys. Rev*, **43**, 491 (1933)) para los argumentos que esgrimió excluyendo la posibilidad de que su fotografía correspondiera a la traza de un *protón*.

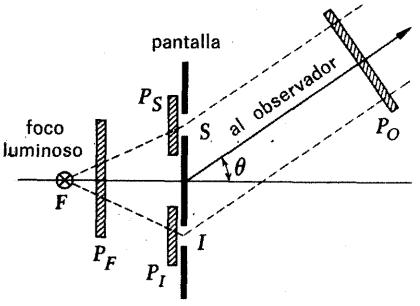
12 Consideremos un refinamiento del experimento de difracción por dos rendijas discutido en las Seccs. 39-42. (Véase la figura en esta



Fotografía simulada de una cámara de niebla que presenta la traza de una partícula cargada que se encuentra en un campo magnético orientado hacia el lector. (Esta figura se refiere al probl. 11 de esta página.)

¿Es ésta la traza de un positón?; y, si lo es, ¿en qué sentido se mueve? ¿O se trata de la traza de un electrón que se mueve en sentido opuesto?

¿Cómo supo Anderson que su fotografía (véase Fig. 26A) muestra la traza de un positón y no la de un electrón?



Un refinamiento de la Fig. 39A. Filtros de polarización se han colocado como sigue: P_F delante del foco, P_S y P_I delante de las rendijas superior e inferior y P_0 en frente del observador.

Esta figura se refiere al probl. 12 de esta página. ¿Qué tipo de franjas veremos en correspondencia con los diferentes sistemas de filtros elegidos?

página.) Colocamos filtros de polarización frente de las rendijas, frente del foco luminoso y frente del observador. El problema consiste en hallar expresiones para la intensidad, análogas a la ec. (40c), para varias combinaciones de filtros. Suponemos que el propio foco luminoso emite luz no polarizada y que las rendijas no son sensibles al estado de polarización. Considérense los casos siguientes:

P_F	P_S	P_I	P_O
ausente	ausente	horizontal	ausente
ausente	horizontal	vertical	ausente
circular	horizontal	vertical	circular
circular	horizontal	horizontal	circular
circular	horizontal	vertical	ausente

En esta tabla, "horizontal" se refiere a un filtro que deja pasar solamente luz polarizada horizontalmente, "vertical" se refiere a un filtro que deja pasar solamente luz polarizada verticalmente y "circular" se refiere a un filtro que sólo deja pasar luz con polarización levógira.

Capítulo 5

Partículas materiales

Las ondas de De Broglie. 200

Teoría de la difracción en una estructura periódica 212

No hay sino una constante de Planck 219

¿Pueden dividirse las ondas materiales? 223

La ecuación de onda y el principio de superposición 229

Un tema avanzado: el espacio vectorial de los estados físicos 236

Bibliografía para ulterior estudio 242

Problemas 243

Capítulo 5

Partículas materiales

Las ondas de De Broglie

1 En este capítulo estudiaremos las propiedades de las partículas *materiales,* por las que entendemos partículas de masa en reposo diferente de cero, tales como electrones, protones, neutrones, mesones, moléculas, etc.

Es un simple hecho experimental que las partículas materiales poseen propiedades ondulatorias. Este hecho es conocido hoy no sólo por personas formadas principalmente en las ciencias físicas, sino también por muchas otras. Hay que recordar, sin embargo, que la naturaleza ondulatoria de un objeto como es el electrón fue considerada al principio como algo muy sorprendente. La razón de esta sorpresa era, simplemente, que los físicos se habían acostumbrado a imaginar el electrón como si éste fuese un corpúsculo clásico. Los primeros experimentos concernientes a los electrones implicaban, al parecer, este tipo de modelo, y antes de 1927 nadie había llevado a cabo experimento *concluyente* alguno en el que se manifestara la propia naturaleza ondulatoria. Es muy posible que en su curso de física de la escuela superior * el lector haya aprendido algo acerca de los experimentos mediante los cuales quedó establecida la naturaleza ondulatoria del electrón, y de estos experimentos seguiremos hablando en el presente capítulo.

En el caso de los fotones, se descubrieron primero las propiedades ondulatorias y más tarde las corpusculares. Para los electrones, el orden fue justamente al revés. Debido a esta sucesión histórica de los acontecimientos, ** el público en general tiende a creer que la luz está constituida por ondas y que los electrones son corpúsculos. Ésta es una imagen incompleta. No cabe duda alguna de que en el futuro llegará a ser algo de conocimiento mucho más general que los fotones y electrones, y en realidad *todas* las partículas, son entidades muy parecidas, en el sentido de que todas ellas poseen *ciertas* propiedades corpusculares y *ciertas* propiedades ondulatorias.

2 Tiene interés reseguir desde su origen la predicción y el descubrimiento de las ondas materiales, porque éste fue un importante avance en nuestro conocimiento de la física. El enfo-

* Véase, por ejemplo, PSSC, Física, Edit. Reverté.

** Cree el autor que el orden histórico de los descubrimientos se puede comprender teóricamente partiendo de la base de que la constante de estructura fina α es pequeña.

que adoptado en la primera parte de este capítulo es cuasi-histórico y pedimos al lector que olvide, por el momento, lo que aprendió en la escuela superior acerca de las ondas materiales. Imaginemos que hemos retrocedido en el tiempo hasta allá por el año 1923. En dicho tiempo se conocía ya bastante acerca del electrón considerado como partícula clásica, pero nada se sabía acerca de sus propiedades ondulatorias. Sin embargo, sí se sabía que el fotón tiene ciertas propiedades corpusculares.

Juguemos a un juego imaginario en el que preguntamos si una partícula material, digamos un electrón, podría tener ciertas propiedades típicas de una onda. Para ver si así es, debemos acudir a experimentos, pero antes de hacerlo hay que intentar primero ensayar ciertas ideas teóricas para ver qué cabe esperar.

3 Asociar una onda a una partícula puede parecer un acto sumamente inmotivado y, ciertamente, no pretendemos que podamos *probar* lógicamente que existe una tal onda. Con todo, hay analogías con la óptica que es posible señalar. Consideremos un instrumento óptico y el paso de la luz a través del mismo. Sabemos que, en principio, podríamos describir el instrumento resolviendo las ecuaciones de Maxwell con las condiciones de contorno apropiadas y, si hacemos esto, cabe representar la propagación de las ondas desde el foco luminoso hasta la imagen del mismo. Sin embargo, hay un procedimiento simple de estudiar los instrumentos ópticos, a saber, el método de la óptica geométrica. Podemos probar, basando nuestra discusión en las ecuaciones ondulatorias rigurosas, que este método debe proporcionar una solución *aproximada.* Seguimos el paso de un *rayo luminoso* a través del instrumento, y este rayo se puede considerar como la trayectoria de un fotón. ¿Qué relación existe entre el rayo luminoso y las ondas? En cada punto, el rayo es perpendicular al frente de onda: en cada pequeña región del espacio la onda se comporta aproximadamente como una onda plana y un rayo de luz que pase por esta región es perpendicular a los planos de fase constante. Tenemos aquí una asociación entre una "partícula" y una onda, y es esta analogía óptica lo que tratamos de explotar para formular una teoría ondulatoria de las partículas materiales.

El primero en adelantar ideas en esta dirección fue L. V. de Broglie allá por el año 1923 *. Hay que admirarlo por el coraje

* L. V. de Broglie, "Ondes et quanta", *Comptes Rendus* **177**, 507 (1923); "A tentative theory of light quanta", *Philosophical Magazine* **47**, 446 (1924); "Recherches sur la théorie des quanta", *Annales de Physique* **3**, 22 (1925).

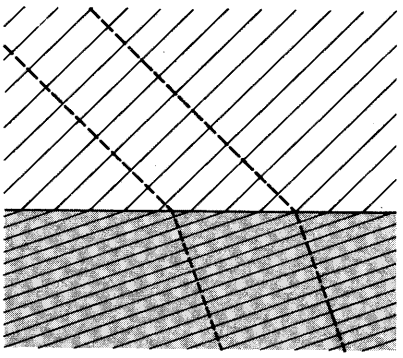


Fig. 3A Refracción de una onda plana en el plano que separa dos medios homogéneos con diferentes índices de refracción. Los frentes de onda, es decir, las superficies de fase constante, son aquí planos. Están representadas por las finas líneas continuas en la figura. Los rayos, que son perpendiculares a los frentes de onda, se han representado por líneas de trazos. Podemos imaginarlos como representantes de trayectorias de fotones. A una familia dada de frentes de onda corresponde un conjunto de trayectorias, del que las dos trayectorias representadas en la figura son miembros particulares.

Realmente, la onda se refleja también en parte, aunque ello no se ha representado en la figura por razones estéticas.

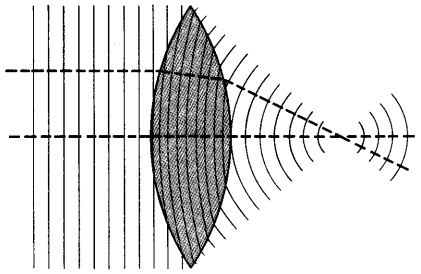


Fig. 3B Esta figura es análoga a la figura 3A y con ella se pretende ilustrar lo discutido en la Sec. 3. Los frentes de onda se representan para el caso de una onda plana que incide sobre una lente por la izquierda. Se han dibujado también dos rayos, o trayectorias de fotones. Obsérvese que se cortan en el foco. Al sistema de frentes de onda corresponde también aquí un conjunto de trayectorias.

Un examen atento revela ciertas imperfecciones en la figura. Éstas no se deben meramente a defectos de delineación, sino que reflejan el hecho de que no existe una lente perfecta. La figura es estrictamente correcta tan sólo en la región paraxil, es decir, en la inmediata vecindad del eje.

Claro está, en las diferentes superficies de separación se producen reflexiones. Este hecho no se representa en la figura.

intelectual de que dio prueba al presentar una nueva idea de este tipo.

4 Sigamos ahora las huellas de De Broglie y supongamos, con vistas a una experimentación teórica, que existe una onda asociada con cada partícula en movimiento. Imaginemos que la partícula se mueve en ausencia de fuerzas exteriores, en cuyo caso el movimiento es uniforme. Sea E la energía y $\mathbf{p}$ el impulso, y sea m la masa de la partícula.

Si hay una onda asociada con una partícula que se mueve de esta manera, deberíamos esperar que esta onda se mueva en la misma dirección que la partícula. Representemos la onda por la función de onda compleja.

$$\psi(\mathbf{x},t) = A \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - i\omega t) \tag{4a}$$

donde A es la amplitud constante de la onda, $\mathbf{k}$ el vector de onda y ω la frecuencia. Nuestro problema consiste en intentar acertar la relación entre $\mathbf{k}$ y ω, que caracteriza la onda, y las variables $\mathbf{p}$, E y m, que caracterizan la partícula.

La onda descrita por la función de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$ es una onda plana: los planos de fase constante vienen dados por $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \omega t) = \text{const}$. Estos planos, y con ellos la onda, se propagan con la *velocidad de fase*

$$\mathbf{v}_f = \frac{\omega \mathbf{k}}{k^2} \tag{4b}$$

Podríamos por lo pronto sentir la tentación de igualar la velocidad de fase $\mathbf{v}_f$ con la velocidad de la partícula, $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/E$, pero después de pensarlo mejor hay que esperar que sea la *velocidad de grupo* lo que resulte igual a la velocidad de la partícula. La velocidad de grupo es la velocidad con que una señal, o una cantidad de energía, puede ser transmitida en el espacio y no parece fuera de lugar que imaginemos la partícula como un "paquete" de energía.

5 En el volumen III de esta serie * dedujimos una expresión para la velocidad de grupo v de un paquete de ondas, a saber,

$$\frac{1}{v} = \frac{dk}{d\omega} \quad \text{o bien} \quad v = \frac{d\omega}{dv}\frac{dv}{dk} \tag{5a}$$

* Berkeley Physics Course, Vol. III, *Ondas*, Cap. 6, Editorial Reverté.

Hemos afirmado que la velocidad de grupo v debe ser la velocidad de la partícula. Para seguir adelante, debemos hacer algunas hipótesis acerca de cómo la frecuencia ω depende de $\mathbf{p}$ y E. Supongamos que la relación $E = \hbar\omega$, que vale para los fotones, vale también para las partículas materiales. Tenemos entonces

$$\hbar\omega = E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{5b}$$

Sustituyendo esta igualdad en la segunda ecuación (5a) y ordenando términos, obtenemos

$$\frac{dk}{dv} = \frac{1}{v}\frac{d\omega}{dv} = \left(\frac{m}{\hbar}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \tag{5c}$$

Integrando esta ecuación, suponiendo que $k = 0$ si $v = 0$, resulta

$$\hbar k = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = p \tag{5d}$$

o, en forma vectorial,

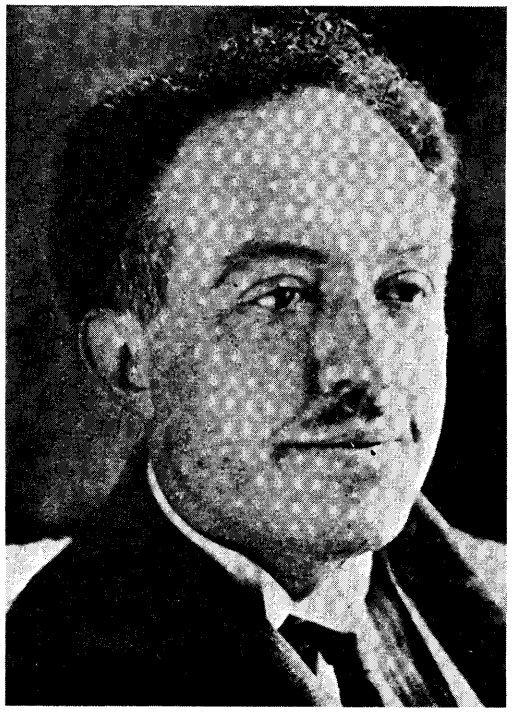
$$\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p} \tag{5e}$$

Ésta fue la relación propuesta por De Broglie.

6 Para llegar a la relación $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}$ hicimos la hipótesis un tanto dudosa expresada por el primer miembro de la ecuación (5b). Cabría preguntarnos si no hubiéramos obtenido el mismo resultado partiendo de un supuesto menos drástico complementado por la condición de invariancia relativista. Exploremos esta posibilidad y, al mismo tiempo, lleguemos al convencimiento de que nuestras ecuaciones (5b) y (5d) son compatibles con la teoría de la relatividad especial.

Ante todo hemos de hallar cómo se transforma $\mathbf{k}$ y ω al aplicar transformaciones de Lorentz. Supongamos que la onda se representa por la función de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$, dada en la ec. (4a), en el *sistema de referencia S*. La misma onda está representada en el *sistema de referencia S'*, que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto del sistema S, por la función de onda

$$\psi'(\mathbf{x}',t') = A' \exp\left(i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}' - i\omega' t'\right) \tag{6a}$$



Louis Victor de Broglie. Nació en 1892 en Dieppe, Francia. De Broglie estudió primero historia, pero más tarde se dedicó a la física. Obtuvo su grado de doctor por la Universidad de París en 1924. Desde entonces ha ostentado cargos en la Sorbona, en el Instituto Henri Poincaré y en la Universidad de París. Recibió el Premio Nobel en 1929.

El título de la tesis doctoral de De Broglie fue "Recherches sur la Théorie des Quanta" y contiene la esencia de sus ideas acerca de las ondas materiales. (Fotografía proporcionada por *Physics Today.*)

donde A' es una amplitud constante que puede o no ser igual a A.

Supongamos que el sistema S′ es el sistema de referencia en reposo de la partícula. En este sistema tenemos así $\mathbf{k}' = 0$, $\mathbf{p}' = 0$, y $E' = mc^2$. Supongamos, además, que la relación (5b) es válida en el sistema en reposo (pero acaso no en ningún otro sistema): en esta hipótesis, se tiene $\omega' = mc^2/\hbar$.

7 La *fase* de la onda viene dada en un sistema cualquiera por la expresión $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \omega t)$ y supondremos que esta cantidad es un *invariante:* si la fase tiene un cierto valor en el punto $\mathbf{x}'$ en el instante t' en el sistema S′, la fase deberá tener el mismo valor en el punto correspondiente $\mathbf{x}$, en el instante correspondiente t, del sistema S. Mantenemos esta hipótesis apoyándonos en el carácter periódico de la onda. Si las fases de dos sucesos en el espacio-tiempo difieren en un múltiplo entero de 2π en *un* sistema de referencia, las fases de la misma onda deben diferir en el mismo múltiplo entero en *cualquier* sistema de referencia. De aquí se sigue que las fases en los sistemas S′ y S pueden diferir, como máximo, en una constante y esta constante podrá ser absorbida en la razón A/A', en cuyo caso la fase es un *invariante,* de acuerdo con lo supuesto. Mediante esta hipótesis y nuestra elección del sistema S′ como sistema de reposo de la partícula, tenemos

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \omega t = -\omega' t' = -\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) t' \tag{7a}$$

La cantidad t' puede expresarse en función de $\mathbf{x}$ y t y de la velocidad $-\mathbf{v}$ con que el sistema de referencia S se mueve respecto del sistema S′, y la relación entre estas cantidades viene dada por la transformación de Lorentz que se estudió en el volumen I de esta serie *, a saber

$$t' = \frac{t - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{7b}$$

y si sustituimos esta expresión en (7a) obtenemos

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \omega t = \frac{(mc^2/\hbar)\left((\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c^2 - t\right)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{7c}$$

* Berkeley Physics Course, Vol. I, *Mecánica,* Cap. 11, Editorial Reverté.

Dado que esta relación debe valer para *todo* x y *todo t*, de ella se sigue que

$$\omega = \frac{(mc^2/\hbar)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{7d}$$

$$\mathbf{k} = \frac{(m\mathbf{v}/\hbar)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{7e}$$

Por otra parte, la velocidad de la partícula en el sistema S es precisamente **v**, puesto que se supuso que la partícula se encontraba en reposo en el sistema S'. La energía E y el impulso **p** de la partícula en el sistema S vienen dados, en consecuencia, por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{7f}$$

La comparación de las ecuaciones (7d)-(7f) conduce a

$$E = \hbar\omega, \qquad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{7g}$$

Con esto obtenemos de nuevo el resultado (5e) y vemos, además, que la ecuación (5b), que se introdujo ad hoc en la Sec. 5, debe, en efecto, ser válida en general si lo es en el sistema de reposo. Este razonamiento nos prueba, pues, que las relaciones (7g) son compatibles con la relatividad especial: hemos deducido efectivamente estas relaciones tomando como base la invariancia relativista.

8 Por consiguiente, siguiendo las huellas de De Broglie, nos hemos visto conducidos a la hipótesis de que puede haber una onda asociada con una partícula en movimiento y que esta onda está caracterizada por el vector de onda **k** ligado con el impulso **p** de la partícula por $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Dicho de otra manera, la longitud de onda λ de la onda material vendrá dada por la igualdad

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \tag{8a}$$

que se conoce con el nombre de ecuación de De Broglie y en la que la longitud de onda λ se llama *longitud de onda de De Broglie* de la partícula. Obsérvese que estas relaciones son también válidas para *fotones*.

A fin de ver cómo depende la longitud de onda de De Broglie de los parámetros de una partícula en movimiento, escribamos la relación (8a) en otras varias formas posibles. La forma

$$\lambda = \left(\frac{h}{mc}\right)\frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{(v/c)} \tag{8b}$$

nos dice que λ disminuye cuando aumenta la velocidad v. Para un valor fijo de de v, la longitud de onda λ es inversamente proporcional a la masa m.

9 Si E designa, como antes, la energía *total* de la partícula, podemos escribir

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}} = \frac{(hc/E)}{\sqrt{1-(mc^2/E)^2}} \tag{9a}$$

lo que prueba que, para m fijo, la longitud de onda λ disminuye cuando E aumenta. Para un valor constante de la energía total E, la longitud de onda λ aumenta con la masa m. Una partícula sin masa posee (para una energía dada) la menor longitud de onda de De Broglie, la cual viene dada por

$$\lambda = \frac{hc}{E} \tag{9b}$$

Puesto que esta expresión se obtiene a partir de (9a) haciendo $(mc^2)/E = 0$, vemos que también vale aproximadamente en el límite relativista extremo en que la velocidad v es muy próxima a c, o, dicho de otra manera, cuando la energía total es muy grande comparada con la energía en reposo.

Sea T la energía *cinética* de la partícula, en cuyo caso

$$E = T + mc^2 \tag{9c}$$

Substituyamos esta expresión de E en (9a), con lo que obtendremos

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}} = \frac{h}{\sqrt{2mT}}\,\frac{1}{\sqrt{1+T/(2mc^2)}} \tag{9d}$$

Para un masa en reposo m constante, la longitud de onda λ disminuye cuando aumenta la energía cinética T. Para un valor fijo de la energía cinética T, la longitud de onda λ decrece, análogamente, cuando m aumenta.

En el caso límite en que la velocidad de la partícula es muy pequeña comparada con c, también la razón T/mc^2 pasa a ser muy pequeña. Igualando a cero esta razón en la ec. (9d), obtenemos una expresión para la longitud de onda λ en la aproximación no-relativista

$$\lambda \cong \frac{h}{\sqrt{2mT}} \cong \frac{h}{mv} \tag{9e}$$

que hubiéramos podido también obtener, claro está, directamente a partir de (8a).

10 Queremos ahora ver si la hipótesis de De Broglie relativa a las ondas materiales se ve confirmada por los experimentos. Ante todo debemos convencernos de que la idea de ondas materiales no contradice nuestro conocimiento de sentido común en el campo de la física macroscópica.

Consideremos una partícula que es pequeña desde el punto de vista macroscópico. Supongamos, por ejemplo, que la masa m de la misma es 10^{-5} gm o 10 microgramos, y supongamos que esta partícula se mueve con una velocidad $v = 1$ cm/s. Utilizando la expresión no-relativista (9e) para la longitud de onda de De Broglie obtenemos en nuestro caso, $\lambda \cong 6{,}6 \times 10^{-22}$ centímetros, que es una longitud de onda ridículamente pequeña. La pequeñez de esta longitud de onda explica por qué las ondas materiales, si existen, no se manifiestan ya en la física macroscópica: las longitudes de onda son, simplemente, demasiado pequeñas para ser observadas. Podemos acudir a la analogía óptica a fin de comprender claramente este punto. El método de la óptica de los rayos es tanto más preciso cuanto menor es la longitud de onda comparada con todas las dimensiones de los instrumentos ópticos que intervienen. Para observar las propiedades ondulatorias de la luz en un experimento de óptica, hemos de disponer las cosas de manera que algunos parámetros geométricos de los instrumentos sean comparables con la longitud de onda de la luz: solamente entonces observaremos desviaciones respecto de la óptica geométrica, desviaciones que se manifiestan en la forma de los efectos de interferencia y difracción. Para detectar la presencia de las ondas materiales debemos, análogamente, disponer el experimento de manera que la longitud de onda sea comparable con algún parámetro geométrico del instrumento. En particular, convendría intentar hallar una red que nos permitiera observar efectos de difracción.

11 El examen de la fórmula (8b) pone de manifiesto que, si queremos conseguir una longitud de onda larga, habrá que procurar realizar el experimento con una partícula cuya masa sea la menor posible, a saber, el electrón, y, además, habrá que intentar mantener la velocidad tan pequeña cuanto se pueda. Dado que pretendemos estudiar el caso en que la velocidad es muy pequeña, podemos emplear sin más la expresión aproximada no-relativista (9e) para la longitud de onda de De Broglie. Si escribimos de nuevo esta expresión particularizada para electrones de masa m y energía *cinética* T, obtenemos

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \sqrt{\frac{150{,}4 \text{ eV}}{T}} \text{ ångströms} \qquad (11a)$$

La longitud de onda será así igual a un ångström $= 10^{-8}$ centímetros si la energía cinética del electrón es de 150,4 eV. Esta longitud de onda es del mismo orden de magnitud que la constante reticular de los cristales y, al igual que en el caso de los rayos X, podríamos intentar emplear una red cristalina como red de difracción.

Experimentos en esta dirección fueron realizados por vez primera por C. J. Davisson en colaboración con L. H. Germer, e independientemente por G. P. Thomson, en 1927 *. En el experimento de Davisson y Germer se estudió la *reflexión* de los electrones por la cara de un cristal, mientras que en el experimento de Thomson fue estudiada la *transmisión* de electrones a través de una fina película cristalina.

12 Consideremos con cierto detalle el experimento de Davisson-Germer: el dispositivo experimental se representa esquemáticamente en la fig. 12A.

Dejaremos que sea Davisson quien describa la historia de su propio experimento: la cita se ha tomado de su conferencia Nobel, dada en Estocolmo en 1937. (Davisson y Thomson compartieron el Premio Nobel de 1937 por sus descubrimientos.) Esta cita es interesante porque revela que el resultado experimental no fue tan concluyente en 1927 como nos parece hoy retrospectivamente. Después de una discusión preliminar de la hipótesis de De Broglie, Davisson prosigue:

* C. J. Davisson y L. H. Germer, "Diffraction of electrons by a crystal of nickel", *Physical Review* **30**, 705 (1927).

G. P. Thomson, "Experiments on the diffraction of cathode rays", *Proceedings of the Royal Society (Londres)* **117A**, 600 (1928), y "The diffraction of cathode rays by thin films of platinum", *Nature* **120**, 802 (1927).

Estaba implícito en la teoría que los haces de electrones, como los haces luminosos, debieran presentar propiedades ondulatorias, que dispersados por una red apropiada experimentarían difracción, pero, sin embargo, ninguno de los teóricos más importantes mencionó este interesante corolario. El primero en atraer la atención acerca del mismo fue Elsasser, quien en 1925 señaló que el poner de manifiesto la difracción permitiría establecer la existencia física de ondas de electrones. El escenario para el descubrimiento de la difracción de los electrones quedaba dispuesto en aquel momento.

Sería una satisfacción decirles que no bien la sugerencia de Elsasser se hizo pública, se iniciaron en Nueva York los experimentos que condujeron a poner de manifiesto la difracción de los electrones —y más lo sería aún el decir que el trabajo fue iniciado al día siguiente de llegar a América ejemplares de la tesis de De Broglie. La historia verdadera contiene menos perspicacia y más casualidad. El trabajo se inició realmente en 1919: con el descubrimiento casual de que el espectro energético de emisión de electrones secundarios tiene como límite superior la energía de los electrones primarios, incluso cuando éstos han sido acelerados en un salto de centenares de volts; con el de que existe, en efecto, una dispersión elástica de los electrones por los metales.

A partir de esto se desarrolló toda una serie de investigaciones relativas a la distribución angular de los electrones dispersados elásticamente. Y entonces de nuevo intervino la casualidad; se descubrió, puramente por azar, que la intensidad de dispersión elástica varía con las orientaciones de los cristales que provocan la dispersión. A partir de esto, de modo muy natural, se desarrolló toda una serie de investigaciones acerca de la dispersión elástica por un único cristal de orientación determinada previamente. El inicio de esta fase del trabajo tuvo lugar en 1925, el año que siguió a la publicación de la tesis de de Broglie, el año que precedió a los primeros grandes progresos en mecánica ondulatoria. Así, pues, el experimento de Nueva York no fue en sus comienzos una comprobación de la teoría ondulatoria. Tan sólo en el verano de 1926, después de que hube discutido estos trabajos de investigación en Inglaterra con Richardson, Born, Franck y otros, tomó este carácter.

La búsqueda de haces difractados comenzó en otoño de 1926, pero no fue sino hasta el comienzo del año siguiente que se encontraron —primero uno y luego veinte más en rápida sucesión. Diecinueve de éstos pudieron utilizarse para comprobar la relación entre longitud de onda e impulso y en todos los casos se halló que la fórmula de De Broglie $\lambda = h/p$ era correcta dentro de los límites de precisión de las medidas.

Recordaré brevemente el esquema del experimento. Un haz de electrones, de velocidad determinada de antemano, se dirigía contra una cara (111) de un cristal de níquel, conforme se indica esquemáticamente en la fig. 12A. Un colector destinado a aceptar tan sólo electrones dispersados elásticamente y sus vecinos próximos, se podía mover a lo largo de un arco en torno del cristal. Éste a su vez podía girar en torno del eje del haz incidente. Así era posible medir la intensidad de la dispersión elástica en cualquier dirección en frente de la cara del cristal, con la excepción de aquellas direcciones que se encontraban entre 10 y 15 grados del haz primario.

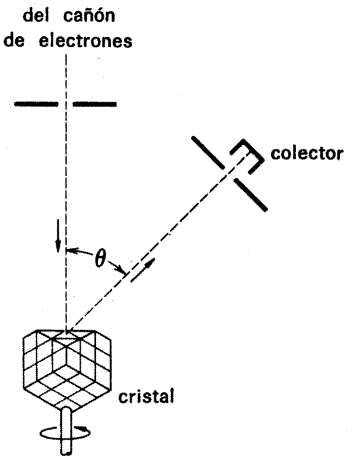


Fig. 12A Figura esquemática que muestra la difracción de electrones por la superficie de un solo cristal. Para una energía fija de los electrones incidentes, se observa la intensidad del haz dispersado *elásticamente* en función del ángulo θ.

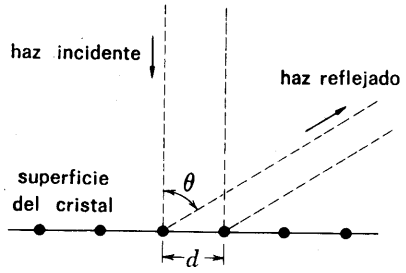


Fig. 13A Para ilustrar lo discutido en la Sección 13. La figura representa una disposición lineal de átomos igualmente espaciados. Podemos también interpretar un punto como una recta de átomos perpendicular al plano de la figura. Los máximos de difracción se presentan en direcciones tales que $d \operatorname{sen} \theta$ es un múltiplo entero de la longitud de onda.

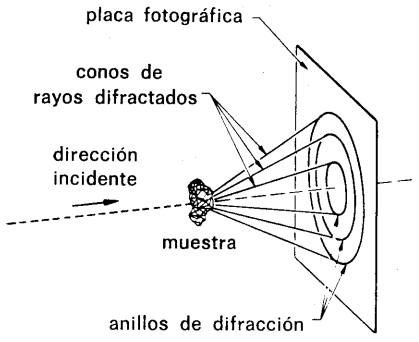


Fig. 14A Difracción de rayos X o de electrones por una muestra constituida por un agregado de pequeños cristales orientados al azar. Los rayos difractados se encuentran sobre un conjunto de conos circulares cuya disposición depende de la estructura cristalina y de las longitudes de onda incidentes.

Las fotografías 14B-C, 22A y 22C fueron obtenidas siguiendo este método. En los trabajos de difracción de electrones la muestra debe encontrarse en la región vacía del aparato de difracción, porque los electrones serían intensamente dispersados por aire o por cualquier "ventana" interpuesta en el tubo. Los rayos X son mucho menos dispersados y la muestra puede mantenerse en aire, fuera del tubo de rayos X.

13 En el experimento, el haz de electrones se producía mediante un cañón de electrones en el que éstos eran acelerados hasta la energía deseada, del orden de 50 eV. El cristal, naturalmente, estaba colocado en el vacío. Los electrones incidían perpendicularmente en un plano particular del cristal, conocido técnicamente como el plano (111). En este plano podemos imaginar un retículo de átomos regularmente espaciados sobre la superficie del cristal. Para comprender el principio en cuestión, consideremos primero un simple modelo unidimensional, representado esquemáticamente en la fig. 13A. (Consideraremos la teoría general un poco más adelante.) La onda incidente es difractada por cada átomo situado en la fila. En ciertas direcciones (en el plano de la figura) las ondas difractadas por todos los átomos se reforzarán entre sí, mientras que en otras direcciones tenderán a compensarse. La condición de interferencia constructiva (es decir, el reforzamiento mutuo de las ondas difractadas) es la de que las diferencias entre las distancias de los diferentes átomos al punto de observación sean múltiplos enteros de la longitud de onda. Si imaginamos que el punto de observación se encuentra muy lejos, vemos fácilmente, examinando la fig. 13A, que la condición de interferencia constructiva es

$$d \operatorname{sen} \theta = n\lambda \tag{13a}$$

donde n es un entero. Esta relación dice simplemente que la diferencia de camino desde dos átomos *vecinos* al punto de observación es un múltiplo entero de la longitud de onda. Por consiguiente, esperamos máximos de difracción en las direcciones para las que el ángulo θ satisface la condición (13a). Suponemos conocido el espaciado d del retículo: puede determinarse por otros medios, por ejemplo mediante medidas de difracción de rayos X.

Nuestra simple teoría se aplica, como es obvio, también al caso de un retículo bidimensional si imaginamos que cada punto en la fig. 13A representa realmente una fila de átomos en una dirección perpendicular al plano de la figura.

En un experimento típico los datos fueron los siguientes: $d = 2{,}15 \times 10^{-8}$ cm, $E = 54$ eV y se observó un máximo a $\theta = 50°$. Para $n = 1$ el valor observado experimentalmente, θ, da una longitud de onda de 1,65 Å, mientras que la longitud de onda calculada a partir de la ec. (11a) es de 1,67 Å, lo que constituye un acuerdo satisfactorio. Davisson observó también máximos de orden superior, correspondientes a $n > 1$, todos ellos en concordancia con las predicciones teóricas.

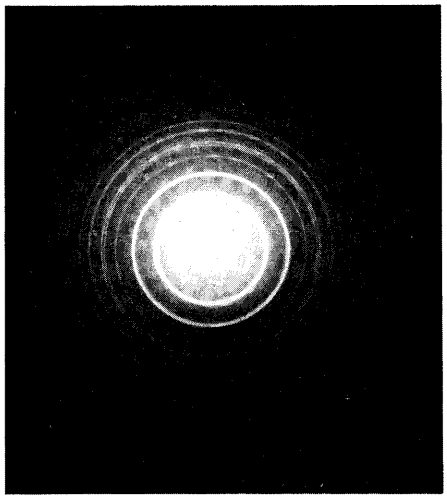


Fig. 14B Fotografía que muestra la difracción de electrones por estaño blanco, siguiendo el método indicado en la figura 14A. Cristales de estaño muy pequeños (de unos 300 Å de tamaño) estaban depositados sobre una fina película de monóxido de silicio. La película se colocaba como muestra en un microscopio electrónico que se utilizaba aquí como aparato de difracción de electrones. La muestra se iluminaba con electrones cuya energía era de 100 keV. (Esto corresponde a una longitud de onda de unos 0,04 Å). Los anillos de difracción que pueden verse resultan de las intersecciones de los conos en la figura 14A con la placa fotográfica.

La finalidad de este experimento concreto de difracción fue el comprobar la estructura cristalina de los cristales de estaño muy pequeños formados en un proceso de evaporación. *(Fotografía proporcionada por el doctor W. Hines y el profesor W. Knight, Berkeley.)*

14 El método de Thomson es análogo al llamado método de Debye-Scherrer en los estudios de difracción de rayos X. Un haz incidente unidireccional monocromático de rayos X o de electrones es dispersado por una muestra constituida por un número muy grande de pequeños microcristales orientados al azar. La teoría predice que las ondas difractadas aparecerán a lo largo de superficies de conos circulares centrados en torno de la dirección de incidencia. (Véase fig. 14A). Si la radiación dispersada se registra fotográficamente sobre una placa perpendicular a dicha dirección, obtendremos un sistema de circunferencias concéntricas. La distribución de éstas depende de manera característica de la estructura del cristal y, si se conoce la longitud de onda, es posible determinar completamente la geometría de la red cristalina.

Las figs. 14B y 14C son dos fotografías obtenidas siguiendo este método, la primera con electrones y la segunda con rayos X. En ambos casos las muestras eran agregados de pequeños cristales de estaño blanco. La semejanza entre las figuras de circunferencias es sorprendente. Incluso si no supiéramos nada acerca de la teoría detallada de la difracción de ondas en redes, una ojeada a estas dos fotografías nos convencería inmediatamente de que los rayos X y los electrones se difractan de la misma manera.

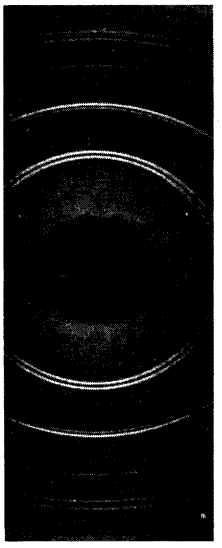


Fig. 14C Fotografía que muestra la difracción de rayos X por estaño blanco, siguiendo el método indicado en la figura 14A. (En realidad, no se trata de una placa fotográfica plana, sino de una tira de película que se curvó en forma de arco de circunferencia durante la exposición. Esto no altera la esencia del experimento.) La muestra estaba en la forma de una pequeña cantidad de estaño finamente pulverizado, con un tamaño medio de los cristales de un micrón aproximadamente. La longitud de onda empleada era de unos 1,5 Å.

Esta figura debe compararse cuidadosamente con la figura 14B. La semejanza es sorprendente y no puede caber duda ninguna de que los electrones y los rayos X son difractados de la misma manera por los cristales de estaño. *(Fotografía proporcionada por Mr. George Gordon, Berkeley.)*

15 Los experimentos de Davisson y Germer y los experimentos con ellos relacionados de Thomson prueban, pues, más allá de cualquier duda razonable, que existen ondas materiales y

que sus longitudes de onda (por lo menos en el caso de los electrones) vienen dadas por la relación de De Broglie. En 1929 Estermann y Stern * probaron que los átomos de helio y las moléculas de hidrógeno son también difractadas de acuerdo con la teoría de De Broglie. Sus experimentos reforzaron en gran medida nuestra creencia en la universalidad de las ondas materiales, puesto que aquéllos suponen la intervención de dos partículas nuevas muy diferentes del electrón. Aparte la diferencia en masa, los átomos de helio y las moléculas de hidrógeno difieren del electrón en que son claramente sistemas compuestos, mientras que el electrón es (quizás) una partícula elemental. Por consiguiente, los experimentos prueban que el átomo como un todo y la molécula como un todo son ondas, y acaso nos sintamos ahora dispuestos a creer que, en condiciones experimentales adecuadas, un gran piano se comportará también como una onda.

Más tarde se puso de manifiesto que también los neutrones muy lentos se difractaban en redes cristalinas y, a partir de estas observaciones, se han desarrollado técnicas que se usan hoy de manera rutinaria para investigar la estructura de cristales y moléculas como complemento de los métodos de difracción de rayos X y de electrones **.

Teoría de la difracción en una estructura periódica ***

16 Consideremos, con cierto pormenor, la difracción producida por una red de una, dos o tres dimensiones. Una red es una estructura periódica que podemos imaginar construida con copias de una celda *unidad*. Las figs. 16A-C ilustran esta idea. En el caso de una red unidimensional, la celda unidad es, simplemente, un segmento; para una red bidimensional, un paralelogramo, y para una red tridimensional, un paralelepípedo. Imaginemos, para simplificar, que un átomo (de especie dada) se encuentra situado en cada vértice de la celda unidad. Las posiciones de todos los átomos en la red vienen entonces determinados por

$$\mathbf{x} = n_1\mathbf{e}_1 \tag{16a}$$

* Estermann y O. Stern, "Beugung von Molekularstrahlen", *Zeitschrift für Physik* **61**, 95 (1930).

** D. P. Mitchell y P. N. Powers, "Bragg reflection of slow neutrons", *The Physical Review* **50**, 486 (1936). Véase también E. O. Wollan y C. G. Shull, "Neutron diffraction and associated studies", *Nucleonics* **3**, 8 (1948).

*** Las secciones 16-22 pueden omitirse en una primera lectura, pero no dejen de mirar las fotografías en la Sec. 22.

para la red lineal, por

$$\mathbf{x} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 \tag{16b}$$

para la red plana y por

$$\mathbf{x} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3 \tag{16c}$$

para la red tridimensional. Los números n_1, n_2 y n_3 son aquí enteros y los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ definen las celdas unidad, conforme muestran las figs. 16A-C.

En lo que sigue supondremos que la red contiene un número de átomos finito, pero muy grande. Para evitar malentendidos, haremos constar explícitamente que estamos considerando distribuciones de una, dos y tres dimensiones encajadas en el espacio *tri*dimensional, y no, por ejemplo, una red bidimensional en un universo de dos dimensiones.

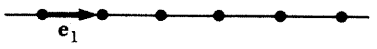


Fig. 16A Disposición lineal de átomos igualmente espaciados.

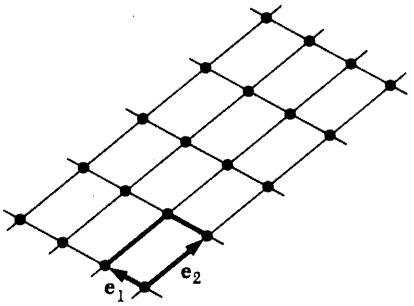
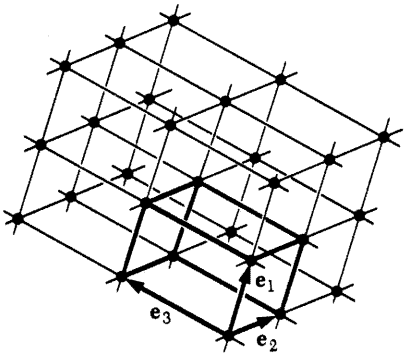


Fig. 16B Red bidimensional. La celda unidad se define por los dos vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. Sus lados se han dibujado más gruesos en la figura. Toda la red se construye a partir de copias de la celda unidad.



(*c*)

Fig. 16C Red de tres dimensiones. Las aristas de la celda unidad se han dibujado también aquí más gruesas. El vector posición de un punto cualquiera de la red es cierta combinación lineal con coeficientes enteros de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$. (Estos vectores no son necesariamente perpendiculares entre sí.)

17 Examinemos la situación ilustrada esquemáticamente en la fig. 17A. Una onda es emitida por un foco situado en el punto $\mathbf{x}_i$. Es difractada por una distribución ordenada de átomos idénticos y la onda difractada, o *dispersada,* se observa en el punto $\mathbf{x}_0$. Supondremos que el centro de la distribución (ocupado por uno de los átomos) se encuentra en el origen de coordenadas y que las distancias $x_i = |\mathbf{x}_i|$ y $x_0 = |\mathbf{x}_0|$ son muy grandes comparadas con las dimensiones lineales del sistema. Estudiaremos primero el caso de una distribución unidimensional. Consideraciones muy parecidas se aplican también a la dispersión por sistemas bidimensionales o tridimensionales.

La longitud del camino desde el foco al observador pasando por el origen es $s_0 = x_i + x_0$. Sea $s(n_1)$ la longitud del camino desde el foco al observador pasando por el átomo cuya posición viene determinada por el entero n_1 de acuerdo con la fórmula (16a). Tenemos entonces

$$s(n_1) = |\mathbf{x}_i - n_1\mathbf{e}_1| + |\mathbf{x}_0 - n_1\mathbf{e}_1| \tag{17a}$$

Las ondas que llegan al observador procedentes de los diferentes átomos interfieren entre sí y la amplitud de la onda resultante es la suma de las amplitudes debidas a cada átomo. Para que se presente un máximo de difracción todas las ondas deben llegar en fase, puesto que de no ser así se compensarían las ondas procedentes de átomos diferentes. La condición para que esto ocurra es la de que para cada átomo, es decir, para

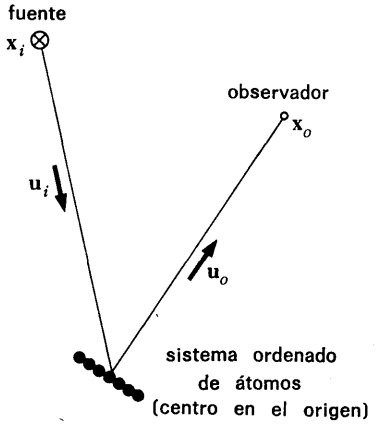


Fig. 17A Difracción por una disposición lineal. (Para ilustrar lo discutido en la Sec. 17.) En el texto se ha supuesto que las distancias desde el sistema ordenado a la fuente y al observador son grandes comparadas con el tamaño del sistema, que está constituido por un número de átomos muy grande, pero finito.

El vector unidad $\mathbf{u}_i$ apunta en el sentido del haz incidente, y el vector unidad $\mathbf{u}_0$, en el del haz dispersado.

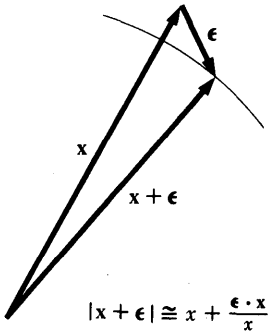


Fig. 17B Para ilustrar una importante aproximación que se hace frecuentemente en física. Si la longitud del vector ϵ es muy pequeña comparada con la del vector $\mathbf{x}$, éste es casi paralelo al vector $\mathbf{x}+\epsilon$. La longitud de este último es aproximadamente igual a la longitud de $\mathbf{x}$ más la proyección de ϵ sobre la dirección de $\mathbf{x}$.

cada entero n_1, la diferencia de camino $s(n_1) - s_0$ sea un múltiplo entero de la longitud de onda λ.

Dado que hemos supuesto que el tamaño del sistema ordenado es muy pequeño comparado con las distancias al foco y al observador, el vector $n_1\mathbf{e}_1$ será muy pequeño en comparación con los vectores $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_0$. Podemos escribir una expresión aproximada para las dos distancias que aparecen en el segundo miembro de la ec. (17a), a saber

$$|\mathbf{x}_i - n_1\mathbf{e}_1| \cong x_i - n_1\frac{(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{e}_1)}{x_i} \tag{17b}$$

$$|\mathbf{x}_0 - n_1\mathbf{e}_1| \cong x_0 - n_1\frac{(\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e}_1)}{x_0} \tag{17c}$$

El significado geométrico de esta aproximación es desde luego evidente en la figura 17B.

Tenemos entonces para la diferencia de caminos

$$s(n_1) - s_0 \cong -n_1\mathbf{e}_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{x}_i}{x_i} + \frac{\mathbf{x}_0}{x_0}\right) \tag{17d}$$

18 Sea $\mathbf{u}_i$ el versor correspondiente a la dirección orientada del haz incidente y sea $\mathbf{u}_0$ el versor que apunta en el sentido del haz difractado. Tenemos entonces

$$\mathbf{u}_i = -\frac{\mathbf{x}_i}{x_i}, \qquad \mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{x}_0}{x_0} \tag{18a}$$

Si en (17d) hacemos ahora que x_i y x_0 tiendan a infinito, obtenemos

$$s(n_1) - s_0 = n_1\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0) \tag{18b}$$

y la condición para que exista un máximo de difracción se escribe

$$\frac{n_1\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0)}{\lambda} = n_1' \tag{18c}$$

donde n_1' debe ser un entero para cada valor entero elegido n_1. Es obvio que así ocurrirá si y solamente si

$$\frac{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0)}{\lambda} = m_1 \tag{18d}$$

donde m_1 es un entero. Podríamos haber llegado a esta conclusión inmediatamente. Las ondas procedentes de un par cualquiera de átomos llegan en fase entre sí si y solamente si las ondas que proceden de dos átomos *vecinos* llegan en fase, y esto es justamente lo que dice la condición (18b).

Utilizando la relación de De Broglie podemos escribir (18b) de otra forma, que es interesante desde el punto de vista físico. Sea $\mathbf{p}_i$ el impulso incidente y $\mathbf{p}_0$ el impulso en el haz dispersado. Tenemos entonces

$$\frac{\mathbf{u}_i}{\lambda} = \frac{\mathbf{p}_i}{h}, \qquad \frac{\mathbf{u}_0}{\lambda} = \frac{\mathbf{p}_0}{h} \tag{18e}$$

y la condición (17d) puede escribirse

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{q} = m_1 h \tag{18f}$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ es el impulso cedido al sistema. Cuando éste es unidimensional, la condición de difracción máxima es, por lo tanto, la de que el producto escalar del impulso transferido $\mathbf{q}$ por el vector $\mathbf{e}_1$ sea un múltiplo entero de h: el impulso que se cede en la dirección del sistema de átomos está "cuantificado".

19 Se ha supuesto tácitamente en nuestra situación que el proceso de dispersión es *elástico,* lo que significa que la energía (o la frecuencia) de la partícula dispersada es la misma que la energía (o la frecuencia) de la incidente. Esto implica otra condición: el módulo del impulso incidente es el mismo que el módulo del impulso dispersado. Por consiguiente, las posiciones de los máximos de difracción están determinadas por las dos condiciones

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{q} = m_1 h \tag{19a}$$

y

$$|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_0| \tag{19b}$$

donde m_1 es un entero cualquiera.

En el caso de una distribución ordenada *infinita,* el impulso dispersado debe satisfacer las condiciones (19a) y (19b) exactamente. Para una distribución *finita,* observamos también una cierta dispersión fuera de las direcciones definidas por las condiciones que preceden. Que los máximos de difracción sean más o menos acusados (considerados como funciones del án-

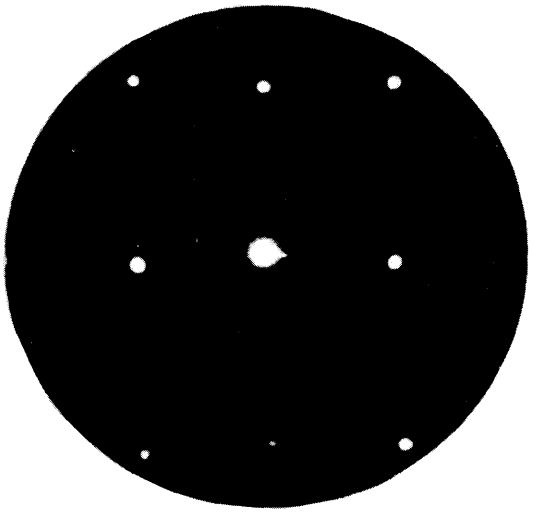
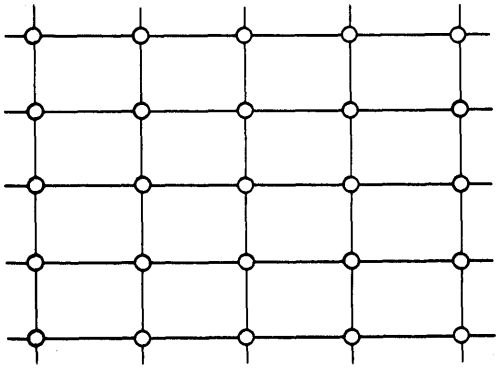


Fig. 20A (arriba). Figura de difracción de electrones dispersados hacia atrás por la cara de un cristal de níquel. Los electrones incidían perpendicularmente sobre la superficie del cristal y su energía era de 76 eV. Éste es un caso típico al que es aplicable nuestra teoría de la difracción por una red bidimensional.

Fig. 20C (abajo). Simetría plana de esta cara particular del cristal. Podemos imaginar que los pequeños círculos representan los átomos de níquel en la capa superficial. La figura de difracción presenta una simetría rectangular semejante. Una pregunta al lector: ¿Están orientadas correctamente las dos figuras, la una respecto de la otra, o debería girarse de 90° la figura inferior? *(Fotografía de difracción de electrones proporcionada por el doctor A. U. Mac-Rae, Bell Telephone Laboratories, New Jersey.)*



gulo) depende del número de átomos en el sistema. Supondremos que este número es grande y que, por consiguiente, las partículas dispersadas emergen en direcciones muy bien definidas, precisamente las dadas por (19a) y (19b). Estas ecuaciones definen un conjunto de conos, uno para cada valor entero m_1. Estos enteros están sujetos, naturalmente, a la condición

$$|m_1| \leqq 2|\mathbf{e}_1|\,|\mathbf{p}_i|/h \tag{19c}$$

dado que la transferencia de impulso no puede ser mayor que el doble del impulso incidente.

20 Podemos encontrar fácilmente las condiciones correspondientes para los máximos de difracción en el caso de sistemas ordenados en dos dimensiones. La condición (19a) debe cumplirse en cada una de las direcciones de la red, es decir, para cada recta que contiene más de un átomo. En particular, debe valer para los vértices de la celda unidad, y tenemos así las condiciones

$$\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) = m_1 h, \qquad \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) = m_2 h \tag{20a}$$

$$|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_0| \tag{20b}$$

donde m_1 y m_2 son enteros cualesquiera. Podemos de nuevo decir que el impulso cedido a la red plana está "cuantificado". Para probar esto más claramente, definamos dos vectores $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ en el plano $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ por las condiciones

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{q}_1 &= h, & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{q}_1 &= 0 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= 0, & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{q}_2 &= h \end{aligned} \tag{20c}$$

Estas ecuaciones tienen siempre una única solución. Obsérvese que los vectores $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ no tendrán, en general, las mismas direcciones que los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$, a menos que la red sea rectangular.

Las condiciones (20a) nos dicen entonces que

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0 = m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}^* \tag{20d}$$

donde m_1 y m_2 son enteros cualesquiera y el vector $\mathbf{q}^*$ es un vector arbitrario perpendicular al plano de la red. La transferencia de impulso *en* el plano de la red está cuantificado, pero no lo está su componente ortogonal. Su módulo viene determinado por la condición (20b) que nos dice que la disper-

sión es elástica. Podemos, por lo tanto, encontrar varias soluciones de las ecuaciones (20a) y (20b) con tal que el impulso incidente no sea demasiado pequeño (es decir, con tal que la longitud de onda no sea demasiado grande). Los rayos difractados emergen en este caso en un cierto número de direcciones discretas, muy bien definidas, y no a lo largo de conos como ocurría en el caso de una ordenación unidimensional.

En el experimento de Davisson y Germer los electrones de baja energía no penetran prácticamente en el cristal. La difracción se debe a los átomos en la capa superficial y, por consiguiente, es aplicable a este caso la teoría de las redes bidimensionales.

21 En el caso de un sistema ordenado en tres dimensiones, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) &= m_1 h, \\ \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) &= m_2 h, \\ \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) &= m_3 h \end{aligned} \tag{21a}$$

$$|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_0| \tag{21b}$$

donde m_1, m_2 y m_3 son enteros cualesquiera. Por analogía con lo que hicimos en la sección precedente, definamos tres vectores $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ y $\mathbf{q}_3$ por las condiciones

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{q}_1 &= h, & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{q}_1 &= 0, & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{q}_1 &= 0 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= 0, & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{q}_2 &= h, & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{q}_2 &= 0 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{q}_3 &= 0, & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{q}_3 &= 0, & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{q}_3 &= h \end{aligned} \tag{21c}$$

Estas ecuaciones tienen siempre una solución única. Podemos escribir las ecuaciones (21a) en la forma

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0 = m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 + m_3\mathbf{q}_3 \tag{21d}$$

La transferencia de impulso $\mathbf{q}$ está "cuantificada" de tal manera que debe ser una combinación lineal, con coeficientes enteros, de tres vectores $\mathbf{q}_1$ $\mathbf{q}_2$ y $\mathbf{q}_3$ determinados por la estructura geométrica de la red. Si examinamos atentamente la ec. (21b), observaremos que los posibles valores de la transferencia de impulso forman una red en el espacio de impulsos. Esta red se conoce con el nombre de *red recíproca* del cristal.

Para un impulso incidente arbitrario, en general no es posible satisfacer *las dos* ecuaciones (21d) y (21b). Las ecuaciones (21a) y (21b) juntas constituyen un sistema de cuatro ecua-

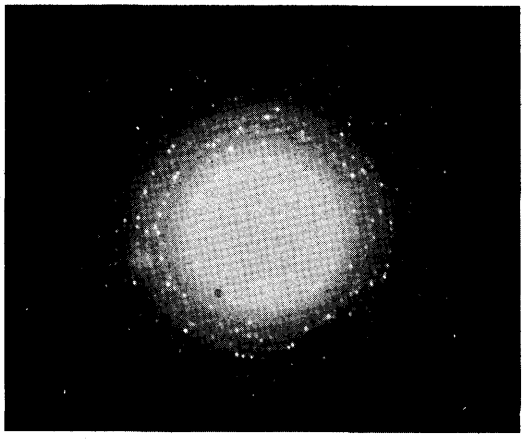
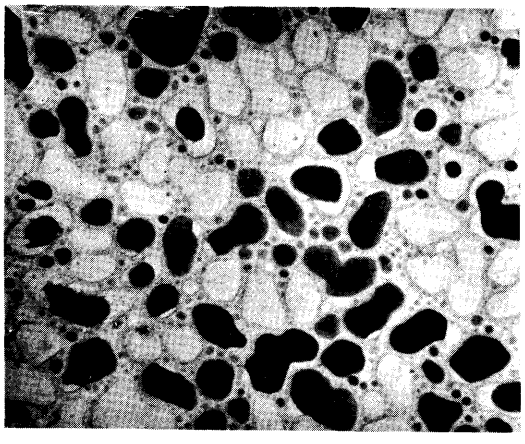


Fig. 22A-B La fotografía superior muestra anillos de difracción de electrones, obtenidos con el método ilustrado esquemáticamente en la figura 14A. La muestra consistía, como en la fotografía 14B, de pequeños cristales de estaño depositados sobre una fina película de monóxido de silicio. La fotografía inferior presenta el aspecto de la muestra en el microscopio electrónico (8 mm corresponden a 1000 Å). Las manchas oscuras son las imágenes de los cristales (su mayor o menor grado de oscuridad depende de la orientación). Las manchas más claras son huecos en el SiO ocupados antes por cristales que han desaparecido al preparar la muestra. El tamaño medio de los cristales es de unos 600 Å.

Al obtener la fotografía de difracción, el haz electrónico estaba limitado a una área relativamente pequeña de la muestra. Teniendo en cuenta la teoría de la Sec. 22, cabe esperar ver manchas individuales, como efectivamente muestra la fotografía, en vez de anillos bien definidos. *(Fotografías proporcionadas por el doctor W. Hines y el profesor W. Knight, Berkeley.)*



ciones para determinar las tres componentes del impulso final $\mathbf{p}_0$. Existirá una solución sólo si el cristal se encuentra orientado de manera adecuada.

22 Supongamos ahora que efectuamos un experimento de difracción con una muestra constituida por un número muy grande de microcristales orientados al azar. Existirán entonces siempre algunos microcristales orientados de tal manera en la muestra que las condiciones (21a) y (21b) pueden quedar satisfechas (por lo menos aproximadamente). Para una tal muestra, tenemos así dos condiciones para los máximos de difracción, a saber,

$$|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0| = |m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 + m_3\mathbf{q}_3| \tag{22a}$$

$$|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_0| \tag{22b}$$

donde m_1, m_2 y m_3 son enteros cualesquiera y $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ y $\mathbf{q}_3$ son los vectores de que se habló en la sección precedente, para alguna orientación particular de la red cristalina. Estas ecuaciones sí tienen solución, y vemos que los rayos difractados emergen a lo largo de un sistema de conos centrados en torno de la dirección incidente.

La fig. 14A muestra esquemáticamente cómo se realiza un experimento de difracción basado en la teoría que precede. Cuando se trabaja con rayos X, la muestra es a menudo una pequeña cantidad de un polvo fino constituido por muchos microcristales pequeños. Así es como se obtuvo la fotografía 14C. Las líneas sobre la película son las intersecciones de los conos (definidos por las condiciones (22a) y (22b)) con la misma.

Podemos comprender fácilmente que si la muestra es demasiado pequeña, en el sentido de que no contiene un número suficiente de cristales, la distribución de los rayos difractados a lo largo de los conos será muy desigual. No veremos circunferencias continuas sobre la placa fotográfica, sino más bien puntos individuales. Este efecto queda bellamente ilustrado por las fotografías 22A y 22C. Estas fotografías, que convendría comparar con la fotografía 14B, ponen de manifiesto la difracción de electrones de 100 keV por cristales de estaño. En este caso, las ondas de electrones penetraban por completo en los pequeños cristales. Como aparato de difracción se utilizó un microscopio electrónico. Las fotografías 22B y 22D, tomadas con el mismo microscopio electrónico, presentan el aspecto de la muestra.

No hay sino una constante de Planck

23 Este epígrafe acaso sorprenda al lector. Claro está que existe sólo una constante de Planck, por definición. ¿A qué profunda conclusión intenta llegar el autor partiendo de este hecho trivial?

El punto que nada tiene en absoluto de trivial es el de que no *necesitamos* más de una "constante del tipo Planck" en la física. Consideremos la relación de De Broglie escrita en la forma

$$h = \lambda p \tag{23a}$$

donde p es el impulso de la partícula y λ su longitud de onda de De Broglie. Tanto p como λ son cantidades que se pueden medir independientemente, y basta la medición de un par de variables correspondientes (p, λ) para poder determinar la constante de Planck h. Es un hecho *empírico* notable el de que siempre obtenemos el mismo valor para h, con independencia de la *especie* de partícula que estemos observando, y que esto sea así no es una trivialidad.

Acaso el lector no se siente impresionado por este hecho. Al fin y al cabo, podríamos *deducir* esta relación a partir de algunas ideas muy simples. Pero examinemos las premisas de nuestro razonamiento.

24 En nuestra discusión desarrollada en las Secs. 3-5 supusimos que hay una onda asociada con cada partícula material de tal manera que la velocidad de grupo de la onda es igual a la velocidad de la partícula. Admitimos, además, que el modelo partícula-onda satisface el principio de relatividad especial, lo que significa que la relación entre el vector de onda y la frecuencia de la onda, de una parte, y el impulso y la energía de la partícula, de otra, debe ser la misma en *cualquier* sistema inercial. Partiendo de esta base llegamos a la conclusión de que

$$E = \hbar\omega, \qquad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{24a}$$

donde E es la energía, $\mathbf{p}$ el impulso, ω la frecuencia y $\mathbf{k}$ el vector de onda, y donde $\hbar$ es una constante definida por

$$E_0 = mc^2 = \hbar\omega_0 \tag{24b}$$

en función de la energía en reposo E_0 y de la "frecuencia en reposo" ω_0.

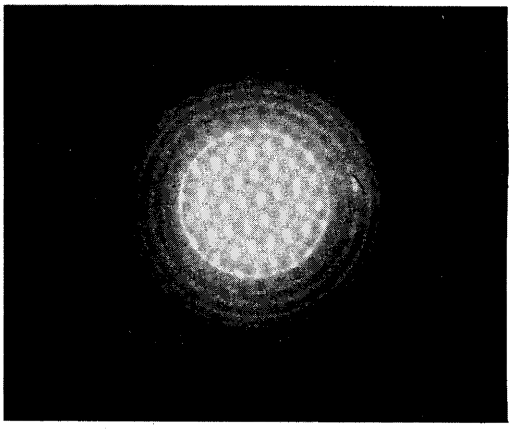
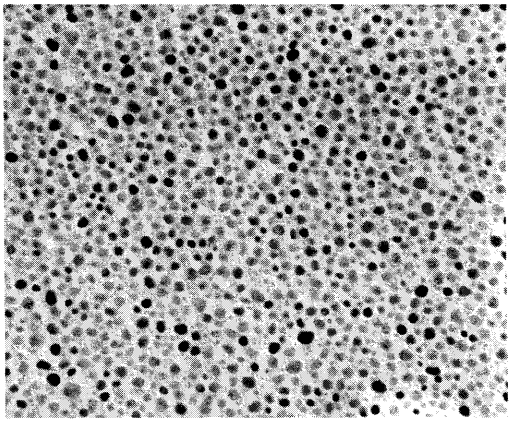


Fig. 22C-D Estas dos fotografías se obtuvieron de la misma manera que las 22A-B. La muestra estaba constituida aquí por cristales más pequeños (tamaño medio, unos 200 Å) y la figura de difracción se debe a un número mucho mayor de cristales. Los anillos están mejor definidos, aunque pueden verse manchas individuales. Compárense las fotografías 22A y 22C con la fotografía 14B, en la que ya no cabe observar tales manchas. Esta última fotografía se tomó con un haz de electrones que atravesaba una porción mucho mayor de la película. Según esto, cabe esperar una figura de anillos bien definida, puesto que todas las orientaciones de los cristales se encuentran correctamente representadas en la muestra.

La energía de los electrones era de 100 keV para las figuras 14B, 22A y 22C. Esto corresponde a una longitud de onda de unos 0,04 Å.

(Fotografías proporcionadas por el doctor W. Hines y el profesor W. Knight, Berkeley.)



¿Cómo llegamos a la conclusión de que la constante $\hbar$ es realmente la constante de Planck? Simplemente, fue una *conjetura.* La relación $E = \hbar\omega$ es válida para fotones y resulta tentador el suponer que también será válida para partículas materiales. Pero éste es precisamente el punto crucial: ¿Es *realmente* válida la primera relación (24a) para todas las partículas materiales?

Por lo tanto, lo que en realidad dedujimos en las Secs. 3-5 fue que la conexión entre energía, impulso, frecuencia y vector de onda es

$$E = C\omega, \qquad \mathbf{p} = C\mathbf{k} \tag{24c}$$

donde C es una constante característica de la partícula, y esta constante se define, por ejemplo, por

$$C = \frac{E_0}{\omega_0} \tag{24d}$$

No existe, sin embargo, razón alguna por la que C tenga que ser la *misma* constante para *todas* las partículas. Nuestro universo pudiera haber sido diferente y podríamos haber encontrado, experimentalmente, que $C = \hbar$ para fotones, $C = 7\hbar$ para electrones, $C = 17\hbar$ para protones y, para colmo, podríamos haber encontrado que mientras existen ondas de De Broglie asociadas con electrones y protones, ¡*no* hay ondas materiales asociadas con neutrones!

25 Afortunadamente, el material experimental de que disponemos parece excluir la horrible posibilidad de que las "constantes del tipo Planck" C sean diferentes para diferentes especies de partículas. Decimos "afortunadamente" porque nuestra actual formulación, estéticamente satisfactoria, de la mecánica cuántica depende por modo esencial de la hipótesis de que $C = \hbar$ es una constante universal, independiente del tipo de partícula. Si *no* fuera éste el caso, la teoría de las partículas elementales y de sus interacciones debería ser realmente muy distinta.

¿En qué medida se cumple experimentalmente la hipótesis de que $C = \hbar$ para *cualquier* especie de partícula? Experimentos directos, análogos a los experimentos de Davisson y Germer, o de Thomson, se han llevado a cabo únicamente para unos pocos tipos de partículas. Dichos experimentos se pueden interpretar muy fácilmente como comprobaciones de la relación $h = \lambda p$, pero son, naturalmente, de precisión limitada.

Apoyan nuestra creencia en la universalidad de las relaciones (24a), pero la base real de nuestra creencia en estas relaciones es el éxito general de la mecánica cuántica. Hay una enorme cantidad de pruebas experimentales que apoyan las relaciones (24a) indirectamente. La interpretación de estas pruebas no es siempre tan clara y simple como en el caso de la difracción de electrones en cristales, pero tomada en su totalidad es muy convincente. Nuestra creencia en que las relaciones (24a) son *exactamente* verdaderas es en cierto modo análoga a nuestra creencia en que la relación $E_0 = mc^2$ es también *exactamente* verdadera. Las pruebas directas en favor de esta última relación pesan mucho, pero el conjunto de pruebas indirectas concernientes a la validez general de las ideas de la relatividad especial es lo que realmente nos convence. No hay ni el más ligero indicio, en el material experimental con que contamos, de que las relaciones (24a) o la relación $E_0 = mc^2$ puedan ser sólo aproximadamente verdaderas. Suponemos que lo son exactamente, y las consideramos como piedras angulares de la teoría física.

Recordemos nuestra discusión presentada en la Sec. 12, capítulo 2. Decíamos que, debido al papel fundamental que representan las constantes c y $\hbar$ en la física cuántica relativista, bien se pudiera elegir un sistema de unidades en el cual $\hbar = c = 1$. Este sistema de unidades tendría, evidentemente, bien poco sentido si hubiera una diferente constante C del tipo Planck para cada partícula. Dado que creemos que hay solamente una constante de dicho tipo, ello significa que, por ejemplo, la masa, la energía y la frecuencia están siempre ligadas entre sí de la misma manera y podemos considerar las palabras "masa", "energía" y "frecuencia" como nombres diferentes de la misma cosa *.

26 Teniendo en cuenta las relaciones (24a), podemos re-formular las leyes de conservación de la energía y del impulso válidas para los procesos de colisión.

Entendido el concepto en un sentido general, una colisión se puede describir como sigue. En algún tiempo pasado, un cierto número de partículas están en movimiento y muy separadas unas de otras. Sean $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$, ..., $\mathbf{p}'_i$ sus impulsos y E'_1,

* El autor preferiría emplear el término "masa" solamente para designar la "masa en reposo" de un sistema aislado (es decir, la energía en reposo dividida por c^2). Según este uso del término, "la masa de una partícula", esté o no en movimiento, significa la masa en reposo de la partícula. Otros autores hablan a menudo de la "masa" de una partícula al referirse a la energía total dividida por c^2.



Es posible que el lector se pregunte si las ondas acústicas obedecen también a las relaciones (24a). Efectivamente, si lo hacen, y a las "partículas" de las ondas acústicas las llamamos *fonones*. La energía de una onda acústica, por ejemplo en un sólido, se manifiesta formando paquetes de magnitud $\hbar\omega$, donde ω es la frecuencia.

Los fonones no se consideran partículas *elementales*, porque su comportamiento puede explicarse completamente por el de las partículas "reales" en el sólido. Las ondas elásticas son movimientos colectivos de electrones y núcleos. Sin embargo, a menudo resulta útil imaginar los fonones de la misma manera como imaginamos las otras partículas, y, recíprocamente, es a veces útil imaginar las "partículas reales" como si fuese "ondas acústicas en el éter".

E'_2, ..., E'_i sus energías. Cuando decimos que las partículas se encuentran inicialmente "bien separadas" entre sí, queremos decir que inicialmente las partículas se mueven en condiciones tales que todas las interacciones entre ellas son prácticamente nulas en aquel tiempo pasado. Esta idea tiene sentido si suponemos que las fuerzas entre las partículas tienden rápidamente a cero al aumentar la distancia entre ellas. Al principio, por lo tanto, cada partícula se mueve como si no existieran las demás. A medida que el tiempo transcurre, las partículas pueden converger en una "región de colisión" y entran en juego las fuerzas que actúan entre ellas. Tiene lugar una interacción, y en este proceso las partículas son desviadas. Además, algunas de ellas pueden ser destruidas y es posible que se creen nuevas partículas.

Si esperamos un tiempo suficientemente largo, las partículas que han intervenido en el proceso de colisión se dispersarán de nuevo y las interacciones entre las mismas dejarán efectivamente de actuar, por la simple razón de que las partículas no se encuentran ya juntas entre sí. A partir de cierto instante en el futuro, cada partícula se moverá como si no existieran las otras. Sean $\mathbf{p}''_1$, $\mathbf{p}''_2$, ..., $\mathbf{p}''_j$ los impulsos de las partículas después de la colisión y E''_1, E''_2, ..., E''_j sus energías.

Las leyes de conservación nos dicen que

$$\sum_{r=1}^{i} E'_r = \sum_{s=1}^{j} E''_s, \qquad \sum_{r=1}^{i} \mathbf{p}'_r = \sum_{s=1}^{j} \mathbf{p}''_s \tag{26a}$$

La energía inicial total es igual a la energía total final, y el impulso total inicial es igual al impulso total final. La condición de que las partículas efectivamente no interactúan entre sí ni en "el pasado" ni en "el futuro" es esencial, porque de otro modo la energía total no sería igual a la suma de las energías de las partículas individuales. Si las partículas interactúan entre ellas, hemos de incluir una "energía de interacción" en la expresión de la energía total.

El lector debe advertir que las partículas no tienen por qué ser necesariamente elementales; muy bien puede tratarse de partículas compuestas, como átomos o núcleos. Al discutir procesos de colisión entendemos por "partículas" cualquier objeto que es razonablemente estable, de forma que se le pueda asignar un impulso, una energía y una masa (en reposo) no bien se encuentre suficientemente separado de otros objetos similares. Como ejemplo podemos considerar el choque de un áto-

mo de helio neutro y un electrón. Supongamos que el átomo de helio se ioniza en la colisión. Hay entonces *dos* partículas iniciales, a saber, el electrón y el átomo de helio neutro. Hay *tres* partículas finales, a saber, dos electrones y un ión de helio simplemente cargado. (Naturalmente, no es éste el único posible resultado de la colisión. El átomo de helio podría haber perdido sus dos electrones en el suceso, o acaso no haber perdido ninguno. Además, el suceso puede conducir a la emisión de uno o varios fotones.)

27 Si reconocemos ahora que, debido a las relaciones (24a), existe una frecuencia y un vector de onda asociados con cada una de las partículas iniciales y finales, podemos escribir las leyes de conservación (26a) en la forma

$$\sum_{r=1}^{i} \omega'_r = \sum_{s=1}^{j} \omega''_s, \qquad \sum_{r=1}^{i} \mathbf{k}'_r = \sum_{s=1}^{j} \mathbf{k}'_s \tag{27a}$$

La suma de las frecuencias iniciales es igual a la suma de las frecuencias finales, y la suma de los vectores de onda iniciales es igual a la suma de los vectores de onda finales. Estas leyes de conservación son completamente equivalentes a las leyes de conservación (26a). Cada conjunto de leyes implica el otro. Ello ocurre así porque existe únicamente una constante de Planck *.

¿Pueden dividirse las ondas materiales?

28 En el capítulo que precede hemos discutido en qué sentido pueden, y no pueden, ser "divididos" los fotones. Deberíamos ahora emprender un análisis similar para las ondas materiales. Podemos ser bastante breves, porque el comportamiento de las ondas materiales es análogo en buena medida al com-

* Al lector con un grado avanzado de conocimientos de mecánica cuántica: podría parecer que cabe deducir la relación (27a) independientemente tomando como base la homogeneidad del espacio físico. Cierto es que puede llevarse a cabo esta deducción, con *tal que* aceptemos ciertas ideas características de la mecánica cuántica. Por otra parte, es claro que ningún argumento puramente lógico sería capaz de decirnos que existe una onda de De Broglie asociada con los protones sabiendo que los electrones tienen propiedades ondulatorias. Análogamente, la lógica pura no puede decirnos que la constante C debe ser la misma para todas las partículas. El impulso y el vector de onda tienen definiciones operacionales independientes y no tienen por qué estar ligados entre sí por la relación de De Broglie.

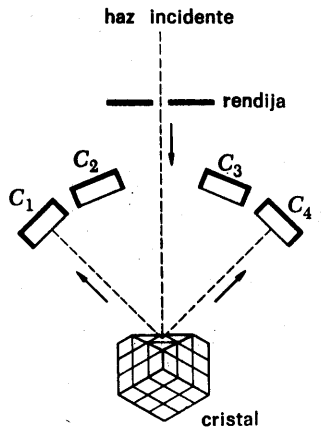


Fig. 29A Figura esquemática (para ilustrar lo discutido en la Sec. 29) que muestra un dispositivo para observar la difracción de electrones por la superficie de un cristal en varias direcciones. Dado que la onda incidente es "dividida" por el cristal, ¿encontraremos solamente medio electrón con el contador C_1?

portamiento de los fotones. En este respecto, la naturaleza es simple.

Para concretar, consideraremos ahora el caso de los electrones, pero nuestros resultados son completamente generales y se aplican igualmente bien a cualquier otra partícula.

En el capítulo precedente llegamos a la conclusión de que un fotón monocromático de frecuencia ω, no puede dividirse en el sentido de que seamos capaces de detectar, con una célula fotoeléctrica, un "fotón fraccionado" que lleva consigo solamente determinada fracción de la energía $\hbar\omega$. En análogo sentido tampoco un electrón puede ser dividido, porque nadie ha detectado jamás un "electrón fraccionado".

29 Consideremos un experimento de difracción de electrones como el indicado esquemáticamente en la fig. 29A. El haz de electrones incidente sobre la superficie del cristal posee un impulso bien definido. Los electrones reflejados se detectan mediante cuatro contadores, C_1 a C_4, e imaginamos que los contadores C_1 y C_4 están colocados en diferentes máximos de difracción, mientras que C_2 y C_3 lo están en mínimos de difracción.

La primera cosa a observar es que, experimentalmente, la velocidad de recuento de cada contador se conserva proporcional al flujo incidente de electrones cuando este flujo tiende a cero. Esta circunstancia descarta cualquier explicación de los fenómenos de difracción observados basada en efectos colectivos que suponen un gran número de electrones: realmente es cada electrón *individual* lo que presenta un comportamiento ondulatorio. Para que queden claros los resultados, podemos suponer que las velocidades de recuento en los contadores C_1 y C_4 son iguales y que las correspondientes a los contadores C_2 y C_3 son cero.

Supongamos ahora que un electrón se representa como un paquete de ondas *clásico*. Esperamos entonces que esta onda se "divida" en la reflexión sobre el cristal; parte de la onda es reflejada en la dirección del contador C_1 y parte de ella en la dirección del contador C_4, mientras que nada se refleja en las direcciones de los contadores C_2 y C_3. Dado que el paquete incidente original se "divide" de esta manera, cabría esperar que esta "división" se manifieste de alguna forma. Por ejemplo: que la energía transportada por la "parte" reflejada hacia el contador C_1 sea cierta fracción de la energía del electrón incidente. Sin embargo, *no* es esto lo que se encuentra experimentalmente, como podemos recordar apoyándonos en la pro-

pia descripción de Davisson: los electrones reflejados llevan consigo *toda* la energía de los electrones incidentes. Si un electrón es detectado por un contador, es *todo* el electrón lo que se detecta, con toda la carga electrónica y toda la masa electrónica. Conforme hemos dicho, nadie ha visto jamás un tercio de electrón. Los electrones tienen propiedades ondulatorias, pero no son, sin duda alguna, ondas clásicas: el paquete de ondas asociadas al electrón no puede dividirse como un paquete de ondas clásico.

30 Ahora bien, puede ocurrir que el lector no tenga ideas firmes acerca de las propiedades de una "onda clásica" y, por lo tanto, acaso la afirmación de que un electrón *no* es una onda clásica resulte un tanto insulsa. Concretaremos: aquello en que estamos pensando aquí es que, para la onda clásica, el cuadrado del módulo del vector amplitud en un instante dado y en un punto dado del espacio representa una cantidad física tal como una densidad de carga o una densidad de energía. Esta idea es análoga a la idea de la teoría electromagnética clásica, según la cual los cuadrados de los módulos de los campos eléctrico y magnético representan densidades de energía.

Supongamos, por ejemplo, que el cuadrado de la amplitud de onda es proporcional a la densidad de carga. Podríamos entonces calcular el flujo de carga en uno de los contadores y dado que la onda está "dividida" entre los contadores C_1 y C_4, cabría esperar encontrar solamente la mitad de la carga electrónica en el contador C_1. Esto pudiera ser verdad *en promedio*: si efectuamos el experimento de difracción con un número muy grande de electrones, el flujo de carga en el contador C_1 puede, en efecto, ser la mitad del flujo de carga total incidente *. Sin embargo, cada electrón individual es detectado o por el contador C_1 o por el contador C_4: la carga de un electrón individual *no* se divide.

Está en el espíritu de la mecánica cuántica el describir lo que ocurre como sigue. La onda electrónica incidente es dividida en dos partes por el cristal. Una parte de ella se propaga en la dirección del contador C_1, y la otra parte en la dirección del contador C_4. La *intensidad* de la onda en una dirección dada es proporcional al cuadrado del módulo de la amplitud de onda. En mecánica cuántica, la intensidad tiene una interpretación *probabilística*: una magnitud que depende

* Esto pude no ser cierto en la práctica, pero con vistas al razonamiento podemos suponer que cada electrón incidente pasa o por el contador C_1 o por el contador C_4.

cuadráticamente de la amplitud representa siempre la *probabilidad* de que algo ocurra. El flujo, calculado clásicamente, que penetra en uno de los contadores es proporcional a la probabilidad de que el contador efectivamente cuente.

Esta interpretación probabilística de las intensidades es un rasgo distintivo de la mecánica cuántica, claramente contrario al espíritu de una teoría ondulatoria clásica.

31 Por analogía con lo discutido en la Sec. 47, capítulo 4, el lector debiera considerar un experimento imaginario en el que los dispositivos son como los de la fig. 29A, pero con los contadores a una distancia muy grande, algo así como a un año luz del cristal. Supongamos que un electrón es detectado por el contador C_1. Sobre la base de la teoría ondulatoria clásica, también ahora sería difícil entender cómo las cantidades físicas, por ejemplo la carga, la energía y la masa, transportadas por la onda, pudieran concentrarse de pronto en el contador C_1 después de haberse extendido por toda una gran región del espacio. Con la interpretación probabilística que ofrece la mecánica cuántica, esta dificultad se desvanece: podemos describir lo que ocurre de manera coherente.

32 Hemos dicho que la onda se divide en dos (o varias) "partes" en el experimento de difracción representado en la figura 29A. El lector puede entonces preguntar: ¿es posible hacer que la onda que se mueve en la dirección del contador C_1 interfiera con la onda que se dirige al contador C_4? Si una onda electromagnética se divide por un espejo semiplateado, entonces las dos "partes" pueden ciertamente interferir una con otra y esperamos que este mismo sea el comportamiento de las ondas de De Broglie. En otras palabras, si de una manera u otra desviamos la onda que se dirige al contador C_4 y la "mezclamos" con la onda que se mueve en la dirección del contador C_1, ¿veremos entonces efectos de interferencia?

La respuesta es que sí esperamos ver efectos de interferencia. Por otra parte, hay que admitir que sería muy difícil en la práctica efectuar este experimento, exactamente tal como lo hemos descrito, con electrones. Afortunadamente, no hay necesidad de llevarlo a cabo, porque el propio hecho de que podamos observar la difracción de electrones con el cristal es prueba concluyente de la realidad de los efectos de interferencia. Cada átomo en la superficie del cristal da lugar a una onda difractada cuando se le "ilumina" con la onda incidente, y todas estas ondas difractadas se combinan para producir la figura global de interferencia que observamos con el cristal.

¿Qué significa el que se "combinen" las ondas difractadas por los átomos individuales? ¿Cómo describimos la "combinación"? Ésta se describe sumando las *amplitudes* de todas las ondas separadas para obtener la amplitud total de la onda que emerge del cristal. El cuadrado de esta amplitud resultante es una variable intensidad, en el sentido de la mecánica cuántica, que describe la respuesta de un detector.

33 En las Secs. 39-42, capítulo 4, discutimos un experimento de difracción con fotones por dos rendijas. Supongamos que llevamos a cabo el mismo experimento con electrones. El dispositivo se representa esquemáticamente en la fig. 33A. Con excepción del texto, la figura es idéntica a la 39A del capítulo 4. También el análisis es el mismo, y la intensidad $I(r, \theta)$, observada a una distancia grande comparada con la separación entre rendijas, viene dada por

$$I(r,\theta) = 4I_0(r,\theta)\cos^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta\right) \qquad (33a)$$

donde $I_0(r, \theta)$ es la intensidad que observaríamos con *una* sola rendija abierta.

La dependencia de la intensidad respecto del ángulo θ se puede determinar mediante contadores y la intensidad resulta entonces simplemente proporcional al número de cuentas por unidad de tiempo cuando el experimento se realiza con un *haz* de electrones.

Experimentos enteramente análogos a este experimento imaginario supersimplificado han sido realizados y de los resultados cabe concluir que la predicción correspondiente a la ec. (33a) es correcta *.

34 Si queremos ver el efecto de interferencia, *ambas* rendijas deben estar abiertas, con lo cual cada electrón debe pasar por las dos. Para tener la seguridad de que el electrón pasa por solamente *una* de las rendijas, debemos cerrar la otra, pero entonces, naturalmente, no observaremos la figura de difracción por dos rendijas. Si intentamos averiguar por qué rendija pasó el electrón, colocando contadores inmediatamente detrás

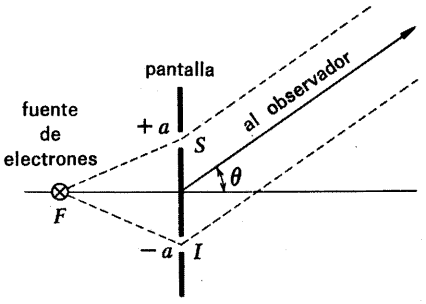


Fig. 33A Experimento imaginario de difracción de electrones por dos rendijas. Esta figura es la misma que la 39A del Cap. 4, con la excepción de que el foco luminoso F se ha substituido por una fuente de electrones.

* G. Möllenstedt y H. Düker, "Beobachtungen und Messungen an Biprisma-Interferenzen mit Elektronenwellen", *Zeitschrift für Physik* **145**, 377 (1956). Véase también R. G. Chambers, "Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux", *Physical Review* **5**, 3 (1960). Este último artículo se refiere a un efecto muy interesante, que no discutiremos en este libro, pero que acaso el lector quiera estudiar.

de las rendijas, destruiremos también la figura de interferencia. El número de cuentas por unidad de tiempo observado en los dos contadores será el mismo. Por cada electrón incidente sobre la pantalla, uno y sólo uno de los contadores dará una señal, y el electrón así detectado llevará toda la carga y toda la energía del electrón incidente. No podemos decir de antemano *cuál* de los contadores dará la señal, pero podemos calcular y predecir la probabilidad de registro determinando la intensidad de la onda que penetra por la rendija.

Convendría que el lector considerara de nuevo lo visto en la Sec. 48, capítulo 4, al probar que la figura de difracción por dos rendijas es incompatible con un conocimiento de cuál ha sido la rendija por la que pasó el fotón. El mismo razonamiento se aplica a los electrones. No hay ningún dispositivo ingenioso mediante el cual podamos determinar, sin perturbar la figura de difracción por dos rendijas, la rendija por la que pasó el electrón.

35 Precisemos un poco más nuestro lenguaje. Cuando discutimos el descubrimiento de las ondas de De Broglie, hablamos de "ondas asociadas con una partícula". Es ésta una manera incorrecta de hablar, porque da la impresión de que hubiera un corpúsculo clásico moviéndose, de una manera u otra, junto con una onda. Hay quienes prefieren llamar a las ondas de De Broglie "ondas guía" u "ondas piloto", pero también esta terminología es mala. Las ondas de De Broglie no son ondas que viajen juntas con y "guiando" un corpúsculo clásico. La onda de De Broglie y la partícula son la *misma cosa,* no hay nada más. La partícula real, encontrada en la naturaleza, tiene propiedades ondulatorias, y esto es un hecho. Si queremos ponerlo de relieve, podríamos hablar de la onda de De Broglie de un electrón, pero este término es, en realidad, un sinónimo del de "electrón". Nuestra excusa por el uso que hicimos de un lenguaje inadecuado consiste en que nuestra discusión fue, a la vez que de carácter histórico, una primera tentativa de abordar el tema y el empleo del término cauto "onda asociada con una partícula" podría, en consecuencia, estar justificado. Ha llegado el momento de que seamos más precisos y más concretos y hemos de rechazar una terminología que podría extraviar a nuestro pensamiento.

Consideremos de nuevo el experimento con dos rendijas. No hay nada en él que nos sugiera que pueda haber un corpúsculo clásico que pase por una de las rendijas "guiado" por una onda que, a su vez, pasa por las dos. Mejor dicho: nues-

tra descripción de lo que ocurre en nada mejora si intentamos introducir esta idea. Basta discutir solamente la onda, con la interpretación cuántica de las intensidades como probabilidades. Hablar del corpúsculo "oculto" es metafísica, a menos de que la hipótesis de que el corpúsculo existe posea ciertas consecuencias experimentales definidas que no se puedan predecir tomando como base la teoría ondulatoria de la mecánica cuántica solamente. No se conoce ninguna de tales circunstancias experimentales y, en consecuencia, debemos rechazar firmemente cualquier imagen mental de corpúsculos clásicos guiados por ondas.

La ecuación de onda y el principio de superposición

36 Presentaremos ahora ciertos argumentos en favor de una ecuación diferencial, conocida como ecuación de Klein-Gordon, en términos de la cual podemos describir la propagación de las ondas materiales en el espacio *vacío.*

Nuestra hipótesis más importante es la de que la ecuación de onda que describe una *sola* partícula, de masa *m,* sea una ecuación diferencial *lineal.* Esto significa que las soluciones de la ecuación satisfacen un *principio de superposición*: cualquier combinación lineal de dos soluciones de la ecuación es también una solución. Además, suponemos que cualquier solución de la ecuación que satisface ciertas condiciones no muy estrictas representa una posible situación física, por lo menos en principio. Las consecuencias físicas de estas hipótesis son de gran trascendencia. Las amplitudes de las ondas materiales pueden sumarse, al igual que las amplitudes de las ondas electromagnéticas. (Las ecuaciones de Maxwell son también ecuaciones diferenciales *lineales.*)

El lector debe observar que en nuestra discusión relativa a la difracción de ondas materiales por átomos sobre la superficie de un cristal, o por una doble rendija, hemos supuesto tácitamente el carácter lineal del proceso. Así, por ejemplo, hemos sumado las amplitudes de las ondas que emergen de las dos rendijas para obtener una amplitud resultante. Aquí elevamos este procedimiento al rango de un principio general de la física.

37 Determinemos ahora una ecuación diferencial satisfecha por *todas* las ondas materiales que describen una partícula de masa *m.* El procedimiento es el siguiente. Hallemos primero

una ecuación diferencial de la que sean solución todas las ondas *planas,* de la forma

$$\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{p}) = \exp\,(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} - i\omega t) \tag{37a}$$

Empleamos unidades tales que $\hbar = c = 1$ y designamos el impulso (= vector de onda) por $\mathbf{p}$ y la energía (= frecuencia) por ω. Cada una de estas ondas planas está determinada (salvo un factor constante que fija la amplitud de la onda) por el impulso $\mathbf{p}$. Se trata de escribir una ecuación diferencial lineal en la que no aparezca $\mathbf{p}$ explícitamente y que quede satisfecha por *cualquier* onda plana. Dado que es lineal, esta ecuación diferencial admitirá como solución cualquier combinación lineal de ondas planas y, por lo tanto —afirmamos— también *cualquier* onda de De Broglie que describa la partícula de masa m.

La energía ω y el impulso $\mathbf{p}$ están ligados entre sí por

$$\omega^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \tag{37b}$$

dado que la masa de la partícula es m.

Si derivamos la función de onda ψ dos veces respecto del tiempo t, obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{p}) = -\omega^2\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{p}) \tag{37c}$$

Si derivamos la función de onda dos veces respecto de la coordenada x_1, obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}\,\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{p}) = -{p_1}^2\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{p}) \tag{37d}$$

y análogamente para las derivadas segundas respecto de las otras dos coordenadas espaciales, x_2 y x_3.

Obtenemos así, teniendo en cuenta la relación (37b),

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{p}) - \nabla^2\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{p}) = -m^2\psi(\mathbf{x},t;\mathbf{p}) \tag{37e}$$

donde ∇^2 representa el *operador laplaciano,* definido por

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} \tag{37f}$$

La ecuación (37e) es la ecuación de onda que buscábamos. Como vemos, esta ecuación queda satisfecha por *todas* las ondas planas de la forma (37e), es decir, por *todos* los impulsos **p** y, por consiguiente, queda también satisfecha por cualquier onda de De Broglie que sea superposición de ondas planas.

38 La ecuación de onda (37e) se conoce como ecuación de Klein-Gordon. En un cierto sentido, es la ecuación diferencial más simple que cumplen las ondas de De Broglie. Obsérvese que esta ecuación admite también como soluciones las ondas electromagnéticas en el espacio vacío, con la masa del fotón $m = 0$. El lector puede convencerse fácilmente de que no existe ninguna ecuación diferencial de *primer* orden, es decir, en la que intervengan solamente derivadas primero respecto de las variables independientes, que quede satisfecha por *todas* las ondas de De Broglie. La ecuación debe ser por lo menos de segundo orden, y la razón de ello estriba en que la relación (37b) entre energía e impulso es una relación algebraica cuadrática.

Debemos repetir una vez más, porque éste es un punto importante, que la ecuación (37e) puede describir la propagación de una partícula sólo en regiones *vacías* del espacio-tiempo, es decir, muy lejos de todas las demás partículas. Análogamente, la ecuación de Maxwell *homogénea,* es decir, con la densidad de corriente y la densidad de carga iguales a cero ambas, describe la propagación de las ondas electromagnéticas solamente en regiones libres de cargas y corrientes, es decir, en regiones libres de otras partículas.

39 Una superposición de dos ondas planas, esto es, una onda de la forma

$$\psi(\mathbf{x},t) = A' \exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}' - i\omega' t) + A'' \exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}'' - i\omega'' t) \quad (39a)$$

donde A' y A'' son dos constantes complejas arbitrarias, satisface también la ecuación diferencial (37e). En otras palabras,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{x},t) - \nabla^2\psi(\mathbf{x},t) = -m^2\psi(\mathbf{x},t) \quad (39b)$$

Consideremos una superposición más general (continua) de ondas planas, de la forma

$$\psi(\mathbf{x},t) = \int_{(\infty)} d^3(\mathbf{p})\, A(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} - i\omega t) \quad (39c)$$

Aquí $A(\mathbf{p})$ es una función compleja del vector $\mathbf{p}$. La integral se extiende a todo el espacio-$\mathbf{p}$ de tres dimensiones. La cantidad ω es una función de $\mathbf{p}$ tal que $\omega > 0$ y tal que la ecuación (37b) queda satisfecha. En otras palabras,

$$\omega = \omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \tag{39d}$$

La función de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$ definida por la integral que aparece en la ec. (39c) es también solución de la ecuación diferencial (39b). Es ésta una onda de De Broglie muy general, de hecho la más general de ellas. Suponemos, claro está, que $A(\mathbf{p})$ es una función de $\mathbf{p}$ que se comporta razonablemente bien, de modo que la integral en la ec. (39c) tiene sentido.

40 En la teoría de la integral de Fourier se demuestra el siguiente teorema: si $\psi(\mathbf{x}, 0)$ es una función de $\mathbf{x}$ que se comporta razonablemente bien y si definimos una función $A(\mathbf{p})$ por la integral

$$A(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int_{(\infty)} d^3(\mathbf{x})\ \psi(\mathbf{x},0) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) \tag{40a}$$

de ello se sigue que

$$\psi(\mathbf{x},0) = \int_{(\infty)} d^3(\mathbf{p})\, A(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) \tag{40b}$$

Esto es un teorema. Su enunciado preciso, y su demostración, depende de una definición apropiada de lo que se entienda por "función que se comporta razonablemente bien". No demostraremos este teorema aquí, y realmente no dependeremos de la teoría de la integral de Fourier en nuestra discusión, tal como se presenta en este libro. A su debido tiempo, en su curso de análisis matemático, aprenderá el lector cómo enunciar de modo preciso este teorema y cómo demostrarlo. Nuestro objetivo aquí es analizar las consecuencias físicas del teorema y proporcionar así al lector una seria motivación "física" para estudiar la teoría de la integral de Fourier. Es éste un tema de importancia central en la física.

41 Veamos ahora qué implica el teorema. Supongamos que $\psi(\mathbf{x}, 0)$ es una función de onda de De Broglie en el instante $t = 0$. Podemos entonces asociar con esta función de onda una amplitud $A(\mathbf{p})$ en el espacio de impulsos mediante la integral que aparece en la ec. (40a). En términos de la amplitud $A(\mathbf{p})$

en el espacio de impulsos, cabe entonces definir una nueva función de onda $\psi_1(\mathbf{x}, t)$ por

$$\psi_1(\mathbf{x},t) = \int_{(\infty)} d^3(\mathbf{p})\, A(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} - i\omega t) \qquad (41a)$$

Si hacemos $t = 0$ en esta expresión y comparamos con la fórmula (40b), vemos que $\psi_1(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}, 0)$. La nueva función de onda $\psi_1(\mathbf{x}, t)$, que satisface la ecuación de Klein-Gordon (39b), es así idéntica a la función $\psi(\mathbf{x}, 0)$ en el "instante inicial" $t = 0$. Esto significa que contamos con un procedimiento para resolver la ecuación de Klein-Gordon con la *condición inicial* de que la solución debe coincidir, en el instante $t = 0$, con una función (de $\mathbf{x}$) dada.

42 Consideremos la cuestión de la unicidad de la solución de la ecuación de Klein-Gordon que encontramos de esta manera. Lo que es cierto es que nuestro procedimiento, mediante el cual construimos las funciones $A(\mathbf{p})$ y $\psi_1(\mathbf{x}, t)$ a partir de la función dada $\psi(\mathbf{x}, 0)$, es un procedimiento definido que conduce a una función única $\psi_1(\mathbf{x}, t)$ que satisface la ecuación (39b). Se plantea la cuestión de si no pudiera haber otras soluciones de la ecuación diferencial (39b) que coinciden también con $\psi(\mathbf{x}, 0)$ en el instante $t = 0$. La respuesta es afirmativa. La ecuación diferencial (39b) queda también satisfecha por funciones de onda de la forma

$$\psi'(\mathbf{x},t) = \exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} + i\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

Llamamos a estas soluciones "soluciones de frecuencia negativa", en contraposición con las "soluciones de frecuencia positiva" de la forma (37a).

Las soluciones de frecuencia negativa las excluimos por motivos físicos. No representan partículas de energía positiva (= frecuencia positiva). Es claro ahora que para cada solución de frecuencia positiva de la ecuación (39b) existe también una solución de frecuencia negativa con el mismo impulso y, por consiguiente, la ecuación de Klein-Gordon tiene un número de soluciones doble del que queremos. La razón de ello es que la ecuación (37b) tiene *dos* soluciones ω para cada $\mathbf{p}$, una positiva y una negativa. Solamente la solución positiva tiene sentido físico: la energía de una partícula es una cantidad positiva.

La ecuación de Klein-Gordon (39b), por lo tanto, no relata toda la historia de las ondas de De Broglie. Tenemos que

añadir a ella la condición de que *todas las soluciones de frecuencia negativa* (= *energía negativa*) *deben excluirse.* Puede demostrarse que, con esta condición, cualquier solución admisible de la ecuación (39b) queda determinada unívocamente por sus valores en el instante $t = 0$ y esto responde a la cuestión que nos habíamos formulado. No demostraremos aquí este teorema.

43 La idea importante que surge de nuestra discusión es que cualquier función de onda de De Broglie físicamente aceptable $\psi(\mathbf{x}, t)$ puede representarse en la forma (41a), en la que $A(\mathbf{p})$ está determinada unívocamente mediante la ec. (40a) por la función de onda en cierto instante determinado, digamos en el instante $t = 0$. Cualquier onda material puede así considerarse como una superposición de ondas materiales planas. Si queremos, cabe considerar esta hipótesis como nuestra hipótesis básica, disminuyendo así la importancia de la ecuación de Klein-Gordon. Ésta es entonces meramente una curiosa ecuación diferencial satisfecha por las funciones de onda físicamente aceptables.

44 Mediante una elección adecuada de la amplitud $A(p)$ en el espacio de impulsos que aparece en la integral de Fourier (39c) (o (41a)), podemos construir paquetes de ondas que están aproximadamente localizados en cierta región del espacio en un instante dado. Una onda de estas características tiene la propiedad de que solamente es apreciable en cierta región limitada del espacio, pero decrece rápidamente tendiendo a cero cuando $|\mathbf{x}|$ tiende a infinito. Un paquete de ondas de este tipo representa una partícula que se encuentra aproximadamente confinada en una región finita del espacio. Es claro que todas las partículas que se estudian experimentalmente deben describirse por funciones de ondas dotadas de esta propiedad. Suponemos, naturalmente, que donde es más probable encontrar la partícula (cuando la buscamos con un contador) es en aquellas regiones del espacio en las que la función de onda es grande. Esto está de acuerdo con nuestra interpretación cuántica del cuadrado del módulo de la amplitud: tiene algo que ver con la probabilidad de que algo ocurra. Por el momento nos basta suponer que "donde es más probable encontrar la partícula es allí donde la función de onda es grande". Más adelante discutiremos un tipo particular de función de onda para el que formularemos una prescripción precisa acerca de cómo calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en una región dada.

Es fácil llegar a la conclusión de que una única onda plana no puede representar una partícula en un experimento real. Para una tal onda el cuadrado del valor absoluto de la amplitud es una constante, independiente de x (y de t), y la probabilidad de hallar la partícula en una región cualquiera cuyo volumen es la unidad resulta independiente de donde se encuentra la región. Dado que el espacio se puede construir partiendo de un número infinito de tales regiones, de aquí se sigue que la probabilidad de encontrar la partícula en una cualquiera de entre ellas debe ser cero. La probabilidad de hallar la partícula dentro de *cualquier* región finita es también cero, lo que carece de sentido desde el punto de vista físico.

Por lo tanto, no existen ondas planas estrictamente monocromáticas. Sin embargo, es posible que una onda tenga el aspecto de una onda plana de amplitud constante en una región arbitrariamente grande del espacio, aunque la amplitud tiende de hecho a cero fuera de dicha región. Si ésta incluye la región en la que tienen lugar los fenómenos físicos que se estudian, podemos imaginar la onda como una onda plana idealizada. Es práctica común en física el hablar de ondas planas, entendiendo en tales casos que la onda es aproximadamente plana; se comporta como una onda plana en una región muy grande del espacio.

45 La ecuación de Klein-Gordon (39b) queda satisfecha por cualquier función de onda que describe el estado (de movimiento) de una partícula de masa m. Si hacemos $m = 0$, obtenemos una ecuación de la que son soluciones los campos vectoriales eléctrico y magnético de la teoría electromagnética. Con todo, la ecuación de Klein-Gordon no es idéntica a las ecuaciones de Maxwell, y cabe que al lector le preocupe este hecho. ¿Es posible que las ecuaciones de Maxwell nos digan más que la ecuación de Klein-Gordon? La respuesta es que sí. Las ecuaciones de Maxwell describen también la *polarización* del fotón. El estado de movimiento de un fotón no queda por completo especificado dando su impulso y su energía; hemos de dar también su polarización. Para cada impulso existen *dos* estados de polarización linealmente independiente; por ejemplo, el estado de polarización circular levógira y el estado de polarización circular dextrógira.

Se plantea la siguiente cuestión: ¿es posible que también las partículas materiales posean diferentes estados de polarización? La respuesta es que ciertas partículas sí las poseen, mientras que otras carecen de ellas. El pión y la partícula alfa son ejemplos de partículas que no pueden polarizarse. El elec-

trón, el protón y el neutrón son ejemplos de partículas que pueden ser polarizadas. Estas últimas partículas poseen todas un momento cinético intrínseco, o spin, y a las diferentes orientaciones del spin corresponden diferentes estados de polarización. Por otra parte, el pión y la partícula alfa carecen de spin: no hay nada que defina una dirección en el sistema en reposo de estas partículas. Tienen simetría esférica.

Para describir el estado de polarización de las partículas que tienen un spin no nulo, hemos de introducir, junto a las variables x y t, una variable que represente al spin. La ecuación de onda que describe todo lo relativo a electrones, protones y neutrones es, por lo tanto, más complicada que la ecuación de Klein-Gordon (39b), pero aún así la función de onda *también* satisface dicha ecuación. Por así decirlo, ésta describe el comportamiento de la partícula en el espacio-tiempo sin considerar el spin. No entraremos aquí en la descripción mecánico-cuántica de la polarización. Es algo análogo a la descripción de la polarización de una onda electromagnética.

46 Para terminar esta parte del capítulo, escribamos de nuevo la ecuación de onda (39b) en el caso en que se emplea el sistema de unidades CGS (o el MKS). Las constantes $\hbar$ y c se pueden restablecer fácilmente, y tenemos

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi(\mathbf{x},t) - \nabla^2\,\psi(\mathbf{x},t) = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi(\mathbf{x},t) \qquad (46a)$$

El lector debe cerciorarse, mediante un razonamiento dimensional, que esta ecuación es correcta. Obsérvese que cada término tiene la dimensión (función de onda)/(longitud)^2. El restablecimiento de las constantes $\hbar$ y c es un proceso unívoco.

*Un tema avanzado: el espacio vectorial de los estados físicos**

47 Enunciemos de modo conciso el principio de superposición que hemos admitido como válido para las ondas materiales.

Sea $\mathscr{H}'$ el conjunto de todas las funciones de onda ψ que no se anulan idénticamente y que representan posibles estados físicos de una partícula de masa m. A este conjunto de funciones de onda añadimos la función de onda que es cero en

* Se puede omitir en una primera lectura.

todo el espacio y en todo instante. El conjunto que así resulta lo designaremos por $\mathcal{H}$. Este conjunto tiene las siguientes propiedades:

(*a*) Si ψ_1 y ψ_2 son dos funciones de onda del conjunto $\mathcal{H}$, también la suma $(\psi_1 + \psi_2)$ pertenece a $\mathcal{H}$.

(*b*) Si ψ pertenece a $\mathcal{H}$ y c es un número complejo cualquiera, también la función $c\psi$ pertenece a $\mathcal{H}$.

El principio de superposición de las funciones de onda dice concretamente que si ψ_1 y ψ_2 son dos funciones de onda con pleno sentido físico y que si c_1 y c_2 son dos números complejos cualesquiera, la función

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \tag{47a}$$

es también una función de onda con sentido físico, supuesto que no se anule idénticamente.

48 Las propiedades del conjunto $\mathcal{H}$ son características de un objeto matemático abstracto, a saber, del *espacio vectorial complejo abstracto*. Enunciemos los postulados en términos de los cuales se define este objeto.

Un espacio vectorial complejo lineal $\mathcal{H}$ es un conjunto de elementos, llamados vectores, tal que:

I. Para dos vectores cualesquiera ψ_1 y ψ_2 de $\mathcal{H}$ existe un único vector ψ en $\mathcal{H}$, llamado la suma de ψ_1 y ψ_2, y designado por $\psi = \psi_1 + \psi_2$. La operación de formar la suma de dos vectores satisface las condiciones

(*a*) $\psi_1 + \psi_2 = \psi_2 + \psi_1$ para dos ψ_1, ψ_2 en $\mathcal{H}$.

(*b*) $\psi_1 + (\psi_2 + \psi_3) = (\psi_1 + \psi_2) + \psi_3$ para tres ψ_1, ψ_2, ψ_3 cualesquiera en $\mathcal{H}$.

(*c*) Existe un único vector 0 en $\mathcal{H}$, llamado vector nulo, tal que $\psi + 0 = \psi$ para todo ψ en $\mathcal{H}$.

II. Dado un vector cualquiera ψ en $\mathcal{H}$ y un número complejo cualquiera c, existe en $\mathcal{H}$ un único vector, designado por $c\psi$, que se llama producto del vector ψ por el escalar c. La operación de multiplicar un vector por un escalar (= un número complejo) satisface las condiciones

(*a*) $(c_1c_2)\psi = c_1(c_2\psi)$ para cualquier vector ψ y dos escalares cualesquiera c_1 y c_2.

(*b*) $(c_1 + c_2)\psi = c_1\psi + c_2\psi$ para cualquier vector ψ, y dos escalares cualesquiera c_1 y c_2.

(*c*) $c(\psi_1 + \psi_2) = c\psi_1 + c\psi_2$ para dos vectores cualesquiera ψ_1 y ψ_2, y cualquier escalar c.

(*d*) Para el escalar particular 1 tenemos $1\psi = \psi$.

Éstos son los postulados que definen un espacio vectorial lineal abstracto sobre el campo de los números complejos. La última frase significa que los escalares por los que se multiplican los vectores son números complejos. Si se impone la restricción de que los escalares sean números reales, se habla de un espacio vectorial lineal sobre el campo de los números reales. Para abreviar, hablamos, simplemente, de "espacio vectorial complejo" y "espacio vectorial real", respectivamente. El lector ha encontrado ya un ejemplo de espacio vectorial real, a saber, "el espacio físico" euclídeo de tres dimensiones.

49 El postulado I*a* es la ley conmutativa de la adición; el postulado I*b* es la ley asociativa de la misma; el postulado I*c* se refiere a la existencia y unicidad del vector nulo. El postulado II*a* es la ley asociativa de la multiplicación por un escalar, y los postulados II*b* y II*c* son las leyes distributivas para esta multiplicación. El postulado II*d* dice que la identidad multiplicada por un vector es igual a este vector.

A partir de estos postulados podemos probar muchos hechos casi evidentes de suyo, tales como

$$0\psi = 0, \quad (-1)\psi + \psi = 0, \quad (-c)\psi = -(c\psi), \quad \text{etc.}$$

No presentaremos aquí una lista de todos los teoremas triviales, puesto que el autor confía en que la intuición del lector no lo desencaminará.

¿Cuál es la virtud de introducir el concepto de un espacio vectorial complejo abstracto? La respuesta es que en nuestro estudio de las teorías matemáticas encontramos una y otra vez conjuntos de elementos que, entre otras propiedades que puedan acaso poseer, tienen la propiedad particular de satisfacer todos los axiomas de un espacio vectorial complejo abstracto. Cuando encontramos uno de estos conjuntos no es necesario enumerar nuevamente las propiedades de un espacio vectorial abstracto, sino que podemos limitarnos a decir, simplemente, que el conjunto es un espacio vectorial complejo, y entonces todo aquel que conoce los axiomas de un espacio vectorial conoce inmediatamente muchas cosas acerca del conjunto.

50 Podemos afirmar ahora que el sistema $\mathscr{H}$ de todas las funciones de onda físicamente aceptables, junto con la función de onda idénticamente nula, es un espacio vectorial complejo. Es un espacio vectorial complejo *concreto,* porque los vectores son realmente funciones complejas "tangibles" del espacio y del tiempo. Si comparamos los postulados que se formularon en

la Sec. 48 con las propiedades del conjunto de todas las funciones de onda que hemos mencionado sucintamente en la Sec. 47, observamos que la lista contenida en la Sec. 48 es más larga. Sin embargo, muchos de los postulados relativos a un espacio vectorial abstracto quedan satisfechos de manera trivial por el conjunto de las funciones de onda concretas y no había necesidad de poner de manifiesto explícitamente estas trivialidades.

51 Haremos observar que en la definición de espacio vectorial complejo abstracto ninguna mención se hace acerca de la *dimensionalidad* del mismo: su número de dimensiones puede ser finito o infinito. Consideremos algo más detalladamente esta cuestión.

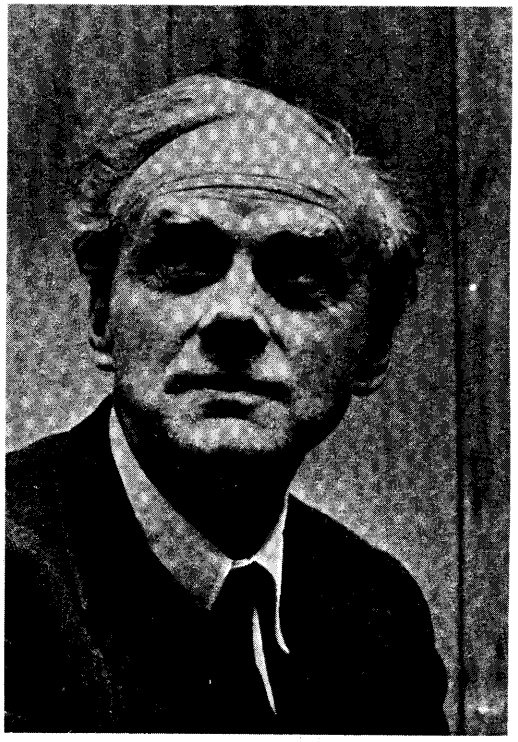
Un conjunto de N vectores $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ en un espacio vectorial complejo $\mathcal{H}$ son, por definición, *linealmente independientes* si la ecuación

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n = 0 \tag{51a}$$

implica que $c_1 = c_2 = \ldots = c_N = 0$; cuando así no ocurre, se dice de ellos que son *linealmente dependientes*. Un espacio vectorial complejo es de N dimensiones si es posible hallar en el espacio un conjunto de N vectores linealmente independientes, pero es imposible hallar un sistema de más de N vectores linealmente independientes. El espacio vectorial es de infinitas dimensiones si es posible encontrar un conjunto de N vectores linealmente independientes en el espacio vectorial, cualquiera que sea el entero N.

El espacio vectorial $\mathcal{H}$ de todas las funciones de onda de De Broglie que poseen sentido físico es, evidentemente, de *infinitas* dimensiones; existe un número infinito de funciones de onda linealmente independientes.

52 Hasta aquí nos hemos ocupado de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, pero podemos ahora llegar a la conclusión de que si consideramos la totalidad de las soluciones de una ecuación diferencial *lineal* cualquiera, este conjunto es siempre un espacio vectorial (complejo). Se han propuesto muchos tipos diferentes de ecuaciones diferenciales para describir, dentro del marco de la mecánica cuántica, las partículas que se presentan en la naturaleza. Los conjuntos de todas las



Paul Adrien Maurice Dirac. Nació en Bristol, Inglaterra, en 1902. Dirac estudió primero ingeniería eléctrica, pero pasó más tarde al estudio de la física teórica. En 1932 fue nombrado "Lucasian Professor" de matemáticas en Cambridge. Recibió el Premio Nobel en 1933.

Muchas han sido las contribuciones de Dirac al desarrollo de la mecánica y de la electrodinámica cuántica. Su célebre teoría relativista del átomo de hidrógeno le condujo a una teoría de las antipartículas que recibió su confirmación espectacular al ser descubierto, por Anderson, el positón.

En los primeros días de la mecánica cuántica Dirac contribuyó notablemente al desarrollo de la formulación algebraica de la teoría. Sus ideas han sido presentadas en el libro *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th ed. (Oxford University Press, 1958). (Fotografía proporcionada por *Physics Today.)*

soluciones físicamente aceptables de estas ecuaciones forman siempre espacios vectoriales.

Podemos formular esta cuestión como sigue: para describir una especie dada de partículas cabe introducir un espacio vectorial complejo y asociar un vector de este espacio con cada estado posible (de movimiento) de la partícula.

Esta idea, que constituye la esencia de la teoría matemática de la física cuántica, es una gran idea. A primera vista pudiera no parecerlo; decir que un estado (de movimiento) de una partícula queda descrito por un vector en un espacio vectorial complejo pudiera parecer que no es sino una reformulación del principio de superposición satisfecho por las soluciones de la ecuación de onda, y acaso una reformulación de valor discutible. A medida que penetramos más y más en la física cuántica, descubrimos, sin embargo, los grandes méritos de esta idea. Por ejemplo: al notar que las funciones de onda forman un espacio vectorial, podemos de hecho conseguir una simplificación considerable en muchos problemas prácticos de cálculo. Las técnicas matemáticas apropiadas para los espacios vectoriales son, en un cierto sentido, de carácter *algebraico* y, de acuerdo con esto, nos vemos conducidos a considerar los aspectos algébricos de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Resulta así que en muchos problemas los métodos algebraicos son ampliamente superiores (en economía de cálculo desde el punto de vista humano) a la solución directa de las ecuaciones diferenciales, sobre todo en problemas caracterizados por simetrías especiales. No estamos en condiciones de demostrar en este libro que efectivamente se da esta simplificación. Pero el autor tuvo la impresión de que, con todo, merecía la pena poner de manifiesto este hecho: la en apariencia abstracta teoría de los espacios vectoriales conduce a grandes simplificaciones en la solución de problemas prácticos. Un aspecto secundario de esta simplificación consiste en permitir el uso de notaciones más sencillas. (Las cuestiones de notación, sea dicho de paso, no siempre son tan secundarias. Una notación mala retrasa el progreso, mientras que una notación buena lo estimula.)

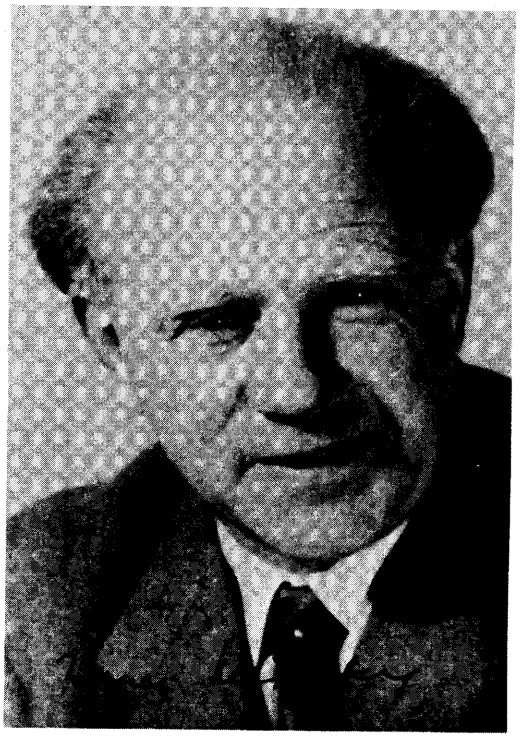
53 La mecánica de las matrices de Heisenberg es una formulación particular de la mecánica cuántica en la que el aspecto de espacio vectorial de la teoría queda particularmente subrayado, mientras que las ecuaciones de onda representan un papel secundario. A primera vista la teoría de Heisenberg parece ser algo muy diferente de las teorías ondulatorias, como la me-

cánica ondulatoria de Schrödinger, pero todos esos tipos de teorías son de hecho completamente equivalentes y llevan a las mismas predicciones físicas. Poseen un esqueleto abstracto común, y este esqueleto es, precisamente, la teoría del espacio vectorial abstracto. Dado que no podemos suponer que el lector ha estudiado ya las matrices en sus cursos de matemáticas, tendremos que pasar en silencio en este libro la teoría de Heisenberg. La teoría no es particularmente difícil, pero dado que hay tantas otras cosas que el lector tiene que aprender, no queremos recargar la discusión presentando la teoría matricial.

El primer trabajo de Werner Heisenberg sobre este tema apareció en 1925 *. En él la teoría matricial no se menciona explícitamente, porque Heisenberg no se había dado cuenta de que sus operaciones matemáticas encontraban una interpretación en la teoría de las matrices. La relación con esta teoría fue puesta en claro poco después en un importante trabajo debido a Max Born y a Pascual Jordán. **.

54 Conviene que el lector tome nota de que, históricamente, la mecánica matricial se inventó y fue desarrollada *antes* de que Schrödinger hubiese inventado su mecánica ondulatoria. Hemos dicho que es una idea natural el considerar el conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial lineal como un espacio vectorial, y con ello vernos conducidos a considerar los aspectos algebraicos de la ecuación. No hay duda alguna de que si se hubiera inventado primero la mecánica ondulatoria de Schrödinger, la mecánica matricial hubiera sido pronto descubierta como una reformulación de la teoría ondulatoria. Sin embargo, no fue así como realmente ocurrieron las cosas. La sucesión histórica de los hechos es casi increíble para este autor, quien considera el invento de la mecánica matricial como uno de los más sobresalientes logros en la teoría física.

Que la mecánica matricial y la mecánica ondulatoria son físicamente equivalentes fue demostrado por Schrödinger en 1926 ***.



Werner Karl Heisenberg. Nació en 1901, en Würzburg, Alemania. Heisenberg estudio con Sommerfeld en la Universidad de Munich y obtuvo su grado de doctor en 1923. Después de un fructífero período como auxiliar de Born en la Universidad de Göttingen, Heisenberg pasó tres años en el Instituto Bohr de Copenhague. Posteriormente ocupó cargos en la Universidad de Leipzig y en el Instituto de Física Max Planck en Berlín. Desde 1946 ha sido director del Instituto de Física Max Planck en Göttingen y en Munich. Se le concedió el Premio Nobel en 1932.

Entre las muchas e importantes contribuciones de Heisenberg a la física teórica, sobresale su descubrimiento de la mecánica de matrices como uno de los más notables logros intelectuales. (Fotografía proporcionada por *Physics Today.)*

* W. Heisenberg, "Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen", *Zeitschrift für Physik* **33**, 879 (1925).

** M. Born y P. Jordan, "Zur Quantenmechanik", *Zeitechrift für Physik* **34**, 858 (1925). Los principios de la mecánica cuántica fueron luego desarrollados por estos autores y por Heisenberg en el trabajo de M. Born, W. Heisenberg y P. Jordan, "Zur Quantenmechanik II", *Zeitschrift für Physik* **35**, 557 (1926).

*** E. Schrödinger,"Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen", *Annalen der Phyvsik* **79**, 734 (1926).

Bibliografía para ulterior estudio

1) Para la historia de los temas discutidos en este capítulo, referimos de nuevo al lector a los libros citados al final del Cap. 1. (Puntos 3 y 5.)

2) Existe una vasta literatura acerca de la teoría matemática de las ecuaciones lineales entre derivadas parciales. El autor no espera que el lector profundice en esta teoría ahora, pero sí quiere citar un tratado que representó un importante papel en la física, los *Methoden der mathematischen Physik*, Vols. I y II por R. Courant y D. Hilbert (Verlag von Julius Springer, Berlín, 1931 y 1937). Esta obra ha sido traducida al inglés con el título de *Methods of Mathematical Physics*, vols. I y II (Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1953 y 1962).

En el segundo volumen se estudian las ecuaciones entre derivadas parciales. En el primero se analiza toda una serie de temas de interés en física, tales como el análisis de Fourier, la teoría de matrices y de los espacios vectoriales, el cálculo de variaciones y la teoría de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias que aparecen en muchos problemas físicos.

Es un hecho que importantes desarrollos en matemáticas, que luego resultaron "como de encargo" para las necesidades de la mecánica cuántica, tuvieron lugar más o menos al mismo tiempo que se descubrió ésta. David Hilbert, en la Universidad de Göttingen, desempeñó un papel central en estos desarrollos, y el espacio vectorial de infinitas dimensiones en términos del cual se formula hoy la mecánica cuántica se llama *espacio de Hilbert* en su honor. Hilbert no desarrolló originalmente su teoría de los espacios lineales con vistas a las aplicaciones físicas, pero el descubrimiento de la mecánica cuántica estimuló de modo natural las investigaciones matemáticas de los problemas que planteaban tales aplicaciones. Este período fue uno de considerable interacción entre matemáticos y físicos.

La teoría de la mecánica cuántica desde el punto de vista de un matemático fue presentada en la obra de J. von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. (Verlag von Julius Springer, Berlín, 1932. Reimpresa por Dover Publications, Nueva York, 1943.) Una traducción española apareció con el título de *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*. (Publicaciones del Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", C.S.I.C., Madrid, 1949.)

3) La mecánica de matrices se discute en los textos superiores de mecánica cuántica. Como una introducción a la física cuántica, en la que se discute y emplea el método algebraico de abordar el problema, citaremos la obra de R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics*, vol. III (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1965). Éste es el último volumen de una serie de tres libros sobre física fundamental. La presentación en ellos es magnífica y aconsejamos vivamente al lector que se familiarice con los libros de esta serie.

4) Muy poco decimos en el presente volumen acerca de la física del estado sólido. Entre los libros de introducción a este tema citaremos el de C. Kittel: *Introduction to Solid State Physics*, 3.ª edición. De este libro existe traducción al español con el título de *Introducción a la física del estado sólido*, Editorial Reverté. En él encontrará el lector estudios acerca de la estructura cristalina, de la teoría de la difracción y de la teoría de fonones, entre otros muchos temas.

En lo que concierne a los cristales, convendría que el lector tuviera en cuenta el extenso artículo en la *Encyclopaedia Britannica* bajo el epígrafe "Cristalografía".

5) Pueden resultar interesantes para el lector los siguientes artículos en el *Scientific American*:

a) K. K. Darrow: "The quantum theory", marzo 1952, pág. 47.
b) K. K. Darrow: "Davisson and Germer", mayo 1948, pág. 50.
c) E. Schrödinger: "What is matter?", septiembre 1953, pág. 52.
d) P. y E. Morrison: "The neutron", octubre 1951, pág. 44.
e) G. Gamow: "The principle of uncertainty", enero 1958, pág. 51.

Problemas

1 *El poder de resolución* de un microscopio expresa el límite de nuestra capacidad de ver, con el microscopio, finos detalles del objeto en estudio. Podemos expresar el poder de resolución por la menor distancia entre dos puntos del objeto a la que cabe observar claramente dichos dos puntos como dos puntos separados. En un microscopio óptico la máxima resolución posible viene limitada, evidentemente, por el valor finito de la longitud de onda de la luz utilizada para iluminar el objeto: no podemos esperar ver en él detalles que sean mucho menores que esta longitud de onda. Para vencer esta limitación del microscopio óptico, se han construido microscopios electrónicos. En vez de lentes de vidrio, un microscopio electrónico emplea campos eléctricos y magnéticos de forma adecuada. Consideremos un microscopio electrónico típico en el que la iluminación la proporciona una fuente de electrones cuya energía es de unos 50 keV. Compárese el máximo poder de resolución posible de un microscopio electrónico de estas características con el de un microscopio óptico.

Hay que decir que el poder de resolución real que se consigue con un microscopio (sea óptico o electrónico) depende también de ciertas características de diseño del aparato, características que están relacionadas con el valor del ángulo dentro del cual se acepta en el microscopio "luz" procedente del objeto. Por razones técnicas, este ángulo es mucho menor en un microscopio electrónico que en un microscopio óptico y, por consiguiente, en la práctica el poder de resolución real del microscopio electrónico es considerablemente menor que el valor máximo teórico posible. A pesar de esto, el poder de resolución de un microscopio electrónico es muy superior al de un microscopio óptico.

2 Considérese un gas de helio a la temperatura ambiente. Este gas es monoatómico. La energía media de un átomo de helio en un gas a temperatura T viene dada por $E_c = 3kT/2$ y a partir de esta expresión podemos hallar la velocidad media (y el impulso medio) de los átomos de helio.

(*a*) Calcular la velocidad media (en cm/s) de los átomos de helio.

(*b*) Calcular la longitud de onda de De Broglie correspondiente a esta velocidad media, en cm. Compárese esta longitud de onda con el espaciado medio entre dos átomos en el gas. Supondremos que la presión es de una atmósfera, con lo cual dicha distancia puede obtenerse a partir de la densidad conocida.

Cabe sospechar que los efectos cuánticos *podrían* representar un papel si la longitud de onda de De Broglie fuese *mayor* que el espaciado medio, mientras que una descripción clásica debiera resultar adecuada cuando la longitud de onda de De Broglie fuera mucho *menor* que dicho espaciado. En el modelo clásico, el gas es una colección de bolas de billar que chocan constantemente entre sí, mientras que en el modelo mecánico-cuántico el gas es una colección de ondas en interacción. Por lo tanto, tiene gran interés llevar a cabo la indicada comparación para el caso de un gas real.

(*c*) La densidad del helio líquido es de unos 0,15 gm cm^{-3}. A la presión atmosférica, esta sustancia se mantiene líquida a las más bajas temperaturas que se pueden conseguir. De manera análoga al estudio efectuado en (*b*), compárese la longitud de onda de De Broglie con la separación media a la muy baja temperatura de 0,01 °K.

3 Efectúese la misma comparación entre la longitud de onda de De Broglie y el espaciado medio para un "gas" de electrones en un trozo de cobre. Hay modelos para describir un metal en los que los electrones se consideran como un "gas", al igual que los átomos de helio en un recipiente. Supóngase que, por cada átomo de cobre, hay un electrón que se puede mover libremente en la red. El espaciado entre los átomos es entonces el espaciado medio entre los electrones.

4. Considérese un problema tridimensional en el que una partícula incide oblicuamente sobre la superficie plana de separación entre dos regiones R_1 y R_2. Suponemos que la energía potencial de la partícula tiene un valor constante V_1 en la mayor parte de R_1 y el valor constante V_2 en la mayor parte de R_2, excepto en la vecindad inmediata de la superficie de separación en la cual el potencial cambia rápidamente de V_1 a V_2. En el interior de las regiones R_1 y R_2 la partícula no experimentará, por consiguiente, ninguna fuerza, pero sí estará sujeta a una fuerza intensa en la vecindad de la superficie de separación en la dirección de la normal a su plano. Supongamos que la energía total de la partícula es E y que $E > V_1$ y $E > V_2$. La partícula se refractará entonces en dicha superficie y se trata de estudiar la refracción desde el punto de vista de la mecánica clásica y el de la cuántica.

(*a*) Deducir la ley de refracción tomando como base la mecánica clásica. En este caso se producirá un cambio en la componente normal del impulso de la partícula cuando ésta atraviesa la superficie de separación, pero ningún cambio tendrá lugar en la componente tangencial. El principio de conservación de la energía da el impulso en la región R_2, si lo conocemos en la región R_1, y podemos así deducir la ley de refracción.

(*b*) Deducir la ley de refracción tomando como base la mecánica ondulatoria y probar que es posible obtener el mismo resultado que en el caso clásico. Al considerar el problema dentro del marco de la mecánica cuántica, habrá que estudiar nuevamente la conexión entre la energía E, el impulso $\mathbf{p}$, la frecuencia ω y el vector de onda $\mathbf{k}$ de la partícula. Nuestra anterior discusión es válida para el caso de una región en la que el potencial es cero y, por lo tanto, puede no serlo en el caso presente. Se invita al lector a exponer sus ideas acerca de cómo hay que crear la teoría. Entre las cuestiones que deben preocuparle figuran las siguientes: ¿Es la misma la frecuencia a uno y otro lado de la superficie de separación? ¿Debe ser continua la componente tangencial del vector de onda en dicha superficie? ¿Es siempre verdadera la relación $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$? Y, ¿qué hay de la igualdad $E = \hbar\omega$?

En este problema particular el lector conoce realmente la respuesta: la ley de refracción debe venir dada correctamente por la discusión clásica en la parte (*a*). Esto le será útil en su búsqueda de buenas ideas: el lector sabe que su teoría mecánico-cuántica *debe* conducir en este caso a un resultado conocido.

(*c*) De acuerdo con la dinámica clásica la partícula no será *reflejada* en la superficie de separación, sino solamente *refractada.* La luz que incide sobre la superficie que separa dos dieléctricos diferentes es *a la vez* reflejada y refractada. Exprese su opinión acerca de cuál debe ser la situación en el caso de una partícula que obedece a la mecánica cuántica, es decir, en el de una partícula real.

5 Consideremos la difracción por una *red de rayas,* como la representada esquemáticamente en la figura adjunta. Esta red consiste en un gran número de rayas muy finas, igualmente separadas, trazadas sobre una superficie plana (hecha de vidrio, metal o plástico). Para simplificar, consideraremos este problema como un problema bidimensional, lo que es posible si suponemos que la onda incidente se propaga en una dirección contenida en un plano perpendicular a las rayas. La dirección incidente se encuentra, pues, en el plano de la figura.

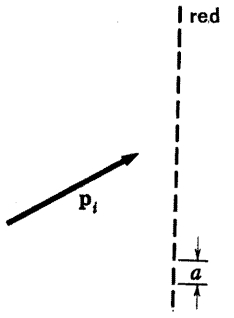
Supongamos que la onda incidente es una onda plana de frecuencia (= energía) ω y vector de onda (= impulso) $\mathbf{p}_i$. Hallar las posibles direcciones de las ondas difractadas y probar que se pueden representar como sigue. Una partícula de impulso $\mathbf{p}_i$ choca con la red y emerge después de la colisión con un impulso $\mathbf{p}_0$. En ésta, la energía de la partícula no varía, pero una cierta cantidad de impulso $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ se cede a la red. Probar que las direcciones posibles de las ondas difractadas están determinadas por la simple regla de que la componente de la *transferencia de impulsos* $\mathbf{q}$ a lo largo de la red, es decir, la componente vertical en la figura, debe ser un múltiplo entero de $2\pi/a$, donde a es la distancia entre puntos homólogos de dos rayas consecutivas. La componente vertical del impulso transferido está "cuantificada".

6 (*a*) Consideremos la difracción de la luz visible por una red tal como la estudiada en el problema precedente. Supongamos que el período de la red a es igual al doble de la longitud de onda de la luz y que el ángulo de incidencia es de 45°. Hallar todos los ángulos en que pueden aparecer rayos difractados. Trazar una figura.

(*b*) Modifiquemos el dispositivo de manera que la red se encuentre entre una placa de crown-glass (índice de refracción 1,51) y una placa de flint-glass (índice de refracción 1,74). Ambas placas tienen un grosor uniforme de 5 mm y la placa crown-glass se encuentra del lado del que procede la luz incidente. La longitud de onda, la constante de la red y el ángulo de incidencia son los mismos que en la primera parte del problema. Hallar las direcciones en que pueden emerger los rayos difractados por la doble capa y comparar el resultado con el de la primera parte del problema.

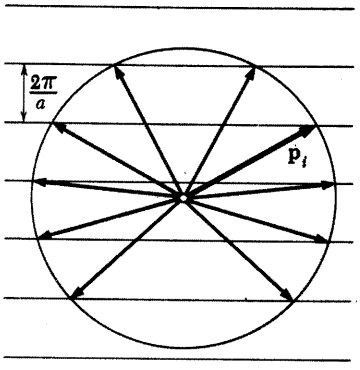
7 En un experimento del tipo Davisson-Germer con electrones de 88 eV de energía, éstos inciden normalmente sobre la superficie de un cristal metálico en el que los átomos se encuentran dispuestos formando una red cuadrada cuyo lado tiene una longitud $a = 2{,}9$ Å. Trazar una figura en que aparezcan los puntos de intersección de los rayos difractados con un plano paralelo a la superficie del cristal y situado a una distancia de 5 cm de la misma. Esta figura debe trazarse a la escala correcta y hay que representar todos los rayos difractados.

8 Érase una vez un físico que realizó experimentos, como los descritos más arriba, con un cierto número de metales diferentes. En su informe acerca de los resultados decía: "con el metal A he observado una figura de difracción con simetría triple; con el metal B, una simetría cuádruple; con el metal C, una simetría quíntuple, y con el metal D, una simetría séxtuple". (Se dice que la figura tiene



La figura superior, que se refiere al prob. 5, representa esquemáticamente una red de difracción. El vector $\mathbf{p}_i$ es el impulso incidente. El espacio entre puntos homólogos de dos rayas adyacentes de la red es la constante (o período) a de la misma.

La figura inferior muestra cómo es posible hallar las direcciones de los rayos difractados mediante una simple construcción geométrica. Los impulsos finales están determinados por las intersecciones con una circunferencia, que corresponde a un valor absoluto constante del impulso, y un sistema de rectas paralelas correspondientes a los valores permitidos de la componente vertical de la transferencia de impulso a la red. Los vectores en la figura representan diez impulsos finales posibles, incluido el impulso inicial.



simetría n-uple si se conserva invariante en una rotación de ángulo $2\pi/n$.) Evaluar este informe detalladamente.

9 Los neutrones de un reactor se hacen pasar por una columna de berilio (policristalino). Este material se elige porque no absorbe neutrones apreciablemente. Se encuentra que los neutrones que emergen por el otro extremo son "fríos", tienen energías cinéticas correspondientes a temperaturas por debajo de 50°K. Por otra parte, los neutrones "más calientes", con energías cinéticas correspondientes a la temperatura ambiente, son fuertemente dispersados del haz por el berilio. ¿Puede dar una explicación de estos fenómenos?

10 Supóngase que la función de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$ es una solución de frecuencia positiva de la ecuación de Klein-Gordon (con masa m). Admitamos que esta función de onda representa una partícula (paquete de ondas) razonablemente bien concentrada en el espacio y que se mueve en una dirección más o menos bien definida. Considérese la función $\psi_R(\mathbf{x}, t)$ definida por

$$\psi_R(\mathbf{x},t) = \psi(-\mathbf{x},t)$$

(*a*) Probar que $\psi_R(\mathbf{x}, t)$ es también una solución de frecuencia positiva de la ecuación de Klein-Gordon.

(*b*) La función de onda $\psi_R(\mathbf{x}, t)$ representa, según esto, otro estado de movimiento de la partícula. Describir *físicamente* cómo el estado de movimiento representado por $\psi_R(\mathbf{x}, t)$ está vinculado con el estado de movimiento representado por $\psi(\mathbf{x}, t)$. (Es posible formular un enunciado elegante y simple. Para guiarse, el lector puede considerar primero las trayectorias "promedias" en los dos casos.)

11 El siguiente problema es análogo al problema 10, pero probablemente más difícil. Considérese la función $\psi_T(\mathbf{x}, t)$ definida por

$$\psi_T(\mathbf{x},t) = \psi^*(\mathbf{x}, -t)$$

donde el asterisco indica el conjunto complejo.

(*a*) Probar que $\psi_T(\mathbf{x}, t)$ es también una solución de frecuencia positiva de la ecuación de Klein-Gordon.

(*b*) Describir *físicamente* cómo el estado de movimiento representado por $\psi_T(\mathbf{x}, t)$ está vinculado con el estado de movimiento representado por $\psi(\mathbf{x}, t)$.

Capítulo 6

El principio de indeterminación y la teoría de mediciones

Relaciones de indeterminación de Heisenberg 248

Mediciones y conjuntos estadísticos 262

Amplitudes e intensidades 280

¿Se puede predecir en principio el resultado de cualquier medición? 286

Luz polarizada y no polarizada 291

Bibliografía para ulterior estudio 295

Problemas 296

Capítulo 6

El principio de indeterminación y la teoría de mediciones

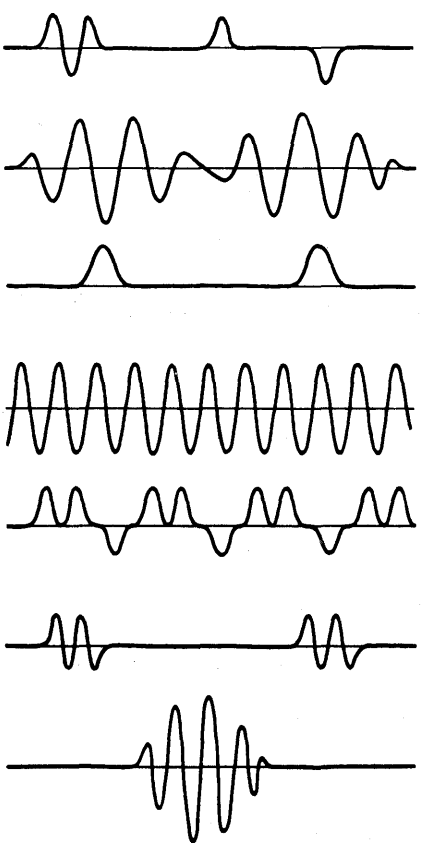


Fig. 24 Un surtido de ondas para recordar al lector que una onda en mecánica cuántica no tiene por qué parecerse a una onda sinusoidal (en un instante dado). Una onda *arbitraria* puede ser una casi arbitraria función de la posición y en su aspecto no tiene por qué ser tan armoniosa como las ondas que muestra esta figura. Hemos representado aquí la parte real de la (en general) función de onda compleja.

Relaciones de indeterminación de Heisenberg

1 En los dos capítulos que preceden hemos aprendido que las partículas que se encuentran en la naturaleza tienen propiedades ondulatorias. Una partícula en movimiento, con un impulso p bien definido, puede comportarse como una onda de longitud $\lambda = h/p$ y esta relación entre longitud de onda e impulso es *universal*, es decir, válida para todas las partículas reales. Hemos de insistir en que no hay que imaginar las propiedades de la onda como si fuera una "onda guía", asociada en cierto modo con un corpúsculo clásico. Una partícula física real es un ente irreducible único, y sus propiedades ondulatorias, al igual que sus propiedades corpusculares, son manifestaciones de aspectos diferentes de su naturaleza intrínseca.

2 Hemos aprendido también que es posible describir el estado de movimiento de la partícula por una función de onda compleja $\psi(\mathbf{x},t)$. Para una partícula aislada, esta función de onda satisface la ecuación de Klein-Gordon y está sujeta a la condición adicional de que en su desarrollo de Fourier únicamente aparecerán frecuencias positivas. Conforme hemos explicado, es posible resolver la ecuación de Klein-Gordon de modo que queda satisfecha esta condición, dada una función de onda inicial $\psi(\mathbf{x},0)$ para el instante $t = 0$ (o cualquier otro instante prefijado). La función de onda inicial es en buena medida arbitraria y podemos así, por lo tanto, disponer de una muy amplia variedad de funciones de onda diferentes que corresponden a diferentes estados de movimiento de la partícula. Es importante comprender que una onda en mecánica cuántica no tiene por qué parecerse a una onda sinusoidal: éste es un caso muy especial. La ecuación de Klein-Gordon determina la dependencia temporal de la función de onda, pero no impone ninguna restricción al "aspecto" de la onda en *un* cierto instante. Sin embargo, sí restringe los aspectos de la onda en dos instantes diferentes. La función de onda $\psi(\mathbf{x},t_1)$ en el instante $t = t_1$ determina unívocamente la función de onda en cualquier otro instante y fija así unívocamente el estado de movimiento de la partícula. En este sentido la mecánica cuántica es una teoría determinista.

3 Consideremos ahora un estado de movimiento de la partícula descrito por la función de onda inicial $\psi(x,0)$. ¿Qué podemos decir acerca de la posición y el impulso de la partícula en el instante $t = 0$?

Hemos dicho que a la amplitud de onda hay que dar una interpretación probabilística. Es en aquellas regiones del espacio en las que la amplitud es grande donde es más probable encontrar la partícula. Más precisamente, el cuadro del módulo de la amplitud de onda en un punto constituye una medida de la probabilidad de que la partícula sea detectada, si la buscamos con un detector (pequeño), en un entorno de dicho punto. Si la función de onda inicial es tal que la amplitud se anula excepto en una región muy pequeña, decimos que la partícula se encuentra *en* esta región (en el instante $t = 0$): su posición se conoce de manera precisa. Por otra parte, si la función de onda inicial se extiende por una gran región del espacio, de tal manera que en ella su amplitud es aproximadamente constante, no podemos atribuir una posición precisa a la partícula: la posición en el instante $t = 0$ está sujeta a una gran indeterminación.

La idea de que, en general, no es posible atribuir una posición precisa a una partícula (en un instante dado) se sigue de modo natural, conforme hemos visto, de la imagen en que se basa el modelo ondulatorio. La precisión con que se conoce la posición depende del estado de movimiento de la partícula. Nada prohíbe una función de onda (un estado de movimiento), para la que la posición se conoce con altísima precisión, y nada hay que prohíba otro tipo de función de onda para la cual la posición no se conoce más que con una precisión de un año luz.

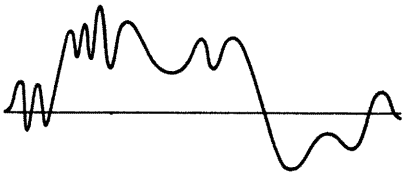
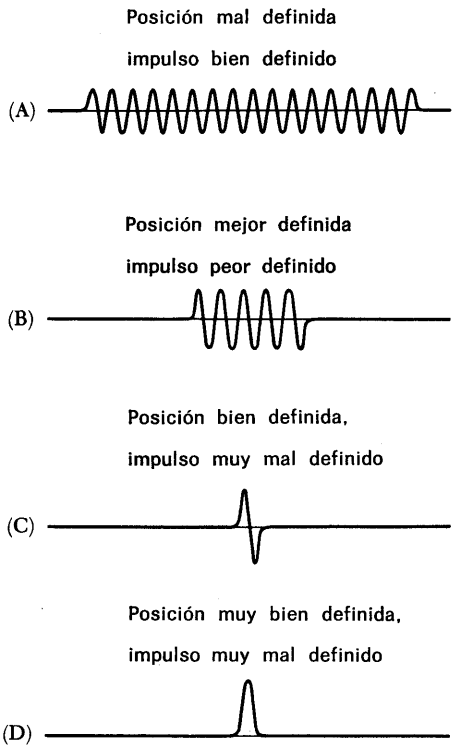


Fig. 4A Ejemplo de un tren de ondas para el que el concepto de longitud de onda tiene muy poco sentido. En una onda de este tipo el impulso está muy mal definido. Véase también la fig. 2A: el impulso está muy poco definido para todas las ondas representadas, excepto la que se encuentra en la mitad.

4 Consideraciones análogas se aplican a la variable impulso. Dado que impulso y longitud de onda están vinculados por la ecuación de De Broglie, es claro intuitivamente que el impulso no puede estar bien definido a menos de que lo esté la longitud de onda. Pero para que ésta lo esté es necesario que la función de onda posea un cierto carácter periódico. Una larga onda sinusoidal tiene una longitud de onda bien definida, pero para una curva irregular arbitraria el propio concepto de longitud de onda carece de significación precisa. Por lo tanto, se comprende que la precisión con que está definido el impulso depende del estado de movimiento de la partícula: puede estar muy bien definido o puede estarlo de manera muy imprecisa.



Figs. 5A, B, C, D Para ilustrar nuestro análisis de la relación de indeterminación posición-impulso. Una posición bien definida requiere un tren de ondas corto. Un impulso bien definido requiere muchos ciclos sinuosidales bien desarrollados. Las dos condiciones se encuentran en conflicto entre sí.

Heisenberg se dio cuenta de que mientras no hay límites para la precisión con la que *o* el impulso *o* la posición se pueden definir, hay un límite fundamental para la precisión con la cual es posible definir la posición y el impulso en *el mismo instante* (es decir, para la *misma* función de onda). Esta idea encuentra su expresión en las célebres *relaciones de indeterminación,* formuladas por Heisenberg en 1927 *. Deduciremos ahora estas relaciones mediante simples argumentos intuitivos.

5 Consideremos primero las ondas de De Broglie en un mundo unidimensional. Para simplificar, emplearemos unidades tales que $\hbar = 1$. La longitud de onda y el impulso están entonces ligados por $\lambda = 2\pi/p$ y no tenemos que distinguir entre vector de onda e impulso.

Nuestro argumento se desarrollará en forma de representaciones gráficas de ondas y con este objeto hemos dibujado cuatro trenes de ondas particulares, de longitud finita, en las figs. 5A, B, C, D. (La coordenada x es la abscisa en estas figuras.) Ahora bien, el lector no debe perder de vista que la función de onda $\psi(x,0)$ es, en general, una función compleja, hecho que crea problemas cuando queremos representarla gráficamente. Sin embargo, cabe dibujar por separado la parte real y la parte imaginaria de la función y el lector puede interpretar las figuras 5A, B, C, D como representación sea de la parte real, sea de la parte imaginaria de $\psi(x,0)$.

Los gráficos representan "ondas sinusoidales interrumpidas", descritas por la función sen (px) en la región en la cual la función de onda no se anula. Sin embargo, la onda no es *realmente* una onda sinusoidal pura, porque está "cortada" en ambos extremos. Por esta razón, la longitud de onda (y el impulso) no están definidos con precisión; estas cantidades pueden definirse de manera precisa *solamente* si la onda es una onda sinusoidal pura.

Mirando las figuras 5A, B, C, D, podemos ver claramente que cuanto mejor definida está la posición, peor definido está el impulso. Designemos la indeterminación en la posición x por Δx. Como medida aproximada de la indeterminación en la posición podemos tomar la longitud del tren de ondas: si el tren de ondas consiste en n ondas completas, tenemos

$$\Delta x \sim n\lambda = \frac{2\pi n}{p} \tag{5a}$$

* W. Heisenberg, "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", *Zeitschrift für Physik* **43**, 172 (1927).

donde λ es la longitud de onda. Ahora bien, es claro que la longitud de onda debe estar tanto mejor definida cuanto mayor es el número de oscilaciones completas en el tren de ondas. Como medida aproximada de la indeterminación *relativa* en la longitud de onda cabe adoptar la cantidad

$$\frac{1}{n} \sim \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta p}{p} \tag{5b}$$

donde Δp es la indeterminación en el impulso. (Dado que $\lambda = 2\pi/p$ de aquí se sigue que $\Delta\lambda/\lambda = \Delta p/p$.)

Combinando (5a) con (5b) obtenemos la relación entre órdenes de magnitud

$$\Delta x\, \Delta p \sim 1 \tag{5c}$$

Hemos suprimido aquí el factor 2π porque únicamente nos interesa una estimación del orden de magnitud. Nuestras definiciones de Δx y de Δp no son precisas, sino sólo cualitativas, y justamente por esto nuestro resultado es también tan sólo de carácter cualitativo.

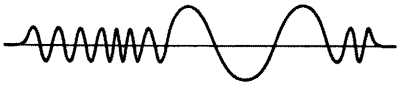


Fig. 6A En el caso de este tren de ondas la posición está tan mal definida como en la figura 5A. Sin embargo, también el impulso está muy mal definido, y, sin duda alguna, mucho peor definido que en la fig. 5A. La relación de indeterminación correcta debe ser una desigualdad: es posible imaginar trenes de onda para los que las indeterminaciones tanto en el valor del impulso como en la posición son arbitrariamente grandes.

6 La relación (5c) es la forma que toma la relación de indeterminación para los tipos particulares de ondas representados en las figs. 5A, B, C, D. La relación de indeterminación general, válida para *todas* las ondas, tiene la forma de una *desigualdad.* Para convencer al lector de este hecho presentamos otro tipo de onda en la fig. 6A. Es claro que para esta onda la indeterminación en la posición es aproximadamente la misma que en la fig. 5A. Sin embargo, la indeterminación en el impulso (o en la longitud de onda) debe ser mucho mayor para la onda de la fig. 6A que para la onda de la fig. 5A. La relación correcta de indeterminación posición-impulso debe, por lo tanto, ser de la forma

$$\Delta x\, \Delta p \gtrsim 1 \tag{6a}$$

El lector reconocerá que es ésta la relación de indeterminación que discutimos muy brevemente en el Cap. 1.

7 Consideremos ahora una onda en un espacio de tres dimensiones. Ante todo advertimos que nuestra discusión relativa a una onda unidimensional se aplica por separado a cada una de las tres coordenadas. Por lo tanto, si x_α y p_α ($\alpha = 1, 2, 3$) son

la posición y el impulso de la partícula en coordenadas cartesianas, tenemos

$$\Delta x_\alpha \, \Delta p_\alpha \gtrsim 1, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{7a}$$

Por otra parte, es perfectamente posible que la onda se encuentre muy bien localizada en el *espacio,* por ejemplo, en la dirección-x_1, mientras que el *impulso* de la misma está a su vez muy bien definido en la dirección-2. Para ver esto el lector debe imaginar un paquete de ondas que se encuentra confinado en una pequeña región en torno del eje-2, pero cuya extensión en la dirección de este eje es muy grande. La coordenada-x_1 de la partícula (= paquete de ondas) se conoce entonces muy bien. Por otra parte, en la dirección del eje-x_2 podemos tener una onda estrictamente periódica, que se extiende considerablemente a lo largo de este eje, lo que significa que el impulso p_2 puede estar muy bien definido. La precisión con que se conoce la coordenada-x_1 no impone limitación alguna, por lo tanto, a la precisión con que la componente p_2 del impulso se puede conocer, y tenemos las relaciones generales

$$\Delta x_\alpha \, \Delta p_\beta \geqq 0, \qquad \text{para } \alpha \neq \beta \tag{7b}$$

Las desigualdades (7a) y (b) son las relaciones de indeterminación para ondas (= partículas) en el espacio de tres dimensiones.

8 Para profundizar más en la cuestión, consideremos de nuevo la representación de una onda arbitraria como superposición de ondas planas:

$$\psi(\mathbf{x},0) = \int_{(\infty)} d^3(\mathbf{p}) A(\mathbf{p}) \exp\,(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) \tag{8a}$$

donde

$$A(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int_{(\infty)} d^3(\mathbf{x})\, \psi(\mathbf{x},0) \exp\,(-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) \tag{8b}$$

Hemos discutido esta representación en las Secs. 39-44, capítulo 5, y se dijo allí que es un hecho que cualquiera de estas dos ecuaciones implica la otra.

Supongamos ahora que la función $A(\mathbf{p})$ está muy bien localizada en el espacio de los impulsos. Esto significa que $A(\mathbf{p})$ es grande tan sólo en la inmediata vecindad de cierto punto

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, pero pequeña en todos los demás puntos. Para simplificar, podemos admitir que $A(\mathbf{p})$ se *anula* fuera de cierto entorno muy pequeño de $\mathbf{p}_0$. Si consideramos la integral que define a $\psi(\mathbf{x},0)$ esperamos, intuitivamente, que la función de onda $\psi(\mathbf{x},0)$ no estará bien localizada. La función de onda $\psi(\mathbf{x},0)$ tendrá aproximadamente el aspecto de una onda plana con impulso $\mathbf{p}_0$. Para verlo el lector debe imaginar el caso extremo en el que la región en la cual $A(\mathbf{p})$ es diferente de cero se contrae reduciéndose a un punto. (Al pasar a este límite debemos, naturalmente, aumentar a la vez la amplitud $A(\mathbf{p})$, ya que de otro modo la integral que da $\psi(\mathbf{x},0)$ tendería a cero).

El autor espera que el lector pueda "ver" que cuanto más concentrada está la función $A(\mathbf{p})$ tanto más se extiende por el espacio la función de onda $\psi(\mathbf{x},0)$. Sin embargo, hay una notable simetría entre las ecuaciones (8a) y (8b) y podemos también concluir que cuanto más concentrada esté la función $\psi(\mathbf{x},0)$, tanto más se extiende la función $A(\mathbf{p})$. Si la función $\psi(\mathbf{x},0)$ está muy concentrada, es decir, es grande tan sólo en cierta pequeña región en torno de un punto $\mathbf{x}_0$, esto significa que la posición de la partícula está bien definida. En cambio, el impulso se encuentra entonces muy mal definido, porque un amplio intervalo de impulsos contribuirá al desarrollo (8a).

9 A estas ideas se puede dar una forma precisa y es posible establecer una relación entre la concentración de la función $A(p)$ y la concentración de la función $\psi(\mathbf{x},0)$. El resultado es una *relación de indeterminación:* la precisión con que está definida la posición y la precisión con la que lo está el impulso se encuentran vinculadas inversamente. Dado que hemos prometido al lector no apoyarnos en este libro en la teoría de la integral de Fourier, no presentaremos una deducción rigurosa de las relaciones de indeterminación *. Lo que aquí nos importa es comprender cualitativamente cómo aparecen dichas relaciones. Conforme hemos visto, la idea es sumamente simple. Si la posición de la partícula ha de estar muy bien definida, el tren de ondas debe ser muy corto. Pero esta condición es incompatible con la condición de que el momento esté bien definido, es decir, con la de que el tren de ondas se parezca a una onda sinusoidal en un intervalo que incluye un número grande de períodos completos. Si aceptamos la descripción on-

* Para una deducción típica de estas relaciones referimos al lector a la obra de L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968), 3.ª edición, pág. 60.

dulatoria de las partículas, hemos de llegar a la conclusión de que la posición y el impulso de la partícula no se pueden conocer *simultáneamente* con precisión ilimitada.

Recordamos al lector nuestra breve discusión en las secciones 20-26, cap. 1, acerca del significado físico de las relaciones de indeterminación. Ahora debe estar ya perfectamente claro que estas relaciones no describen meramente ciertas "perturbaciones", desafortunadas e inevitables, que nuestros instrumentos de medida imponen al movimiento clásico ordenado de un corpúsculo clásico. Dichas relaciones establecen, en cambio, el límite más allá del cual no se pueden llevar las ideas clásicas. Carece simplemente de sentido hablar de la posición *precisa* y del impulso *preciso* simultáneos de una partícula que obedece a la mecánica cuántica (es decir, de un paquete de ondas).

10 ¿Cuáles son las condiciones que han de quedar satisfechas de manera que podamos imaginar un electrón como un corpúsculo clásico, como una "bola de billar cargada"? Estas condiciones son análogas a las que deben cumplirse para que sea válida la óptica geométrica. Las dimensiones lineales del aparato por el que pasa la partícula deben ser grandes comparadas con la longitud de onda, ya que de no ser así observaríamos los efectos de difracción característicos de las ondas. Sea d cierta dimensión lineal del instrumento; d puede ser el diámetro de una lente o la anchura de una rendija. Sea λ la longitud de onda de De Broglie de la partícula. Para que la descripción corpuscular clásica sea suficientemente precisa, debemos tener $d \gg \lambda$. Dado que $\lambda = 2\pi/p$, nuestro criterio de aplicabilidad se puede escribir en la forma

$$dp \gg 1 \tag{10a}$$

En el sistema CGS de unidades este criterio se expresa por $dp \gg \hbar$ y resulta así ser el mismo que el que discutimos en las Secs. 20-26 del capítulo 1.

11 Para ilustrar lo que implican las relaciones de indeterminación, estudiemos con qué precisión se puede atribuir una trayectoria clásica a un electrón en un caso particular. La situación se presenta en las figs. 11A, B, C, D,. Un haz de electrones, descrito cada uno por una onda plana, incide por la izquierda sobre la pantalla situada asimismo a la izquierda. Esta última tiene una rendija de anchura d. Pretendemos elegir d de tal

manera que la mancha producida sobre la pantalla situada a la derecha por el haz que pasa por la rendija sea lo más pequeña posible. La distancia entre las dos pantallas es L.

Suponemos que los electrones tienen todos el mismo impulso incidente p. Si un electrón pasa a través de la pantalla que se encuentra a la izquierda, la indeterminación en su posición lateral será d. La indeterminación Δp en el valor del impulso lateral viene entonces dada por

$$\Delta p \sim \frac{1}{d} \tag{11a}$$

Si admitimos que Δp es pequeño comparado con p, cabe formular (11a) en términos de la indeterminación $\Delta\theta$ en el ángulo θ (respecto de la dirección de incidencia) con el que emergen los electrones, y tenemos

$$\Delta\theta \sim \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{1}{pd} \tag{11b}$$

Sea Δx la medida del tamaño de la mancha producida sobre la pantalla situada a la derecha. El valor de Δx viene determinado por dos factores: el tamaño de la abertura en la pantalla de la izquierda, y la dispersión de la onda por difracción en la rendija. (Véase fig. 11A.) Podemos escribir, por lo tanto,

$$\Delta x \sim d + L\,\Delta\theta \sim d + \frac{L}{pd} \tag{11c}$$

Dado que la longitud de onda λ está dada por $\lambda = 2\pi/p$, (11c) se puede escribir también en la forma

$$\Delta x \sim d + \frac{\lambda L}{d} \tag{11d}$$

donde hemos prescindido del factor 2π en el último término. Nos interesa aquí únicamente una estimación del orden de magnitud, y dado que nuestro resultado final será más elegantemente simple sin el factor 2π, prescindimos de él.

Vemos, pues, que si se hace d demasiado pequeño, el segundo término en (11d) será grande debido a los efectos de difracción, mientras que el primer término es grande si lo es la anchura d de la rendija. Es un simple problema de cálculo

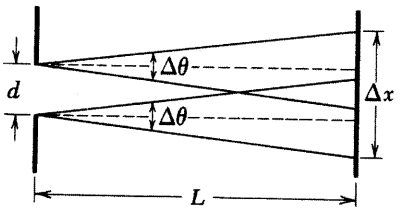
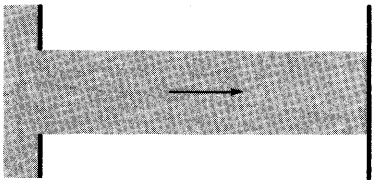
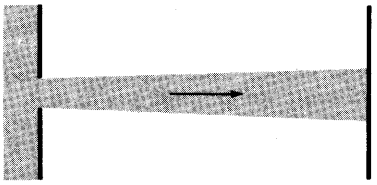


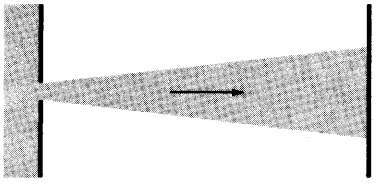
Fig. 11A Intentamos producir un haz estrecho de electrones limitando un haz ancho incidente por la izquierda mediante la rendija en la pantalla situada asimismo a la izquierda. El haz se difracta en la rendija y la indeterminación $\Delta\theta$ en el valor del ángulo según el cual salen de la rendija los electrones es inversamente proporcional a la anchura d de la misma. El tamaño de la mancha sobre la pantalla que se encuentra a la derecha viene dado por $\Delta x \sim d + L\,\Delta\theta$.



(B)



(C)



(D)

Figs. 11B, C, D Estas tres figuras, muy esquemáticas, ilustran cómo la anchura del haz depende de la anchura d de la rendija de entrada. (Obsérvese que la longitud de onda de los electrones es más corta en estas figuras que en la fig. 11A.) En B el tamaño de la mancha sobre la pantalla a la derecha es grande, porque lo es la rendija de entrada. Si hacemos que la anchura de la rendija sea muy pequeña, como en D, la mancha sobre dicha pantalla será grande debido a los efectos de difracción. Obtenemos la mancha de menor tamaño eligiendo $d \sim \sqrt{\lambda L}$, en cuyo caso el tamaño de aquélla es del mismo orden de magnitud. En la fig. C se pretende representar el resultado de esta elección óptima.

el determinar el valor óptimo d_0 de d para el cual la estimación (11d) relativa a Δx toma su valor mínimo $\Delta x_{\min}$ y encontramos

$$d_0 = \sqrt{\lambda L}, \qquad \Delta x_{\min} = 2d_0 = 2\sqrt{\lambda L} \tag{11e}$$

En el caso óptimo la anchura de la mancha en la pantalla de la derecha es el doble de la anchura de la rendija en la pantalla de la izquierda. (El factor 2 no hay que tomarlo demasiado literalmente: no hay que olvidar que estamos efectuando tan sólo una estimación del orden de magnitud y que hemos hecho $2\pi \sim 1$.) Supongamos $L = 1$ metro y supongamos que la energía de los electrones es de 150 eV. Su longitud de onda es entonces de 1 Å y la estimación (11e) nos dice que la mancha sobre la pantalla de la derecha puede en principio llegar a ser únicamente de 0,02 mm. Las "trayectorias" de los electrones entre las dos pantallas resultan así estrechas y bien definidas desde un punto de vista macroscópico.

12 La investigación detallada de las condiciones bajo las cuales un sistema físico parece obedecer a las leyes de la física clásica es un problema interesante, pero no trivial. Hay personas que describen como sigue lo que debe hacerse. Primero resolver el problema mediante la mecánica cuántica y hacer entonces $\hbar = 0$ para obtener el límite clásico. Esta idea no es correcta. No podemos hacer $\hbar = 0$ porque sabemos que $\hbar$ es realmente (con la elección adecuada de unidades) igual a 1. El problema *real* consiste en mostrar cómo es que un sistema que obedece las leyes de la mecánica cuántica, como lo hacen *todos* los sistemas físicos, *parece* obedecer las leyes de la física clásica, es decir, obedece estas leyes con un grado considerable de precisión. En el estudio de este problema es una buena idea emplear unidades en las que $\hbar = 1$, como hicimos en nuestro ejemplo, porque entonces uno se ve forzado a enfrentarse con la situación real.

El problema de cómo se alcanza el límite clásico tiene varios aspectos y es casi imposible dar una explicación exhaustiva en una única proposición. *Una* condición, si entendemos por "límite clásico" la teoría clásica de la dinámica de partículas, es que el dispositivo sea tal que no resulten fácilmente observables los efectos de difracción. Hemos discutido este punto en la sección que precede. Si un paquete de ondas debe mantenerse bien localizado y ha de tener una trayectoria bien definida, que se pueda interpretar como la trayectoria de un corpúsculo, las dimensiones lineales de las rendijas que definen la trayectoria deben ser grandes comparadas con la longi-

tud de onda de De Broglie. Sin embargo, la dinámica clásica no es el único "límite clásico". Es también interesante hallar en qué condiciones la teoría electromagnética clásica resulta ser válida. En este caso la condición no es la de que sean inobservables los efectos de difracción, sino la de que los fotones individuales no deben manifestarse como *partículas.*

No llevaremos más allá la cuestión del límite clásico. Por el momento es suficiente la idea cualitativa aproximada que nos hemos formado del mismo. El lector debiera reflexionar acerca de estos problemas por sí solo. Como muestra nuestra discusión, lo que entendemos por "límite clásico" depende del sistema considerado, y es éste un punto del que hay que darse perfecta cuenta.

13 Como otro ejemplo de razonamientos en los que interviene la relación de indeterminación, intentemos estimar la energía de enlace del átomo de hidrógeno tomando dicha relación como base y tal como prometimos hacerlo en la sección 26, capítulo 2. En esta discusión emplearemos el sistema de unidades CGS, sistema en el cual la relación de indeterminación (6a) toma la forma

$$\Delta x \, \Delta p \gtrsim \hbar \tag{13a}$$

Para llevar a cabo la estimación supondremos que la expresión clásica

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \tag{13b}$$

para la energía total de un electrón en el campo electrostático del protón sigue teniendo sentido en mecánica cuántica. La variable p se refiere entonces al impulso de la onda del electrón y la variable r es algo así como una "coordenada de posición" para la onda.

El primer término en la expresión de E es, evidentemente, positivo, mientras que el segundo es negativo. La energía del estado fundamental es la menor energía posible del sistema y sabemos que ha de ser negativa, ya que de lo contrario no existiría enlace. *Clásicamente* podemos hacer que la energía de enlace sea tan grande cuanto queramos simplemente eligiendo una órbita para el electrón que tenga un radio muy pequeño. Para un estado del movimiento de este tipo la indeterminación en la *posición* sería pequeña, y si intentamos ahora tratar igualmente el problema dentro de la mecánica cuántica, llegamos a la conclusión de que la indeterminación en el valor



Fig. 15A Si el electrón está confinado en una muy pequeña región en torno del núcleo, la indeterminación en su posición será pequeña. La indeterminación en su impulso debe entonces ser grande, y esto significa que también debe serlo su energía cinética. Su energía potencial es, naturalmente, negativa y grande en valor absoluto.

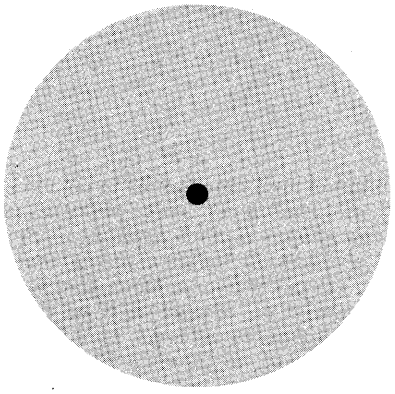


Fig. 15B Si queremos que la energía cinética sea muy pequeña, el electrón debe disponer de espacio suficiente: la indeterminación en su posición ha de ser grande. Su distancia media al núcleo es entonces grande y el valor absoluto de su energía potencial es pequeño.

El estado fundamental resulta de un compromiso en el que la energía *total* toma el menor valor posible compatible con el principio de indeterminación.

del impulso debe ser grande en virtud de la relación de indeterminación, lo que a su vez significa que la cantidad $p^2/2m$ debe ser grande. En otras palabras, si intentamos hacer grande la energía potencial (y negativa) haciendo r pequeño, la energía cinética será entonces grande, lo que puede conducir a una energía total grande si "gana" el término correspondiente a la energía cinética. Por otra parte, si intentamos hacer pequeña la energía cinética tomando para p valores pequeños, en tales condiciones, r tendrá que ser grande, y entonces la energía potencial negativa es pequeña. Cabe imaginar que habrá cierto radio óptimo para el que la energía *total* toma su mínimo valor.

14 Para ver cómo esta "compensación" entre las energías cinética y potencial conduce al enlace, haremos la siguiente *tosca* aproximación. Substituyamos por r la indeterminación en la posición, y por p la indeterminación en el impulso, escribiendo en tal caso la relación de indeterminación en la forma

$$rp \sim \hbar \tag{14a}$$

o, para concretar, supongamos que

$$rp = \hbar \tag{14b}$$

Apliquemos ahora la relación (14b) para eliminar r en la expresión (13b) de la energía total E. Obtenemos entonces

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 p}{\hbar} \tag{14c}$$

Como función de p, la energía E tendrá un mínimo en un punto $p = p_0$, punto que determinamos igualando a cero la derivada de E respecto de p, es decir, haciendo

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_{p=p_0} = \frac{p_0}{m} - \frac{e^2}{\hbar} = 0 \tag{14d}$$

Despejando p_0 e introduciendo, por definición, $r_0 = \hbar/p_0$, tenemos así

$$p_0 = \frac{e^2 m}{\hbar}, \qquad r_0 = \frac{\hbar^2}{e^2 m} \tag{14e}$$

y

$$E = \frac{{p_0}^2}{2m} - \frac{e^2 p_0}{\hbar} = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2} = -R_\infty \tag{14f}$$

Comparando estos resultados con los obtenidos en la sección 23, capítulo 2, encontramos que la energía E dada en la

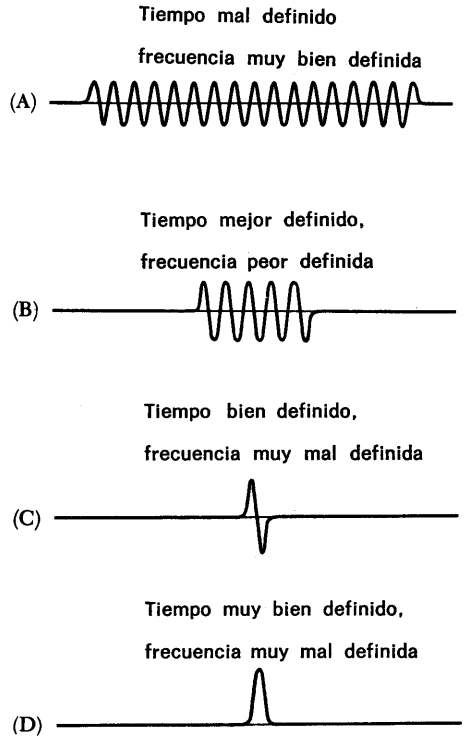
ecuación (14f) es exactamente correcta. El "radio" r_0, dado por la ecuación (14e), es también "correcto" y coincide precisamente con el radio de Bohr, $r_0 = a_0 = 0{,}53 \times 10^{-8}$ cm.

15 Ciertamente es una "casualidad" que nuestro razonamiento, más bien pobre, dé la energía de enlace correcta. Sin embargo, el que obtengamos o no la energía precisa no es el punto importante. Lo que sí importa es que obtenemos el orden correcto de magnitud tanto para la energía de enlace, como para el tamaño del átomo, y *el que podamos comprender, tomando como base la teoría ondulatoria, por qué los átomos no se desploman.* La estructura de un átomo es el resultado de un compromiso. La energía del estado fundamental es la menor energía posible en la que el átomo puede existir, y esta energía es la suma de dos términos de signos opuestos. Si intentamos hacer que el término negativo, es decir, la energía potencial, sea grande confinando las ondas del electrón en una región muy pequeña en torno del núcleo, entonces el término de energía cinética pasa a ser grande, porque las ondas llevarán consigo un impulso asimismo grande. Por otra parte, no podemos extender demasiado las ondas, porque en tal caso el término de energía potencial se convierte en insignificante. El estado fundamental corresponde al "mejor" compromiso posible. Estas consideraciones se ilustran esquemáticamente en las figuras 15A, B.

Nuestra discusión prueba también que la idea de órbitas clásicas en el átomo es en absoluto incompatible con el modelo ondulatorio. En la sección precedente encontramos que la indeterminación en la posición del electrón en el átomo de hidrógeno debe ser del orden del radio de Bohr a_0. Esta estimación es aplicable, evidentemente, a la coordenada de posición en cada dirección y, en estas circunstancias, carece de sentido hablar de una órbita circular de radio a_0.

16 Como segundo ejemplo empleemos la relación de indeterminación para obtener una estimación tosca de la intensidad de las fuerzas nucleares. Consideremos un nucleón confinado en el núcleo dentro de una esfera de radio aproximadamente igual a $r_0 = 1{,}2 \times 10^{-13}$ cm. La relación de indeterminación nos dice entonces que el impulso debe ser por lo menos del orden de $p \sim \hbar/r_0$ y que, por consiguiente, la energía cinética del nucleón ha de ser del orden de

$$E_{\text{cin}} \sim \frac{1}{2M_p}\left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2 \sim 10 \text{ MeV} \qquad (16a)$$



Figs. 18A, B, C, D Para ilustrar la relación de indeterminación tiempo-frecuencia. Excepto por los rótulos, estas figuras son idénticas a las figuras 5A, B, C, D.

Dado que el nucleón se encuentra enlazado en el núcleo, la energía potencial promedia, que designaremos por $\langle U \rangle$, debe ser negativa y mayor en módulo que la energía cinética, lo que nos permite decir que

$$-\langle U \rangle \gtrsim 10 \text{ MeV} \tag{16b}$$

Esta estimación *es muy tosca,* pero da idea del orden de magnitud de que se trata.

17 Haremos notar que el mismo tipo de razonamiento puede emplearse para refutar la idea de que los núcleos están constituidos por protones y *electrones.* En la ec. (16a) se advierte que la energía cinética es inversamente proporcional a la masa de la partícula, lo que nos conduce a la conclusión de que la energía potencial media de un electrón debiera ser unas dos mil veces mayor que el valor estimado en la ec. (16b). Pero esto es totalmente incompatible con las pruebas experimentales, según las cuales las interacciones dominantes en el caso de los electrones son de naturaleza electromagnética.

18 Podemos formular una relación de indeterminación tiempo-frecuencia que es completamente análoga a la relación de indeterminación posición-impulso. Sea $f(t)$ la amplitud (compleja) de cierto proceso físico. Por ejemplo, $f(t)$ puede ser la amplitud, como función del tiempo t, de una onda electromagnética en cierto punto fijo del espacio. Si la onda fue emitida por un átomo, será un tren de ondas de longitud finita y la amplitud tenderá a cero cuando t tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. Una onda de estas características puede considerarse como superposición de ondas *monocromáticas* y la resolución de la onda en sus componentes monocromáticos se expresa por la integral de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, g(\omega) \, e^{-i\omega t} \tag{18a}$$

donde la función $g(\omega)$ viene dada por

$$g(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, f(t) \, e^{i\omega t} \tag{18b}$$

Como afirmamos en el capítulo 5, el que una cualquiera de estas dos integrales implica la otra para una amplia clase de funciones $f(t)$ o $g(\omega)$ que se "comportan bien", es un teorema.

Este teorema nos permite así analizar un proceso arbitrario dependiente del tiempo en términos de sus componentes armónicas.

Si la función $g(\omega)$ en (18a) es grande tan sólo en la inmediata vecindad del punto $\omega = \omega_0$, podemos decir que la frecuencia está muy bien definida. La amplitud $f(t)$ representa un proceso casi monocromático. Para un intervalo de tiempo largo, la amplitud $f(t)$ será aproximadamente de la forma $f(t) = Ae^{-i\omega_0 t}$. Si, por otra parte, la amplitud $f(t)$ es grande únicamente en un intervalo de tiempo pequeño en torno del instante $t = t_0$, lo que corresponde al caso en que $f(t)$ representa un impulso brusco, la frecuencia estará muy mal definida. La función $g(\omega)$, dada por (18b), tendrá valores apreciables en un intervalo de frecuencias grande. La frecuencia asociada con el proceso, y el instante en el cual el proceso tiene lugar, no pueden estar definidos *ambos* con precisión arbitraria. La indeterminación $\Delta\omega$ en la frecuencia, y la indeterminación Δt en el instante en el que el proceso tuvo lugar, están sujetos a la relación de indeterminación

$$\Delta\omega\, \Delta t \gtrsim 1 \tag{18c}$$

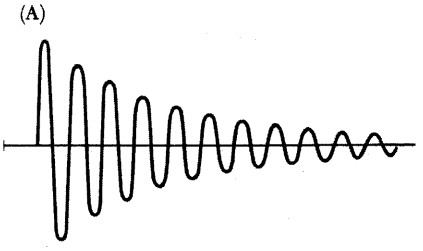
El razonamiento que conduce a esta relación de indeterminación es, evidentemente, por completo análogo al que condujo a la relación de indeterminación posición-impulso. Hemos ilustrado estas ideas en las figuras 18A, B, C, D.

19 Recordará el lector que en las secciones 20-23, capítulo 3, discutimos la relación entre la vida media τ de un estado excitado y la anchura finita ΔE del correspondiente nivel de energía. Llegamos a la conclusión de que la anchura es inversamente proporcional a la vida media. Consideremos ahora esta relación a la luz de la relación de indeterminación tiempo-frecuencia.

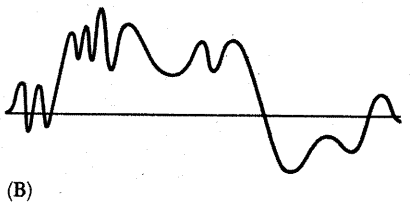
Supongamos que el sistema decae del estado excitado al estado fundamental por emisión de un fotón. La indeterminación en el valor de la frecuencia del fotón será entonces $\Delta\omega = \Delta E/\hbar$, si ΔE es la anchura del nivel excitado. La duración del proceso de emisión es del orden de la vida media τ y la indeterminación en el instante en que tuvo lugar la emisión es, por lo tanto, del orden de τ. A la vista de (18c) podemos escribir entonces

$$\tau\, \Delta\omega \sim 1 \quad \text{o bien} \quad \tau\, \Delta E \sim \hbar \tag{19a}$$

Hemos escrito una igualdad aproximada en vez de una desigualdad. Se trata aquí de una oscilación armónica amortiguada

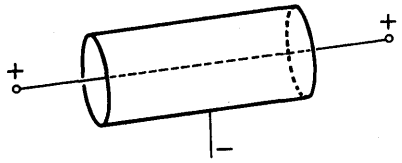


Figs. 19A, B Arriba se representa una oscilación armónica amortiguada exponencialmente. Resulta intuitivamente claro que la frecuencia está mucho mejor definida para un proceso de este tipo que para el proceso "irregular" ilustrado por la curva de la fig. 19B (abajo). Para la curva superior es razonable conjeturar que la desigualdad en la relación de indeterminación general es, en este caso, una *igualdad* aproximada.



exponencialmente, como muestra esquemáticamente la fig. 19A. La amplitud de este proceso es mucho más parecida, evidentemente, a la amplitud que muestra la fig. 18A, para la cual el producto de indeterminaciones toma su valor límite inferior, que a una amplitud tal como la que presenta la fig. 18B, para la cual el tiempo y la frecuencia están *ambos* muy mal definidos.

Las relaciones (19a) son justamente las relaciones que dedujimos en las secciones 20-23, capítulo 3, siguiendo una línea de razonamiento en apariencia diferente. Si el lector sigue reflexionando acerca de esta cuestión, advertirá, sin embargo, que las ideas básicas de nuestras dos deducciones no son en realidad tan distintas. Nuestra discusión en el capítulo 3 podría caracterizarse como un "análisis de Fourier disfrazado".



Dibujo muy esquemático de un contador Geiger-Müller. Este aparato consiste en dos electrodos dentro de una envoltura que contiene un gas adecuado. En la figura, el electrodo positivo es un fino alambre, y el electrodo negativo, un cilindro que tiene por eje dicho alambre. Los electrodos se mantienen a una diferencia de potencial de unos 1000 volts. Una partícula cargada rápida que atraviese el espacio entre los electrodos ionizará las moléculas de gas a lo largo de su camino. Los iones y electrones así producidos serán acelerados hacia los electrodos y si la diferencia de potencial es lo suficientemente grande, tendrá lugar la ionización secundaria hasta el punto de llegar a producirse una avalancha de electrones. El impulso de corriente resultante se puede amplificar y registrar y así este aparato puede contar partículas individuales cargadas. Claro está, es necesario disponer las cosas de modo que la descarga se "extinga" después de cada impulso. Esto puede conseguirse bien sea electrónicamente, mediante un circuito auxiliar que disminuye momentáneamente la diferencia de potencial después de cada impulso, o bien llenándolo de un gas tal que la descarga se extinga por sí sola. Los tubos de este último tipo se califican de autoextintores.

Mediciones y conjuntos estadísticos

20 En el resto de este capítulo se estudiará el proceso de medición en física. Lo haremos analizando, en términos de lo que ahora conocemos, algunas situaciones físicas simples. Más bien que intentar formular algo así como una teoría completa de las mediciones, lo que perseguimos es hallar modalidades del punto de vista cuántico. Las mediciones físicas son de la más variada naturaleza, y difícilmente una breve discusión puede reflejar esta múltiple variedad. Cuando queremos entender qué implica una teoría, es natural que consideremos situaciones experimentales sumamente idealizadas, situaciones en las que los rasgos particulares que nos interesan se destaquen lo más claramente posible. Por el momento dejamos de lado todas las dificultades experimentales *técnicas* con las que nos enfrentamos en el mundo real. Nuestra discusión *teórica* de las mediciones, por lo tanto, está muy lejos de ser un relato fiel de lo que ocurre realmente en el laboratorio.

21 A menudo es conveniente imaginar el proceso de medición como algo que ocurre en dos estadios: la *preparación* del sistema objeto de estudio, y luego la *medición* propiamente dicha. Esta descripción es sin duda esquemática, porque con frecuencia no hay ninguna distinción marcada entre la preparación y la medición: parte del proceso de medición puede también considerarse como parte de la preparación, y viceversa.

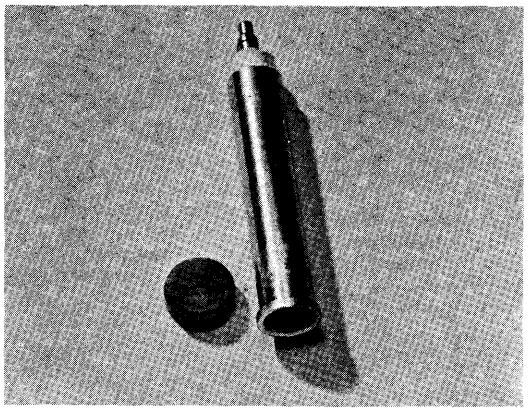
El análisis en términos de dos estadios es particularmente apropiado cuando consideramos experimentos de difracción. En

este caso, se estudia la interacción de una partícula, que forma parte de un haz, con una partícula en un blanco. El estadio de preparación supone la colocación del blanco y la producción del haz en un acelerador. El estadio de medición supone la observación de las partículas que emergen de la región en la que tuvo lugar la interacción. Los experimentos con un haz de luz pertenecen a esta clase. La preparación de los fotones se produce en el foco, que puede ser cierto tipo de "lámpara" junto con un sistema de lentes, polarizadores, prismas, rendijas, etcétera. Las mediciones se llevan a cabo en cierta región de observación que está físicamente separada del foco; el instrumento de medida puede ser un tubo fotomultiplicador asociado con otros instrumentos ópticos.

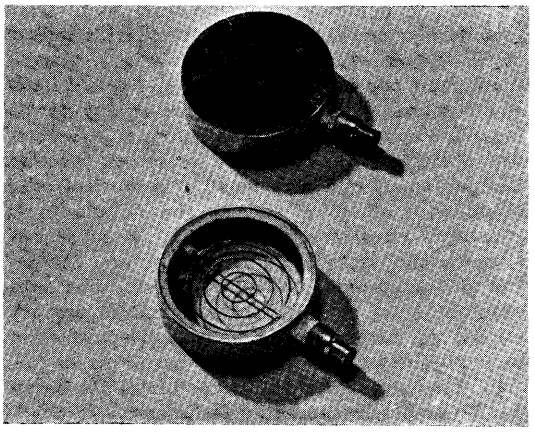
22 Es un rasgo característico de las mediciones en microfísica el que la medición se repite un gran número de veces, preparando siempre el sistema de la misma manera. Los enunciados de los resultados son de carácter típicamente estadístico: decimos que, de N fotones incidentes, un promedio de N' fotones fueron registrados por un fotomultiplicador particular. El *experimento único,* o la *medición única,* se refieren solamente a *un* fotón, pero en nuestro informe final intervienen promedios estadísticos de un gran número de experimentos separados idénticos.

Ahora bien, es claro que dos experimentos separados no son en principio idénticos, ya que se llevan a cabo en dos instantes diferentes. Sin embargo, creemos que las Leyes de la Naturaleza son invariantes respecto de los desplazamientos en el tiempo, con lo cual no cuenta el instante en que se realizó el experimento. Por esta razón, una sucesión de experimentos separados *repetidos* puede considerarse como un conjunto de experimentos idénticos en el sentido de que la preparación del sistema fue la misma en cada experimento elemental.

23 Un haz está formado por muchas partículas, pero si la intensidad del mismo es suficientemente pequeña, en cada dispersión individual intervendrá solamente *una* partícula del haz. Esta situación prevalece siempre en experimentos de dispersión con partículas materiales, al igual que en la mayor parte de experimentos con haces de fotones. Podemos decir que el haz es un *haz formado por una sola partícula.* Hacer experimentos con un haz es la manera práctica de repetir el experimento elemental único (en el que interviene solamente una partícula) gran número de veces.



Dos ejemplos de contadores Geiger-Müller que se encuentran en el mercado. Una importante consideración de diseño es la de facilitar la entrada de las partículas que hay que contar en el espacio activo del contador. Los contadores que se presentan están provistos de ventanas de mica muy fina destinadas a este fin. El contador en la fotografía de arriba es un contador de autoextinción adecuado para contar partículas alfa, partículas beta y cuantos gamma. La longitud del mismo es de unos 12,5 cm, y su diámetro es de unos 19 mm, aproximadamente. La ventana de mica puede verse en el extremo inferior. La eficiencia en la detección de partículas beta muy rápidas es de un 85 por ciento. El contador de la figura inferior se ha diseñado de modo que tenga la mayor ventana de entrada posible. (El diámetro es de unos 44 mm, aproximadamente.) La envoltura metálica es un electrodo, y el otro electrodo se puede ver a través de la ventana de mica. (Fotografía cedida por EON Corporation, Brooklyn, N.Y.)



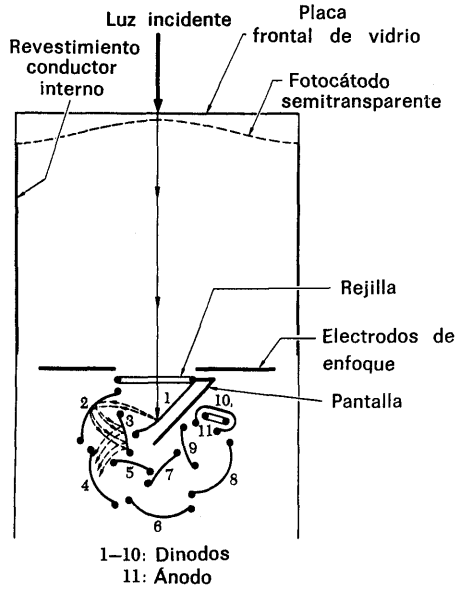


Fig. 24A El tubo fotomultiplicador es ampliamente utilizado como detector de fotones. La figura representa esquemáticamente uno de estos tubos. Los fotones penetran por la placa frontal de vidrio del tubo y dejan en libertad fotoelectrones procedentes de una película muy fina de metal alcalino situada en la parte interior de la placa frontal. Los electrones son acelerados y se enfocan sobre el primer dinodo (designado por el número 1 en la figura). Cada electrón que choca con el primer dinodo da lugar a varios electrones secundarios, los cuales son acelerados y enfocados sobre el segundo dinodo, en el que dan lugar a más electrones secundarios. Éstos a su vez son acelerados y enfocados en el siguiente dinodo, y así sucesivamente. Por cada fotón detectado, una avalancha de electrones alcanza el ánodo, que está acoplado a un amplificador exterior. El aparato es así, de hecho, una célula fotoeléctrica con un amplificador en la misma envoltura de vidrio. Una amplificación de corriente del orden de 10^8 se puede conseguir fácilmente.

El blanco en un experimento de dispersión puede ser una lámina delgada o una placa fina de material sólido, o puede ser una vasija llena de un gas o de un líquido. Si la intensidad en el haz es razonablemente alta, puede ocurrir que dos o más interacciones tengan lugar en el mismo instante en el blanco. Esto no invalida nuestra descripción del haz como haz formado por una sola partícula, porque los dos (o varios) sucesos simultáneos en el blanco son completamente independientes entre sí. Corresponden a dos experimentos *elementales* independientes que casualmente ocurren en el mismo instante.

En principio, cabe llevar a cabo nuestras mediciones con un haz de *muy* baja intensidad, digamos una partícula por minuto, y podemos entonces estar seguros de que solamente una partícula interactúa con el blanco en conjunto cada vez. Dado que es conceptualmente simple imaginar los experimentos con haces como sucesiones de experimentos con una partícula solamente, supondremos en lo que sigue que nuestros haces son de una intensidad tan baja que tan sólo una partícula pasa cada vez. En la práctica real no limitaríamos deliberadamente la intensidad del haz, sino que, por el contrario, procuraríamos en general trabajar con la más alta intensidad que pudiéramos conseguir.

24 Para ilustrar nuestras ideas, consideremos un experimento con un haz de luz. Analizaremos el *experimento único,* es decir, la sucesión de sucesos que tienen lugar cuando llega un fotón procedente del foco. Supongamos que el sistema detector es cierto dispositivo óptico del que forman parte contadores de fotones (por ejemplo, fotomultiplicadores). Después de que ha llegado el fotón, encontramos que alguno de los contadores ha "detectado" su llegada, mientras que otros no lo han hecho: anotamos en nuestro registro del experimento los contadores que han detectado el fotón. Imaginemos que todos los detectores se colocan en la posición original antes de que llegue el siguiente fotón. Cuando éste llega, otros contadores pueden detectar su llegada y éstos no tienen por qué ser necesariamente los mismos que detectaron el fotón en la medición precedente. Tomamos de nuevo nota de los hechos, colocamos los detectores en sus condiciones iniciales y esperamos el próximo fotón. De esta manera se continúa hasta que hemos repetido la medición elemental un gran número de veces, por ejemplo, después de que hayan llegado N fotones procedentes del foco.

Una *única medición del sistema* supone así la observación de los contadores, y los datos básicos de que se toma nota

se refieren a si un contador particular ha detectado o no el fotón. Después de una sucesión de N mediciones independientes podemos decir:

(*a*) El contador 1 ha registrado una señal en promedio p_1 veces por fotón incidente. Este valor medio se define experimentalmente por

$$p_1 = \frac{N_1}{N} \tag{24a}$$

donde N_1 es el número de veces que ha registrado una señal el contador 1 en la sucesión de N experimentos separados.

(*b*) El suceso de que los contadores 1 y 2 hayan registrado *ambos* la llegada del fotón en un único experimento ha ocurrido en promedio un número p_{12} veces por cada fotón incidente. Este valor medio se define experimentalmente por

$$p_{12} = \frac{N_{12}}{N} \tag{24b}$$

donde N_{12} es el número de experimentos elementales en la sucesión en la que *ambos* contadores 1 y 2 han contado.

(*c*) El contador 1 ha registrado en promedio la llegada de un fotón $p(1;2)$ veces por cada vez que lo ha hecho el contador 2. Este número se define por

$$p(1;2) = \frac{N_{12}}{N_2} \tag{24c}$$

donde N_2 es el número de veces que detectó el contador 2 y N_{12} el número de veces en que ambos contadores, el 1 y el 2, detectaron la llegada de un fotón.

25 Si formulamos nuestros resultados en la forma que precede, afirmamos meramente lo que se ha observado de manera directa: aquellos números son nuestros datos primarios. Podemos, sin embargo, llevar a cabo una abstracción y presentar los resultados de las medidas como sigue:

(*a*) La *probabilidad* de que el contador 1 detecte un fotón en nuestro dispositivo experimental es p_1.

(*b*) La *probabilidad* de que *ambos* contadores, el 1 y el 2, detecten un fotón (en un único experimento) es p_{12}.

(*c*) La *probabilidad* de que el contador 1 detecte un fotón, sabiendo que lo ha detectado el contador 2 es $p(1;2)$.

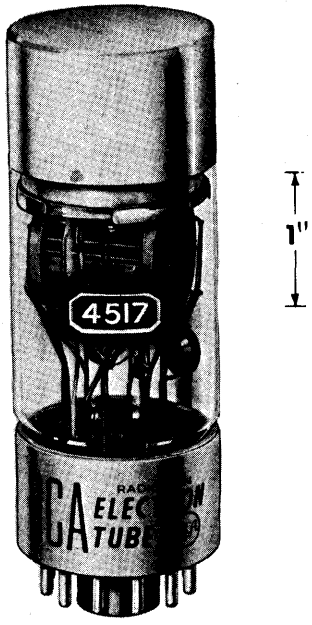


Fig. 24B Un ejemplo de tubo fotomultiplicador de los que se encuentran en el mercado. La disposición de los dinodos, que pueden verse en la parte media del tubo, es más o menos la que se indica en la figura esquemática 24A. El cátodo fotosensible se encuentra en la parte interior del extremo frontal del tubo. Este tipo particular de tubo está diseñado para su uso con contadores de centelleo. Se caracteriza por una muy elevada eficiencia en la detección de cuantos. (Véase fig. 24C.) (Fotografía cedida por Radio Corporation of America, Harrison, N.J.)

Si formulamos nuestros resultados de esta manera, es claro que hacemos con ello una hipótesis, y esta hipótesis es la de que si hubiéramos seguido realizando el experimento indefinidamente, los números N_1/N, N_{12}/N y N_{12}/N_2 tenderían a límites definidos. Estos límites hipotéticos es lo que tratamos de determinar: designamos estos límites como las probabilidades p_1, p_{12} y $p(1;2)$. Dado que N es necesariamente finito en cualquier sucesión real de experimentos, la hipótesis de que estos límites existen y pueden ser determinados con toda la precisión que se quiera y con un grado de confianza tan alto como deseemos con tal que se elija N suficientemente grande es pues, una pía esperanza. La naturaleza de esta esperanza ha dado lugar a muchas especulaciones filosóficas. Admitiremos como un hecho empírico el que la naturaleza posee este tipo de regularidad.

Los resultados de una sucesión de N experimentos independientes pueden así formularse en términos de probabilidades, de las que los números p_1 p_{12} y $p(1;2)$ son ejemplos particulares. El número p_1 es una simple probabilidad del suceso que constituye el hecho de que el contador 1 detecte, p_{12} es una probabilidad de que ocurran simultáneamente dos sucesos, y $p(1;2)$ es una probabilidad condicional de que ocurra un suceso sabiendo que ha ocurrido otro. Podemos considerar muchas otras probabilidades de naturaleza similar, por ejemplo, la probabilidad de que el contador 1 detecte sabiendo que lo han hecho los contadores 2 y 3, pero ningún otro, etc.

26 Podríamos describir nuestras mediciones como una sucesión de experimentos realizados con un gran número de fotones, todos ellos preparados en el foco de la *misma manera.* Sin embargo, parémonos a pensar un poco acerca de qué significa preparar un conjunto de fotones "de la misma manera". Supongamos que hay *dos* lámparas independientes en el foco, por ejemplo, una lámpara de sodio que emite fotones amarillos y una lámpara de mercurio que emite fotones azules. En un solo experimento particular un fotón puede ser, por consiguiente, o amarillo o azul, y el color es una de las variables que caracterizan el fotón entre todas las que podemos determinar en el experimento. Supongamos que hacemos esto en el caso de una larga sucesión de fotones. Podemos entonces comunicar que p_1 es la probabilidad de que el fotón, en un experimento particular cualquiera, sea azul, y que p_2 es la probabilidad de que el fotón sea amarillo. Supongamos que las intensidades de las dos lámparas se mantienen constantes, con lo

cual estas probabilidades son reproducibles: si llevamos a cabo varias series de experimentos repetidos en gran número, siempre encontramos las mismas probabilidades p_1 y p_2 en cada serie.

En estas circunstancias, ¿estamos dispuestos a decir que los fotones han sido todos preparados en el foco "de la misma manera"? No es inmediatamente obvio el que este modo de hablar sea o no apropiado. Cabría argüir que nuestro dispositivo con las dos lámparas introduce un elemento aleatorio en el proceso de preparación, elemento que se podría evitar fácilmente si lleváramos a cabo nuestras observaciones con *una sola* lámpara en funcionamiento cada vez. Pero hay más, ¿no deberíamos acaso decir que todos los fotones se han preparado de la misma manera sólo cuando tenemos la seguridad de que los fotones son, en cierto sentido, idénticos hasta el más alto grado posible?

La dificultad que plantea esta posición es la de que tendríamos que decidir, para cada tipo de experimento, si las partículas han sido "idénticamente preparadas hasta el más alto grado posible" o no. Es obvio que esto no es un problema trivial. Además, el experimento con dos lámparas es, en realidad, tan respetable como el experimento con una lámpara, en el sentido de que las probabilidades p_1 y p_2, al igual que cualesquiera otras probabilidades que describen las respuestas de los detectores, son *estables y reproducibles.* Ésta es, naturalmente, la cuestión esencial para cualquier experimento en el que determinamos números de cuentas por unidades de tiempo y probabilidades, y a menos que el foco sea estable precisamente en este sentido, lo discutido en la seción 25 no vendría al caso y carecería de sentido.

Por lo tanto, es más práctico considerar los fotones como preparados todos ellos de la misma manera siempre que el foco se pueda mantener estacionario de forma tal que todas las probabilidades que importan sean estables y reproducibles. Ésta es la posición que adoptaremos en lo que sigue.

27 En cierto sentido, el experimento con dos lámparas está más próximo a la realidad que el experimento con una sola lámpara. Como ideal, podríamos preferir llevarlo a cabo con únicamente la lámpara amarilla encendida, pero ya se encargará la Naturaleza de que también esté en marcha en el laboratorio la lámpara azul (aunque su intensidad puede ser muy pequeña). Consideremos dos ejemplos para ilustrar lo que estamos pensando en relación con este asunto.

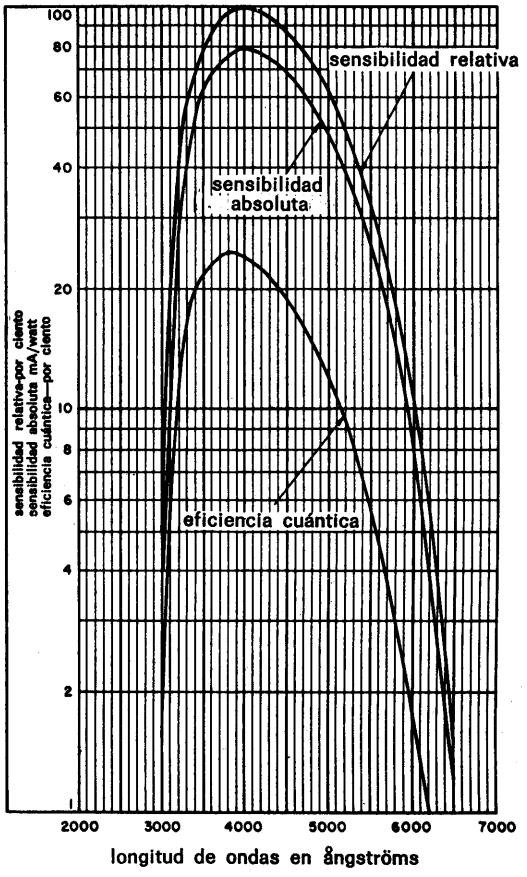


Fig. 24C Gráficos que muestran la eficiencia en la detección del tubo fotomultiplicador reproducido en la fig. 24B. Obsérvese la curva designada por "eficiencia cuántica". Ésta representa la probabilidad de detectar un fotón en función de la longitud de onda. La probabilidad máxima es de un 25 por ciento, aproximadamente, lo que constituye una eficiencia muy elevada para un fototubo. El gráfico se ha tomado del folleto, preparado por los fabricantes, en el que se describe el tubo (Ilustración cedida por Radio Corporation of America, Harrison, N.J.)

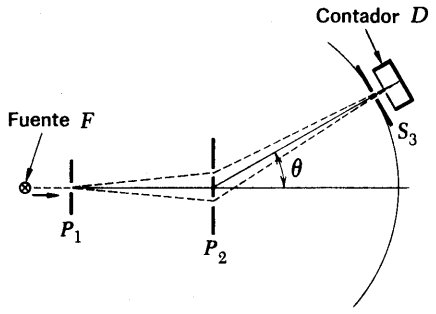


Fig. 27A Para ilustrar nuestra discusión en las secciones 27-30 relativa a un experimento de difracción de electrones por dos rendijas. El número de cuentas por unidad de tiempo se observa como función del ángulo θ cuando el contador y la rendija de entrada S_3 se mueven a lo largo de un arco de circunferencia. Si la separación entre las rendijas practicadas en P_2 es grande comparada con la longitud de onda y si la fuente produce electrones monoenergéticos, el número de cuentas por unidad de tiempo será una función muy rápidamente variable de θ. La figura de difracción no es observable a menos que la resolución angular definida por el dispositivo contador-rendija sea muy buena. Si los electrones *no son* monoenergéticos, como ocurriría en el caso en que la fuente sea un simple filamento, las figuras de difracción correspondientes a las diferentes energías se solapan y los máximos de difracción pueden difuminarse hasta tal punto que ya no se vean.

La fig. 27A muestra un experimento semirreal de difracción de electrones cuyo objeto es observar la figura de difracción debida a dos rendijas en la pantalla P_2. Los electrones son emitidos por el filamento F y acelerados hacia la pantalla P_1 en la que se ha practicado una rendija. Supongamos que los electrones salen por ella con un impulso p. Observemos la figura de difracción debida a dos rendijas mediante el contador D colocado a una distancia muy grande del centro de la segunda pantalla P_2. Este contador puede moverse a lo largo del arco de circunferencia indicado en la figura. Para simplificar, supondremos que la distancia desde el contador a las rendijas es tan grande que podemos considerar que los rayos que unen la rendija de entrada del contador con las dos rendijas en P_2 son *paralelos*. (Esto no es lo que muestra la figura, porque de haber dibujado la figura correctamente, hubiera sido difícil ver las dos rendijas en la pantalla P_2. La *esencia* de nuestra discusión no se ve afectada, sin embargo, por el hecho de que los dos rayos sean o no paralelos.)

Sea $2a$ la separación entre las dos rendijas en P_2. La distribución angular $I(\theta,p)$ de la radiación detectada por D puede escribirse entonces, conforme hallamos en la sección 40, capítulo 4,

$$I(\theta,p) = 4I_0(\theta)\cos^2(ap\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{27a}$$

donde $I_0(\theta)$ es la distribución angular que se observaría con una *única* rendija *.

28 Hemos representado la intensidad por $I(\theta,p)$ para subrayar el hecho de que la distribución angular es función de p. Supondremos que las anchuras de las dos rendijas en P_2 son iguales y muy pequeñas comparadas con la longitud de onda de los electrones incidentes. Dentro del intervalo de impulsos p que entran en juego, la intensidad $I_0(\theta)$ es, por lo tanto, *independiente* de p. Por otra parte, admitiremos que la separación entre rendijas $2a$ es muy grande comparada con la longitud de onda. Para concretar, supongamos que el *impulso medio* p_0 del haz es tal que $ap_0 = \pi \times 10^5$. Para este impulso medio tenemos entonces la distribución angular.

$$\begin{aligned} I(\theta,p_0) &= 4I_0(\theta)\cos^2[(\pi \times 10^5)\,\mathrm{sen}\,\theta] \\ &= 2I_0(\theta)\{1 + \cos[(2\pi \times 10^5)\,\mathrm{sen}\,\theta]\} \end{aligned} \tag{28a}$$

* En esta discusión utilizamos unidades tales que $\hbar = c = 1$.

Si examinamos ahora la expresión que da la intensidad, observamos que es una función que varía muy rápidamente con el ángulo θ. La separación δ entre dos máximos consecutivos viene dada aproximadamente por $\delta \cong 10^{-5}/\cos\,\theta$.

Por consiguiente, si queremos observar claramente la figura de difracción, es esencial que el poder de *resolución angular* de nuestro equipo de detección sea muy bueno. El ángulo subtendido por la rendija de entrada del detecto D cuando se observa desde el centro de P_2 debe ser mucho menor que δ, es decir, mucho menor que 10^{-5}. Admitamos que tal es el caso. Si *no* fuera así, es decir, si la resolución angular fuese muy inferior a 10^{-5}, el segundo término en el último miembro de la expresión (28a) daría efectivamente un promedio igual a cero y observaríamos una intensidad que sería el doble de la intensidad con una sola rendija.

29 Supongamos ahora que la resolución angular del detector es muy buena, de modo que podemos ver claramente la figura de difracción por dos rendijas correspondientes a un haz de electrones que tienen todos el impulso p_0. Sin embargo, este haz es más bien irreal. Los electrones no se emiten todos por el filamento F con la *misma* energía y, por lo tanto, no saldrán por la rendija en P_1 con el mismo impulso. La razón de ello es el movimiento térmico de los electrones en el filamento. Hemos dicho antes que el movimiento térmico al azar es "un ruido en la sinfonía de la mecánica cuántica pura" y veremos ahora cómo el ruido puede impedirnos oír la música.

En un experimento real el impulso p de los electrones que emergen presentará una dispersión no nula. Para simplificar, supongamos que todos los impulsos en un intervalo $(p_0 - q,\ p_0 + q)$ son igualmente probables. La cantidad q describe la dispersión en el impulso y, para concretar, supondremos que $q = 10^{-2}\ p_0$: el impulso está definido con una precisión del uno por ciento.

Si ahora observamos la figura de difracción con ese haz, es claro que no observaremos la distribución $I(\theta,p_0)$, sino más bien un *promedio* de $I(\theta,\mathrm{p})$ extendido al intervalo de impulsos en el haz. Designemos esta intensidad media por $\bar{I}(\theta)$, intensidad que viene dada por

$$\bar{I}(\theta) = \left(\frac{1}{2q}\right)\int_{p_0-q}^{p_0+q} dp\ I(\theta,p) =$$

$$2I_0(\theta)\left(1 + \frac{\cos\,(2ap_0\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,(2aq\,\mathrm{sen}\,\theta)}{2aq\,\mathrm{sen}\,\theta}\right) \qquad (29a)$$

Obsérvese que si en la expresión (29a) hacemos que q tienda a cero, obtenemos de nuevo la expresión (28a).

De acuerdo con nuestras hipótesis específicas de que $ap_0 = \pi \times 10^5$ y de que $q = 10^{-2}\ p_0$, de (29a) podemos deducir que

$$\left|\bar{I}(\theta) - 2I_0(\theta)\right| \leqq 2I_0(\theta)\left|\frac{\operatorname{sen}[(2\pi \times 10^3)\operatorname{sen}\theta]}{(2\pi \times 10^3)\operatorname{sen}\theta}\right| \tag{29b}$$

En la dirección estrictamente hacia adelante, es decir, para $\theta = 0$, de (29a) se deduce que $\bar{I}(\theta) = 4I_0(\theta)$. En esta dirección particular tenemos siempre interferencia constructiva, cualquiera que sea el impulso p. Supongamos, sin embargo, que llevamos a cabo las observaciones fuera de la dirección estrictamente hacia adelante, por ejemplo, para ángulos θ que cumplen la condición $|\operatorname{sen}\theta| > (2\pi)^{-1} \times 10^{-1} \cong 0{,}016$. La desigualdad (29b) nos dice entonces que

$$|\bar{I}(\theta) - 2I_0(\theta)| < 10^{-2} \times 2I_0(\theta) \tag{29c}$$

Para estos ángulos la figura debida a dos rendijas es, por consiguiente, difícil de observar, porque la distribución de intensidades concuerda, dentro de un uno por ciento, con la figura debida a una sola rendija.

30 Para una teoría basada en la idea de la bola de billar clásica, como la que aplicamos a los *fotones* en la sección 41, capítulo 4, para el experimento con dos rendijas habríamos predicho una intensidad $I^*(\theta)$, dada por

$$I^*(\theta) = 2I_0(\theta) \tag{30a}$$

En este modelo no hay interferencia alguna, y conforme hemos dicho es ésta una predicción equivocada; no concuerda con los experimentos. Sin embargo, si comparamos esta predicción con la contenida en la desigualdad (29c), advertimos que la predicción (30a) puede a veces *parecer* correcta. Si los efectos de interferencia cuánticos se "borran" por alguna razón, vamos a parar al resultado que predice la teoría clásica.

Nuestra discusión es un ejemplo muy interesante de *un* aspecto del "paso al límite clásico". Supongamos que la energía de los electrones en el experimento considerado es de 10 eV. La separación entre rendija $2a$ es entonces de unos 0,04 mm, lo que podemos considerar como una cantidad macroscópica. A pesar de esto, los efectos de interferencia cuánticos cierta-

mente existen, pero para poderlos ver hemos de llevar a cabo nuestro experimento con un control extraordinariamente bueno del funcionamiento de la fuente de electrones, de forma tal que la dispersión q en los valores del impulso se conserve muy pequeña. De no ser así, la música de la mecánica cuántica desaparece en el ruido.

31 He aquí otro ejemplo de desaparición de efecto de interferencia. Consideremos la observación de franjas de interferencia con un interferómetro de Michelson, representado esquemáticamente en la figura 31A. La luz procedente de una lámpara de sodio se "divide" por un espejo semiplateado y la esencia del experimento consiste en observar la interferencia entre los dos haces que vuelven reflejados por los espejos 1 y 2. Hemos dibujado los dos "brazos" del interferómetro de modo que sus longitudes sean desiguales, L_1 y L_2. La diferencia de camino para los dos haces es así $d = 2(L_2 - L_1)$. Se plantea la siguiente cuestión: ¿pueden observarse franjas de interferencia para valores de d arbitrariamente grandes?

He aquí la respuesta: en principio *sí*, pero en la práctica *no*. La precisión con que se ha definido la longitud de onda de la luz establece un límite para la diferencia de caminos d que permiten observar las franjas, y en la práctica la longitud de onda nunca se define con precisión perfecta.

Consideremos un fotón de frecuencia ω que sale del foco. La parte del fotón que vuelve del espejo 2 se encontrará con un retardo de fase $\delta(\omega)$, con relación a la parte que vuelve del espejo 1, dado por

$$\delta(\omega) = \omega d = 2\pi\left(\frac{d}{\lambda}\right) \tag{31a}$$

donde λ es la longitud de onda. Consideremos ahora dos frecuencias diferentes ω' y ω''. La diferencia de retardos de fase para estas frecuencias es entonces

$$\delta(\omega') - \delta(\omega'') = (\omega' - \omega'')\, d \tag{31b}$$

Si esta diferencia es numéricamente muy *pequeña,* es decir, si $|\delta(\omega') - \delta(\omega'')| \ll \pi$, las franjas de interferencia tendrán, con buena precisión, el mismo aspecto para las dos frecuencias. Por otra parte, si esta diferencia es π, es decir, si $|\delta(\omega') - \delta(\omega'')| = \pi$, la interferencia *constructiva* para la frecuencia ω' corresponde a la interferencia *destructiva* para la frecuencia ω'', y viceversa. Los sistemas de franjas para las dos frecuencias son comple-

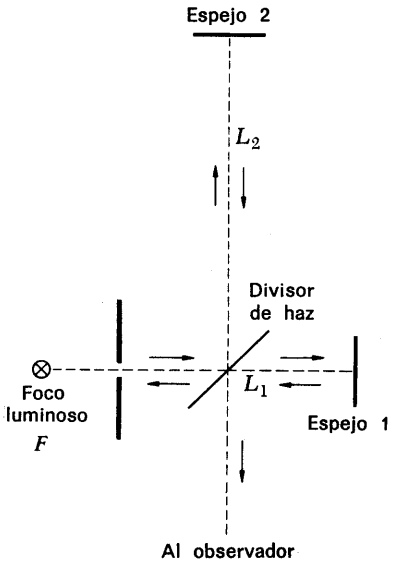


Fig. 31A Dibujo esquemático de un interferómetro de Michelson con brazos de longitudes desiguales. (Las longitudes, es decir, las distancias de los espejos al divisor de haz son L_1 y L_2, conforme se indica.) La máxima diferencia de camino $2(L_2 - L_1)$ para la que se puede observar interferencia depende de la anchura de la raya espectral de la luz casi monocromática emitida por el foco luminoso.

mentarios, y si se superponen con intensidades iguales, no se observará franja alguna. Esto conduce a un simple criterio para la visibilidad de las franjas: la dispersión de frecuencias $\Delta\omega$ en el foco debe ser tal que

$$d\,\Delta\omega \lesssim \pi \tag{31c}$$

si las franjas han de ser fácilmente observables. Para un foco dado, es decir, para un valor de $\Delta\omega$ dado, el criterio (31c) nos proporciona el límite superior deseado para d.

32 Para un foco luminoso aproximadamente monocromático (frecuencia ω), la cantidad $\Delta\omega$ es la anchura de la raya de la luz emitida. Conforme hemos explicado en el capítulo 3, son varios los efectos físicos que contribuyen a la anchura de una raya. Uno de ellos es el efecto Doppler debido al movimiento de los átomos en el foco. Éste no es sino una colección de "lámparas" idénticas, pero las frecuencias emitidas por estas lámparas no serán todas iguales en el sistema de referencia del laboratorio, simplemente porque se mueven al azar en el foco.

Consideremos la limitación que impone a d el ensanchamiento Doppler. La condición para que las franjas sean claramente visibles es

$$d < \frac{\pi}{\Delta\omega} = \left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right)\left(\frac{\lambda}{2}\right) \tag{32a}$$

En la sección 44, capítulo 3, dedujimos una expresión para el ensanchamiento Doppler relativo, a saber

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D \sim (0{,}52 \times 10^{-5})\sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{T}{293^\circ\mathrm{K}}\right)} \tag{32b}$$

donde T es la temperatura efectiva en el foco y A es el peso molecular de los átomos emisores, que suponemos se encuentran formando un gas. Combinando (32a) y (32b), obtenemos

$$d \lesssim \lambda \sqrt{\frac{A}{(T/293^\circ\mathrm{K})}} \times 10^5 \tag{32c}$$

Para $T = 293^\circ$K (temperatura ambiente), $\lambda = 5000$ Å (luz visible, y $A = 100$, obtenemos así $d \lesssim 50$ cm. Esta estimación concuerda con el resultado de las observaciones. La diferencia de camino máxima para la que es posible observar franjas de interferencia es del orden de 1 metro en el caso de focos luminosos "ordinarios", tales como los tubos de descarga de gas (exceptuados los lasers).

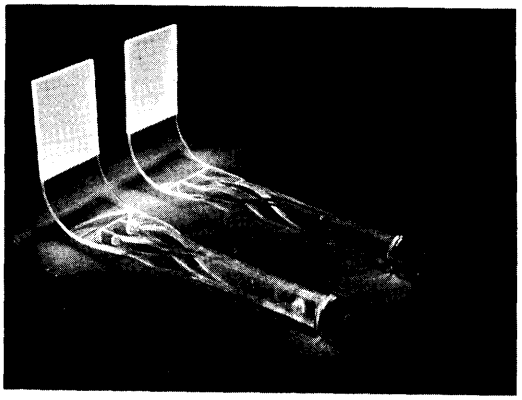
33 Los dos ejemplos que hemos considerado ilustran cómo la Naturaleza conspira para "mantener las dos lámparas en funcionamiento". El fondo representado por el ruido térmico en lo que nos rodea introduce un cierto grado de aleatoriedad en la preparación del sistema antes de la medición.

También contribuyen al carácter aleatorio en la preparación del proceso las imperfecciones técnicas de nuestro equipo. Supongamos, por ejemplo, que queremos producir un haz de electrones de alta energía con un impulso definido con mucha precisión. Para conseguirlo, debemos ser capaces de controlar todos los potenciales de aceleración de manera muy precisa y los dispositivos para el enfoque del haz han de ser casi perfectos. Además, debemos ser capaces de mantener un muy elevado grado de vacío, porque los electrones en el haz pueden perder energía y cambiar la dirección de su movimiento en colisiones con moléculas de gas residual en el sistema de vacío. Nada es perfecto en el mundo, y es claro que nunca conseguiremos en la práctica un completo control sobre el estadio de preparación. Es por lo tanto interesante ver cómo un proceso de preparación "imperfecto" puede describirse teóricamente.

34 Supongamos que contamos con un dispositivo para la preparación de un sistema en una sucesión de mediciones repetidas tal que "el sistema es siempre preparado de la misma manera". Conforme hemos acordado antes, esto significa que las *probabilidades* y *promedios* que medimos en largas series son estables y reproducibles. Imaginemos que se han medido los valores medios de todas las variables físicas posibles. Decimos que la totalidad de estos promedios define un *conjunto estadístico del sistema,* y decimos también que cualquier ejemplo particular del sistema preparado, tal como se encuentra en una única medición, es un *elemento del conjunto.*

Un método particular de preparación, sea "perfecto" o "imperfecto", da lugar a un determinado conjunto estadístico. Desde el punto de vista matemático, un conjunto estadístico *abstracto* equivale a un conjunto de probabilidades y promedios de variables físicas. Cuando queremos considerar la realización física concreta de este concepto abstracto, podemos imaginar el conjunto como una colección de un número muy grande de sistemas preparados (elementos). Describimos así un haz de luz como un conjunto estadístico de fotones, cuyos elementos son los fotones individuales.

Otra importante aplicación del concepto de conjunto estadístico es la descripción de una cantidad de gas en una vasija



Un par de contadores de centelleo. Cuando las partículas cargadas chocan con las pantallas blancas verticales que se observan a la izquierda, se producen centelleos en el material. La luz de estos centelleos es "conducida" mediante guías de lucita a los tubos fotomultiplicadores situados a la derecha. Cuando se encuentran en uso, el contador y los tubos de luz están envueltos en lámina de aluminio y bien sellados contra la luz exterior parásita. (Cedida por Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley.)

como un conjunto estadístico de moléculas. Esta descripción es apropiada si hemos de estudiar el comportamiento medio de las moléculas individuales en el gas. Cada vez que medimos, por ejemplo la velocidad de una molécula, estamos llevando a cabo un experimento con un elemento del conjunto. Los resultados de un gran número de mediciones de la velocidad nos da la velocidad media, que es uno de los promedios que caracterizan el conjunto. Las condiciones bajo las que se mantiene el gas en la vasija definen, en este caso, el procedimiento de preparación. Si la temperatura y la presión se mantienen constantes, también será constante la velocidad media. Cabe decir que las moléculas están todas preparadas de la misma manera, porque todas ellas están sujetas a condiciones externas macroscópicamente idénticas. Esto no significa, naturalmente, que encontraremos las mismas velocidades en dos mediciones particulares relativas a dos moléculas individuales. La velocidad de una molécula (en un cierto instante) es una *variable aleatoria* desde nuestro punto de vista: los valores que encontramos presentan una *dispersión estadística.*

35 Consideremos un conjunto estadístico. Para disponer de un ejemplo concreto podemos imaginar un haz de electrones que emergen de un acelerador que funciona en condiciones que son estables y estacionarias hasta donde lo permite nuestra habilidad técnica. Medimos repetidamente una variable física particular, por ejemplo el impulso p en la dirección del haz. Designemos el promedio de los valores del impulso en una larga sucesión de mediciones por

$$\mathrm{M}(p;\rho)$$

donde la letra ρ simboliza el conjunto estadístico particular, es decir, el haz particular de que se trate. La cantidad $\mathrm{M}(p;\rho)$ la llamaremos *valor medio de p en el conjunto.* El valor medio de los *cuadrados* de los valores del impulso se representa por $\mathrm{M}(p^2;\rho)$: éste es el valor medio del cuadrado del impulso correspondiente al conjunto. En general, $\mathrm{M}(p^2;\rho)$ diferirá de $[\mathrm{M}(p;\rho)]^2$. Estudiemos este punto. Llamemos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ los valores del impulso hallados en las diferentes mediciones individuales. Los dos promedios están definidos por

$$\mathrm{M}(p;\rho) = \frac{1}{N}\sum_k p_k, \qquad \mathrm{M}(p^2;\rho) = \frac{1}{N}\sum_k p_k^2 \tag{35a}$$

Podemos escribir la identidad

$$\mathrm{M}(p^2;\rho) - [\mathrm{M}(p;\rho)]^2 = \frac{1}{N}\sum_k [p_k - \mathrm{M}(p;\rho)]^2 \qquad (35b)$$

identidad que el lector debiera comprobar inmediatamente. El segundo miembro de (35b) es una suma de términos no negativos, de lo que se sigue que

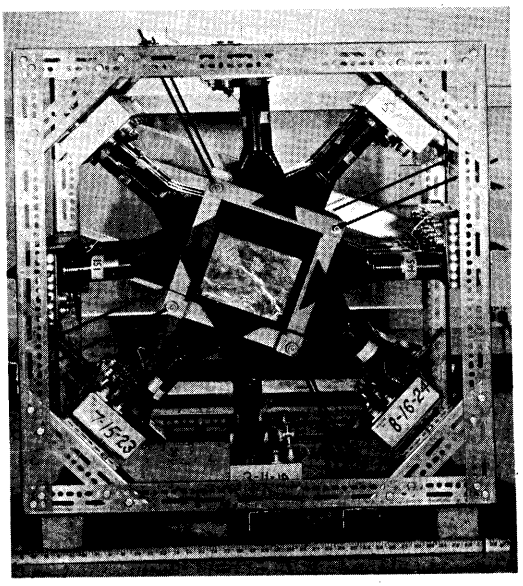
$$\mathrm{M}(p^2;\rho) - [\mathrm{M}(p;\rho)]^2 \geqq 0 \qquad (35c)$$

donde el signo de igualdad vale únicamente cuando todos los números p_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, son iguales, en cuyo caso su valor común es igual a $M(p;\rho)$. En esta situación concreta todas las partículas del haz tienen precisamente el mismo impulso.

La cantidad en el primer miembro de (35c) mide la dispersión estadística de la variable p. En general, será mayor que cero, lo que podemos expresar diciendo que hay una indeterminación en el impulso para el conjunto en cuestión.

36 Al igual como hemos discutido el impulso, de la misma manera cabe estudiar todas las demás variables físicas. Para un conjunto particular (un haz) determinamos sus valores medios y sus *dispersiones,* por las que entendemos sus dispersiones estadísticas definidas por analogía con la expresión en el primer miembro de (35c). El tipo más simple de variable es la que describe la respuesta de un contador. Designémosla por D y adoptemos el convenio de que D tiene el valor + 1 en un experimento particular si el contador detecta, y el valor 0 si no detecta. $\mathrm{M}(D;\rho)$ es entonces, simplemente, la probabilidad de que el contador detecte cuando realizamos un experimento con un único elemento del conjunto estadístico ρ.

A primera vista podría parecer que la variable D asociada a un contador (variable contador) no es del mismo tipo que la variable impulso p. Podemos tener la sensación de que p se refiere al sistema, es decir, a la partícula, mientras que D se refiere al instrumento de medida. Sin embargo, debemos darnos cuenta de que toda nuestra información acerca de las propiedades del sistema se obtiene observando las respuestas de instrumentos de medida: las variables *intrínsecas* del sistema son abstracciones. Si conocemos la probabilidad de que determinado contador, colocado de cierta manera, detecte, de hecho sabemos algo acerca de la naturaleza del conjunto estadístico, es decir, sabemos algo acerca de las partículas del haz.



Hay un sorprendente contraste entre los pequeños y limpios "contadores para teóricos" que aparecen en las figuras esquemáticas de este capítulo y algunos de los contadores realmente utilizados en los laboratorios. Esta fotografía muestra un apilamiento de 24 contadores de centelleo reunidos para efectuar un experimento de física de partículas elementales. La longitud lateral del conjunto es de 1 metro aproximadamente. Los centelladores de plástico aparecen en medio de la figura y los tubos fotomultiplicadores están colocados simétricamente en la periferia. La dirección del haz de partículas es normal al plano de la figura. (Fotografía cedida por Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley.)

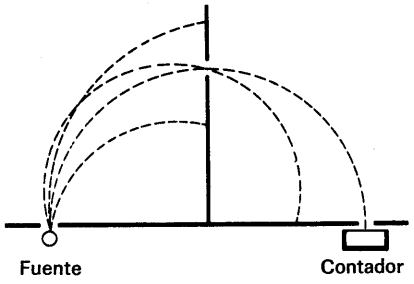


Fig. 36A Para ilustrar el principio del llamado espectrógrafo beta semicircular. El aparato se usa para medir la distribución del impulso (o de la energía) de los electrones emitidos en la desintegración de los núcleos con actividad beta. Los electrones son emitidos por la fuente radiactiva situada a la izquierda y se ven obligados a moverse en el plano de la figura o cerca del mismo. El sistema se coloca en un campo magnético uniforme perpendicular a dicho plano, con lo que las trayectorias son arcos de circunferencia cuyos radios dependen de los impulsos de los electrones. El aparato contiene un cierto número de rendijas dispuestas de manera que un electrón no puede alcanzar el contador situado a la derecha a menos que el radio de su trayectoria se encuentre dentro de un estrecho intervalo. Contando el número de electrones que alcanzan el detector por unidad de tiempo para diferentes valores del campo magnético, podemos determinar la distribución de impulsos de los electrones emitidos, es decir, el número relativo de electrones emitidos dentro de diferentes intervalos de impulso.

El impulso de las partículas en un haz se mide frecuentemente de hecho con contadores, conforme ilustra la figura 36A.

37 Examinemos algo más detenidamente la situación de que se trató en la sección 26, en la que dos lámparas se encuentran en un mismo foco luminoso: una lámpara de sodio y una lámpara de mercurio. Consideremos primero un experimento en el que sólo funciona la lámpara de sodio, con lo cual el haz estará constituido por "fotones amarillos". El foco da lugar a un conjunto estadístico ρ_1 de fotones y para este conjunto encontramos el valor medio d_1 de una cierta variable contador D:

$$\mathrm{M}(D;\rho_1) = d_1 \tag{37a}$$

Consideremos a continuación un experimento en el que sólo está encendida la lámpara de mercurio. Este dispositivo define un conjunto estadístico ρ_2 y se encuentra que el valor medio en el conjunto de la misma variable contador D es

$$\mathrm{M}(D;\rho_2) = d_2 \tag{37b}$$

Finalmente, consideremos el caso en que *ambas* lámparas funcionan simultáneamente. Las dos lámparas juntas dan lugar a un conjunto estadístico ρ y el valor medio de D en este caso es

$$\mathrm{M}(D;\rho) = d \tag{37c}$$

Supongamos ahora que la lámpara 1 determina un flujo de n_1 fotones por unidad de tiempo en el haz y que la lámpara 2 origina un flujo de n_2 fotones por unidad de tiempo en el mismo. El flujo total en el haz es, por lo tanto, de $(n_1 + n_2)$ fotones por unidad de tiempo. En un experimento único cualquiera, el fotón o es "amarillo" o es "azul", según proceda de la lámpara 1 o de la lámpara 2, con lo que llegamos a la conclusión de que la probabilidad de encontrar un fotón "amarillo" en un único experimento cualquiera vale

$$\theta_1 = \frac{n_1}{(n_1 + n_2)} \tag{37d}$$

mientras que la probabilidad de hallar un fotón "azul" es

$$\theta_2 = \frac{n_2}{(n_1 + n_2)} \tag{37e}$$

Los números θ_1 y θ_2 satisfacen las condiciones

$$1 \geqq \theta_1 \geqq 0, \qquad 1 \geqq \theta_2 \geqq 0, \qquad \theta_1 + \theta_2 = 1 \tag{37f}$$

como consecuencia de las definiciones (37d) y (37e). Las condiciones (37f) son características para las probabilidades de dos sucesos que se excluyen mutuamente y de los cuales uno tiene que ocurrir necesariamente.

38 Consideremos ahora un experimento único, esto es, un suceso en que interviene un solo fotón. ¿Qué podemos decir acerca de la probabilidad $d = M(D;\rho)$ de que el contador descrito por la variable D detecte el fotón? El fotón en cuestión es o amarillo o azul. La probabilidad de que sea amarillo vale θ_1: *si* es amarillo, la probabilidad de que el contador D lo detecte es d_1. La probabilidad de que el fotón sea azul vale θ_2, y, *si* es azul, la probabilidad de que el contador D lo detecte es d_2. Dado que los dos casos amarillo-azul se excluyen mutuamente, llegamos a la conclusión de que la probabilidad d de que el contador D detecte un fotón debe ser

$$d = \theta_1 d_1 + \theta_2 d_2 \tag{38a}$$

o bien

$$\mathrm{M}(D;\rho) = \theta_1\ \mathrm{M}(D;\rho_1) + \theta_2\ \mathrm{M}(D;\rho_2) \tag{38b}$$

El valor medio de D en el conjunto ρ viene dado así en función de los valores medios de D en los conjuntos ρ_1 y ρ_2 y de las probabilidades θ_1 y θ_2. Estas últimas describen cómo el conjunto "compuesto" ρ se forma a partir de los conjuntos ρ_1 y ρ_2 y son, en consecuencia, cantidades que caracterizan el *foco* "compuesto": dichas probabilidades son *independientes* de la variable D que describe un contador particular en la región de observación. La fórmula (38b), por consiguiente, vale para *cada* variable contador D.

De manera más general la fórmula (38b) se aplica a los valores medios de una variable física *arbitraria*. Si Q designa a esta variable, debemos tener

$$\mathrm{M}(Q;\rho) = \theta_1\ \mathrm{M}(Q;\rho_1) + \theta_2\ \mathrm{M}(Q;\rho_2) \tag{38c}$$

Decimos entonces que el *conjunto estadístico* ρ *es una superposición incoherente de los dos conjuntos* ρ_1 *y* ρ_2 *con proba-*

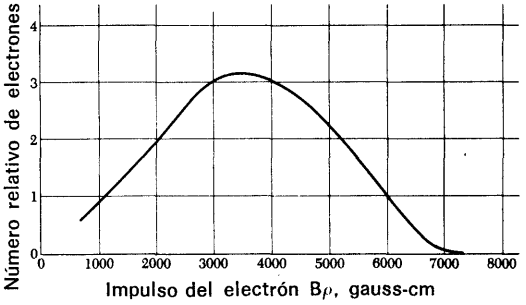


Fig. 36B Espectro beta del P^{32}. El gráfico muestra el número relativo de electrones emitidos en función del impulso. Éste se expresa en términos de la cantidad $B\rho$ (tomando como unidad el gauss-centímetro) donde ρ es el radio de curvatura en el campo B. El impulso máximo, a 7200 gauss-cm, corresponde a la energía cinética máxima de 1,7 MeV.

Los electrones pueden ser emitidos con una energía que varía desde cero al límite superior, porque la energía (cinética) total que se libera en la desintegración se reparte (al azar) entre el electrón, el núcleo hijo, y un antineutrino.

bilidades θ_1 *y* θ_2. Este enunciado lo expresamos simbólicamente en la forma

$$\rho = \theta_1\rho_1 + \theta_2\rho_2 \tag{38d}$$

La razón del adjetivo calificativo "incoherente" es que debemos distinguir con cuidado entre este tipo de superposición y la superposición de *ondas* que discutimos en las secciones 36-46, capítulo 5. Algo más habrá que decir acerca de esta distinción más adelante.

39 Es claro que podemos generalizar la idea de superposición de dos conjuntos y pasar a la de superposición incoherente de un número finito cualquiera de ellos. Consideremos, pues, los conjuntos estadísticos ρ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Con cada uno de estos conjuntos asociamos una probabilidad θ_k, tal que los números θ_k satisfacen las relaciones

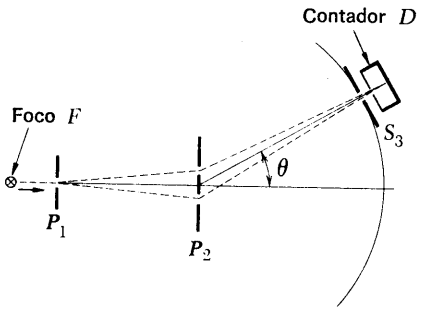
$$1 \geqq \theta_k \geqq 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \theta_k = 1 \tag{39a}$$

Sea ρ la superposición incoherente de dichos conjuntos, con probabilidades θ_k: expresamos simbólicamente la superposición por

$$\rho = \sum_{k=1}^{n} \theta_k\rho_k \tag{39b}$$

Esto significa que el valor medio de una variable física cualquiera Q en el conjunto ρ viene dado por

$$\mathrm{M}(Q;\rho) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k \ \mathrm{M}(Q;\rho_k) \tag{39c}$$



Admitiremos que si ρ_1 ρ_2, ρ_3, ..., ρ_n es un sistema cualqueria de posibles conjuntos estadísticos, cualquier superposición incoherente de estos conjuntos es también un conjunto posible. Esta hipótesis es más bien matemática que física y la hacemos porque se pretende que el sistema de *todos* los conjuntos estadísticos tenga la propiedad de ser *cerrado respecto de la superposición incoherente.* Esto significa que si el siste-

ma contiene un número finito de conjuntos, contiene también todas las superposiciones incoherentes posibles de tales conjuntos.

40 Obsérvese que hemos considerado ya una superposición incoherente de un número infinito de conjuntos estadísticos distintos en nuestra discusión de las secciones 27-29. Sea $D(\theta)$ la variable que describe el contador D en la figura 27A para un ángulo dado θ. Designemos por ρ el conjunto estadístico que origina una fuente dada, fuente que se encuentra a la izquierda de la pantalla P_1. Suponemos que la intensidad de las fuentes que vamos a considerar es siempre tal que un electrón por segundo penetra por la rendija en P_1. Si la intensidad $I(\theta)$, observada con el contador D, se expresa en número de electrones por segundo, tenemos

$$\mathrm{M}[D(\theta);\rho] = I(\theta) \tag{40a}$$

En nuestra discusión de la sección 27 consideramos primero la intensidad $I(\theta,p)$ para una fuente hipotética que produce electrones cuyo impulso está sumamente bien definido. Designemos el conjunto estadístico que define esta fuente por $\rho(p)$. Tenemos entonces

$$\mathrm{M}[D(\theta);\rho(p)] = I(\theta,p) \tag{40b}$$

Hemos señalado que si la fuente es un filamento caliente con un solo electrodo acelerador, los electrones *no* saldrán por la rendija en P_1 con un impulso bien definido. (Sin embargo, nada nos priva de proyectar una fuente muy perfeccionada, con "filtros de impulso", tal que el impulso de los electrones emitidos esté extraordinariamente bien definido: a una fuente de estas características corresponde el conjunto $\rho(p)$.) Designemos por ρ el conjunto estadístico a que da lugar la fuente con un simple filamento. De acuerdo con nuestro análisis desarrollado en la sección 39, tenemos entonces

$$\mathrm{M}[D(\theta);\bar{\rho}] = \bar{I}(\theta) = \left(\frac{1}{2q}\right)\int_{p_0-q}^{p_0+q} dp\ \mathrm{M}[D(\theta);\rho(p)] \tag{40c}$$

Esta igualdad debe compararse con la ecuación (39c). El razonamiento de la sección 29 equivale, evidentemente, a considerar el conjunto estadístico ρ, que corresponde a la fuente "real" de filamento caliente, como una superposición incoherente de fuentes ideales correspondientes a los conjuntos esta-

dísticos $\rho(p)$. En otras palabras, por analogía con la ecuación (39b) tenemos

$$\bar{\rho} = \left(\frac{1}{2q}\right) \int_{p_0-q}^{p_0+q} dp\, \rho(p) \tag{40d}$$

Amplitudes e intensidades

41 Podemos formular como sigue la diferencia entre superposición coherente e incoherente: en una superposición coherente sumamos *amplitudes,* pero en una superposición incoherente sumamos *intensidades.*

Practiquemos un poco el manejo de amplitudes e intensidades en mecánica cuántica. La figura 41A ilustra un experimento semirreal en el que intervienen dos sistemas de dobles rendijas. Partículas con un impulso muy bien definido penetran a través de la rendija en la pantalla P_a a razón de, por ejemplo, una partícula por segundo. Observamos el flujo de estas partículas que pasa por las otras cinco rendijas colocando un contador inmediatamente detrás de ellas, *cada vez detrás de sólo una.* Si el número de cuentas observado por unidad de tiempo es C partículas por segundo en el caso de una determinada rendija, podemos decir que C es la probabilidad de que una partícula que entra pasando por la rendija en P_a pase por la rendija en cuestión.

Suponemos que la longitud de onda de la partícula es grande comparada con las anchuras de las rendijas y, además, admitiremos que todas las rendijas tienen la misma anchura. Podemos entonces hablar de la amplitud (compleja) de la onda *en* una rendija.

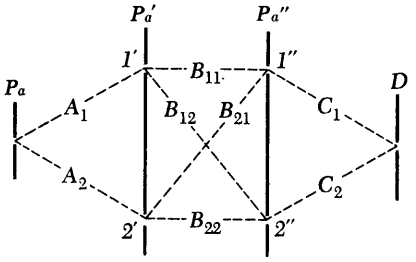


Fig. 41A Para ilustrar nuestra discusión en las secciones 41-43 de un experimento con dos sistemas de doble rendija, hasta cierto punto idealizado. Las partículas (fotones) penetran por la rendija en P_a. Nos interesan las probabilidades de que las partículas pasen por las otras rendijas, en particular por la rendija situada en D. En cada rendija debemos, naturalmente, sumar las amplitudes de las ondas que llegan de las rendijas precedentes, no las intensidades. Los números complejos A_m, B_{mn} y C_m son las *amplitudes de transferencia* entre las rendijas. Todas las probabilidades se pueden expresar en función de las amplitudes de transferencia.

42 Sea A_1 la amplitud de la onda en la rendija $1'$ cuando la amplitud en la rendija situada en P_a es igual a la unidad. Análogamente, sea A_2 la amplitud de la onda en la rendija $2'$ cuando la amplitud en la rendija en P_a es igual a uno. Sea B_{11} la amplitud de la onda en la rendija $1''$ cuando la amplitud en la rendija $1'$ es la unidad, *pero la amplitud en la rendija* $2'$ *es cero.* Análogamente, sea B_{21} la amplitud de la onda en la rendija $1''$ cuando la amplitud en la rendija $1'$ es cero, pero la amplitud en la rendija $2'$ es igual a uno. Designemos por C_1 la amplitud en la rendija que se encuentra en la pantalla D cuando la amplitud en la rendija $1''$ es la unidad, pero la amplitud

en la rendija 2″ es cero. Las restantes amplitudes se definen de manera análoga. Podemos llamar a estas amplitudes *amplitudes de transferencia,* porque describen la propagación de la onda entre las rendijas de izquierda a derecha. Las líneas de trazos en la figura 41A representan simbólicamente esta propagación. Una amplitud de transferencia va asociada a cada línea de trazos, conforme hemos explicado.

Las amplitudes de transferencia son números complejos. Los cuadrados de sus módulos definen *probabilidades de transferencia* como sigue. $P'_1 = |A_1|^2$ es igual a la probabilidad de que una partícula que ha pasado por la rendija en P_a sea detectada inmediatamente detrás de la rendija 1′. $P'_2 = |A_2|^2$ es igual a la probabilidad de que una partícula que ha pasado por la rendija en P_a pase también por la rendija 2′. $P_{12} = |B_{12}|^2$ es igual a la probabilidad de que una partícula que ha pasado por la rendija 1′ pase también por la rendija 2″. *En este caso la rendija 2′ debe estar cerrada,* para tener la seguridad de que la partícula realmente pasó por la rendija 1′. Los cuadrados de los módulos de las demás amplitudes de transferencia tienen interpretaciones análogas. Hagamos una lista de todas las probabilidades de transferencia correspondientes a las ocho amplitudes:

$$\begin{aligned} P'_1 &= |A_1|^2 & P'_2 &= |A_2|^2 \\ P_{11} &= |B_{11}|^2 & P_{12} &= |B_{12}|^2 \\ P_{21} &= |B_{21}|^2 & P_{22} &= |B_{22}|^2 \\ P''_1 &= |C_1|^2 & P''_2 &= |C_2|^2 \end{aligned} \tag{42a}$$

El lector debe meditar cuidadosamente acerca de cómo se pueden medir con contadores estas probabilidades de transferencia, cerrando algunas de las rendijas cuando sea necesario.

43 Supongamos que se plantea ahora la siguiente cuestión: con todas las rendijas abiertas, ¿cuál es la probabilidad P de que una partícula que penetra por la rendija en P_a emerja por la rendija en D?

Contestemos primero incautamente: dado que conocemos todas las probabilidades de transferencia entre las rendijas, podemos hallar P componiéndolas de acuerdo con las reglas de la teoría de probabilidades. La probabilidad de que la partícula pase por la rendija 1″ debiera ser así igual a la suma de la probabilidad de que pase por 1″ vía rendija 1′ y de la probabilidad de que pase por 1″ vía rendija 2′, es decir, en otras

palabras, es igual a $(P'_1P_{11} + P'_2P_{21})$. Esta manera de razonar conduce al resultado final *falso*

$$P = (P'_1P_{11} + P'_2P_{21})P''_1 + (P'_1P_{12} + P'_2P_{22})P''_2 \quad \text{(43a)}$$

¡Falso!

¿Cuál es la respuesta correcta? Ésta viene dada por

$$P = |(A_1B_{11} + A_2B_{21})C_1 + (A_1B_{12} + A_2B_{22})C_2|^2 \quad \text{(43b)}$$

y *no* es igual a la expresión falsa que aparece en la ecuación (43a). En cada rendija debemos sumar las *amplitudes* de las ondas que llegan a ella, ya que las ondas pueden interferir. La ecuación (43b) da la respuesta correcta de acuerdo con la mecánica cuántica, mientras que podríamos considerar la expresión (43a) como la predicción según una teoría clásica basada en la idea de bolas de billar.

44 ¿Cómo encontramos P si solamente se nos dan las probabilidades de transferencia, pero no las correspondientes amplitudes? Respuesta: es imposible entonces hallar P. Para encontrar P debemos conocer *a la vez* las fases y los valores absolutos de las amplitudes de transferencia complejas, pero las probabilidades de transferencia sólo nos hablan de los valores absolutos.

Discutamos algo más lo que hay de falso en el argumento basado en la "composición de probabilidades" que nos condujo a la predicción incorrecta (43a). Consideremos la cantidad P'_1P_{11}. ¿Qué representa? Representa la probabilidad de que una partícula que penetra por la rendija en P_a pase por la rendija 1″ *cuando la rendija 2′ está cerrada.* Análogamente, P'_2P_{21} representa la probabilidad de que una partícula que penetra por la rendija en P_a pase por la rendija 1″ cuando la rendija 1′ está cerrada. Si *ambas* rendijas 1′ y 2′ están abiertas, la probabilidad de que una partícula que penetre por la rendija en P_a pase por la rendija 1″ *no* viene dada por la suma $(P'_1P_{11} + P'_2P_{21})$. Las ondas que llegan a la rendija 1″ procedentes de las rendijas 1′ y 2′ son *coherentes* entre sí y debemos sumar sus *amplitudes,* no sus *intensidades.*

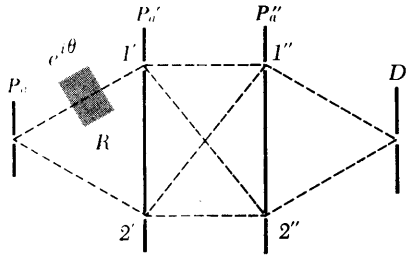


Fig. 45A Esta figura presenta una modificación del experimento con dos sistemas de doble rendija ilustrado en la fig. 41A. Un retardador de fase R se ha intercalado delante de la rendija 1′. Éste cambia la amplitud compleja de la onda que pasa por él multiplicándola por el factor $e^{i\theta}$. Cabe aplicar la teoría del experimento representado en la fig. 41A, con tal que substituyamos la amplitud de transferencia A_1 por la cantidad $A_1e^{i\theta}$.

45 Consideremos el dispositivo ligeramente modificado que representa la figura 45A. Interponemos un retardador de fase R en el camino de la onda que pasa de la rendija en P_a a la

rendija 1′, quedando por lo demás todo el dispositivo exactamente como en la figura 41A. El único efecto del retardador de fase es que la amplitud A_1 se substituye por la amplitud $A_1e^{i\theta}$: el retardador de fase retrasa la fase en una cantidad θ, pero no afecta a la amplitud de la onda. Si el experimento se lleva a cabo con luz, podemos utilizar placas de vidrio como retardadores.

Sea $P(\theta)$ la probabilidad de que una partícula que penetra por la rendija en P_a salga por la rendija en D (con todas las demás rendijas abiertas). Según la ec. (43b) tenemos

$$\begin{aligned} P(\theta) &= |A_1e^{i\theta}(B_{11}C_1 + B_{12}C_2) + A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2 \\ &= |A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2)|^2 + |A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2 \\ &\quad + U\cos\theta + V\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{45a}$$

donde

$$\begin{aligned} U = {} & A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2)A_2^*(B_{21}^*C_1^* + B_{22}^*C_2^*) \\ & + A_1^*(B_{11}^*C_1^* + B_{12}^*C_2^*)A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2) \end{aligned} \tag{45b}$$

y

$$\begin{aligned} V = {} & i\,[A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2)A_2^*(B_{21}^*C_1^* + B_{22}^*C_2^*) \\ & - A_1^*(B_{11}^*C_1^* + B_{12}^*C_2^*)A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)\,] \end{aligned} \tag{45c}$$

lo que puede comprobar el lector por sí mismo.

Si queremos, cabe escribir también la expresión de $P(\theta)$ en la forma

$$\begin{aligned} P(\theta) = {} & \tfrac{1}{2}[P(0) + P(\pi)] + \tfrac{1}{2}[P(0) - P(\pi)]\cos\theta \\ & + \tfrac{1}{2}[2P(\pi/2) - P(0) - P(\pi)]\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{45d}$$

lo que significa que $P(\theta)$, como función de θ, está determinada unívocamente por sus valores para los tres ángulos $\theta = 0$, $\pi/2$ y π.

46 Consideremos ahora el dispositivo que muestra la figura 46A. Tenemos ahora dos focos *separados*, 1 y 2, que "iluminan" las rendijas 1′ y 2′. Por lo demás, la situación es la misma que en la fig. 41A. Supongamos que los dos focos tienen igual intensidad.

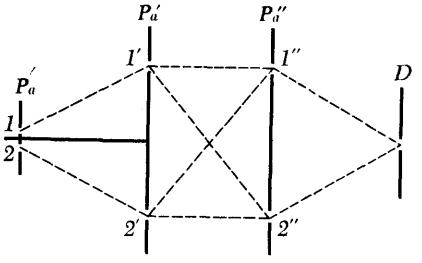


Fig. 46A En esta modificación del experimento con dos sistemas de doble rendija ilustrado en la fig. 41A las rendijas 1′ y 2′ se iluminan con dos focos independientes de igual intensidad. Las ondas procedentes de los dos focos son incoherentes y la intensidad en una rendija particular cualquiera, con ambos focos en funcionamiento, es la suma de las intensidades que observaríamos con un solo foco en funcionamiento cada vez.

Existe una interesante relación entre el experimento ilustrado en esta figura y el que presenta la fig. 45A. Cualquier intensidad medida en el presente experimento es el valor medio, relativo al ángulo de fase θ, de la correspondiente intensidad medida con el dispositivo que muestra la fig. 45A. Este hecho se expresa a menudo diciendo que los dos focos incoherentes emiten ondas con fase relativa aleatoria.

¿Cuál es la probabilidad P_i de que una partícula que ha pasado a través de la pantalla P_a pase por la rendija en D? Es claro que esta probabilidad viene dada por

$$P_i = \tfrac{1}{2}|A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2)|^2 + \tfrac{1}{2}|A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2 \quad (46a)$$

En este caso hemos de sumar las *intensidades* producidas separadamente por cada foco en la rendija en D a fin de hallar la intensidad con los dos focos encendidos. La expresión $|A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2)|^2$ es la probabilidad de que una partícula procedente del foco 1 pase por la rendija en D, y la expresión $|A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2$ es la probabilidad de que una partícula del foco 2 pase por la rendija en D. Cada partícula que pasa por la rendija en D o procede del foco 1 o procede del foco 2, con iguales probabilidades; de aquí los factores 1/2 en la expresión (46a).

47 Formulemos algunas preguntas más concernientes a las figuras 45A y 46A. Consideremos como fuente la pantalla P'_a y todo lo que se encuentra a la izquierda de la misma. Las figuras 45A y 46A muestran entonces el mismo experimento realizado con dos fuentes diferentes. Cabe preguntar: en el caso de la situación representada en la figura 45 A, ¿cuál es la probabilidad $P'(\theta)$ de que una partícula que atraviesa la pantalla P'_a pase también por la rendija en la pantalla D? Dado que cada partícula que pasa por la rendija D debe haber atravesado la pantalla P'_a se deduce que $P'(\theta)$ debe ser igual a la razón de la probabilidad $P(\theta)$, dada por la ecuación (45a), a la probabilidad de que una partícula que pasa por la rendija en P_a atraviese P'_a. Esta última probabilidad es igual, evidentemente, a $[|A_1|^2 + |A_2|^2]$, y obtenemos así

$$P'(\theta) = [\,|A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2)|^2 + |A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2 + U\cos\theta + V\,\mathrm{sen}\,\theta\,]\,[\,|A_1|^2 + |A_2|^2\,]^{-1} \quad (47a)$$

que también puede escribirse

$$P'(\theta) = \tfrac{1}{2}[P'(0) + P'(\pi)] + \tfrac{1}{2}[P'(0) - P'(\pi)]\cos\theta + \tfrac{1}{2}[2P'(\pi/2) - P'(0) - P'(\pi)]\,\mathrm{sen}\,\theta \quad (47b)$$

Análogamente, podemos preguntar: en el caso de la situación representada en la figura 46A, ¿cuál es la probabilidad P'_i de

que una partícula que atraviesa la pantalla P'_a pase también por la rendija en D? Vemos fácilmente que

$$P'_i = [\,|A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2)|^2 + |A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2\,] \\ [\,|A_1|^2 + |A_2|^2\,]^{-1} \tag{47c}$$

Comparando la expresión (47c) con la expresión (47a) advertimos un hecho interesante: si promediamos $P'(\theta)$ respecto de los ángulos θ entre 0 y 2π, obtenemos P'_i, es decir,

$$P'_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, P'(\theta) \tag{47d}$$

En realidad, no es necesario promediar respecto de *todos* los ángulos: tenemos también

$$P'_i = \tfrac{1}{2}[P'(0) + P'(\pi)] \tag{47e}$$

Por lo tanto, podemos considerar el conjunto estadístico definido por la fuente representada en la figura 46A (la pantalla P'_a y todo lo situado a la izquierda de la misma constituye la fuente) como una superposición incoherente de dos, o de un número infinito de conjuntos estadísticos definidos por las fuentes representadas en la figura 45A, considerando θ como un parámetro variable. (Valores diferentes de θ corresponden a fuentes diferentes.)

48 El resultado (47d) ilustra un principio general que concierne a una superposición incoherente. Si tenemos dos fuentes que son incoherentes, las consideramos primero como coherentes y sumamos las amplitudes de las ondas procedentes de una y de otra, pero con un factor de fase relativa variable $e^{i\theta}$. Calculamos cualquier "intensidad" $I(\theta)$ que interese en función de θ y, finalmente, promediamos $I(\theta)$ respecto de todos los ángulos θ entre 0 y 2π. El valor medio resultante, $\bar{I}$, es el valor medio correspondiente al caso en que las dos fuentes son *incoherentes*. Dos fuentes cuya fase relativa está distribuida al azar son incoherentes.

49 Tras estos ejercicios acerca de amplitudes, intensidades y probabilidades, continuemos nuestra discusión sistemática de los conjuntos estadísticos.

El sistema de todos los conjuntos estadísticos está formado, evidentemente, por dos subsistemas: el de los conjuntos que

se pueden considerar como superposiciones incoherentes de dos o de varios conjuntos estadísticos y el de los que no se pueden considerar como superposición de este tipo. Los conjuntos estadísticos que no pueden considerarse como superposiciones incoherentes de otros conjuntos se llaman *conjuntos puros,* o estados puros; el otro tipo de conjuntos se llaman *conjuntos mezclados,* o *mezclas estadísticas.*

Consideremos ahora un conjunto mezclado. Sabemos que un conjunto de estas características debe ser superposición incoherente de otros conjuntos. ¿Es también verdad que el conjunto mezclado puede concebirse como superposición incoherente de conjuntos *puros*? Esta pregunta es realmente una cuestión acerca de la naturaleza del sistema de *todos* los conjuntos estadísticos realizables físicamente. Pudiera muy bien ser que el sistema de todos los conjuntos realizables físicamente no contenga *ningún* estado puro, en cuyo caso nuestra pregunta debería contestarse negativamente. Por otra parte, podríamos considerar los conjuntos puros como casos límite de conjuntos mezclados y cabría así ampliar nuestro sistema de conjuntos estadísticos hasta incluir no sólo todos los conjuntos realizables físicamente, sino también todos los casos límite de estos conjuntos. Si llevamos a cabo esta abstracción puramente matemática, cosa que sí haremos, cabe esperar intuitivamente que nuestro sistema ampliado de conjuntos tendrá la propiedad de que cada conjunto estadístico o bien es un conjunto puro o, si no, es superposición incoherente de conjuntos puros.

En lo que sigue admitiremos esta hipótesis razonable. Como hipótesis *física* es una idealización: imaginamos que es realmente posible construir todos los estados puros y considerar todos los demás conjuntos como mezclas estadísticas de los primeros. En la práctica acaso no seamos capaces de realizar el ideal que constituye un conjunto puro, pero no existe razón alguna que nos impida acercarnos a este ideal tanto cuanto queramos.

¿Se puede predecir en principio el resultado de cualquier medición?

50 Resulta intuitivamente claro que sabemos más acerca de los elementos de un conjunto puro que acerca de los elementos de un conjunto mezclado. Consideremos, pongamos por caso, el ejemplo del foco luminoso con dos lámparas. Es obvio que sabemos menos acerca de las propiedades de los fotones in-

dividuales que emergen del foco cuando funcionan las dos lámparas que cuando está en funcionamiento únicamente una de ellas: en particular, sabemos menos acerca del color de los fotones.

Para preparar un conjunto puro debemos tener un control perfecto sobre el estadio de preparación: hemos de ser capaces de suprimir todas las fuentes de fluctuaciones estadísticas que pueden en principio ser suprimidas.

Debe resultar claro ahora que cuando llevamos a cabo mediciones es de desear que se intente disponer el estadio de preparación de tal manera que el conjunto sea tan puro como resulte técnicamente factible. Procediendo así minimizamos la dispersión estadística de nuestros datos, lo que significa que aumentamos la precisión de los resultados. Podemos decir, además, que la interpretación teórica de los resultados experimentales es más simple y mucho mejor delimitada para un conjunto puro que para un conjunto mezclado. Para un conjunto puro podemos estudiar el comportamiento de un sistema en las condiciones mejores posibles, sin que se encuentre perturbado por "ruido" *evitable.*

51 Se plantea ahora una cuestión fundamental. ¿Se caracterizan los estados puros por una ausencia completa de dispersión estadística en todas las variables físicas? Dicho de otro modo: ¿la naturaleza de los estados puros es tal que el resultado de cualquier medición se puede predecir exactamente?

Debemos comprender con toda claridad que esta cuestión es una cuestión acerca de la naturaleza de nuestro universo que sólo puede ser contestada sobre la base de estudios *experimentales.* La lógica pura nada nos dice con relación a cuál debe ser la respuesta.

Las teorías de la física clásica se basan en la proposición de que la respuesta a aquella pregunta es *sí.* La mecánica cuántica es una teoría basada en la proposición de que la respuesta es *no.* (Para evitar malentendidos, debemos decir aquí que la mecánica cuántica es meramente una teoría particular entre todas las concebibles cuya respuesta a la pregunta es *no.*) Cuando aceptamos la mecánica cuántica como teoría nuestra, introducimos con ello una indeterminación en la manera como describimos la naturaleza, y precisamente en el sentido de que, no importa cómo preparemos un conjunto puro, habrá siempre una medición el resultado de la cual no se puede predecir en ningún caso particular. (La medición que no es posible predecir depende del conjunto.) Esto no significa que la mecánica cuántica sea "caótica y vaga". La teoría es una teoría muy bien

definida en la que podemos formular proposiciones cuantitativas acerca de *probabilidades* o acerca de *valores medios* de variables físicas.

52 Está en la naturaleza de la cuestión que acabamos de contestar el que ningún sistema único de experimentos podría posiblemente decidir con carácter final cuál debe ser la respuesta. Siempre que encontramos un fenómeno ante el que sentiríamos la tentación de decir que la respuesta es *no,* podemos intentar salvar la situación argumentando que, si las mediciones se hicieran de "una manera mejor", las conclusiones serían diferentes. En otras palabras: siempre cabría argüir que la indeterminación es solamente el resultado del hecho de que los dispositivos experimentales no son los mejores posibles. Es difícil rebatir este tipo de argumento en sentido absoluto. Por otra parte, es justo preguntar a la persona que argumenta en favor de una teoría determinista de la naturaleza, en el sentido clásico, que muestre explícitamente *cómo* hay que efectuar las mediciones para que desaparezca la indeterminación característica de la mecánica cuántica.

Las pruebas en favor de la respuesta *no* son dos. Ante todo, el análisis detallado de una amplia variedad de experimentos en los que tenemos en cuenta propiedades observadas de partículas, parece siempre conducir a la conclusión de que la respuesta debe ser *no.* En segundo lugar, hay el hecho de que todas las predicciones de la teoría de la mecánica cuántica, teoría en la cual la respuesta *no* es una piedra angular, parecen estar en muy excelente acuerdo con los hechos observados: admitir el *no* como respuesta no parece conducirnos nunca a contradicción con la experiencia.

53. En los capítulos 4 y 5 hemos presentado ya pruebas muy convincentes de que la respuesta debe ser *no.* Las partículas reales que se encuentran en la naturaleza se extienden como ondas en el espacio. Las ondas son divididas por espejos semiplateados y por dobles rendijas y, en general, difractadas por cualquier obstáculo. Por otra parte, si buscamos la partícula con una célula fotoeléctrica, o con algún otro detector de partículas, no encontramos nunca "fotones fraccionados". Para describir de manera no contradictoria *todos* estos fenómenos nos vemos forzados a una interpretación probabilística de la *intensidad* de la onda: las cantidades que son proporcionales al cuadrado del módulo de la función de onda deben representar *probabilidades.* Podemos solamente hablar de la probabilidad de que un contador detecte, pero no podemos nunca dis-

poner las cosas de tal forma que tengamos la certeza acerca de la respuesta de cada contador en cada experimento individual.

Consideremos, por ejemplo, el experimento con la doble rendija. Si queremos estar ciertos del valor del impulso del haz incidente, debemos prepararlo de forma que el impulso de las partículas esté sumamente bien definido. Cuando un haz de estas características incide sobre una pantalla con dos rendijas, observaremos la figura de difracción característica provocada por dos rendijas. Esta figura puede aparecer solamente si ambas rendijas están abiertas, es decir, tan sólo si la partícula pasa por una y por otra. Sin embargo, si intentamos atrapar la partícula con un contador colocado detrás de una de las rendijas, no detectamos la mitad de la partícula, sino la partícula entera. En cualquier experimento individual el contador puede o no detectar, y no sabemos de antemano con certeza qué ocurrirá: tan sólo podemos formular la probabilidad de que el contador detecte. El lector puede decir: bien, esto es sólo porque el conjunto no es puro. ¿Pero qué sugiere el lector que debiéramos hacer para lograr que sea más puro?

54 El quid es, claro está, el de si es posible describir una partícula de alguna otra manera, con más detalle del que permite la teoría ondulatoria. Si la descripción ondulatoria es correcta, y si, además, las partículas tienen la propiedad de ser indivisibles de modo que nunca podemos detectar "partículas fraccionadas", entonces no parece haber escape a la interpretación probabilística de las intensidades. Recordemos nuestra discusión acerca de las relaciones de indeterminación al principio de este capítulo. Si el *impulso* de la partícula debe conocerse con precisión, ésta debe representarse por una onda que se extiende por todo el espacio, pero entonces la *posición* de la partícula no puede conocerse de manera precisa. Una pequeña dispersión estadística en las mediciones del impulso implica una gran dispersión estadística en las mediciones de la posición, y en tanto aceptemos la descripción ondulatoria con la interpretación probabilística de las intensidades, no hay en absoluto procedimiento alguno de echar por tierra la relación de indeterminación. Por otra parte, no existe ningún material experimental que sugiera que una partícula puede describirse con mayor detalle que el que permite la descripción ondulatoria: no hay absolutamente ningún testimonio en favor de "variables ocultas".

Estas consideraciones han conducido a la siguiente hipótesis fundamental de la mecánica cuántica: los estados puros de una partícula se describen por ondas. *Un conjunto de estados*

de una partícula es puro si y sólo si cada elemento del conjunto está representado por la misma función de onda. Cuando podemos presentar una función de onda que describe todas las partículas de un conjunto, ello significa que tenemos el control *máximo posible* sobre la fuente. Nada puede ser más puro que una onda definida.

55 Es interesante comparar ciertos aspectos del mundo clásico de la fantasía con el mundo real. Los conceptos de conjuntos estadísticos, mezclas estadísticas y estados puros, no son en absoluto extraños a la física clásica. De hecho, la idea de conjunto estadístico se introdujo en la mecánica estadística clásica mucho antes de que se descubriera la mecánica cuántica. Buena parte de nuestro análisis relativo al proceso de medición sigue siendo aplicable dentro del marco de una descripción clásica. Un estado puro, por consiguiente, es el resultado de nuestro control perfecto sobre la fase de preparación, mientras que una mezcla estadística se presenta cuando nuestro control es menos que perfecto. La diferencia crucial entre la descripción clásica y la cuántica reside en la naturaleza de lo que se considera el estado puro. De acuerdo con las ideas clásicas, un estado puro tiene la propiedad de que el resultado de cualquier medición se puede predecir *exactamente*. Si un contador dado detecta en *un* experimento, detecta también en cualquier experimento subsiguiente. Cada vez que se repite un experimento ocurren las mismas cosas que habían ocurrido antes. Para un estado puro no hay dispersión estadística de *ninguna* variable física.

Los físicos han reconocido durante largo tiempo, y mucho antes de que se desarrollara la mecánica cuántica, que los sucesos en el mundo macroscópico no se pueden predecir en la *práctica* con precisión ilimitada. El ruido térmico y muchas otras clases de "perturbaciones" sobre las que carecemos de control, están siempre presentes y, en las situaciones macroscópicas, estas causas de indeterminación en el valor de una variable física enmascaran por completo la indeterminación característica de la mecánica cuántica. La creencia del físico clásico de que los estados puros están caracterizados por una ausencia completa de dispersión estadística en las variables jamás fue, en realidad, sometida a prueba críticamente en situaciones macroscópicas y ello explica por qué aquella creencia pudo persistir durante tanto tiempo.

56 El reconocer la naturaleza probabilística de *todas* las predicciones, aun en el caso de un conjunto puro, fue un paso im-

portante en el desarrollo de la teoría física. Cuando consideramos retrospectivamente la historia primera de la física cuántica, podemos apreciar las dificultades conceptuales con que se enfrentaron los físicos antes de que surgiera la descripción probabilística. Que la luz pueda exhibir a la vez propiedades ondulatorias y propiedades corpusculares fue un descubrimiento desconcertante. Esta "dualidad", como se la llamó entonces, puede ahora comprenderse fácilmente de acuerdo con lo discutido en el capítulo 4, pero en los primeros días de la física cuántica la situación era diferente. A nadie se le había ocurrido interpretar el cuadrado de la amplitud de onda en términos de probabilidades. y sin esta idea, que constituye un alejarse radical de las ideas clásicas, la "dualidad" de la luz no se puede comprender.

El que exista un límite *en principio* a nuestra habilidad de predecir sucesos futuros ha sido considerado por muchas personas, en particular por no físicos de mente orientada hacia lo filosófico, como una idea extraordinariamente profunda y revolucionaria. Inevitablemente, una enorme cantidad de tonterías se han escrito acerca de este punto (y acerca de la relación de indeterminación) y los autores han sacado toda clase de conclusiones forzadas acerca de las implicaciones de la mecánica cuántica para los asuntos humanos en general.

El autor no niega que la cuestión de que se pueda o no predecir los sucesos es una interesante cuestión de principio y que es un objeto legítimo de especulación filosófica. Sin embargo, quisiera hacer notar que los físicos profesionales no parecen prestar *hoy* mucha atención a este punto. El autor no puede recordar ni una sola discusión durante una comida en que se haya tocado este tema. (Por lo demás, las discusiones durante las comidas cubren todas las cuestiones que ocupan el pensamiento de los físicos.) De hecho, es justo decir que los físicos piensan muy poco acerca de la teoría de las mediciones en mecánica cuántica, *excepto* cuando enseñan un curso de introducción sobre este tema.

Luz polarizada y no polarizada

57 Un estudio de la polarización de la luz puede proporcionarnos una elegante ilustración de la diferencia entre un estado puro y una mezcla estadística en mecánica cuántica. Consideremos el dispositivo experimental representado en la figura 57A. Fotones casi monocromáticos de frecuencia ω atraviesan un filtro de polarización $F_{\hat{n}}$ y salen de la fuente por la

rendija que se encuentra en la pantalla P_a. La preparación del conjunto estadístico tiene así lugar a la izquierda de P_a. Los fotones que emergen se estudian mediante la célula fotoeléctrica P, dotada de un filtro de polarización F_p, y el filtro junto con la célula fotoeléctrica debe considerarse como un único instrumento descrito por la variable contador D.

Es posible construir filtros de polarización que funcionan con un grado de perfección muy elevado y que, por lo tanto, tienen la propiedad de que dejan pasar sin perturbar ondas en un estado definido de polarización, mientras que absorben por completo ondas en el estado de polarización opuesto. Supondremos que los filtros F_s y F_p son filtros de polarización perfectos cuyas propiedades podemos elegir a voluntad.

58 Supongamos ahora que el filtro F_s deja pasar solamente ondas polarizadas levógiras: los fotones que emergen son elementos de un conjunto estadístico ρ_L. Determinamos primero el número de cuentas por unidad de tiempo sin el filtro F_p: esto nos dará el número de fotones que salen por unidad de tiempo, lo que sirve para normalizar nuestros datos. Suponemos que el contador P tiene una eficiencia del 100 por ciento de modo que cuenta cada fotón que llega a él. Sea n el número de fotones que se cuentan por unidad de tiempo.

Consideremos varios filtros diferentes F_p; a cada combinación filtro-contador corresponde una variable contador D. El valor medio de D se define como igual a la razón n'/n, donde n' es el número de cuentas por unidad de tiempo en presencia del filtro. Si F_p es un filtro que deja pasar solamente luz polarizada levógira, la correspondiente variable contador la designaremos por D_L. Si deja pasar solamente luz con polarización dextrógira, designaremos la variable contador por D_D; si deja pasar luz polarizada linealmente en la dirección x, designaremos la variable por D_x; si deja pasar luz polarizada linealmente en la dirección y, designaremos la variable por D_y. Finalmente, consideramos también filtros que dejan pasar luz linealmente polarizada a lo largo de la bisectriz del cuadrante determinado por los semiejes x e y positivos (variables contador $D_{45°}$) y filtros que dejan pasar luz polarizada perpendicularmente a esta bisectriz (variable contador $D_{135°}$).

Para el conjunto ρ_L encontramos los siguientes promedios

$$\mathrm{M}(D_L;\rho_L) = 1, \qquad \mathrm{M}(D_R;\rho_L) = 0 \tag{58a}$$

$$\mathrm{M}(D_x;\rho_L) = \mathrm{M}(D_y;\rho_L) = \mathrm{M}(D_{45°};\rho_L) = \mathrm{M}(D_{135°};\rho_L) = \tfrac{1}{2} \tag{58b}$$

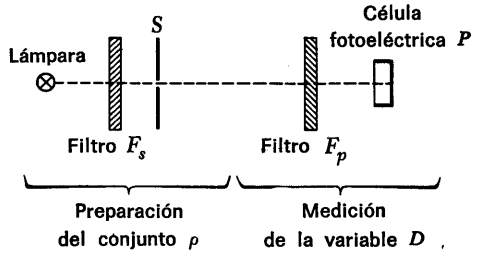


Fig. 57A Figura esquemática que representa un experimento con luz polarizada. Se supone que los filtros F_s y F_p son filtros de polarización perfectos. (La luz que pasa por un filtro de polarización perfecto emerge en un estado puro definido de polarización y el filtro es completamente transparente para dicha luz.)

La respuesta del contador P para un fotón individual no se puede predecir con exactitud a menos que los filtros F_s y F_p correspondan al *mismo* estado (puro) de polarización.

Para este conjunto las dos variables D_L y D_D se conocen con precisión, mientras que nos encontramos en un estado de máxima ignorancia acerca de las restantes cuatro variables. ¿Es puro el conjunto ρ_L? Lo que esta cuestión realmente significa es: ¿Podemos hacerlo más puro? La respuesta es negativa. Si imponemos la condición de que las variables D_L y D_D se conozcan con precisión y tengan los valores dados en la ec. (58a), sabemos que los fotones que salen de la fuente *deben* estar estrictamente polarizados en sentido levógiro. Pero cualquier onda con polarización levógira se puede descomponer en dos ondas polarizadas linealmente, de igual amplitud, y polarizadas perpendicularmente entre sí. Si interponemos un filtro que separa una de las componentes polarizadas linealmente, la intensidad de la onda transmitida será 1/2 de la intensidad de la luz incidente. Los valores medios de las variables D_x, D_y, D_{45° y D_{135° deben, por lo tanto, *necesariamente* ser los que da la ec. (58b). Si ahora combinamos este resultado *experimental* acerca de los promedios con el resultado *experimental* de que los fotones no se pueden dividir ("en energía") por un filtro de polarización, sacamos la conclusión inevitable de que ninguna de las cuatro variables D_x, D_y, D_{45° y D_{135° se puede predecir con exactitud en ningún experimento individual. De hecho, la indeterminación acerca de estas variables es la mayor posible, y esto a pesar de que el conjunto debe considerarse como el conjunto más puro posible de fotones polarizados circularmente.

59 El lector debe advertir cuidadosamente que la conclusión sería por completo diferente si los fotones se comportaran, desde todos los puntos de vista, como trenes de ondas clásicos. Entonces el valor medio de la variable D_x dependería de la sensibilidad del detector. Si ésta fuera tal que se registrara la energía que transporta medio tren de ondas, entonces el número de cuentas por unidad de tiempo de D_x sería el mismo que el correspondiente a D_L, es decir, $\mathrm{M}(D_x;\rho_L) = 1$, mientras que el promedio sería cero si la sensibilidad fuera tal que la energía transportada por medio tren de ondas no fuese suficiente para disparar el contador. Los fotones reales *no* se comportan como trenes de ondas clásicos: sea cuál sea el filtro que coloquemos delante del contador, siempre se hallará que cada fotón registrado por el mismo lleva consigo la energía $\hbar\omega$.

La respuesta de los contadores D_x, D_y, D_{45° y D_{135° no se puede predecir, por consiguiente, en ningún experimento individual realizado en el conjunto *puro* ρ_L y tenemos aquí una

prueba poderosa en apoyo de las conclusiones generales formuladas en las secciones 51-54.

60 ¿Qué ocurre si quitamos el filtro F_s? Si suponemos que la "lámpara" es un objeto dotado de simetría esférica, no existirán direcciones preferidas y cada estado de polarización tiene la misma probabilidad que cualquier otro estado de polarización. Decimos entonces que la luz es *no*-polarizada (o natural). El correspondiente conjunto, ρ_0, es *el conjunto más caótico* respecto del grado de libertad polarización, e independientemente de la naturaleza del filtro de polarización ideal F_p el número de cuentas por unidad de tiempo con el filtro será la mitad del que se obtiene sin filtro. Observamos así los promedios

$$\mathrm{M}(D_L;\rho_0) = \mathrm{M}(D_R;\rho_0) = \tfrac{1}{2} \tag{60a}$$

$$\mathrm{M}(D_x;\rho_0) = \mathrm{M}(D_y;\rho_0) = \mathrm{M}(D_{45°};\rho_0) = \mathrm{M}(D_{135°};\rho_0) = \tfrac{1}{2} \tag{60b}$$

Nótese que los valores medios en (60b) concuerdan con los valores promedios en (58b) y que el grado de ignorancia acerca de las cuatro variables D_x, D_y, $D_{45°}$ y $D_{135°}$ es, por lo tanto, el mismo para los conjuntos ρ_L y ρ_0. Los conjuntos *difieren* en la cantidad de información que poseemos acerca de las dos variables D_L y D_D; para ρ_L conocemos perfectamente estas variables, mientras que conocemos lo menos que cabe conocer acerca de ellas en el caso del conjunto ρ_0.

Esperamos, por lo tanto, que el conjunto ρ_0 debe ser una mezcla estadística. Para ver esto explícitamente consideraremos primero un experimento en el que el filtro F_s deje pasar tan sólo ondas polarizadas en sentido dextrógiro. Llamemos ρ_D al correspondiente conjunto. Los valores medios relativos al conjunto vienen dados entonces por

$$\mathrm{M}(D_L;\rho_R) = 0 \qquad \mathrm{M}(D_R;\rho_R) = 1 \tag{60c}$$

$$\mathrm{M}(D_x;\rho_R) = \mathrm{M}(D_y;\rho_R) = \mathrm{M}(D_{45°};\rho_R) = \mathrm{M}(D_{135°};\rho_R) = \tfrac{1}{2} \tag{60d}$$

Como debiera el lector comprobar en detalle, los valores medios de conjuntos para ρ_0, ρ_D y ρ_L son tales que se puede escribir

$$\rho_0 = \tfrac{1}{2}\rho_L + \tfrac{1}{2}\rho_R \tag{60e}$$

de acuerdo con nuestra discusión en la sección 38. Podemos, por consiguiente, considerar el conjunto caótico ρ_0 como una *superposición incoherente* de los dos conjuntos *puros* ρ_D y ρ_L.

61 El autor quisiera decir que, cuando muchacho, le había preocupado la diferencia entre luz no-polarizada y luz polarizada circularmente. Los libros decían que la luz no-polarizada es una mezcla de luz polarizada en dos direcciones perpendiculares entre sí, y también decían los libros que la luz polarizada circularmente es una superposición de luz polarizada en dos direcciones perpendiculares. El autor se dio cuenta, finalmente, de que en el caso de la luz polarizada circularmente se suman las *amplitudes* de las dos componentes polarizadas linealmente, mientras que en el caso de la luz no-polarizada lo que se suma son las intensidades. La luz polarizada circularmente es una mezcla *coherente* de luz polarizada en dos direcciones perpendiculares, mientras que la luz no polarizada es una mezcla *incoherente.*

Bibliografía para ulterior estudio

1. Es conveniente que el lector suplemente los estudios teóricos de este capítulo leyendo algo acerca de los contadores reales y el equipo relacionado con ellos.

a) El Cap. 5 del libro de D. Halliday: *Introducción a la física nuclear, Editorial Reverté,* está dedicado al estudio de la detención de partículas cargadas y de fotones. Se discuten en él varios tipos de contadores y el equipo electrónico asociado.

b) El análisis estadístico de los datos obtenidos con contadores se discute en el texto a que acabamos de hacer referencia. Véase también L. J. Rainwater y C. S. Wu: *Applications of Probability Theory to Nuclear Particle Detection, Nucleonics,* vol. 1, núm. 2, pág. 60 (1947), para una discusión simple y clara.

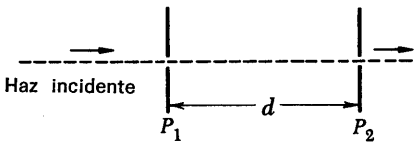
c) G. D. Rochester y J. G. Wilson: *Cloud Chamber Photographs of the Cosmic Radiation* (Academic Press, Inc., Nueva York, 1952). Merece extraordinariamente la pena mirar con atención este libro y sus numerosas e interesantes fotografías.

d) Una discusión elemental de la detección de partículas se da en el Cap. 3 del libro de D. H. Frisch y M. A. Thorndike: *Elementary Particles* (D. van Nostrand Company, Inc., 1964).

e) Para una colección de fotografías estereoscópicas de cámara de burbujas, véase *Introduction to the Detection of Nuclear Particles in a Bubble Chamber* (Preparada en el Lawrence Radiation Laboratory, de la Universidad de California, Berkeley). (The Ealing Press, 1964.)

2. Tómese nota de los siguientes artículos en la revista *Scientific American:*

a) O. M. Bilaniuk, "Semiconductor Particle-Detectors", oct. 1962, pág. 78.
b) G. B. Collins, "Scintillation Counters", nov. 1953, pág. 36.
c) G. K. O'Neill, "The Spark Chamber", agosto 1962, pág. 36.
d) H. Yagoda, "The Tracks of Nuclear Particles", mayo 1956, pág. 40.
e) D. A. Glaser, "The Bubble Chamber", feb. 1955, pág. 46.
f) D. E. Yount, "The Streamer Chamber", oct. 1967, pág. 38.



Esta figura se refiere al Prob. 1, en el que el autor arguye sofísticamente que la relación de indeterminación se puede violar si estrechamos las rendijas y hacemos grande la separación *d*. Parece entonces que el producto de la indeterminación en el impulso lateral por la indeterminación en la posición, asimismo lateral, en el instante en que la partícula pasa por la segunda rendija, se puede hacer tan pequeño cuanto se quiera. ¿Qué hay de falso en este razonamiento?

Problemas

1 Uno de los argumentos favoritos que esgrimen aquellos que quieren rebatir la relación de indeterminación reza como sigue. (Véase la figura adjunta.) Un haz monoenergético de electrones de impulso p incide normalmente sobre la pantalla P_1 por la izquierda. Esta pantalla tiene un agujero circular de diámetro a. A una distancia d de la pantalla P_1 tenemos otra pantalla P_2 que tiene, ella también, un agujero circular de diámetro a. Supongamos que los dos agujeros están alineados en la dirección del haz incidente. Algunos de los electrones que pasan por el primer agujero pueden ser desviados, pero algunos de entre ellos seguirán sin desviarse y pasarán por el segundo agujero. Considérese un electrón que ha pasado por este último. La indeterminación en su posición lateral es del orden $\Delta x \cong a$. El *módulo* de su impulso es p, el mismo que en el haz incidente, porque los electrones ni pierden ni ganan energía en este experimento. Dado que sabemos que el electrón ha pasado por *ambos* agujeros, la indeterminación en la dirección del impulso debe ser menor o igual que $\Delta\theta = a/d$. De ahí se sigue que la indeterminación en el valor de la componente lateral del impulso del electrón es del orden $\Delta p \cong (a/d)p$. Tenemos así que

$$\Delta x \Delta p \cong \left(\frac{a}{d}\right) a p$$

para el producto de las indeterminaciones en la posición y el impulso laterales. Haciendo a pequeño y d grande, podemos conseguir que este producto sea tan pequeño cuanto queramos, y, por lo tanto, violar la relación de indeterminación, que es una de las piedras angulares de la mecánica cuántica.

¿Puede Vd. destruir este argumento? Asegúrese de que es capaz de responder a todos los contra-argumentos que cabe esgrimir frente a los suyos.

El razonamiento que precede es uno de entre los muchos que se han utilizado en contra de la mecánica cuántica pasando por la relación de indeterminación. Ahora bien, debe quedar bien claro que nunca habrá peligro alguno de que se refute la relación de indeterminación por este argumento u otros similares *en tanto se acepten las premisas de la mecánica ondulatoria,* porque con estas premisas se puede demostrar la relación de indeterminación. Cabe agrupar las "refutaciones" encaminadas a rebatir la mecánica cuántica en dos clases:

(*a*) Argumentos en los que se niegan realmente las ideas de la mecánica cuántica, aunque ello no siempre se formule explícitamente.

(*b*) Argumentos "enturbiados", pero que se basan en algunas de las ideas de la mecánica ondulatoria.

Un análisis conceptual cuidadoso pondrá en claro la naturaleza de la "refutación". La negación abierta de los principios de la mecánica ondulatoria no se puede contradecir, naturalmente, basándose en razones lógicas, pero uno puede siempre acudir a los hechos experimentales: la "refutación" llevada a su conclusión lógica puede contradecir uno de estos hechos. Los argumentos en la categoría (*b*) son, simplemente, viciosos.

2 (*a*) Consideremos un experimento idealizado en el cual luz casi perfectamente monocromática de longitud de onda 6000 Å pasa por un obturador sumamente rápido. Supongamos que el obturador se abre y se cierra periódicamente de tal manera que permanece abierto durante 10^{-10} s y luego cerrado durante un período de 0,01 s. La luz que pasa por el obturador ya no será entonces monocromática, sino que presentará una cierta dispersión en la longitud de onda. Estimar el valor de la indeterminación de la longitud de onda en ångströms.

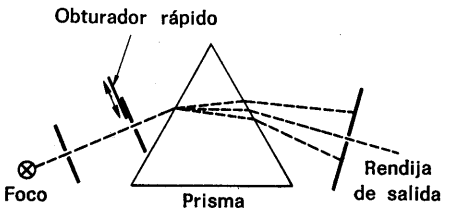
(*b*) Hagamos que la luz que emerge por el obturador pase por un largo tubo lleno de bisulfuro de carbono. Este medio es dispersivo y, para la longitud de onda considerada, la variación del índice de refracción n con la longitud de onda viene dada por

$$\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda} = -0{,}075$$

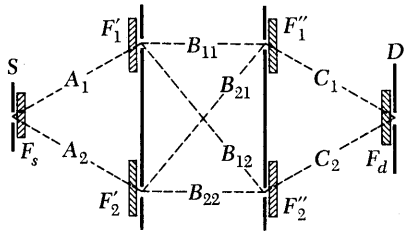
La velocidad del impulso luminoso que ha dejado pasar el obturador podría medirse con otro obturador colocado a una cierta distancia del primero y abierto en un instante ligeramente posterior. ¿Cuál es la velocidad con que se propaga el *impulso* en el bisulfuro de carbono?

3 El autor tiene una nueva idea para violar el principio de indeterminación: esta vez se trata de la relación de indeterminación tiempo-frecuencia. El dispositivo se muestra muy esquemáticamente en la figura adjunta. Luz casi monocromática incide pasando por la rendija a la izquierda dotada de un obturador sumamente rápido. No nos preocupan aquí las dificultades puramente técnicas y suponemos, por lo tanto, que el obturador puede abrirse durante un intervalo de tiempo arbitrariamente corto para dejar pasar un impulso muy bien definido hacia el espectrógrafo representado simbólicamente en la figura por el prisma. La luz que entra ya no será, naturalmente, monocromática, sino que presentará una dispersión en la frecuencia conforme se discutió en el Prob. 2. Sin embargo, podemos dotar al espectrógrafo de una rendija de salida de anchura adecuada, indicada a la derecha en la figura, y elegir así una porción de la luz incidente cuya longitud de onda pertenece a un intervalo sumamente estrecho. Se puede conseguir que la luz que emerge por la rendija de salida sea, por consiguiente, monocromática en un grado arbitrariamente elevado: la indeterminación en la frecuencia se puede hacer tan pequeña cuanto queramos. Por otra parte, la duración del impulso se puede hacer arbitrariamente corta con ayuda del obturador. Por lo tanto, el impulso que emerge por la rendija de salida puede tener una duración arbitrariamente corta y su frecuencia puede ser arbitrariamente precisa, en contradicción con lo que afirma la relación de indeterminación. ¿Puede encontrar el fallo en este argumento?

4 Con referencia a nuestra discusión en la sección 29, supongamos que la temperatura del filamento es de 1000°C y que el potencial acelerador es de 10 volts. Estimar la precisión relativa en el impulso de los electrones emitidos, es decir, estimar la cantidad q/p_0. Basta una estimación aproximada. Explique sus ideas.



Esta figura se refiere al Prob. 3. El autor trata de nuevo de violar la relación de indeterminación. El prisma simboliza un espectrógrafo de muy alta resolución que se utiliza para seleccionar un intervalo de frecuencias, sumamente estrecho, de la luz transmitida. La luz incidente está controlada por un obturador rápido. El autor mantiene, erróneamente, que es posible conseguir que el impulso luminoso que emerge por la rendija de salida esté arbitrariamente bien definido respecto de la frecuencia y del tiempo. ¿Dónde está el error?



Esta figura se refiere al Prob. 8 e ilustra un refinamiento del experimento con dos sistemas de doble rendija representado en la fig. 41A. Filtros de polarización perfectos pueden cubrir las diferentes rendijas. El problema consiste en determinar la probabilidad de que un fotón que penetra por la rendija en P salga por la rendija en D para varias combinaciones de filtros. Los números A_m, B_{mn} y C_m son las amplitudes de transferencia cuando no hay filtros. Suponemos que estas amplitudes no dependen del estado de polarización.

5 Si pudiéramos producir haces de electrones de muy baja energía, sería posible llevar a cabo experimentos "macroscópicos" de difracción de electrones. Supongamos que se intenta producir un haz de impulso bien definido con una energía media de 0,01 eV. Discutir las dificultales prácticas que podríamos encontrar en este intento. Es claro que un filamento caliente con un único electrodo acelerador no nos serviría, pero acaso hay otros métodos que pueda Vd. idear. Si es así, formule sus ideas y discuta las posibilidades de realización técnicas.

6 Considérese la red representada en la figura que ilustra el problema 5 del capítulo 5. Supongamos que la red *no* es infinitamente larga, sino que contiene solamente N aberturas. En este caso la red no es estrictamente periódica, y de ello se sigue que el haz difractado presentará una dispersión angular. Podemos expresar la situación como sigue: la transferencia de impulso mínima característica a la red ya no es exactamente $2\pi/a$, sino que está definida tan sólo con una indeterminación Δq. Intente hallar una relación entre N y Δq. Gire la figura de 90° y compare con las figuras 5A, B, C, D del presente capítulo; esta comparación puede darle algunas ideas. Utilice su resultado para deducir una expresión relativa a la indeterminación en los ángulos según los cuáles emergen los diferentes rayos difractados.

7 Considérese un haz luminoso casi monocromático que es emitido por un foco estacionario. Se trata de determinar el estado desconocido de polarización de este haz acudiendo a mediciones llevadas a cabo en la "región experimental".

(*a*) Vd. dispone de filtros de polarización perfectos y de un fotomultiplicador. ¿Cuál es el número mínimo de mediciones de intensidad que deberá hacer para determinar completamente el estado de polarización del haz? Explique la base sobre la que se apoya su conclusión.

(*b*) Suponga que le dan un fotomultiplicador, dos láminas *idénticas* de polaroid y una lámina de cuarto de onda. ¿Cómo determiminaría el estado de polarización del haz utilizando únicamente el equipo mencionado? En este caso *no puede* suponer que el polaroid es un filtro de polarización perfecto.

8 La figura adjunta presenta un refinamiento del experimento con dos sistemas de doble rendija discutido en las secciones 41-43. Los filtros de polarización perfectos se colocan (o no se colocan) delante de las rendijas y delante del foco y del detector. Suponemos que las amplitudes de transferencia discutidas en las secciones 41-43 son independientes del estado de polarización y que el foco luminoso emite luz no-polarizada. Deducir expresiones, análogas a (43b), para la probabilidad de que un fotón que penetra por la rendija en P pase por la rendija en D para las varias combinaciones de filtros de polarización que se indican en la lista que sigue.

F_s	F_1'	F_2'	F_1''	F_2''	F_d
aus	H	V	aus	aus	aus
CL	H	V	aus	aus	aus
CL	H	V	aus	aus	CD
CL	H	V	CD	CL	H
aus	H	aus	aus	H	aus

En esta tabla "aus" significa que no hay filtro (filtro ausente), H significa polarizador horizontal, V polarizador vertical, CL polarizador circular levógiro y CD polarizador circular dextrógiro.

9 Consideremos la diferencia entre un contador perfecto y un contador real. El contador real dará una señal, desgraciadamente, incluso si el suceso en estudio no tiene lugar, y también a veces dejará de registrar cuando debiera hacerlo. El número de detecciones por unidad de tiempo cuando la fuente está cerrada se conoce con el nombre de *fondo*. Una fuente de fondo es la radiación cósmica, que siempre está presente. Además, si dos sucesos están separados por un intervalo de tiempo demasiado corto, el contador real responde con una única señal. Llamamos *tiempo de resolución* del contador el tiempo mínimo t_0 para el que dos sucesos se registran como dos sucesos separados. Podemos determinar como sigue el tiempo de resolución de un contador. Tenemos dos fuentes radiactivas 1 y 2 que se pueden colocar en ciertas posiciones definidas cerca del contador de modo que aquéllas produzcan en éste, más o menos, el mismo número de cuentas por unidad de tiempo. Sea N_0 dicho número cuando no existe ninguna de las dos fuentes. Sea N_1 el número de cuentas por unidad de tiempo debida a la fuente 1 y N_2 el número correspondiente para la fuente 2. Sea N_{12} el número de cuentas por unidad de tiempo cuando *ambas* están presentes. Disponemos las cosas de modo que N_{12} sea considerablemente menor que $1/t_0$, si bien no del todo despreciable comparado con $1/t_0$. Suponemos, además, que N_0 es menor que N_1 o N_2 o N_{12}. Probar que es posible determinar t_0 a partir de estas cuatro mediciones y deducir una expresión de t_0 en función de N_0, N_1, N_2 y N_{12}.

Obsérvese que para un contador perfecto, y en el caso de que no exista fondo, tendríamos $N_{12} = N_1 + N_2$.

Capítulo 7

La mecánica ondulatoria de Schrödinger

La ecuación de onda no-relativista de Schrödinger 302

Algunos sencillos «problemas de barrera» 315

Teoría de la radiactividad alfa 330

Un tema avanzado: normalización de la función de onda 343

Bibliografía para ulterior estudio 347

Problemas 347

Capítulo 7

La mecánica ondulatoria de Schrödinger



Erwin Schrödinger. Nació en Viena en 1887; falleció en 1961. Schrödinger estudió física en la Universidad de Viena y se graduó en 1910. Después de cortas estancias en Stuttgart y Breslau, fue nombrado profesor de física en Zürich. En 1927 se le invitó a Berlín como sucesor de Planck. Schrödinger abandonó Alemania en 1933 y, finalmente, aceptó un cargo en el Institut for Advanced Studies en Dublín como director de su Escuela de Física Teórica. Recibió el Premio Nobel en 1933.

Los cuatro artículos de Schrödinger citados al comienzo de este capítulo constituyen una monumental contribución a la física teórica. Grandes avances tuvieron lugar en física atómica en un corto lapso de tiempo después de su descubrimiento. El propio Schrödinger representó un papel muy activo en este desarrollo. *(Fotografía cedida por Physics Today.)*

La ecuación de onda no-relativista de Schrödinger

1 Dirigiremos ahora nuestra atención a una teoría fenomenológica que ha representado un papel extremadamente importante en el desarrollo de la física cuántica. Se trata de la teoría de la ecuación de Schrödinger, formulada por vez primera por Erwin Schrödinger en 1926 * poco después de que Heisenberg inventara la mecánica de matrices. Estas dos teorías fueron la primera formulación cuantitativa de algunos de los principios de la mecánica cuántica.

Discutimos la teoría de Schrödinger en este libro porque queremos ver cómo funciona en la práctica una teoría ondulatoria y cómo es posible calcular cosas dentro del marco de la misma. Hemos elegido como ejemplo de teoría ondulatoria la teoría no-relativista de Schrödinger porque, desde muchos puntos de vista, es una teoría particularmente simple.

2 La teoría de la ecuación de Schrödinger (en el sentido más restringido) se basa en varias aproximaciones radicales, entre las que señalaremos estas dos:

I. Se ignoran los fenómenos de creación y destrucción de partículas, y en una situación física dada cualquiera se supone, por consiguiente, que el número de partículas de cada especie se conserva constante a medida que el proceso se desarrolla en el tiempo.

II. Se supone que todas las velocidades que intervienen son suficientemente pequeñas de modo que es válida una aproximación no-relativista: la discusión es no-relativista desde el principio hasta el fin.

Reconocemos estas hipótesis como aproximaciones radicales porque sabemos, empíricamente, que en la naturaleza *sí* ocurren fenómenos de creación y destrucción y porque también sabemos que cualquier teoría fundamental *debe* tener en cuenta los hechos que describe la relatividad especial.

Las dos hipótesis que acabamos de hacer no están desligadas entre sí. Considérese, por ejemplo, un proceso de colisión en el cual dos partículas de masas iguales chocan de tal manera

* E. Schrödinger, "Quantisierung als Eigenwertproblem", *Annalen der Physik* **79**, 361 (1926); **79**, 489 (1926); **80**, 437 (1926); **81**, 109 (1926).

que la velocidad de cada partícula en el sistema del centro de masa es próxima a la velocidad de la luz. En estas condiciones, puede haber suficiente energía cinética disponible para la creación de partículas adicionales de la misma masa, o acaso de masas diferentes. Si, por otra parte, las velocidades son pequeñas y la energía cinética disponible es, por lo tanto, asimismo pequeña, no pueden tener lugar los fenómenos de creación: están prohibidos por la ley de conservación de la energía. Hay una notable excepción a lo que acabamos de afirmar. Dado que la masa en reposo del fotón es cero, siempre es posible crear o destruir fotones (es decir, la luz puede ser emitida o absorbida), incluso si todas las otras partículas de masa en reposo no nula se mueven con velocidades no-relativistas. Si entendemos la teoría de Schrödinger en un sentido más amplio, incorporamos a ella la descripción de la emisión y absorción de luz. Debemos entonces modificar nuestras hipótesis como sigue:

I.* Se supone que no se produce la creación y destrucción de partículas *materiales,* mientras que los fotones pueden ser emitidos y absorbidos.

II.* Se supone que todas las partículas *materiales* se mueven con velocidades pequeñas y que, por lo tanto, se pueden describir no-relativísticamente. A los fotones, que nunca pueden ser descritos no-relativísticamente, se les concede un trato especial.

Debemos señalar que hay teorías de ecuaciones de onda "relativistas" en las que se prescinde de nuestra segunda hipótesis. La famosa ecuación de Dirac ofrece un ejemplo de ecuación de este tipo. Existe también una versión "relativista" de la ecuación de Schrödinger. No discutiremos aquí estas teorías: cuando hablamos de la ecuación de Schrödinger nos referimos a la versión no-relativista, basada en las hipótesis antes formuladas.

3 En el primer párrafo de este capítulo hemos calificado de *fenomenológica* a la teoría de Schrödinger. Es necesario describirla así porque se advierte claramente que la teoría de Schrödinger no puede pretender ser una teoría fundamental. Hemos citado algunas razones de por qué es así y quisiéramos que el lector comprenda este punto con claridad. La teoría de la ecuación de Schrödinger no es la misma cosa que la teoría de la mecánica cuántica en general.

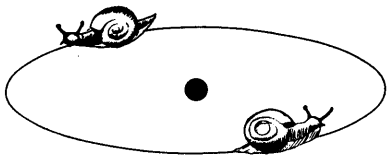
Sin embargo, hay que hacer constar también explícitamente que la ecuación de Schrödinger ha resultado sumamente satisfactoria cuando se ha aplicado a los átomos y a las molé-

culas y nada de lo que se ha dicho debe interpretarse como una degradación de la teoría de Schrödinger en tanto que *aproximación* útil.

4 Antes de discutir la propia ecuación de Schrödinger intentemos comprender por qué la teoría de Schrödinger, que se basa en las dos hipótesis enunciadas en la sección 2, ha resultado ser tan fructuosa cuando se aplica a átomos y moléculas. La razón básica de ello es el "pequeño" valor de la constante de estructura fina $\alpha \sim 1/137$. En el capítulo 2 llegamos a la conclusión de que, por ser α mucho menor que la unidad, átomos y moléculas son estructuras débilmente ligadas de partículas que se mueven lentamente. Encontramos, entre otras cosas, que en tanto tiene sentido hablar de velocidad de un electrón en el átomo de hidrógeno, su velocidad será del orden de $\alpha c \sim c/137$. Esta velocidad es también característica de los electrones más exteriores en otros átomos. Los núcleos en una molécula se moverán con una velocidad todavía más pequeña y la segunda hipótesis en que se basa la teoría de Schrödinger queda, por lo tanto, razonablemente bien satisfecha en el reino de átomos y moléculas.

5 En lo que concierte a la primera hipótesis, nos referimos a nuestra discusión cualitativa en el capítulo 2 acerca de las energías de transición características en la física de los átomos y las moléculas. Los valores típicos de las energías asociadas con el enlace molecular y las transiciones ópticas son del orden de 1-10 eV. Las energías más altas importantes para la estructura atómica son las energías de los rayos X emitidos por los elementos pesados, y estas energías no se extienden más allá de los 100 keV.

Compárense estas energías con la energía de un electrón en reposo, que es 0,5 MeV. No hay partículas más ligeras que el electrón (excepto el fotón, acerca del cual hemos convenido que lo trataríamos de manera diferente) y un electrón no puede ser creado sólo en un proceso electromagnético, sino únicamente junto con un positón. La creación de un par requiere, sin embargo, una energía de 1 MeV, que es mucho mayor que las energías atómicas y moleculares típicas. (El lector puede objetar que los neutrinos, cuya masa en reposo es cero, son de hecho más ligeros que los electrones. Sin embargo, hay que hacer notar que los neutrinos interactúan tan sólo muy débilmente con otras partículas y, en comparación con las interacciones electromagnéticas, aquellas en que interviene el neutrino



Todos los intentos de conseguir una representación pictórica de un átomo, que se ajuste a la realidad, están condenados al fracaso. Una tal representación nos sugiere algo que, en realidad, podríamos ver con nuestros propios ojos. Sin embargo, el comportamiento de un átomo es tan diferente del de cualquier objeto familiar macroscópico, que está fuera de duda la imposibilidad de lograr una imagen visual *directa*. Esto no nos impide representar *algunos* aspectos de un átomo mediante un dibujo. Una imagen esquemática de este tipo es algo parecido a la representación de las complejas actividades humanas que lleva a cabo un caricaturista. Si los convenios sobre los que se basa la figura se entienden de modo general, la figura lleva consigo de hecho un mensaje.

La representación del átomo de helio sobre estas líneas *no* pretende ser insubstancial. Hay que recordar aquí al lector que los electrones se mueven lentamente en los átomos (ligeros), que es precisamente lo que hace aplicable la teoría de Schrödinger no-relativista. Algo más se persigue con esta figura. Siempre que el lector vea una figura con la que se intenta representar un átomo, núcleo o molécula, debe recordar el modelo de Wichmann y las observaciones que preceden acerca de las representaciones gráficas.

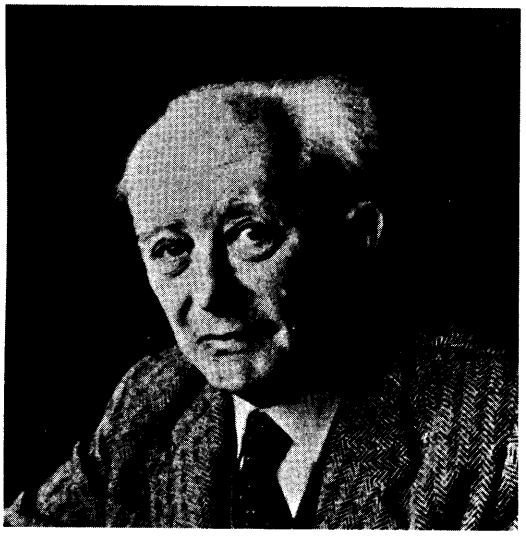
son completamente insignificantes. En la física atómica y molecular podemos olvidarnos de la existencia de los neutrinos.)

6 La electrodinámica cuántica, que es un ejemplo particular de la llamada *teoría cuántica de los campos,* tiene buenas razones para pretender ser la teoría "correcta" de los átomos y las moléculas. La teoría de Schrödinger, aplicada en este dominio, puede considerarse como la primera aproximación a la teoría "correcta". Si comparamos las predicciones de la electrodinámica cuántica con lo que predice la teoría de Schrödinger, podemos estudiar explícitamente la precisión de esta última teoría. El resultado general es que los rasgos *principales* de la estructura atómica y molecular se explican correctamente por la teoría de Schrödinger. Cabe enunciar esto matemáticamente como sigue. Muchas expresiones teóricas relativas a cantidades atómicas y moleculares, tales como energías de estados estacionarios, longitudes de onda de rayas de emisión, períodos de los estados excitados, parámetros geométricos de las moléculas, etc., pueden desarrollarse en potencias de la constante de estructura fina α. En esos desarrollos la teoría de Schrödinger da correctamente el término principal. Los términos de orden superior pueden interpretarse como "correcciones relativistas". Estas correcciones, en general, son pequeñas debido a que lo es α.

7 Intentemos ahora formular la teoría de Schrödinger para una situación física muy simple, a saber, el movimiento de una partícula, digamos un electrón, en un campo de fuerzas exterior. La teoría de Schrödinger es, sin duda alguna, mucho más general que esto y puede emplearse para describir el movimiento de cualquier número de partículas que interactúan entre sí. Para comprender los rasgos generales de esta teoría hemos de empezar, sin embargo, con la situación física más simple.

Consideremos primero un caso aún más simple, a saber, el caso de una sola partícula que se mueve en ausencia de cualquier fuerza exterior: hablamos entonces de una *partícula libre.* La teoría de Schrödinger trata de una ecuación de onda, conocida con el nombre de ecuación de Schrödinger, que describe las ondas de De Broglie asociadas con la partícula. En la sección 37, capítulo 5, hemos deducido una ecuación de onda de este tipo, la llamada ecuación de Klein-Gordon. Esta ecuación es relativísticamente invariante, es decir, es válida con independencia de si la partícula se mueve lenta o rápidamente,

y tiene la misma forma en cualquier sistema de referencia inercial. Queremos ahora modificar esta ecuación de onda de acuerdo con los principios sobre los que se construyó la teoría de Schrödinger, lo que significa que se trata de llevar a cabo una aproximación no-relativista. Además, daremos una interpretación física definida a la función de onda $\psi(\mathbf{x},t)$ que describe a la onda de De Broglie.



Max Born. Nació en Breslau, Alemania (actualmente en Polonia), en 1882; falleció en 1970. Born estudió primero, matemáticas en Breslau, Heidelberg, Zürich y Göttingen, pero se dedicó luego a la física. En 1921 fue nombrado profesor de Física Teórica en la Universidad de Göttingen. Born abandonó Alemania en 1933, y después de tres años en Cambridge se le nombró profesor de Filosofía natural en la Universidad de Edinburgo. Después de retirarse en 1953, volvió a Alemania. Se le concedió el Premio Nobel en 1954.

Se deben a Born muchas e importantes contribuciones al desarrollo de la mecánica de matrices y de la mecánica ondulatoria, como también a otros dominios de la física. Su interpretación estadística de la mecánica cuántica es particularmente notable. Fue un paso esencial que hubo que dar antes de que la teoría pudiera ser realmente interpretada desde el punto de vista físico de manera coherente. *(Fotografía cedida por Physics Today.)*

8 En el capítulo 5 presentamos ya una interpretación *aproximada* de la función de onda: "Donde es más probable encontrar la partícula es en aquellas regiones del espacio en las que la amplitud $\psi(\mathbf{x},t)$ es grande". Haremos ahora una hipótesis específica mediante la cual esta idea cobra mayor precisión.

La función de onda de Schrödinger, es decir, la amplitud de la onda de De Broglie en la teoría de Schrödinger, describe la distribución de probabilidad de la partícula en el espacio y en el tiempo como sigue. Si intentamos localizar la partícula mediante una medición de su posición en un instante dado t, la *probabilidad* de encontrarla en una pequeña región de volumen $d^3(\mathbf{x})$ que contiene el punto $\mathbf{x}$ es proporcional a $|\psi(\mathbf{x},t)|^2 d^3(\mathbf{x})$. La *densidad de probabilidad* es, por consiguiente, proporcional al cuadrado del valor absoluto de la función de onda.

Esta hipótesis es característica de la teoría de Schrödinger y fundamental para la misma. Si queremos ser capaces de llevar a cabo cálculos precisos, naturalmente hemos de dar *alguna* interpretación a la función de onda, y la interpretación probabilística, que hemos formulado más arriba, es a la vez conveniente y físicamente transparente. Esta profunda e importante idea fue formulada por vez primera por Max Born *.

9 La función de onda de Schrödinger es una función compleja del espacio y del tiempo que satisface la ecuación (lineal) de Schrödinger que escribiremos un poco más adelante. Cada función de onda definida corresponde a un estado de movimiento definido de la partícula. Debemos ahora tener en cuenta que si $\psi(\mathbf{x},t)$ es una posible función de onda, también lo es la función $e^{i\theta}\psi(\mathbf{x},t) = \psi_1(\mathbf{x},t)$, donde θ es una constante real cualquiera. Además, y esto es de suma importancia, las distribuciones de probabilidad definida por ψ y ψ_1 son *idénticas*. Esto significa que las dos funciones de onda $\psi(\mathbf{x},t)$ y $\psi_1(\mathbf{x},t)$ representan el *mismo* estado de movimiento de la partícula. Pode-

* M. Born, "Quantenmechanik der Stossvorgänge", *Zeitschrift für Physik* **38**, 803 (1926).

mos expresar esto como sigue: a cada función de onda corresponde un estado de movimiento único de la partícula. El recíproco no es cierto: un estado dado de movimiento de la partícula define una función de onda de Schrödinger salvo un factor complejo *constante* de módulo unidad, es decir, salvo un factor complejo de valor absoluto 1. Dos funciones de onda que difieren únicamente en un factor de este tipo corresponden al *mismo* estado físico.

10 Sea m la masa de la partícula. Consideremos una onda plana de impulso $\mathbf{p}$. La energía de la partícula viene entonces dada por *

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \tag{10a}$$

Pasemos ahora a la aproximación no-relativista en la cual suponemos que la velocidad de la partícula es mucho menor que la velocidad de la luz. Esto significa que en la ec. (10a) el término $(cp)^2$ es mucho menor que el término $(mc^2)^2$, por lc que desarrollaremos la raíz cuadrada en (10a) conservando solamente los dos primeros términos:

$$E \cong mc^2 + \frac{p^2}{2m} \tag{10b}$$

El primer término en (10b) es la energía en reposo de la partícula, y el segundo término, la expresión no-relativista de su energía cinética.

La correspondiente función de onda de De Broglie, que designamos por $\psi_B(\mathbf{x},t)$, viene entonces dada aproximadamente por

$$\psi_B(\mathbf{x},t) = \exp\left(\frac{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{\hbar} - \frac{itp^2}{2m\hbar}\right)\exp\left(-\frac{itmc^2}{\hbar}\right) \tag{10c}$$

Hemos escrito la función de onda como producto de dos factores. El primero de ellos lo designaremos por $\psi_S(\mathbf{x},t)$:

$$\psi_S(\mathbf{x},t) = \exp\left(\frac{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{\hbar} - \frac{itp^2}{2m\hbar}\right) \tag{10d}$$

* En este capítulo utilizamos unidades MKS o CGS.

y tenemos entonces

$$\psi_B(\mathbf{x},t) = \psi_S(\mathbf{x},t) \exp\left(-\frac{itmc^2}{\hbar}\right) \tag{10e}$$

y, por consiguiente,

$$|\psi_B(\mathbf{x},t)|^2 = |\psi_S(\mathbf{x},t)|^2 \tag{10f}$$

Conforme vemos en la ecuación (10f), las dos funciones de onda ψ_S y ψ_B difieren solamente en un factor complejo de módulo unidad y este factor es *independiente* del estado de movimiento de la partícula, es decir, es independiente de **p**. Los cuadrados de los módulos de las dos funciones de onda son iguales en cualquier punto y en cualquier instante. Para describir la distribución de probabilidad de la partícula, igual podemos emplear la función de onda ψ_S que la función de onda "correcta" de De Broglie ψ_B. Esto es precisamente lo que se hace en la teoría de Schrödinger y ψ_S, tal como se da en (10d), se adopta así como función de onda de Schrödinger que describe una partícula libre cuyo impulso **p** es pequeño. Este convenio es puramente una cuestión de conveniencia: ¿Por qué debiéramos arrastrar el factor $\exp(-itmc^2/\hbar)$ en nuestros cálculos cuando, en último término, "no tiene efecto físico alguno"?

11 Una función de Schrödinger arbitraria se puede obtener como superposición de ondas planas de Schrödinger de la forma (10d). Para hallar la ecuación de onda satisfecha por cada onda de Schrödinger, procederemos como en la sección 37, capítulo 5. En otras palabras, se determinará la ecuación de onda *lineal* más simple satisfecha por cada función de onda *plana*. La deducción es enteramente análoga a la desarrollada en el capítulo 5 y obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x},t) \tag{11a}$$

donde hemos prescindido del subíndice S en la función de onda: en adelante, consideraremos únicamente la función de onda de Schrödinger $\psi_S(\mathbf{x},t) = \psi(\mathbf{x},t)$ y el subíndice es, por lo tanto, superfluo.

La ecuación (11a) es la ecuación de onda de Schrödinger para una partícula libre y describe el movimiento de esta partícula en la aproximación *no*-relativista. Comparando (11a) con la ecuación relativista (37e) del capítulo 5, advertimos que en

(11a) interviene solamente la derivada primera respecto del tiempo. Además, tampoco aparece en la ec. (11a) la velocidad de la luz, lo que está de acuerdo con la naturaleza no-relativista de la teoría de Schrödinger.

12 Consideremos la solución (10d), correspondiente a una onda plana, de la ecuación (11a) de Schrödinger. La *velocidad de fase* de esta onda es

$$v_f' = \frac{\omega}{k} = \frac{p}{2m}, \qquad \text{donde } \omega = \frac{p^2}{2m\hbar}, \quad k = \frac{p}{\hbar} \tag{12a}$$

La velocidad de fase v_f de la onda de De Broglie dada (en la aproximación no-relativista) en (10c) es, por otra parte,

$$v_f \cong \frac{mc^2}{p} + \frac{p}{2m} \tag{12b}$$

Acaso preocupe al lector el hecho de que las dos velocidades de fase v_f' y v_f no son iguales, aunque los dos tipos de ondas ψ_B y ψ_S se supone que describen exactamente la misma situación física. Sin embargo, no existe ninguna causa para alarmarse: la velocidad de fase no es lo mismo que la velocidad de la partícula y no corresponde a nada directamente observable. La velocidad de *grupo* v, por otro lado, viene dada por

$$\frac{1}{v} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{m}{p} \tag{12c}$$

para la onda de Schrödinger y esta velocidad es, en efecto, igual a la velocidad de la partícula, como debe ser. Hemos demostrado ya, en el capítulo 5, que la velocidad de grupo de la onda de De Broglie es también igual a la velocidad de la partícula, y los dos tipos de ondas, por lo tanto, se propagan efectivamente con las mismas velocidades de grupo.

13 Intentemos ahora dar un paso más y consideremos el movimiento de la partícula en un campo exterior de fuerza que deriva de un potencial. Designaremos la energía potencial de la partícula por $V(\mathbf{x})$: el potencial es un función de la posición, pero no del tiempo.

Puede que el lector tenga ciertas dudas acerca de la idea de introducir un potencial en mecánica cuántica para describir las fuerzas que actúan sobre una partícula. Es claro que las fuerzas a que se encuentra sometida una partícula se deben a la

presencia de otras partículas y, para ser consecuentes, estas otras partículas debieran también describirse en términos de la mecánica cuántica. *Todas* las partículas en una situación física dada debieran representarse mediante ondas y una teoría *fundamental* de las interacciones entre partículas debe ser, por lo tanto, una teoría que describa las interacciones entre sus ondas de De Broglie. La *teoría cuántica de los campos* es una teoría en la que se intenta conseguir esa descripción fundamental. De acuerdo con esta teoría, la onda de De Broglie que describe un electrón interactúa con el campo electromagnético cuantificado, y este campo puede a su vez interactuar con la onda de De Broglie que describe un protón. La interacción electromagnética entre un protóh y un neutrón surge así indirectamente; se produce por medio del campo electromagnético cuantificado. Expresamos este hecho diciendo que la interacción es el resultado de un *intercambio de fotones.* (Ésta es una bonita forma de lenguaje figurado.)

En este capítulo, sin embargo, estamos trabajando dentro del marco de las aproximaciones que caracterizan a la teoría de Schrödinger: no trabajamos con una teoría fundamental, sino con una fenomenológica. Sólo nos interesa el movimiento de una partícula *individual,* en cuyo caso es razonable intentar representar el efecto de todas las otras partículas por un *potencial efectivo* $V(x)$ y, además, es también razonable dejarnos guiar por la analogía clásica en la elección de este potencial.

Lo que justifica el introducir una función potencial resulta particularmente transparente si consideramos el movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico macroscópico definido por un cierto número de conductores conectados a baterías. En este caso, sabemos que podemos describir el movimiento de un electrón según la teoría clásica con precisión elevada y que la naturaleza de las trayectorias está determinada por el potencial electrostático definido por el sistema de conductores. En el lenguaje de la teoría cuántica de los campos, el electrón intercambia fotones con todas las partículas cargadas que se encuentran en los conductores. Es intuitivamente obvio, sin embargo, que el efecto neto de todos estos "intercambios de fotón" puede describirse en términos de un potencial electrostático, que es lo que el electrón "ve" en el espacio.

14 La idea de introducir una función potencial efectiva en la teoría de Schrödinger es, desde muchos puntos de vista, muy parecida a la de introducir un índice de refracción en la óptica

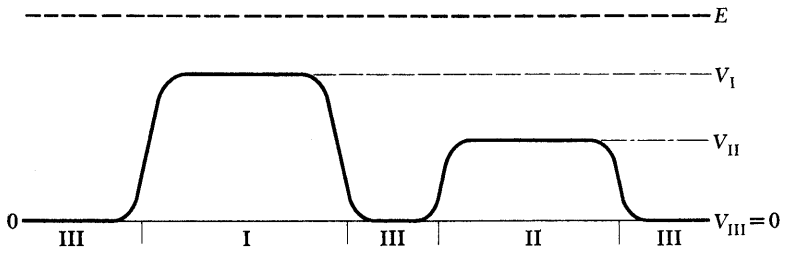


Fig. 15A "Deducimos" la ecuación de Schrödinger hallando primero las ecuaciones a que pudiera razonablemente obedecer una onda en las regiones I, II y III, dentro de las cuales el potencial es constante. Vemos fácilmente que las ecuaciones (16c), (16e) y (16f) deben cumplirse y luego hocus-pocus, en un juego de manos, combinamos éstas en una única ecuación, la (17a), que es la ecuación de Schrödinger.

En la figura el potencial se representa por la línea continua. La energía E se supone mayor que el potencial en las tres regiones. El valor de la energía se representa por la línea de trazos gruesos, que se encuentra así por encima de la curva de la energía potencial.

clásica. Sabemos muy bien que, a escala microscópica, el vidrio no es una substancia homogénea, sino que está constituida por átomos. Si queremos describir de manera *fundamental* la propagación de una onda luminosa (un fotón) por el vidrio, tendríamos que considerar la interacción de dicha onda con todos los átomos individuales que forman el trozo de vidrio. Si, por otra parte, nos contentamos con una descripción *fenomenológica* de cómo se propaga la luz en un trozo de vidrio (que puede ser una componente de un sistema óptico), podemos entonces describir el efecto de todas las interacciones elementales mediante un índice de refracción efectivo. Como hemos dicho, hay una cierta analogía entre el índice de refracción de la óptica y el potencial en la teoría de Schrödinger, y tener presente esta analogía nos ayudará a entender la teoría en cuestión. Debemos también recordar que la descripción de las propiedades electromagnéticas de un sólido mediante un índice de refracción tiene sus limitaciones. Análogamente, hay situaciones físicas en las cuales las interacciones entre partículas elementales no pueden describirse, en modo alguno, por una función potencial: la función potencial tiene sentido únicamente en aquellas situaciones físicas en las cuales son válidas las dos premisas fundamentales de la teoría de Schrödinger.

15 Consideremos ahora una situación en la que existe una región acotada del espacio, región I, en la cual la energía potencial de la partícula es V_I. Supongamos que existe otra región acotada, región II, en la que la energía potencial es V_{II}. Supongamos, además, que en las fronteras de estas regiones el potencial tiende a cero rápidamente. Designemos por III la región exterior, de modo que, por hipótesis, $V_{III} = 0$. La situación se representa esquemáticamente en la figura 15A, donde la línea de trazo continuo representa el potencial como función de la posición.

Supongamos ahora que una partícula de energía *no-relativista total* E se mueve en este campo de fuerzas que deriva de

un potencial. Dado que nuestra discusión es no-relativista, E representa la suma de las energías cinéticas y potencial de la partícula: *no* se incluye ahora la energía en reposo mc^2. De acuerdo con la mecánica clásica, la energía cinética de la partícula es entonces E en la región III $(E - V_I)$ en la región I y $(E - V_{II})$ en la región II. La energía cinética, E_{cin}, está ligada con el impulso p de la partícula por

$$E_{cin} = \frac{p^2}{2m} \cdot \tag{15a}$$

La energía total se indica por la línea de trazos en la figura 15A. Suponemos, por el momento, que en todo el espacio la energía total es mayor que la energía potencial.

16 Consideremos ahora el comportamiento de una onda de Schrödinger asociada con la partícula. La frecuencia ω de la onda y la energía E están ligadas por $E = \hbar\omega$ y la función de onda, por lo tanto, depende del tiempo t solamente a través del factor $\exp(-itE/\hbar)$. De ahí se sigue que una onda de Schrödinger asociada con una partícula que se mueve con una determinada energía E satisface la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x},t) = E\psi(\mathbf{x},t) \tag{16a}$$

La dependencia *espacial* de la onda está determinada por el impulso de la partícula: el impulso p y la longitud de onda λ están ligadas por la ecuación de De Broglie $\lambda = h/p$. Consideremos una onda de energía E en la región III. Imaginemos que se descompone esta onda en superposición de ondas planas. La dependencia espacial de éstas vendrá dada por el factor exponencial $\exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}/\hbar)$, donde el módulo de $\mathbf{p}$ resulta de

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{16b}$$

Por consiguiente, cada una de estas ondas planas satisface la ecuación diferencial

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x},t) = E\psi(\mathbf{x},t) \tag{16c}$$

Por lo tanto, la onda de Schrödinger que corresponde a una partícula de energía E debe satisfacer la ecuación diferencial (16c) en toda la región III.

Consideremos ahora la onda en la región I. Si descomponemos la onda en *esta* región en ondas planas de la forma $\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar)$, el módulo del impulso $\mathbf{p}$ estará ahora determinado, de acuerdo con (15a), por

$$\frac{p^2}{2m} = E_{\text{cin}} = E - V_{\text{I}} \tag{16d}$$

de lo que se sigue que la ecuación de onda en la región I ha de satisfacer la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\psi(\mathbf{x},t) = (E - V_{\text{I}})\,\psi(\mathbf{x},t) \tag{16e}$$

Análogamente se deduce que en la región II la función de onda de Schrödinger debe satisfacer la ecuación diferencial

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\psi(\mathbf{x},t) = (E - V_{\text{II}})\,\psi(\mathbf{x},t) \tag{16f}$$

17 El razonamiento que nos ha conducido a las tres ecuaciones (16c), (16e) y (16f), satisfechas por la función de onda en las regiones I, II y III, es ciertamente plausible y resulta muy tentador resumir estas tres ecuaciones en la ecuación única

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\psi(\mathbf{x},t) = [E - V(\mathbf{x})]\,\psi(\mathbf{x},t) \tag{17a}$$

donde $V(\mathbf{x})$ es la función potencial que toma los valores V_{I}, V_{II} y V_{III} en las tres regiones. Hay que hacer notar, sin embargo, que no hemos presentado argumento alguno acerca de cuál debe ser la ecuación diferencial "correcta" en las regiones fronterizas, en las que el potencial cambia rápidamente, y, por lo tanto, no es de suyo evidente que la ecuación (17a) deba ser válida en todo el espacio. En realidad, el autor quiere confesar ahora que dispuso los argumentos que conducen a nuestras ecuaciones y dibujó la figura 15A de manera deliberadamente encaminada a llevar al lector a la creencia de que la ecuación (16e), por ejemplo, *debe* ser verdadera. Hay de hecho algo que invalida nuestro razonamiento. En tanto la región II sea muy *grande* comparada con la longitud de onda de De Broglie en esta región, podemos aceptar sin recelo nuestra conclusión (16e) como sumamente plausible. El comportamiento *local* de la onda en la región no debe depender del potencial en otros puntos y la relación entre longitud de onda y energía cinética ha de concordar entonces con nuestra hipótesis. Sin embargo, la situa-

ción es diferente si la región II es pequeña comparada con la longitud de onda, es decir, si el potencial $V(\mathbf{x})$ varía considerablemente en una distancia que es del orden de dicha longitud. En este caso ya no es tan claro cuál debe ser la dependencia espacial de la función de onda, porque la "longitud de onda" en el punto x, tal como viene definida por la relación de De Broglie en función de la energía cinética $[E - V(x)]$, depende de la posición.

Por lo tanto, no es de suyo evidente que la ecuación (17a) sea la ecuación correcta en todo el espacio y para cualquier función potencial $V(\mathbf{x})$. Con todo, *admitiremos,* siguiendo a Schrödinger, que la ecuación (17a) *es* correcta. En tanto que ecuación que describe el comportamiento de las ondas de Schrödinger, es por lo menos una ecuación razonable, y hay que juzgarla con equidad. De todas maneras, hemos querido que quedara bien claro que nuestra discusión no es una *prueba* de la corrección de la ecuación (17a), sino más bien un argumento en favor de su carácter plausible. En realidad, se puede hacer algo un poco mejor. Una posible manera de abordar la cuestión se funda en partir de la electrodinámica cuántica, en cuyo caso se puede demostrar que la ecuación (17a), en tanto que aplicada a problemas no relativistas en que intervienen átomos y moléculas, resulta ser una aproximación a la formulación en términos de la teoría de campos. Otro punto de vista consiste en estudiar sistemáticamente cuáles son las ecuaciones de onda posibles que permiten una interpretación física razonable, incluyendo la interpretación probabilística que se discutió en la sección 8. Pretendemos conservar esta interpretación de la función de onda aún en el caso en que la partícula se encuentra sujeta a fuerzas. Cabe entonces demostrar que la ecuación (17a), es, en cierto sentido, la ecuación de onda más simple para el problema de mecánica cuántica que "corresponde" al problema clásico de una partícula que se mueve en el campo de fuerzas que deriva del potencial $V(\mathbf{x})$. Nos llevaría demasiado lejos examinar estos argumentos en detalle y debemos, por consiguiente, aceptar la ecuación (17a) como hipótesis de trabajo apoyándonos en los argumentos que hemos presentado.

18 La ecuación (17a) se refiere a una onda de energía determinada E. Para esa onda vale la relación (16a) y podemos, por lo tanto, escribir (17a) también en la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) \qquad (18a)$$

En esta ecuación no aparece ya E y, en consecuencia, (18a) vale para *cualquier* E, lo que implica su validez para *cualquier* onda de Schrödinger.

Las ecuaciones (17a) y (18a) son las célebres ecuaciones de Schrödinger. La ecuación (18a) se conoce con el nombre de *ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo,* mientras que (17a) ha recibido el nombre de *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.* Hemos de tener presente que (18a) es la ecuación válida para *todas* las ondas de Schrödinger, mientras que (17a) (para un valor dado de E) vale solamente para ondas de Schrödinger que describen una partícula de energía total E.

La mejor justificación posible de las ecuaciones (17a) y (18a) procede, naturalmente, de una comparación de las predicciones basadas en ellas con los hechos experimentales. En un breve lapso de tiempo que siguió al gran descubrimiento de Schrödinger, la ecuación se aplicó a muchos problemas de la física atómica y molecular con espectacular éxito y estas ramas de la física dieron un gran salto hacia adelante. En este desarrollo desempeñó un activo papel el propio Schrödinger y en el capítulo siguiente veremos cómo fue capaz de explicar los estados cuasiestables de los átomos. Tenemos toda clase de motivos para admirar la penetración de Schrödinger al escribir justamente la ecuación (18a), que ha resultado ser la correcta para aquellas situaciones a que se pretendía aplicar.

No es nuestra intención discutir en este curso la teoría general de la solución de la ecuación (18a): ésta es una cuestión que debe quedar reservada para cursos más adelantados. Meramente queremos considerar unas pocas aplicaciones, muy simples, de la teoría de Schrödinger, para ver cómo se lleva a la práctica.

Algunos sencillos "problemas de barrera"

19 Hemos supuesto que las ecuaciones de Schrödinger (17a) y (18a) son válidas para una función potencial arbitraria $V(\mathbf{x})$. En nuestra "deducción" de la ecuación (17a) consideramos, sin embargo, tan sólo el caso en que el potencial $V(\mathbf{x})$ en todo el espacio es menor que la energía total E. Veamos ahora qué ocurre cuando hay regiones en las que el potencial es *mayor* que E. Según la mecánica clásica estas regiones no son accesibles a las partículas, pero conforme veremos la situación es diferente en mecánica cuántica.

Para simplificar, limitaremos nuestra discusión a un universo unidimensional: la partícula puede moverse a lo largo de una recta y su posición viene dada por la coordenada x. El modelo unidimensional tiene la gran ventaja de que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es una ecuación diferencial ordinaria, en vez de una ecuación entre derivadas parciales, con lo que la discusión matemática es un orden de magnitud más simple. Los rasgos fundamentales, sin embargo, se encuentran ya presentes en este simple modelo.

20 Consideremos la ecuación de Schrödinger para el caso en que la energía de la partícula $E > 0$, con lo que la ecuación unidimensional correspondiente a (17a) se escribe

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = [E - V(x)]\,\psi(x,t) \tag{20a}$$

La dependencia temporal de la función de onda $\psi(x,t)$ viene dada por el factor $\exp(-itE/\hbar)$ y, si queremos, se puede escribir

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\exp\left(-\frac{itE}{\hbar}\right) \tag{20b}$$

en cuyo caso el factor independiente del tiempo $\varphi(x)$ satisface la misma ecuación (20a), a saber:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = [E - V(x)]\,\varphi(x) \tag{20c}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria. Si podemos resolver esta ecuación respecto de $\varphi(x)$, obtenemos la función de onda de Schrödinger $\psi(x,t)$ mediante (20b).

21 Consideremos ahora la situación presentada en la figura 21A. La línea de trazos indica la energía total E, mientras que la línea continua representa la función potencial $V(x)$. Suponemos que, al moverse hacia la izquierda en la figura, el potencial tiende al valor constante nulo, mientras que si lo hacemos hacia la derecha, tiende al valor constante $V_0 > E$. El punto x_0 en el que la energía cinética tiene el valor cero se conoce con el nombre de *punto de retroceso*. Según la mecánica clásica, una partícula que incide por la izquierda sería primero detenida y vería luego invertido el sentido de su movi-

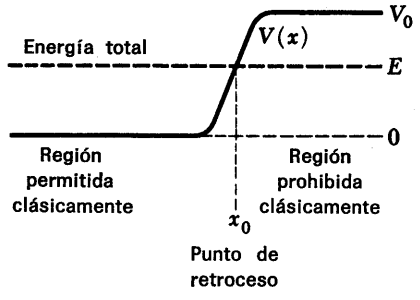


Fig. 21A Para ilustrar la discusión de la sección 21. La línea de trazos continuo representa el potencial, y la de trazos gruesos, el valor de la energía total E. El punto x_0 en el cual la energía potencial es igual a E es el punto de retroceso clásico. Según la mecánica cuántica existe una probabilidad no nula de que la partícula se encuentre en la región prohibida clásicamente.

miento en este punto. La región a la derecha de x_0 resulta inaccesible para la partícula clásica.

Deberíamos ahora resolver la ecuación (20c) para el potencial representado en la figura 21A. La solución $\varphi(x)$ es cierta función de x, continua con derivada primera continua. Sin resolver realmente la ecuación de modo explícito, cabe sospechar que la función de onda $\varphi(x)$ no se anulará a la derecha de x_0, lo cual, de acuerdo con nuestra interpretación probabilística de la función de onda, significa que existe una cierta probabilidad no nula de encontrar la partícula a la derecha de x_0. La mecánica cuántica, por consiguiente, predice que una partícula puede penetrar en una región que le está prohibida según la mecánica clásica.

22 Intentemos estudiar este fenómeno más explícitamente. Para ello seguimos simplificando nuestro problema y substituimos el potencial que aumenta de manera continua de la figura 21A por el potencial en escalón de la figura 22A. Por conveniencia, elegimos también el punto de retroceso x_0 como origen sobre el eje x, de modo que $x_0 = 0$. Tenemos así

$$V(x) = 0 \quad \text{para } x < 0 \qquad V(x) = V_0 > E \quad \text{para } x > 0 \quad (22a)$$

El potencial representado en la figura 22A puede considerarse como un caso límite de potenciales del tipo representado en la figura 21A. El potencial crece más y más abruptamente hasta que alcanza la situación idealizada que encontramos en la fig. 22A. En tanto el potencial sea una función continua, la función de onda será continua y tendrá una derivada primera continua, y esta propiedad se conserva también en el caso límite de un potencial en escalón. En este último caso, sin embargo, la derivada *segunda* de la función de onda presentará, en general, un "salto". Hay que advertir que lo dicho son proposiciones *matemáticas* acerca de las ecuaciones diferenciales que aparecen en la teoría de Schrödinger. Como físicos hemos de considerar siempre el potencial en escalón como una idealización del potencial real y entonces no cabrá nunca duda alguna de que la función de onda física debe satisfacer las propiedades de continuidad citadas.

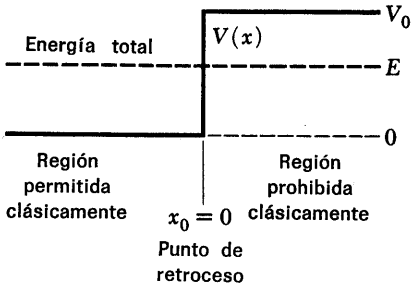


Fig. 22A Para simplificar la discusión matemática, el potencial que en la fig. 21A varía de manera continua se reemplaza por un potencial en escalón, como muestra la figura.

23 Consideremos la ecuación de onda en la región $x > 0$. En esta región toma la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = (E - V_0)\varphi(x) \qquad (23a)$$

y podemos hallar inmediatamente dos soluciones linealmente independientes, a saber,

$$\exp(-xq), \qquad \exp(+xq), \text{ donde } q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \tag{23b}$$

La solución $\exp(+xq)$ aumenta exponencialmente cuando aumenta x y lo mismo hace el cuadrado de su valor absoluto. De acuerdo con nuestra interpretación probabilística de la función de onda, esto significa que la densidad de probabilidad de hallar la partícula aumenta sin límite a medida que x aumenta. Una solución de esta naturaleza no es físicamente aceptable. Encontramos aquí otro ejemplo de las condiciones de contorno que las soluciones con sentido físico de una ecuación de onda deben satisfacer: una solución que aumenta tendiendo a infinito debe excluirse por razones físicas. Nos queda así como única posibilidad la solución $\exp(-xq)$ y si designamos la función de onda en la región $x > 0$ por $\varphi_D(x)$ tenemos

$$\varphi_D(x) = \exp(-xq) \tag{23c}$$

24 Consideremos ahora la región $x < 0$. En esta región la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{24a}$$

y dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación lo son

$$\exp(ixk), \qquad \exp(-ixk), \qquad \text{donde } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{24b}$$

Estas soluciones son oscilantes: no aumentan indefinidamente cuando x tiende a $-\infty$. Ambas soluciones son físicamente aceptables *, y si designamos la función de onda en la región $x < 0$ por $\varphi_I(x)$, llegamos a la conclusión de que dicha función debe ser de la forma

$$\varphi_I(x) = A\exp(ixk) + B\exp(-ixk) \tag{24c}$$

donde A y B son constantes.

* Si esta afirmación preocupa al lector, vea la Sec. 51 de este capítulo.

¿Cómo determinamos las constantes A y B? Hemos dicho que *la función de onda debe ser continua y tener una derivada primera continua.* Esto significa que las funciones $\varphi_D(x)$ y $\varphi_I(x)$ deben empalmarse en el origen de tal manera que

$$\varphi_D(0) = \varphi_I(0), \qquad \varphi'_D(0) = \varphi'_I(0) \tag{24d}$$

ya que ambas representan la *misma* función de onda, si bien en dos regiones diferentes que se encuentran en el punto de retroceso $x_0 = 0$. Las dos condiciones (24d) nos dan dos ecuaciones, a saber:

$$A + B = 1, \qquad ik(A - B) = -q \tag{24e}$$

y estas dos ecuaciones determinarán las constantes A y B. La solución es, simplemente,

$$A = \frac{(1 + iq/k)}{2}, \qquad B = \frac{(1 - iq/k)}{2} \tag{24f}$$

25 Para interpretar nuestra solución conviene multiplicar la función de onda (en todas partes) por la constante $1/A$, lo que podemos hacer, dado que la ecuación de Schrödinger es una ecuación lineal homogénea. Podemos escribir entonces nuestra solución explícitamente en la forma:

$$\varphi(x) = e^{ixk} + \left[\frac{1 - i\sqrt{V_0/E - 1}}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}}\right] e^{-ixk}, \quad \text{para } x < 0 \tag{25a}$$

y

$$\varphi(x) = \frac{2e^{-xq}}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}}, \quad \text{para } x > 0 \tag{25b}$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \qquad q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \tag{25c}$$

Considérese ahora la función de onda en la región $x < 0$, tal como viene dada por (25a). Es una superposición de dos ondas. El primer término, $\exp(ixk)$, representa una onda que se propaga hacia la *derecha.* El segundo término, proporcional a $\exp(-ixk)$, representa una onda que se propaga hacia la

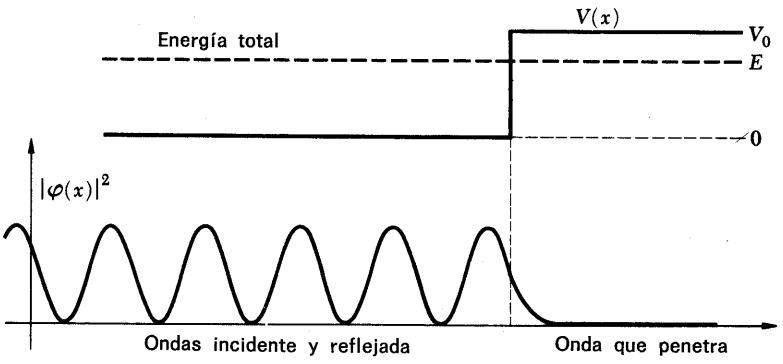


Fig. 25A La parte superior de la figura representa el potencial $V(x)$. La energía total E se indica por la línea de trazos gruesos. La parte inferior de la figura representa el cuadrado del valor absoluto de la función de onda $\varphi(x)$. Como se ve, la onda penetra en la región prohibida clásicamente. A la izquierda de la barrera tenemos una onda estacionaria que resulta de la interferencia de la onda reflejada con la onda incidente. Obsérvese que la función de onda y su derivada son continuas en el punto de retroceso.

izquierda. El coeficiente que aparece delante de $\exp(-ixk)$ en el segundo término es de módulo unidad:

$$\left|\frac{1-i\sqrt{V_0/E-1}}{1+i\sqrt{V_0/E-1}}\right| = 1 \qquad (25d)$$

y las dos ondas tienen, por consiguiente, amplitudes de igual valor absoluto. El cuadrado del valor absoluto de la amplitud de una onda debe, en cierto modo, ser proporcional al "flujo" de la partícula y cabe así concluir que la función de onda que aparece en (25a) describe la situación en la cual una partícula que incide por la izquierda es reflejada de nuevo hacia la izquierda por la "colina" de potencial. Esta interpretación está de acuerdo con nuestro modelo clásico de lo que ocurre.

La función de onda en la región $x > 0$, dada por (25b) describe la penetración de la onda de Schrödinger en la región prohibida para la partícula clásica. La amplitud de la onda que penetra disminuye exponencialmente cuando nos adentramos en la región prohibida, y a grandes distancias de la barrera la amplitud es prácticamente nula, lo que está de acuerdo con el modelo clásico. Estos rasgos se han ilustrado en la fig. 25A.

26 Es interesante considerar el caso límite en que la altura de la barrera de potencial tiende a infinito, es decir, cuando $V_0 \to +\infty$. (La energía E se mantiene constante.) Basta examinar (25c) para ver que cuando V_0 tiende a infinito, también q tiende a infinito, lo que significa que la rapidez de disminución de la función de onda al aumentar la distancia (a partir del punto de retroceso clásico) tiende a infinito. La función de onda penetra cada vez menos y menos en la región prohibida. Del examen de (25b) se sigue que la amplitud de la onda que

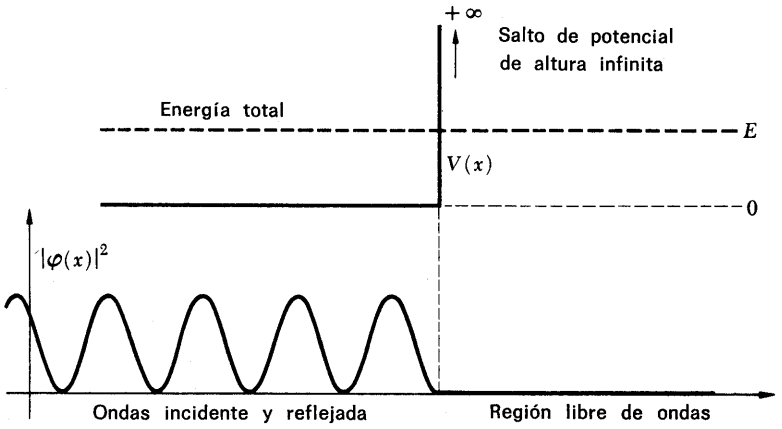


Fig. 26A Esta figura ilustra el caso límite de potencial de altura infinita. (Compárese con la fig. 25A.) La parte superior de la figura representa el potencial. La línea de trazos gruesos indica la energía total E. La parte inferior representa el cuadrado del valor absoluto de la función $\varphi(x)$. La función de onda, pero no su derivada, se anula en el punto de retroceso. La derivada del *cuadrado* de la función de onda se anulará, naturalmente, en este punto.

penetra tiende a cero cuando V_0 tiende a infinito. En el caso límite de una "colina" de potencial infinitamente alta obtenemos así:

$$\varphi(x) = e^{ixk} - e^{-ixk} \qquad \text{para } x < 0 \qquad (26a)$$

$$\varphi(x) = 0 \qquad \text{para } x > 0 \qquad (26b)$$

Nuestra conclusión es la de que si la barrera de potencial es infinitamente alta, la función de onda debe anularse *en* la barrera, es decir, para $x = 0$ y a la derecha de la misma, es decir, para $x > 0$.

La fig. 26A muestra el comportamiento del cuadrado del valor absoluto de la función de onda, es decir, la densidad de probabilidad de la partícula. Obsérvese que la densidad de probabilidad presenta un comportamiento oscilante a la izquierda de la barrera. Es éste un efecto de interferencia cuántico que no tiene contrapartida en la mecánica clásica. La misma característica puede verse también, naturalmente, en la fig. 25A.

27 Hemos considerado el caso del salto de potencial con este detalle a fin de dar al lector confianza en que se puede resolver la ecuación de Schrödinger y en que las soluciones se pueden interpretar físicamente. Dado un potencial razonablemente continuo o continuo por secciones, podemos confiar en que existe la solución. Hallarla *explícitamente* no es, sin embargo, tarea fácil, pero las complicaciones son tan sólo de naturaleza técnico-matemática. Aún sin conocer la solución explícita precisa, cabe a menudo afirmar bastantes cosas acerca de la *naturaleza* de la solución y, en consecuencia, formular proposi-

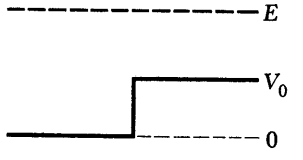


Fig. 28A Para ilustrar la discusión de la sección 28. La energía E de la partícula es aquí mayor que la altura de la barrera de potencial. Según la teoría clásica, una partícula no sería reflejada por esta barrera, pero de acuerdo con la mecánica cuántica la onda incidente será en parte transmitida y en parte reflejada.

ciones generales relativas al comportamiento del sistema físico. Basándonos en lo que hemos estudiado hasta ahora, podemos concluir que constituye una característica general de la mecánica cuántica el que la onda de Schrödinger es capaz de penetrar en regiones que están prohibidas para las partículas dentro del marco de la mecánica clásica.

28 Para que el lector se familiarice más con el sentido de la ecuación de Schrödinger, consideremos el siguiente caso. La figura 28A representa un "escalón de potencial". Se trata de estudiar el movimiento de una partícula de energía $E > V_0$ en este potencial. (El estudio *detallado* se deja al lector como ejercicio; véase problema 1, al final de este capítulo.)

Observará el lector que es posible encontrar *dos* soluciones, aceptables físicamente, de la ecuación de onda (20c) en la región a la izquierda del salto y que también podemos hallar *dos* soluciones físicamente aceptables en la región a la derecha del mismo. ¿Cómo sabemos cuáles hay que elegir? Esto depende de la situación física que queramos estudiar. Supongamos que se pretende considerar el caso en que una partícula incide por la izquierda sobre el escalón. La onda será acaso reflejada por éste, pero parte de la misma continuará propagándose hacia la derecha del salto. Esto significa que la función de onda correcta para este problema debe ser tal que represente una partícula que se mueve hacia la derecha en la región situada asimismo a la derecha del escalón: ha de ser de la forma $\exp(-ixk')$ para $x > 0$. En la región a la izquierda del mismo, la función de onda puede ser de la forma $[A \exp(ixk) + B \exp(-ixk)]$, donde el primer término representa una onda que se propaga hacia la derecha y el segundo una onda que lo hace hacia la izquierda. Este segundo término representa la onda *reflejada*, mientras que el primero describe la onda *incidente*. ¿Cómo encontrar A y B? A y B vienen determinados por las dos condiciones de que la función de onda y su derivada primera deben ser continuas en todo el espacio y, en particular, allí donde se produce el salto de potencial. Esto nos da dos ecuaciones para las dos incógnitas A y B y, una vez halladas estas amplitudes, podemos también encontrar las intensidades de las ondas incidente, reflejada y transmitida y, por lo tanto, el coeficiente de reflexión de este tipo de "barrera".

Supongamos que, en vez de este caso, se trata de ver qué ocurre cuando la partícula incide por la derecha. Sabemos entonces que la función de onda, a la izquierda de la barrera, debe ser de la forma $\exp(-ixk)$, porque en dicha región tenemos

una sola onda, onda que se propaga hacia la izquierda. A la derecha de la barrera la función de onda es de la forma $[A' \exp(ixk') + B' \exp(-ixk')]$. De nuevo hallamos A' y B' imponiendo las condiciones de que la función de onda y su derivada primera deben ser continuas en el salto. Por lo tanto, la elección de la función de onda depende del problema físico particular que queremos estudiar.

La lección que hay que aprender y que nos enseña el estudio del comportamiento de una partícula que se mueve en un potencial del tipo representado en la figura 28A, es que, en general, la partícula será en parte reflejada por cualquier discontinuidad del potencial y que en parte será capaz de penetrar más allá de la región limitada por la discontinuidad.

29 Consideremos ahora la situación representada en la figura 29A en la que el potencial es discontinuo en *dos* puntos $x = 0$ y $x = a$. Visto lo que aprendimos en la sección precedente, una onda será en parte reflejada y en parte transmitida en ambas discontinuidades.

Supongamos que queremos estudiar el caso en que las partícula incide sobre esta barrera por la izquierda. El lector acaso tenga la impresión de que éste es un difícil problema que debiera resolverse como sigue. Consideremos una onda incidente por la izquierda y determinemos la parte de esta onda que es reflejada y la parte de la misma que es transmitida en la primera discontinuidad situada en $x = 0$. La onda transmitida alcanza la segunda discontinuidad, en $x = a$, y en parte es reflejada y en parte es transmitida. La parte reflejada vuelve a la discontinuidad en $x = 0$ y de nuevo es en parte reflejada y en parte transmitida. Para determinar la onda que emerge hacia la derecha a partir de la barrera tenemos que considerar así un número infinito de reflexiones hacia adelante y hacia atrás entre las dos discontinuidades y sumar luego las amplitudes de todas las ondas parciales que son transmitidas a la derecha del punto $x = a$. ¿Podemos realmente resolver este problema? La respuesta es que el problema, efecto, se puede resolver de esta manera, pero existe un camino mucho más fácil de hallar la solución. Todo lo que tenemos que hacer es encontrar la solución de la ecuación de Schrödinger (20c) que es continua en todo el espacio, al igual que su derivada primera, y que es de la forma $\exp(ixk)$ para $x > a$. Esta última condición significa que la parte de la onda incidente que es capaz de atravesar la barrera *debe* propagarse hacia la derecha en la región $x > a$: esto corresponde a la situación física que

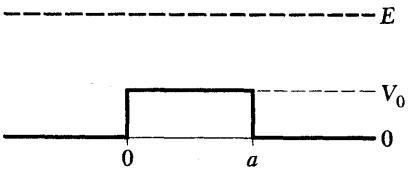


Fig. 29A Para ilustrar la discusión de la sección 29. Este problema se podría resolver teniendo en cuenta todas las repetidas reflexiones y transmisiones parciales en las discontinuidades que se presentan en los puntos $x = 0$ y $x = a$. Sin embargo, es mucho más fácil hallar la solución *global* de la ecuación de Schrödinger directamente: todas las múltiples reflexiones se tienen en cuenta entonces de una sola vez.

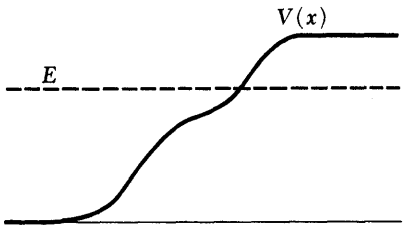


Fig. 30A La partícula (la onda) es reflejada por esta barrera, porque la energía E es menor que el valor límite del potencial a la derecha. (La energía total se indica por la recta de trazos, y el potencial, por la línea continua.) *¿Dónde* tiene lugar la reflexión? La respuesta es que ésta se produce en toda la región en la que el potencial cambia.

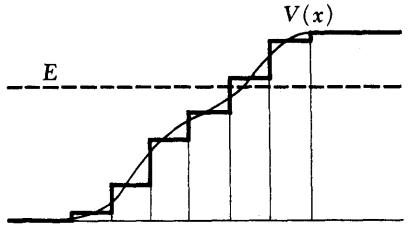


Fig. 30B El potencial que muestra la fig. 30A se aproxima por un potencial que cambia a saltos. En cada discontinuidad, una onda es en parte reflejada y en parte transmitida. La solución de la ecuación de Schrödinger tiene en cuenta todas las "reflexiones múltiples".

queremos analizar.

Para $x > a$ la función de onda es, por consiguiente, de la forma $\exp(ixk)$. Para $a > x > 0$ la función de onda es de la forma $[A \exp(ixk') + B \exp(-ixk')]$ y para hallar A y B imponemos las condiciones de que la función de onda y su derivada sean continuas en $x = a$. En la región $0 > x$ la función de onda es de la forma $[A' \exp(ixk) + B' \exp(-ixk)]$ y se puede determinar A' y B' imponiendo las condiciones de que la función de onda y su derivada primera han de ser continuas en $x = 0$. De esta manera encontramos la *solución global* de la ecuación de Schrödinger (20c) que corresponde al problema físico que queremos estudiar y esta solución es *única* (salvo un factor constante). Así, pues, podemos resolver este problema, evidentemente, con unas pocas simples operaciones.

30 Lo que importa comprender es que para resolver un problema de barrera de este tipo todo lo que hay que hacer es encontrar la solución de la ecuación de Schrödinger (20c) que es válida en *todo el espacio* y sujeta a *condiciones de contorno* determinadas por el problema físico en estudio, es decir, por condiciones tales como la condición de que la onda debe ser de la forma $\exp(ixk)$ a la derecha de la barrera. Este procedimiento tiene en cuenta automáticamente todas las "reflexiones múltiples" a que nos lleva a pensar al basarnos en nuestra intuición física. Nada hay de equivocado en intentar resolver el problema considerando las reflexiones múltiples, pero es *mucho* más fácil encontrar la solución global de la ecuación de Schrödinger directamente.

Consideremos la barrera de potencial representada en la figura 30A. *¿Dónde* tiene lugar la reflexión de la partícula? La respuesta es de que "tiene lugar" en *toda* la región en la que el potencial varía. Si queremos, cabe aproximar la función potencial que varía con continuidad $V(x)$ por una función que aumenta efectuando un gran número de pequeños saltos, como se indica en la fig. 30B. En cada salto una onda es en parte transmitida y en parte reflejada y de nuevo podemos considerar nuestro problema como un "problema de reflexión múltiple". La ecuación de Schrödinger (20c) describe concisamente todas estas múltiples reflexiones y, si se quiere, es posible interpretar la ecuación de esta manera. Si hallamos la solución global de la ec. (20c), de hecho hemos tenido en cuenta de un golpe todas esas infinitas reflexiones y transmisiones *locales*.

31 Consideremos ahora otro problema que se presenta él mismo de inmediato. ¿Qué ocurre si el potencial es de la for-

ma representada en la fig. 31A cuando la altura V_0 de la barrera es mayor que E?

Es fácil adivinar la respuesta: una onda que incide por la izquierda será en parte reflejada por la barrera y en parte será capaz de atravesarla penetrando en la región III. Clásicamente, una partícula que parte de la región I sería reflejada en el punto $x = 0$ y no podría penetrar en las regiones II y III. Que una partícula pueda "filtrarse" por una barrera de potencial que es absolutamente opaca desde el punto de vista clásico, es uno de los rasgos sorprendentes de la mecánica cuántica. El fenómeno se conoce con el nombre de *efecto túnel.*

Para resolver la ecuación de Schrödinger en el caso de la situación representada en la fig. 31A, podríamos proceder justamente como se explicó en las secciones 28-30. Hallamos la solución general en cada una de las tres regiones I, II y III e imponemos luego la condición de que la función de onda, al igual que su derivada primera, sean continuas en todo el espacio y, en particular, en los dos puntos de retroceso $x = 0$ y $x = a$. El problema de barrera correspondiente a la figura 31A, por lo tanto, no es difícil en principio, pero hallar la solución detallada es una tarea un tanto laboriosa. Afortunadamente, podemos captar los rasgos esenciales de este problema sin de hecho resolver la ecuación de Schrödinger por completo y dejar así la resolución de la misma para otro curso. (O para problema en casa: véase prob. 2.)

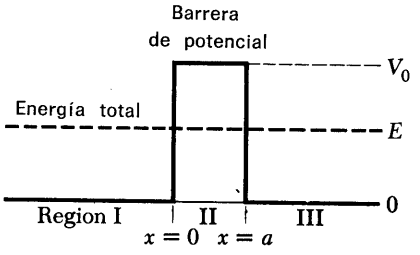


Fig. 31A La línea de trazos continuos representa el potencial, y la recta de trazos gruesos indica la energía total. Según la teoría clásica, una partícula que incide por la izquierda no puede atravesar esta barrera. De acuerdo con la mecánica cuántica, existe una probabilidad no nula de que la partícula "se filtre" por ella. Este fenómeno se conoce con el nombre de *efecto túnel.*

32 Consideremos la solución en el siguiente caso particular: por la izquierda incide sobre la barrera una partícula. Ésta en parte es reflejada y en parte es susceptible de penetrar a través de ella. Esto significa que nos interesa una solución de la ecuación de Schrödinger para la cual la función de onda es de la forma (ixk) en la región III, onda que representa una partícula que se propaga en esta región hacia la derecha. En la región I tendremos necesariamente dos ondas: una que se propaga hacia la izquierda y una que lo hace hacia la derecha. La primera de éstas representa la onda reflejada, y la segunda, la onda incidente. En la región I la función de onda es, por consiguiente, de la forma

$$\varphi(x) = e^{ixk} + Ae^{-ixk}, \qquad \text{donde } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad (32a)$$

donde A es una constante que describe la amplitud de la onda reflejada. Su valor absoluto será menor que 1, puesto que parte de la onda incidente atraviesa la barrera.

Dentro de esta última, la función de onda será esencialmente una función exponencial de la forma

$$\varphi(x) \cong B \exp(-xq), \qquad q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \tag{32b}$$

donde B es una constante. Esta función de onda es tan sólo aproximada, pero la aproximación es buena si la barrera de potencial no es demasiado baja.

Supongamos que el producto aq es grande comparado con la unidad. En este caso, la razón $\varphi(a)/\varphi(0) \cong \exp(-aq)$ para la función de onda dada por (32b) es un número pequeño. Si recordamos como se empalmaron en la Sec. 24 las dos soluciones en el punto de retroceso, podemos deducir que el valor absoluto de la razón de la amplitud de la onda en la región III a la amplitud de la onda que se propaga hacia la derecha en la región I debe venir dada *aproximadamente* por la razón $\varphi(a)/\varphi(0) \cong \exp(-aq)$. Es verdad que la razón en cuestión no se reduce simplemente al mero factor exponencial, pero, y esto es lo que más importa, este factor domina completamente la situación cuando aq es grande comparado con la unidad, es decir, cuando la barrera es alta y gruesa.

33 Hemos supuesto que la amplitud de la onda incidente es igual a la unidad. La amplitud de la onda que penetra en la región III es menor. Su valor absoluto, o más correctamente, su *orden* de magnitud, es aproximadamente igual a $\exp(-aq)$. El cuadrado T (del valor absoluto) de esta amplitud tiene una interpretación física sencilla. Es igual a la *probabilidad* de que una partícula que alcanza la barrera la atraviese. Esta probabilidad viene dada así por

$$T = |\varphi(a)|^2 \sim \exp(-2aq) \tag{33a}$$

o bien, teniendo en cuenta la segunda expresión (32b),

$$T \sim \exp\left\{-2a\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}\right\} \tag{33b}$$

La cantidad T se conoce con el nombre de *coeficiente de transmisión* de la barrera. Nuestra deducción aproximada de la expresión (33b) para esta cantidad se basa, conforme vemos, en el hecho muy simple de que la amplitud de la onda disminuye de manera aproximadamente exponencial a medida que

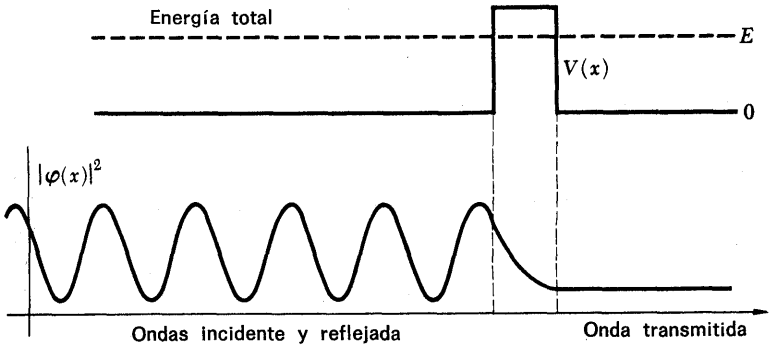


Fig. 33A Ilustración esquemática del efecto túnel. La parte superior de la figura representa el potencial (con la energía total indicada por la recta de trazos). La parte inferior representa el cuadrado del valor absoluto de la función de onda. Obsérvese la existencia de una onda transmitida y también la disminución exponencial de la función de onda dentro de la barrera. A la izquierda de ésta se tiene una onda estacionaria imperfecta. La amplitud de la onda reflejada es menor que la amplitud de la onda incidente y, en consecuencia, la amplitud resultante no se anula en ningún punto.

nos movemos hacia la derecha *dentro* de la barrera. Lo que más nos interesa es el caso en que aq es grande, lo que significa que T es muy pequeño. Podríamos, claro está, deducir una expresión exacta para T, en cuyo caso aparecería un factor más en la expresión (33b). Sin embargo, el factor exponencial que en ella figura representa el factor decisivo y la expresión aproximada (33b) es del todo adecuada para lo que perseguimos.

La figura 33A muestra el efecto de barrera *esquemáticamente*. En la parte superior se representa el potencial, y en la parte inferior, el cuadrado del valor absoluto de la función de onda. La onda transmitida es una onda compleja única que se mueve hacia la derecha. Tiene, pues, módulo constante, conforme se indica en la figura..

34. Antes de considerar una aplicación física de nuestra teoría del efecto túnel cuántico, quisiéramos señalar un efecto análogo en la teoría electromagnética clásica. Se trata de la reflexión de una onda electromagnética plana en la superficie plana de separación de dos regiones cuyos índices de refracción son diferentes.

Supongamos que una onda plana se propaga en cierto medio (representado por las regiones sombreadas en la figura 34A) e incide sobre el plano frontera entre un medio ópticamente enrarecido y un medio ópticamente denso. (El índice de refracción es mayor en el medio denso que en el medio enrarecido.) Supongamos, además, que el ángulo de incidencia es *mayor* que el ángulo de refracción total y que el medio enrarecido se extiende hasta el infinito a la izquierda de la frontera. La onda será entonces totalmente reflejada. Esto se indica esquemáticamente en la figura 34A, en la que la línea de trazos representa un "rayo", es decir, una normal al frente de onda local.

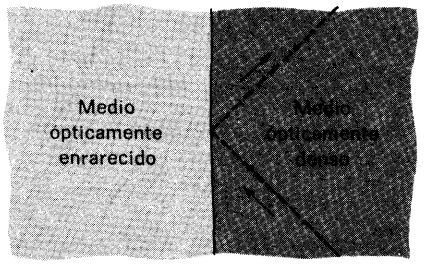


Fig. 34A Reflexión total de una onda electromagnética plana en la superficie plana de separación de dos medios cuyos índices de refracción son diferentes. La línea de trazos representa la reflexión de un rayo.

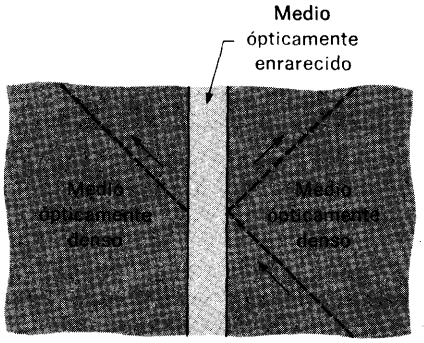


Fig. 34B Transmisión dificultada. La teoría electromagnética clásica predice que una onda que incide sobre una lámina delgada formando un ángulo mayor que el ángulo crítico de reflexión total será en parte transmitida y en parte reflejada. Este fenómeno es análogo al efecto túnel de la mecánica cuántica. Un rayo transmitido y uno reflejado se indican por las líneas de trazos.

Si bien es cierto que la onda no puede propagarse en el medio enrarecido, el campo eléctrico en la vecindad de la superficie de separación no es nulo: el campo penetra en dicho medio. A medida que nos adentramos hacia la izquierda de aquella superficie, la amplitud del campo eléctrico disminuye exponencialmente. Esta situación es por completo análoga al problema de mecánica cuántica considerado en la secciones 22-25.

Consideremos ahora la situación representada en la figura 34B, en la cual el medio enrarecido se reduce a una lámina delgada. En este caso, la onda incidente sobre la frontera por la derecha *en parte* es reflejada. Sin embargo, parte de la onda será capaz de penetrar a través de la "región prohibida", y esta parte se propagará luego en el medio denso situado a la izquierda. Esta situación es análoga a la penetración de una barrera en mecánica cuántica. Obsérvese que no hemos trazado el "rayo" en la región prohibida y la razón de ello estriba en que la "óptica geométrica" no es aplicable en esta región; el vector de onda es un vector complejo.

Los fenómenos que acabamos de describir pueden explicarse por completo acudiendo a la teoría electromagnética clásica. El coeficiente de transmisión que corresponde a la situación representada en la fig. 34B es muy pequeño siempre que el grosor de la lámina del material ópticamente enrarecido sea grande comparado con la longitud de onda de la radiación incidente. A medida que disminuye el grosor, el coeficiente de transmisión aumenta y alcanza el valor uno cuando el grosor es cero.

35 Generalicemos ahora nuestra discusión del efecto túnel en mecánica cuántica. En vez de la barrera de potencial rectangular que muestra la fig. 31A, consideremos una barrera de forma arbitraria tal como la representada en la fig. 35A. Supongamos que una onda de energía E incide por la izquierda. Esta onda será en parte reflejada y en parte transmitida. Nos interesa sobre todo el coeficiente de transmisión total T de la barrera y para hallar este coeficiente exactamente debemos resolver la ecuación de Schrödinger para el potencial $V(x)$. Sin embargo, podemos obtener una expresión aproximada para T siguiendo un método diferente basado en lo que vimos en las secciones 32-33. Esta aproximación es tanto mejor cuanto más pequeña es la longitud de onda respecto del grosor de la barrera.

Para deducir una expresión aproximada del coeficiente de transmisión T imaginemos dividida la región ocupada por la

barrera de potencial en varias subregiones, conforme se indica en la fig. 35B. En cada una de ellas, substituimos el potencial real por un potencial constante como muestra la figura. Hemos hallado ya el coeficiente de transmisión para una barrera rectangular. Sean T_1, ..., T_5 los coeficientes de transmisión correspondientes a las 5 barreras rectangulares representadas en la fig. 35B. El coeficiente de transmisión total T debe entonces ser igual, aproximadamente, al producto de los coeficientes de transmisión de las subregiones y tenemos

$$T \cong T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \tag{35a}$$

o bien

$$\ln T \cong \ln T_1 + \ln T_2 + \ln T_3 + \ln T_4 + \ln T_5 \tag{35b}$$

36 Consideremos ahora la ec. (33b). Si dx_n designa el grosor de una de las barreras rectangulares y si $V(x_n)$ es la altura de la misma, el coeficiente de transmisión T_n de ésta vendrá dado por

$$\ln T_n \cong -2\sqrt{\frac{2m[V(x_n) - E]}{\hbar^2}}\, dx_n \tag{36a}$$

El logaritmo del coeficiente de transmisión total se obtiene, de acuerdo con (35b), sumando las contribuciones de todas las subregiones y si pasamos ahora al límite de una subdivisión infinitamente fina, podemos substituir la suma por una integral y hallar así finalmente

$$\ln T \cong -2 \int_{x'}^{x''} dx \sqrt{\frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}} \tag{36b}$$

Recordamos al lector que esta fórmula es una expresión *aproximada* del coeficiente de transmisión. Con todo, es una fórmula sumamente útil ya que nos proporciona una buena imagen cualitativa del fenómeno de penetración a través de una barrera. Obsérvese que la integral se calcula entre los dos puntos de retroceso clásicos x' y x''.

Debe tenerse muy en cuenta la dependencia del coeficiente de transmisión respecto de los parámetros que aparecen en la expresión (36b). Conservando fijos los demás parámetros, el coeficiente de transmisión disminuye a medida que aumenta la masa de la partícula. Recíprocamente, el coeficiente de transmisión aumenta a medida que aumenta la energía total E, y

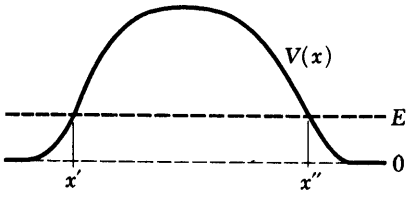


Fig. 35A La línea de trazo continuo representa el potencial, y la recta de trazos gruesos indica la energía total E. ¿Cómo podemos deducir una expresión para el coeficiente de transmisión de esta barrera?

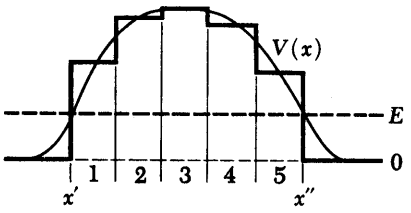


Fig. 35B Para ilustrar nuestra deducción de la expresión aproximada del coeficiente de transmisión correspondiente a la barrera que muestra la fig. 35A. Imaginemos que el potencial que varía de manera continua se aproxima mediante un sistema de barreras rectangulares. El coeficiente de transmisión total es el producto de los coeficientes de transmisión de todas las barreras rectangulares. Obsérvese que este método es tan sólo aproximadamente correcto: no se han tenido en cuenta reflexiones múltiples.

esto por dos razones. El integrando, que es siempre positivo, disminuye y, además, el intervalo de integración se acorta, puesto que los puntos de retroceso se acercan el uno al otro. El coeficiente de transmisión aumenta, naturalmente, a medida que disminuye el grosor de la barrera.

Teoría de la radiactividad alfa

37 Intentemos ahora aplicar nuestra teoría de la penetración de barreras a una situación física real.

En el problema 3, al final del capítulo 2, hicimos notar que el período del núcleo de radio $_{88}Ra^{226}$, que es un emisor de partículas alfa, debe considerarse como "anómalamente largo". El período es de 1622 años, y este valor, en efecto, parece ser muy grande en cualquier escala de tiempos *nuclear* razonable. Como tiempo característico de un proceso nuclear cabría elegir el tiempo que tarda la luz en atravesar un núcleo, y este tiempo es del orden de 10^{-23} segundos. El período del radio, sin embargo, es de 5×10^{10} segundos, es decir, algo así como 10^{33} veces la "unidad de tiempo nuclear natural". Nos enfrentamos, pues, con el problema de explicar de dónde procede el número enormemente grande 10^{33}. Hay que admitir que la "unidad de tiempo nuclear natural" es un concepto un tanto impreciso, pero nuestro problema no sería más sencillo incluso si tomáramos una unidad de tiempo nuclear 1000 veces mayor.

Hay, además, un hecho experimental que debemos hacer notar: algunos núcleos emisores de partículas alfa tienen vidas mucho más cortas. Por ejemplo, el isótopo del polonio $_{84}Po^{212}$, que es un emisor alfa, tiene un período de solamente 3×10^{-7} segundos. En otro extremo encontramos el isótopo del uranio $_{92}U^{238}$, que es también un emisor alfa: su período es de $4{,}5 \times 10^{9}$ años. El problema real, por lo tanto, lo plantea el enorme intervalo que cubren los períodos de los núcleos emisores alfa.

Las energías de las partículas alfa emitidas se encuentran típicamente en el intervalo 4-10 MeV. Cada isótopo que muestra actividad alfa se caracteriza, en general, por una determinada energía de la partícula alfa que emite, si bien hay casos en los que un núcleo puede emitir partículas alfa con diferentes energías discretas. Olvidémonos de esta última complicación, que se discutió brevemente en la sección 40, capítulo 3. Se ha encontrado experimentalmente que existe una fuerte correlación entre la vida del núcleo y la energía de la partícula alfa emitida: cuanto mayor es la energía, más corta es la vida.

38 Veamos ahora si cabe explicar los hechos observados *. Mientras la partícula alfa se encuentra dentro del núcleo, actúan sobre ella las intensas fuerzas nucleares. Estas fuerzas, conforme hemos explicado, son de corto alcance y es posible imaginar que dejan de actuar más allá de la superficie del núcleo, de radio R. Fuera de la superficie nuclear la fuerza dominante es la repulsión electrostática entre la partícula alfa, que lleva consigo la carga $+ 2e$, y el *núcleo hijo* que queda después de la desintegración. La carga de éste es $+ Z'e$, si Z' es su número atómico. El núcleo original, el padre, tiene una carga $+ Ze$, donde $Z = (Z' + 2)$ es su número atómico. Hemos representado la situación esquemáticamente en la figura 38A. La distancia, a partir del centro del núcleo, aumenta hacia la derecha. La línea continua representa la energía potencial de la partícula alfa en presencia del núcleo hijo. Fuera de la superficie nuclear, es decir, para $r > R$, este potencial es simplemente el potencial de Coulomb

$$V(r) = \frac{2e^2Z'}{r}, \quad \text{para } r > R \tag{38a}$$

Cuando alcanzamos la superficie del núcleo, entra en acción la fuerza nuclear, fuertemente atractiva, lo que significa que el potencial debe caer de modo abrupto. En la fig. 38A se ha esquematizado la situación suponiendo que tenemos realmente un salto de potencial. No hemos trazado la curva potencial dentro del núcleo, porque no es bien conocida: de hecho no está bien definida, puesto que la partícula alfa puede perder su individualidad como partícula en el intenso campo de las fuerzas nucleares.

La línea de trazos representa la energía total de la partícula alfa. Esta energía, E, es también la energía con la que la partícula alfa aparece finalmente a grandes distancias del núcleo, donde la energía potencial electrostática se reduce efectivamente a cero.

39 Hemos trazado la fig. 38A de manera que sugiere que la partícula alfa ha de atravesar una barrera de potencial en la región desde R a R_c antes de ser emitida. Comprobemos in-

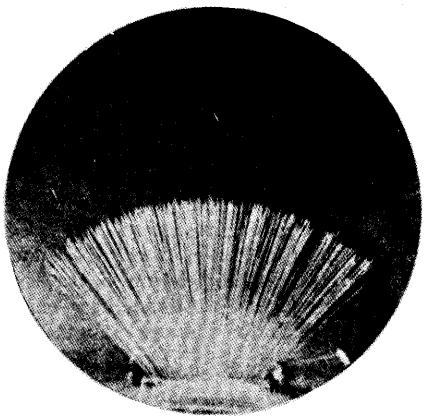


Fig. 37A Una de las primeras fotografías con cámara de niebla que muestra trazas de partículas alfa emitidas por una substancia radiactiva. La fotografía se ha tomado de L. Meitner: "Über den Aufbau des Atominnern", *Die Naturwissenschaften* **15**:1, 369 (1927).

Una partícula alfa de energía dada tiene un alcance muy bien definido en la materia macroscópica. La partícula pierde energía ionizando los átomos del material. Las trazas terminan cuando ha perdido toda su energía cinética inicial. El alcance R, en cm, en aire a la temperatura y presión normales viene dada en primera aproximación por $R = 0{,}32 \times E^{3/2}$, donde E es la energía en MeV.

La fuente radiactiva, situada en la parte inferior de la figura, emitía partículas alfa de dos energías diferentes. Podemos ver claramente el alcance bien definido del grupo de mayor energía. Las partículas más lentas alcanzan solamente una mitad de la distancia alcanzada por las partículas más rápidas. *(Cedida por Springer Verlag.)*

* La justificación del intento de hallar la explicación tomando como base la teoría de Schrödinger reside en que la velocidad de la partícula alfa *fuera* de la superficie nuclear es "no-relativista", como puede estimar el propio lector. Hay que recordar que la energía de la partículo alfa no supera los 10 MeV.

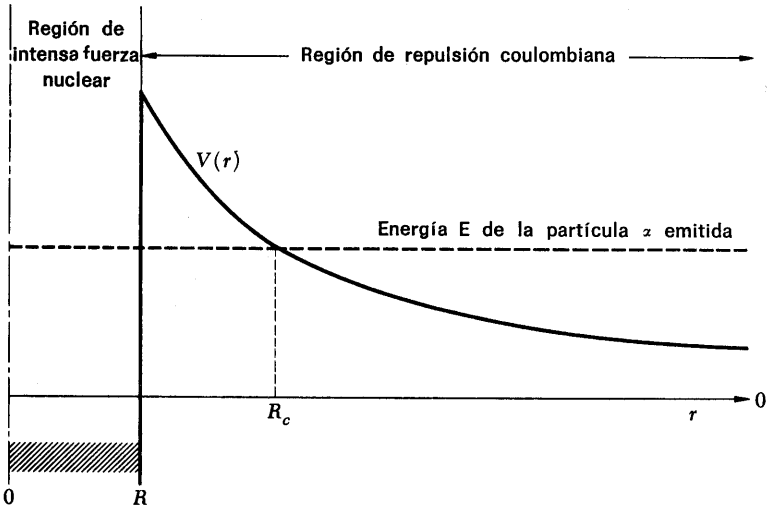


Fig. 38A Representación esquemática (mediante la línea de trazo continuo) del potencial que ve una partícula alfa en la vecindad de un núcleo. Fuera de éste, es decir, más allá de la distancia R, el potencial es el potencial de Coulomb. Dentro del núcleo las fuerzas son fuertemente atractivas. La forma precisa del potencial no se conoce, pero la fuerza atractiva se representa por la súbita caída del potencial en R. La línea de trazos representa la energía total de la partícula alfa. Según la mecánica cuántica la partícula alfa puede penetrar a través de la barrera de potencial. Esto tiene lugar en la desintegración alfa de los núcleos pesados.

mediatamente si esta figura es la correcta. *Si* lo fuera, el punto clásico de retroceso R_c, dado por

$$R_c = \frac{2e^2Z'}{E} \tag{39a}$$

debe satisfacer la condición $R_c > R$.

Substituyendo los valores numéricos correspondientes al ${}_{88}Ra^{226}$, para el cual $Z = 88$, $Z' = 86$ (el número atómico para el gas noble radón), $E = 4{,}78$ MeV, obtenemos $R_c \cong 50 \times 10^{-13}$ cm $= 50$ fermis. (Para simplificar el trabajo numérico podemos escribir $R_c = (e^2/m_e c^2) \times (2Z') \times (m_e c^2/E) \cong (2{,}8 \times 10^{-13}$ cm$) \times \times (172) \times (0{,}5$ MeV$/4{,}78$ MeV$) \cong 50$ fermis, donde m_e es la masa del electrón.

En la sección 36, capítulo 2, dijimos que el radio R de un núcleo de número másico A viene dado por

$$R \cong r_0 A^{1/3} \qquad r_0 = 1{,}2 \times 10^{-13}\ \text{cm} \tag{39b}$$

y así, en el caso del ${}_{88}Ra^{226}$, para el cual $A = 226$, obtenemos $R \cong 7{,}3$ fermis.

Por lo tanto, la figura es cualitativamente correcta: en efecto, la partícula alfa tiene que atravesar una barrera de potencial. Cuantitativamente, la figura no lo es: la barrera debería haberse trazado ***mucho*** más gruesa. Nuestro dibujo de la figura ha estado motivado por consideraciones estéticas: los

rasgos importantes de la situación quedan, sin embargo, reproducidos cualitativamente.

La desigualdad $R_c > R$ es *generalmente* válida para los núcleos que presentan actividad alfa. Estos elementos radiactivos son, prácticamente todos, elementos pesados, con un número atómico Z grande. El isótopo ${}_{88}Ra^{226}$ puede considerarse como un emisor alfa típico. La barrera de potencial que ha de atravesar la partícula alfa es, por lo tanto, un rasgo esencial del proceso de desintegración alfa y cabe esperar comprender la extraordinaria variación de la vida de tales núcleos en función de la energía E acudiendo a nuestra simple teoría del efecto túnel.

40 Calculemos, en consecuencia, el coeficiente de transmisión T para la barrera de potencial representada en la fig. 38A. Según nuestros resultados (36b), T viene dado por

$$\ln T \cong -2 \int_R^{R_c} dr \sqrt{\frac{2m_\alpha(2e^2Z'/r - E)}{\hbar^2}} \qquad (40a)$$

donde hay que advertir que, en virtud de (39a), el integrando se anula en el límite superior R_c. Para discutir esta integral introducimos una nueva variable de integración definida por $x = r/R_c$. Cuando r varía desde R a R_c, la nueva variable x varía desde $x_c = R/R_c$ a $+1$. Teniendo en cuenta la relación (39a), podemos escribir entonces la integral (40a) en la forma

$$\ln T \cong -\frac{4e^2Z'}{\hbar}\sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}} \int_{x_c}^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \qquad (40b)$$

No es difícil calcular la integral que aparece en (40b). Sin embargo, dado que en general la cantidad $x_c = R/R_c$ es bastante "pequeña", para lo que perseguimos será suficiente llevar a cabo un cálculo aproximado en el que retenemos solamente los primeros dos términos de un desarrollo en x_c. Procederemos como sigue:

$$\int_{x_c}^1 dx\sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \int_0^1 dx\sqrt{\frac{1}{x} - 1} - \int_0^{x_c} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

$$\cong \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} - \int_0^{x_c} dx \sqrt{\frac{1}{x}} = \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} - 2\sqrt{x_c} \qquad (40c)$$

El cálculo del primer término en el segundo miembro de (40c) es trivial si hacemos la substitución $x = \text{sen}^2\theta$, con lo que se obtiene

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta = \frac{\pi}{2} \qquad (40d)$$

Por lo tanto, la integral en (40b) viene dada aproximadamente por

$$\int_{x_c}^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \cong \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_c}} \qquad (40e)$$

y si substituimos esta expresión en (40b), teniendo en cuenta (39a), resulta

$$\ln T \cong -\frac{2\pi e^2 Z'}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}} + \left(\frac{8}{\hbar}\right) \sqrt{e^2 Z' R m_\alpha} \qquad (40f)$$

41 Para obtener una fórmula útil y transparente haremos algunas aproximaciones más. Substituyamos $Z' = 86$ y $R = 7{,}3$ fermis, que son los valores de los parámetros para el caso en que el núcleo padre es el isótopo de radio ${}_{88}\text{Ra}^{226}$. Consideramos así estos valores de Z' y R como "típicos" para *todos* los núcleos que presentan actividad alfa. Los emisores alfa son prácticamente sin excepción núcleos pesados y la variación de Z' que realmente se encuentra para esta clase de núcleos no es muy grande. El parámetro importante en (40f) es la energía E, la cual, conforme dijimos, varía desde 4-10 MeV. Nuestra aproximación está, pues, razonablemente justificada, sobre todo teniendo en cuenta las demás aproximaciones que hemos hecho.

Substituyendo ahora los valores numéricos apropiados para las constantes físicas en (40f) y haciendo $Z' = 86$, $R = 7{,}3$ fermis, obtenemos finalmente

$$\log T \cong -\frac{148}{\sqrt{E/\text{MeV}}} + 32{,}5 \qquad (41a)$$

Obsérvese que (41a) da el logaritmo decimal (el de base 10) de T. Para pasar de logaritmos neperianos a logaritmos decimales utilizamos la relación $\log x = (\log e)\ (\ln x) \cong 0{,}434 \ln x$.

Con esto hemos deducido la expresión general (41a) para el coeficiente de transmisión T como función de la energía E y correspondiente a la barrera de potencial que la partícula alfa ha de atravesar en un proceso de emisión alfa. Veamos cómo

podemos utilizar este resultado para hallar la vida del emisor alfa.

42 A este fin consideraremos un modelo muy sencillo del proceso. Supondremos que antes de la emisión la partícula alfa rebota dentro del núcleo a lo largo de un diámetro. Sea τ_0 el tiempo transcurrido entre dos colisiones consecutivas con las "paredes". En cada colisión, hay una cierta probabilidad de que la partícula se filtre por la barrera de potencial, y de hecho la probabilidad de emisión en cada una de estas colisiones es precisamente igual al coeficiente de transmisión T. De aquí se sigue que la partícula alfa tiene que experimentar del orden de $1/T$ colisiones antes de conseguir escapar y podemos, por lo tanto, escribir para la vida τ

$$\tau = \frac{\tau_0}{T} \tag{42a}$$

o bien

$$\log \tau = \log \tau_0 + \frac{148}{\sqrt{E/\text{MeV}}} - 32{,}5 \tag{42b}$$

Para estimar τ_0 podemos suponer, sobre la base de nuestro sencillo modelo, que la partícula alfa se mueve dentro del núcleo con la misma velocidad v que tendrá después de la emisión. Tenemos entonces

$$\tau_0 = \frac{2R}{v}, \qquad v = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}} \tag{42c}$$

Si aplicamos esto al caso del isótopo del radio ${}_{88}\text{Ra}^{226}$, que hemos utilizado como emisor alfa "patrón", obtenemos $\tau_0 = 10^{-21}$ s.

Conforme vemos por (42c), el tiempo τ_0 depende efectivamente de la energía E, al igual que del radio nuclear R. Sin embargo, la cantidad τ_0 interviene como argumento de un logaritmo en (42b) y la variación del primer término con E es por completo insignificante comparada con la variación del segundo término al variar E. Para ver esto explícitamente, consideremos qué ocurre cuando E cambia de 9 a 4 MeV. El incremento del primer término en (42b) es entonces igual a $\log (3/2) \cong 0{,}18$. El incremento del segundo término en la misma fórmula es *mucho* mayor, a saber, $148 \times (1/2 - 1/3) \cong 25$. Podemos, pues, suponer que el valor $\tau_0 = 10^{-21}$ s es aproximadamente válido para *todos* los emisores alfa, y así lo haremos.

Cabe formular este estado de cosas como sigue: el factor *dominante* en la emisión alfa es el fenómeno de penetración de una barrera. Lo que ocurre dentro del núcleo antes de la emisión no lo sabemos muy bien, pero podemos decir que el proceso interno define un tiempo τ_0 que se puede interpretar como el tiempo que transcurre entre dos intentos consecutivos de la partícula de atravesar la barrera. Es cierto que este tiempo depende de cuál sea el núcleo padre, pero se puede admitir razonablemente que es más o menos del mismo orden de magnitud para todos los emisores alfa. Sea como fuere, cabe esperar que la variación en el primer término de (42b) sea pequeña, para cualquier modelo razonable, comparada con la variación del segundo término, y por esta razón nuestro modelo sencillo, que por lo menos debiera dar el orden de magnitud correcto de τ_0, no es tan malo como puede parecer a primera vista, o dicho de manera más correcta: puede ser malo, pero no importa mucho si lo es.

Hemos alcanzado así nuestro objetivo final, que es una relación general entre la vida τ y la energía E de un emisor alfa:

$$\log\,(\tau/\text{sec}) \cong \frac{148}{\sqrt{E/\text{MeV}}} - 53{,}5 \qquad (42\text{d})$$

43 En la fig. 43A hemos representado gráficamente el período de un emisor alfa en función de la energía E: la línea de trazos representa la ec. (42d). En este gráfico, se toma en ordenadas $\log\,(\tau/\text{s})$, y en abscisas, $-1/\sqrt{E/\text{MeV}}$, con lo que la relación (42d) viene representada por una recta. En el mismo gráfico se han representado un gran número de emisores alfa conocidos a fin de comparar nuestra teoría con los hechos observados. Nótese que los puntos experimentales no caen todos, en modo alguno, sobre la curva teórica, pero es también claro que la tendencia general de los datos de observación *está* correctamente reproducida por nuestra curva. Podemos considerar como un triunfo espectacular de la mecánica cuántica el que nuestra simple y sencilla teoría nos haya llevado a este nivel de comprensión de la radiactividad alfa, que a primera vista parece ser un fenómeno desesperadamente complicado.

La teoría de la penetración de barrera que proporciona la mecánica cuántica fue primero formulada por Gamow e, independientemente, por Condon y Gurney en 1928 *. Desde enton-

* G. Gamow, "Zur Quantentheorie des Atomkernes", *Zeitschrift für Physik* **51**, 204 (1928). Véase también G. Gamow, "Quantum theory of nuclear disintegration", *Nature* **122**, 805 (1928); R. W. Gurney y E. U. Condon, "Wave mechanics and radioactive disintegration", *Nature* **122**, 439 (1928).

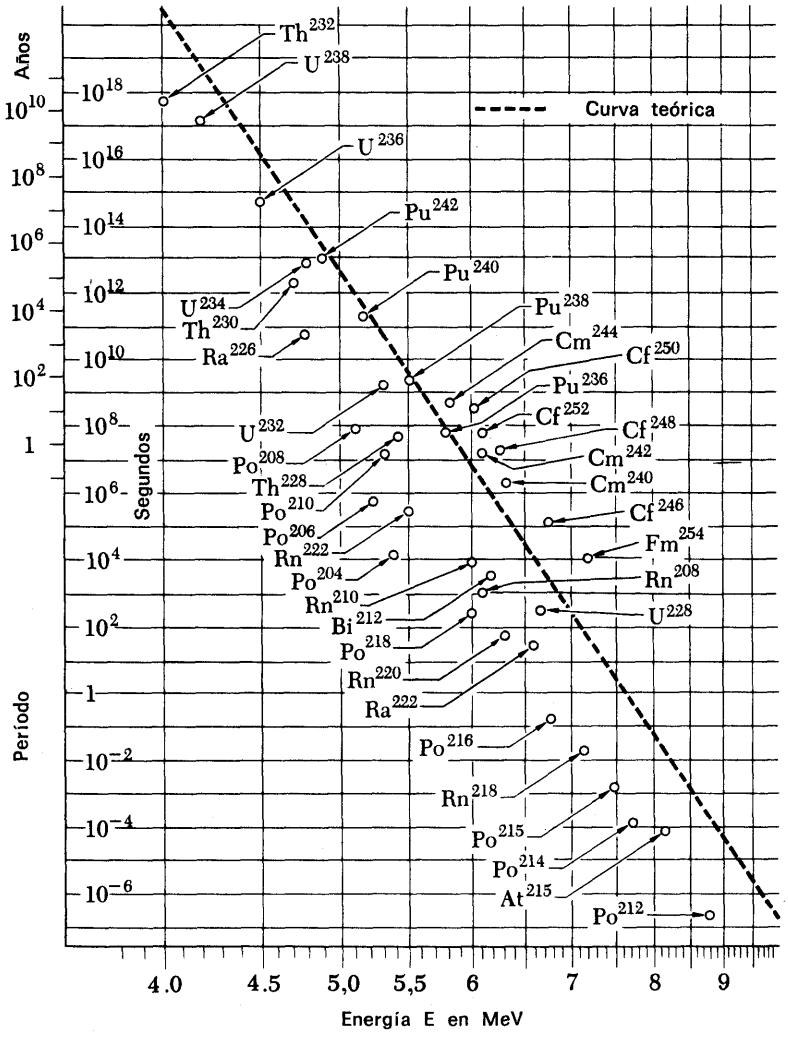


Fig. 43A Período de los emisores alfa en función de la energía. Los circulitos en este gráfico representan algunos núcleos radiactivos-alfa. En ordenadas se toman los logaritmos de los períodos, y en abscisas, la cantidad $-1/\sqrt{E}$, donde E es la energía cinética de la partícula alfa emitida. Nuestra simple teoría predice que los puntos deben encontrarse sobre una recta, precisamente la indicada por trazos en el gráfico. Como puede verse, el acuerdo está lejos de ser perfecto en los detalles, pero la tendencia general en el comportamiento del período como función de la energía queda reproducida correctamente. Considerado en conjunto, este gráfico es una confirmación en extremo impresionante de las ideas de la mecánica cuántica.

ces, claro está, la teoría de la desintegración alfa se ha perfeccionado considerablemente y gracias a ello es posible explicar los resultados de la observación con mucho más detalle.

44 La "vida" dada en la fig. 43A es el *período* (o semivida) del núcleo radiactivo. Conforme sin duda sabe el lector, la desintegración radiactiva viene gobernada por una ley exponencial según la que, si se encuentran presentes inicialmente, en el instante $t = 0$, N_0 núcleos de la especie en cuestión, el

número medio de núcleos presentes en un instante posterior t viene dado por

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) \tag{44a}$$

La constante λ se conoce con el nombre de *constante de desintegración.* Su inverso, $1/\lambda$, es la *vida media* del núcleo. El período se define como el tiempo necesario para que se tenga $N(t) = N_0/2$: al cabo de él, se han desintegrado, en promedio, la mitad de los núcleos presentes originalmente. Designando la vida media por τ_m y el período por $\tau_{1/2}$, tenemos

$$\tau_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \tau_m \ln 2 \tag{44b}$$

Cabe preguntar si la fórmula (42d) nos da la vida media, el período o acaso algún otro "tiempo de vida" característico. Nuestro razonamiento nos proporciona, en realidad, la vida media, pero dentro de la precisión de nuestros cálculos no importa en absoluto el que hablemos de vida media o de período. Como puede verse en la fig. 43A, el resultado a que se llegó es correcto tan sólo salvo un factor 100 ó 1000.

45 Consideremos de nuevo la fig. 38A. Esta figura tiene también importancia para el proceso "inverso", en el que una partícula cargada de energía E, *menor* que la altura de la barrera, choca con un núcleo. La partícula en cuestión puede ser una partícula alfa o un protón, o acaso un deuterón. Si la partícula puede atravesar la barrera, es decir, si puede penetrar en la región en la que actúan las intensas fuerzas nucleares, en general se producirá una reacción nuclear. De acuerdo con la mecánica clásica, la partícula no puede atravesar la barrera, pero sabemos ahora que la situación es diferente en mecánica cuántica. Si la energía E es muy pequeña, el coeficiente de transmisión T es también pequeño y es improbable que se produzca una reacción nuclear en una colisión cualquiera. A medida que aumenta la energía de la partícula, aumenta la transparencia de la barrera y la probabilidad de una reacción nuclear aumenta igualmente. Este aumento está, además, representado aproximadamente por una función exponencial de la energía. El fenómeno de penetración de una barrera es así un rango importante de muchas reacciones nucleares en las que intervienen partículas incidentes *cargadas,* de energía no muy elevada. La situación es enteramente distinta cuando la partícula inci-

dente es un *neutrón.* No hay entonces barrera de Coulomb y el neutrón puede penetrar libremente en el núcleo por pequeña que sea su energía. De hecho, se producen muchas reacciones nucleares, con gran rendimiento, en el caso de los *neutrones térmicos,* entendiendo por tales los neutrones cuya energía corresponde a la temperatura ambiente, es decir, aproximadamente 1/40 eV.

46 Los núcleos radiactivos pesados pueden clasificarse en cuatro grupos, correspondientes a cuatro series radiactivas, o cadenas de desintegración, distintas. En la emisión alfa el número másico A del núcleo cambia en -4 unidades y el número de carga en -2 unidades. En la desintegración beta, en la que se emiten un electrón (un positón) y un antineutrino (un neutrino), el número másico no cambia, pero el número de carga cambia en $+1$ (-1). Algunos núcleos pesados se desintegran por emisión alfa, y algunos lo hacen por emisión beta. Hay además otra posibilidad: un núcleo puede capturar un electrón de los que forman la nube de electrones que lo rodean y, al mismo tiempo, emitir un neutrino. Este proceso se conoce como *captura-K.* Es un proceso íntimamente ligado con la desintegración beta. La interacción básica responsable de la captura-K y de la desintegración beta es la *interacción débil* universal que hemos mencionado antes. El electrón, el positón y el neutrino no participan en las interacciones fuertes, de las que la "fuerza nuclear" es un ejemplo, mientras que sí participan las partículas alfa. La razón de los grandes períodos que se encuentran en la desintegración beta o en la captura-K no es un efecto de penetración de barrera, sino simplemente, una consecuencia de la debilidad *intrínseca* de las interacciones débiles.

En la desintegración alfa, en la desintegración beta o en la captura-K el número másico A o cambia en cuatro unidades o no varía. Los núcleos radiactivos pueden agruparse así en cuatro conjuntos y el número másico dentro de cada uno de ellos es de la forma $A = (4n + r)$, donde n es variable, pero r fijo. Los cuatro conjuntos corresponden a los cuatro valores diferentes $r = 0$, 1, 2 ó 3. Una de esas series de desintegración radiactiva, la que corresponde a $r = 2$, se representa en las figuras 46-A-B.

Un elemento radiactivo natural o tiene una vida muy larga, o es un miembro de una cadena de desintegración cuyo origen es un elemento de larga vida. Entre los núcleos pesados con vidas muy largas señalaremos el U^{238} con un período de $4{,}5 \times 10^9$

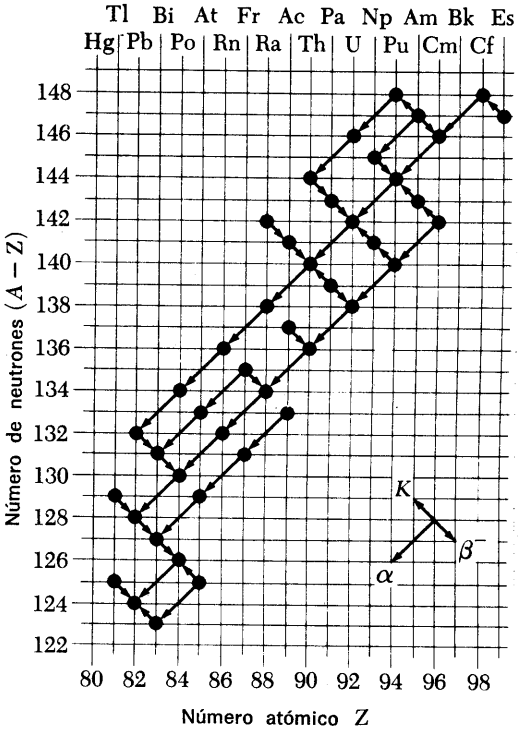


Fig. 46A Núcleos radiactivos pesados, cuyos números másicos son de la forma $A = (4n + 2)$. Las flechas indican desintegraciones radiactivas, indicándose el tipo de desintegración por las direcciones de las flechas de acuerdo con lo indicado en la pequeña figura inserta en la parte inferior derecha. El símbolo α indica desintegración-α, el símbolo β indica desintegración-beta (con emisión de un electrón y un antineutrino). El símbolo K indica captura-K.

Obsérvese que ciertos núcleos se desintegran de dos maneras diferentes. Obsérvese también que el producto final de todas las cadenas de desintegración indicadas es el isótopo estable del plomo Pb^{206}.

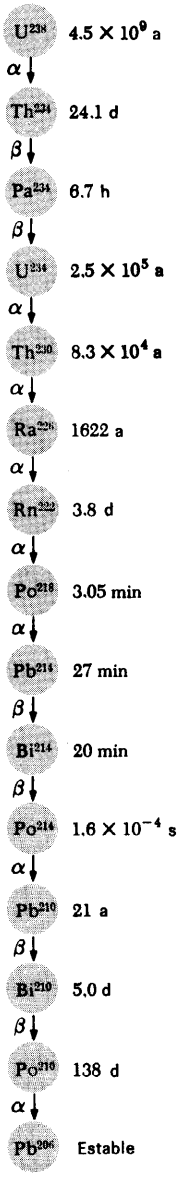


Fig. 46B La cadena radiactiva uranio-radio-plomo. Los períodos se indican a la derecha, y los modos de desintegración, a la izquierda. Estos isótopos se encuentran en la naturaleza (en minerales de uranio), porque su origen es el isótopo de uranio de larga vida U^{238}. Ningún elemento transuránico correspondiente a esta serie (números másicos de la forma $4n + 2$) tienen períodos apreciables en una escala de tiempos geológica.

años; el Th^{232} con un período de $1{,}4 \times 10^{10}$ años y el U^{235} con un período de $7{,}13 \times 10^8$ años. El miembro de vida más larga de la familia $(4n + 1)$ es el isótopo del neptunio, Np^{237}, con un período de $2{,}2 \times 10^6$ años. En la escala de tiempos geológica, éste es un corto lapso de tiempo y, en consecuencia, la familia $(4n + 1)$ no se presenta en la naturaleza.

Unos pocos núcleos ligeros naturales son también radiactivos. Ejemplos lo son los núcleos K^{40} con actividad beta, cuyo período es de $1{,}3 \times 10^9$ años y el Rb^{87} con un período de $4{,}7 \times 10^{10}$ años.

47 El fenómeno de la radiactividad natural hace posible determinar las edades de las rocas, es decir, el tiempo que ha transcurrido desde que éstas experimentaron su última transformación química. El principio es simple. Se determinan las cantidades relativas de un isótopo radiactivo de vida larga y del producto estable final, en la cadena de desintegración, que están presentes en una muestra. Consideremos, por ejemplo, la cadena de desintegración uranio-radio que tiene su origen en el U^{238} y termina con el isótopo estable del plomo Pb^{206}. Supongamos que se hallen, en una muestra dada, una cantidad de Pb^{206} que corresponde a N_{Pb} átomos y una cantidad de U^{238} correspondiente a N_U átomos. Si suponemos que *todos* los átomos de Pb^{206} proceden de la desintegración del uranio, podemos escribir

$$N_U = N_0\, e^{-\lambda T}, \qquad N_{Pb} = N_0\,(1 - e^{-\lambda T}) \tag{47a}$$

donde N_0 es el número de átomos U^{238} presentes al principio, λ es la constante de desintegración del uranio, y T es la edad de la muestra. Dado que $N_0 \doteq N_U + N_{PB}$, tenemos

$$e^{\lambda T} = \frac{(N_{Pb} + N_U)}{N_U} \tag{47b}$$

y puesto que conocemos λ se puede hallar T. En realidad, este método da únicamente un límite *superior* de T, porque algunos de los átomos de Pb^{206} presentes hoy podían haberlo estado ya cuando se formó el mineral. Por lo tanto, es necesario acudir a un método más refinado y hemos de comparar la composición isotópica del plomo en minerales que no contienen uranio con la composición en otros que sí lo contienen. Nuestro ejemplo era, en consecuencia, supersimplificado, pero ilustra efectivamente el principio en cuestión.

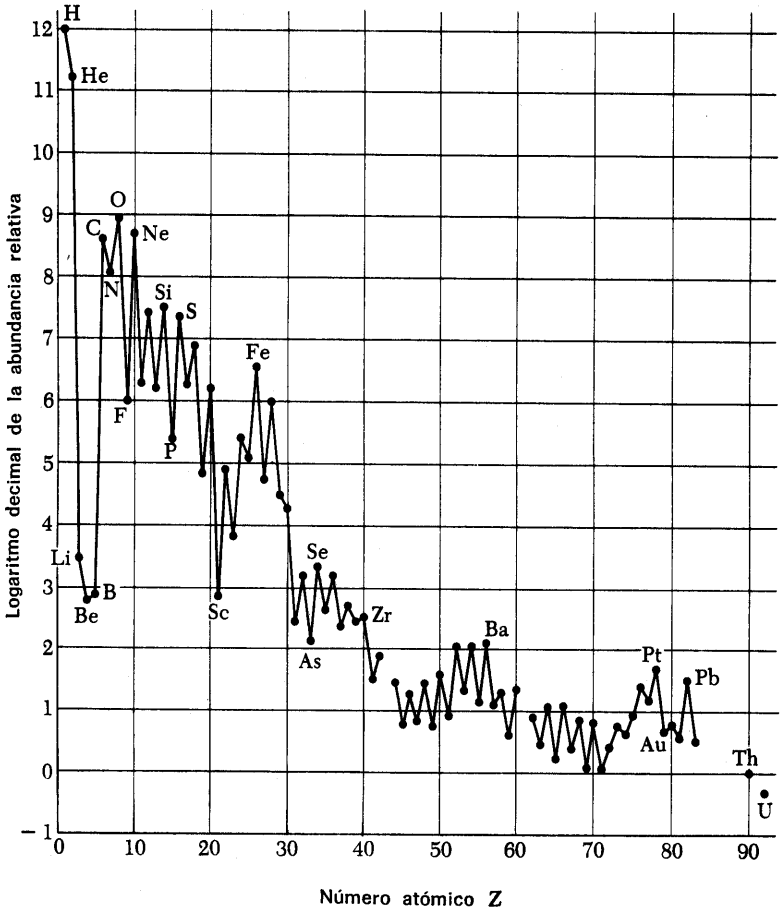


Fig. 48A Gráfico que muestra la abundancia relativa estimada de los elementos en el sistema solar. Los datos se han tomado de una tabla (páginas 192-193) en el libro de L. H. Aller: *The Abundance of the Elements* (Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1961) y el gráfico está inspirado en otro análogo que aparece en la pág. 191 del mismo libro.

En ordenadas se toman los logaritmos decimales de la abundancia relativa, es decir, del número relativo de átomos. Los puntos que representan elementos vecinos se han unido para facilitar la lectura. Un gráfico como éste se basa en un gran número de mediciones de tipos muy diferentes, al igual que sobre ideas teóricas específicas. Los datos para los elementos ligeros proceden, en su mayor parte, de estudios espectroscópicos del Sol, mientras que las estimaciones correspondientes a los elementos más pesados tienen en cuenta estudios relativos a la composición de meteoritos. El gráfico constituye un resumen razonable de nuestro conocimiento actual, pero hay que tener bien presente que algunos de los datos son muy inciertos y de carácter provisional.

Se cree que las abundancias de los elementos en todo el universo (visible) es *más o menos* análoga a las abundancias en el sistema solar. Las que encontramos en nuestro entorno inmediato difieren marcadamente de las abundancias "cósmicas" (véase tabla 48B).

Otro método se basa en la comparación del contenido de helio en una roca con su contenido de uranio. En cada desintegración alfa, en la cadena de desintegraciones, se produce un núcleo de helio y si podemos tener la seguridad de que el helio no escapó del interior de la roca, es posible hallar cuántos átomos de uranio se han desintegrado desde que se formó aquélla *.

* La primera estimación de la edad de la Tierra basada en la radiactividad se debe a Rutherford. Véase E. Rutherford, "The Mass and Velocity of the α particles expelled from Radium and Actinium", *Philosophical Magazine* **12**, 348 (1906). Véanse las págs. 368-369, donde Rutherford llega al valor estimado de 400 millones de años para los minerales que había estudiado.

TABLA 48B Los ocho elementos más comunes en la corteza terrestre

Elemento	Número de átomos, en tanto por ciento
Oxígeno	62,6
Silicio	21,2
Aluminio	6,5
Sodio	2,64
Calcio	1,94
Hierro	1,92
Magnesio	1,84
Potasio	1,42

Esta tabla presenta la composición estimada en el estrato de la corteza terreste hasta 18 km de profundidad junto con los océanos y la atmósfera. Estos ocho elementos constituyen aproximadamente el 99 por ciento de la masa en esta región. El débil campo gravitatorio terrestre no puede retener los elementos ligeros hidrógeno y helio, lo que explica su pequeña abundancia comparada con los datos "cósmicos". Es de esperar que las abundancias de los elementos más pesados en la Tierra sea similar a las abundancias cósmicas, pero los procesos geológicos sobre ella han conducido a una segregación química de los elementos y los datos relativos a la corteza no son representativos para la Tierra en conjunto.

Siguiendo métodos como ésos ha sido posible averiguar que las rocas más viejas en la corteza terrestre tienen una edad de unos 3×10^9 años. Éste es, sin duda alguna, un límite *inferior* de la edad de la Tierra, porque la corteza ha experimentado muchas transformaciones químicas en el pasado. También se han estudiado meteoritos, y se ha encontrado que su edad es de $4{,}6 \times 10^9$ años. Cómo se formaron los meteoritos no lo sabemos con certeza, pero hay buenas pruebas de que se formaron (se cristalizaron) aproximadamente al mismo tiempo que los otros cuerpos sólidos del sistema solar. La edad de la Tierra, como cuerpo, sería así de unos $4{,}6 \times 10^9$ años. Además, utilizando "relojes" radiactivos es posible estimar el tiempo transcurrido entre la última formación de los elementos químicos en el meteorito y su cristalización. Según una de estas estimaciones * , parece ser que este tiempo es de unos $0{,}35 \times 10^9$ años. Esto implica que la construcción final de los elementos químicos contenidos en los planetas y en los meteoritos tuvo lugar hace unos cinco mil millones de años. Ésta es, pues, la edad estimada de nuestro sistema solar.

48 Es natural seguir especulando. ¿Cuán viejo es el Universo? ¿Cómo se formaron los elementos químicos? No podemos discutir aquí las ideas que condujeron a estimaciones de la edad del Universo. Se cree que su edad podría ser algo así como de diez mil millones de años, poco más o menos del mismo orden de magnitud que la edad del sistema solar.

Se cree que los elementos químicos se formaron a partir de hidrógeno, en reacciones nucleares producidas en las estrellas. La fig. 48A muestra las abundancias estimadas de los elementos químicos en el sistema solar. Los puntos que representan elementos químicos individuales nó son puntos experimentales en el sentido de que todos se hayan obtenido a partir de medidas en una única "muestra representativa". Los puntos corresponden a estimaciones basadas en un gran número de diferentes tipos de medidas, tales como determinaciones espectroscópicas de abundancias relativas en la atmósfera solar, mediciones de abundancia relativa en los meteoritos y estimaciones de la composición química de la corteza terrestre. Obsérvese que el hidrógeno es, con mucho, el elemento más abundante. Ob-

* J. H. Reynolds, "Determination of the age of the elements", *Physical Review Letters* **4**, 8 (1960). Véase también C. M. Hohenberg, F. A. Podesek y J. H. Reynolds, "Xenon-Iodina Dating: Sharp Isichronism in Chondrites", *Science* **156**, 202 (1967), para algunos resultados que indican que el tiempo podía ser, con mucho, considerablemente menor.

sérvense también en la curva de abundancias los picos correspondientes a elementos particularmente estables. Hay una tendencia sistemática, claramente visible, a que los elementos con número atómico par sean más abundantes que los elementos vecinos con número atómico impar, lo que refleja el hecho de que los núcleos que tienen un número par de protones y un número par de neutrones tienden a ser más estables que los otros núcleos.

Explicar esta curva con todo detalle y rastrear así hasta su origen la historia primitiva del sistema solar en un problema fascinante. Se cree que el porqué de los rasgos principales de la curva de abundancias se comprende hoy bastante bien.

El autor no tiene absolutamente nada que decir en lo que concierne a de dónde procedía originalmente el *hidrógeno.*

Un tema avanzado:

Normalización de la función de onda*

49 Consideremos la función de onda de Schrödinger y, para simplificar, limitémonos al caso de una sola dimensión, con lo que la función de onda $\psi(x,t)$ será función de x y t. Hemos dicho que el cuadrado del valor absoluto de la función de onda es proporcional a la densidad de probabilidad. Esto significa que la probabilidad de encontrar la partícula en el instante t en el intervalo $x_2 > x > x_1$ es

$$P(x_1,x_2) = N \int_{x_1}^{x_2} dx \, |\psi(x,t)|^2 \tag{49a}$$

donde N es una constante *independiente de* x. ¿Cómo determinamos la constante N? Por la simple condición de que la probabilidad de hallar la partícula en un punto, *cualquiera que éste sea,* ha de ser igual a la unidad, es decir, que debemos tener

$$1 = N \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, |\psi(x,t)|^2 \tag{49b}$$

Ahora bien, cabe concebir que la integral en (49b) no converja. Si así ocurre, la constante N debe ser cero y de la ecua-

* Puede omitirse en una primera lectura.

ción (49a) se sigue que también ha de ser nula la probabilidad de encontrar la partícula en un intervalo finito cualquiera. Esto no puede corresponder a algo que tenga sentido físico, y de ahí sacamos la importante conclusión de que *la función de onda de Schrödinger* $\psi(x,t)$ *debe ser una función de* x *de cuadrado integrable, para todos los valores de* t. Por función de "cuadrado integrable" entendemos una función para la cual se cumple la condición de que la integral en (49b) converge.

Supongamos, por consiguiente, que la función de onda $\psi(x,t)$ es, en efecto, de cuadrado integrable. Podemos entonces definir una nueva función de onda $\psi_n(x,t)$ por

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{N}\,\psi(x,t) \tag{49c}$$

donde N viene dado por la ec. (49b). Esta función de onda tiene la buena propiedad de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi_n(x,t)|^2 = 1, \qquad P(x_1,x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, |\psi_n(x,t)|^2 \tag{49d}$$

con lo cual la densidad de probabilidad es *igual* al cuadrado del valor absoluto de la función de onda.

Una función de onda que satisface la primera condición (49d) se llama *función de onda normalizada,* o también se dice de ella que está *normalizada a la unidad.* Es claro que conviene trabajar con funciones de onda de este tipo, puesto que el cuadrado de su valor absoluto es igual a la densidad de probabilidad.

50 Hemos de resolver ahora una importante cuestión: la constante N definida por (49b), ¿depende del tiempo t? Se ha supuesto que $\psi(x,t)$ es de hecho una solución de la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\psi(x,t) + V(x)\,\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(x,t) \tag{50a}$$

y la nueva función de onda $\psi_n(x,t)$ será entonces también una solución de esta ecuación *con tal que* la constante N sea independiente del tiempo.

Demostraremos el siguiente teorema: si $\psi(x,t)$ satisface la ec. (50a) y si $\psi(x,t)$ tiende a cero "con rapidez suficiente" cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, entonces

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2 = 0 \tag{50b}$$

Aquí, "con rapidez suficiente" significa, entre otras cosas, que $\psi(x,t)$ es de cuadrado integrable.

Para probar este teorema derivemos dentro del signo integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2 = \frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x,t)\,\psi(x,t)$$

$$= \psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial t}\psi(x,t) \qquad (50c)$$

La ec. (50a) nos da una expresión para la derivada temporal de $\psi(x,t)$. Para obtener una expresión análoga correspondiente a la función $\psi^*(x,t)$ conjugada compleja de la función de onda, basta formar la ecuación conjugada compleja de la (50a), lo que nos da la ecuación

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x,t) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*(x,t) - V(x)\,\psi^*(x,t) \qquad (50d)$$

Hemos supuesto aquí que $V(x)$ es una función *real,* lo que está justificado en la teoría de Schrödinger por el hecho de que este potencial ha de corresponder al potencial en el problema clásico "correspondiente". Que el potencial sea real es una propiedad esencial para nuestro razonamiento y esta hipótesis se hace siempre en la teoría de Schrödinger.

Eliminando ahora las derivadas respecto del tiempo en (50c), utilizando (50a) y (50d), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2 = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right) \qquad (50e)$$

Resulta, por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|\psi(x,t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2 =$$

$$\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]_{-\infty}^{+\infty} \qquad (50f)$$

Ahora bien, si la derivada de la función de onda (respecto de x) se conserva acotada, la expresión en el último miembro de (50f) se anulará, ya que hemos supuesto que la función de

onda se anula en el infinito. La relación (50b), por consiguiente, es válida y de ello se sigue inmediatamente, en virtud de (49b), que N es, en efecto, una constante independiente de t, Así, pues, la función $\psi_n(x,t)$ es también una función de onda *bona fide,* es decir, una solución de la ecuación de Schrödinger (50a). *A partir de una función de onda física dada, podemos siempre formar una función de onda normalizada y, si así lo queremos, podemos trabajar siempre con funciones de onda normalizadas a la unidad.*

Estas importantes conclusiones valen también en el caso tridimensional. No lo demostraremos aquí, pero nos limitaremos meramente a afirmar que la demostración es del todo análoga a la que hemos presentado para el caso de una sola dimensión.

51 Llegados a este punto el lector se puede sentir muy alarmado, puesto que nuestra *firme* conclusión de que cualquier función de onda que tengan sentido físico debe ser de cuadrado integrable arroja, al parecer, serias dudas sobre la discusión relativa a las ondas planas monocromáticas presentada antes en este capítulo. Es claro que una función de onda de la forma $\exp(ixp/\hbar - itp^2/2m\hbar)$ *no* es de cuadrado integrable y, por lo tanto, no puede normalizarse a la unidad. Nos vemos forzados a llegar a la conclusión de que una onda correspondiente a un impulso p definido *con precisión,* que depende de la coordenada x tan sólo a través del factor $exp\,(ixp/\hbar)$, no corresponde a un estado de movimiento de la partícula realizable físicamente. Por otra parte, nada nos prohíbe considerar una onda que en un intervalo muy *amplio* del eje x depende de x a través del factor $\exp(ixp/\hbar)$, con tal que esta función de onda tienda efectivamente a cero cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. Por consiguiente, podemos resolver nuestra dificultad conviniendo en que cuando tratamos de "ondas de impulso definido con precisión" no queremos decir con ello *realmente* que la función de onda es en *todas partes* de la forma $\exp(ixp/\hbar)$. Tenemos clara conciencia de que la función de onda *debe* tender a cero en el infinito, pero suponemos que la función de onda es de aquella forma en un intervalo muy amplio del eje x que incluye la región en la que estamos sobre todo interesados. Nuestras "ondas monocromáticas" deben interpretarse así como "ondas casi monocromáticas". Sobreentendiendo esto, podemos seguir hablando, sin peligro alguno, de ondas que dependen de las coordenadas a través de factores $\exp(ixp/\hbar)$ o $\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar)$, como se hace en casi todos los textos de mecánica cuántica.

Cabe considerar las funciones de onda no normalizables como casos límite de ondas que se pueden normalizar y, si se quiere, podemos llamar al primer tipo de funciones de onda *funciones de onda impropias.* Este término servirá también para aplacar a los matemáticos cuya sensibilidad se siente justamente ofendida por la manera, con frecuencia descuidada, cómo los físicos hablan de "ondas planas" como "si éstas fuesen funciones de onda de Schrödinger bona fide".

Bibliografía para ulterior estudio

1. Los trabajos originales de Schrödinger sobre mecánica cuántica han sido publicados traducidos al inglés. E. Schrödinger: *Collected Papers on Wave Mechanics* (Blackie and Son, Ltd., Glasgow, 1928).

Para la historia de este tema, referimos al lector también a los libros citados al final del Cap. 1. (Puntos 3 y 5.)

2. Algunos lectores acaso sientan un fuerte interés por aprender inmediatamente más cosas acerca de la ecuación de Schrödinger. Por ello, citamos los siguientes libros:

a) R. M. Eisberg: *Fundamentals of Modern Physics* (John Wiley and Sons, Nueva York, 1961).

b) E. Merzbacher: *Quantum Mechanics* (John Wiley and Sons, Nueva York, 1961).

c) L. I. Schiff: *Quantum Mechanics,* 3.ª edición (McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968).

El tercero de estos libros es el de nivel más superior y todos ellos son textos más avanzados que nuestro libro. El autor los cita solamente porque acaso el lector esté interesado en ver una discusión completa de algún tema particular. Problemas de barrera sencillos se discuten detenidamente en los dos primeros textos referidos.

3) La radiactividad y las radiaciones nucleares se discuten, naturalmente, en todos los libros de física nuclear. Entre muchos de ellos, citaremos los siguientes:

a) D. Halliday: *Introductory Nuclear Physics* (John Wiley and Sons, Nueva York, 1955).

b) E. Segré: *Núcleos y Partículas,* Editorial Reverté.

4) Para las cuestiones que plantea la formación de los elementos químicos y las edades del sistema solar y del universo, referimos al lector a:

a) E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, W. A. Fowler y F. Hoyle: "Synthesis of the Elements in Stars", *Reviws of Modern Physics* **29,** 547 (1957).

b) W. A. Fowler y F. Hoyle: "Nuclear Cosmochronology", *Annals of Physics* **10,** 280 (1960).

c) J. H. Reynolds: "The Age of the Elements in the Solar System" *Scientific American,* nov. 1960, pág. 171.

Problemas

1 Considérese la barrera representada en la fig. 28A para el caso en que $E > V_0$.

(*a*) Considérese primero el caso de una partícula que incide por la izquierda. La partícula, es decir, el paquete de ondas, en parte se reflejará y en parte será transmitida por el escalón. Para discutir este caso, buscamos una solución que, en la región a la derecha, repre-

sente una onda que se propaga en tal sentido. Hallar esta solución en todo el espacio y deducir una expresión para el coeficiente de reflexión R, es decir, para la probabilidad R de que la partícula sea reflejada. El coeficiente de transmisión T, esto es, la probabilidad de que la partícula sea transmitida, es entonces igual a $(1 - R)$.

(*b*) Considérese luego el caso en que la partícula incide por la derecha. En este caso se trata de hallar una solución de la ecuación de Schrödinger que, en la región situada a la izquierda, represente una onda que se propague en dicho sentido. Hallar la solución en todo el espacio y deducir una expresión para el coeficiente de reflexión R' y para el detransmisión $T' = (1 - R')$. Obsérvese que una partícula *clásica* no sería reflejada por el escalón.

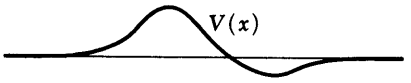
2 Deducir una expresión *exacta* para el coeficiente de transmisión T de la barrera de potencial representada en la fig. 31A y comparar el resultado exacto a que se llegue con nuestra fórmula aproximada (33b). La mejor manera de llevar a cabo la comparación consiste en tomar los logaritmos de ambas expresiones para T. Nuestro resultado aproximado se obtiene en el caso límite de una barrera "alta y gruesa".

3 Es interesante considerar un ejemplo específico del efecto de penetración a través de una barrera óptica ilustrado en la fig. 34B. Para la longitud de onda de 6000 Å (en aire) el índice de refracción del flint-glass es de 1,75. Supóngase que el medio más denso ópticamente en la fig. 34B es flint-glass y que el medio enrarecido es aire. Supongamos, además, que el ángulo de incidencia es de 45° y que la separación entre las placas es de 0,01 mm. Estimar la fracción de luz que es capaz de atravesar la barrera. (No es necesario llevar a cabo un cálculo preciso: será suficiente una estimación de la penetración de barreras.)

Obsérvese que la intensidad de la luz transmitida decrece exponencialmente con el grosor de la capa de aire entre los dos prismas de vidrio. La cantidad que importa es la razón del grosor a la longitud de onda. Obsérvese también que la componente del vector de onda *paralela* a la superficie de separación es la misma en el aire que en el vidrio. ¿Por qué?

4 Algo de alboroto por un pequeño detalle: ¿Está trazada adecuadamente la fig. 34B? Consideremos la relación que existe entre el rayo transmitido y el incidente. ¿No se debiera acaso haber trazado el rayo transmitido a continuación del rayo incidente, y no como en la figura? Para ver cómo debiera haberse trazado realmente la figura, cabría acaso realizar algunos experimentos. Supongamos que el grosor de la capa ocupada por el medio enrarecido es del orden de una longitud de onda de la luz empleada. Mediante un dispositivo con rendijas formamos un pincel de luz *sumamente* estrecho que utilizaremos como haz incidente y este pincel se representa por la línea de trazos en la parte inferior derecha de la figura. Podemos entonces estudiar el pincel de luz transmitido y determinar si, efectivamente, sigue la línea de trazos en la parte superior izquierda de la misma. No tiene el lector por qué llevar a cabo realmente este experimento en el laboratorio: puede hacerlo, en cambio, como experimento mental, por que no hay nada en este experimento que no se pueda predecir con exactitud mediante la teoría electromagnética.

Después de considerar este experimento, formule sus opiniones acerca de si la fig. 34B está o no correctamente trazada.



Esta figura se refiere al problema 5 ¿Puede Vd. probar, para una barrera *arbitraria* de ese tipo, que los coeficientes de reflexión y de transmisión, definidos en función de las amplitudes de las ondas que se propagan hacia la derecha y hacia la izquierda, tienen como suma efectivamente la unidad?

5 Consideremos el movimiento de una partícula en un potencial "arbitrario" tal como el representado en la figura adjunta. Cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ la función potencial $V(x)$ tiende a cero.

Supongamos que una partícula de energía E incide por la izquierda. La función de onda $\varphi(x)$ debe ser entonces de la forma: $\varphi(x) = [e^{ixk} + Ae^{-ixk}]$ para valores negativos de x muy grandes en valor absoluto, y de la forma: $\varphi(x) = Be^{ixk}$ para valores de x positivos grandes. Para hallar efectivamente las dos constantes A y B debiéramos resolver la ecuación de Schrödinger para el potencial $V(x)$.

Nos hemos visto conducidos a interpretar $|A|^2$ como coeficiente de reflexión de la barrera y $|B|^2$ como coeficiente de transmisión. Si esta interpretación ha de tener sentido, es claro que deberá ser:

$$|A|^2 + |B|^2 = 1 \qquad \text{(a)}$$

Esto plantea una interesante cuestión de principio. ¿Es realmente cierto que esta relación es válida para *todas* las funciones potencial $V(x)$?

Demostrar esta relación con carácter general. *Sugerencia:* Considérese la función

$$F(x) = \varphi^*(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x)\frac{d\varphi^*(x)}{dx}$$

y demostrar que $dF(x)/dx = 0$ si $\varphi(x)$ satisface la ecuación de Schrödinger.

Este problema ilustra el hecho de que uno puede a veces demostrar proposiciones generales acerca de la *naturaleza* de las soluciones sin hallarlas realmente de manera expícita. En este caso particular, es claro que hemos descubierto una importante propiedad general de la ecuación de Schrödinger y de sus soluciones. Si la teoría ha de tener sentido, la ecuación (a) *debe* ser válida y resulta satisfactorio que seamos capaces de demostrarlo.

6 Hay otras cuestiones interesantes que podemos formular acerca de la situación que ilustra la figura asociada con el problema que precede. Por ejemplo: ¿es la misma la transparencia de la barrera en ambos sentidos?

Teorema: el coeficiente de transmisión cuando la partícula incide por la izquierda es el mismo que cuando lo hace por la derecha con tal que las energías sean las mismas en ambos casos.

Demostrar este teorema. *Sugerencia:* Obsérvese que si $\varphi(x)$, como se vio en el problema precedente, es una solución de la ecuación de Schrödinger, también lo es $\varphi^*(x)$ y asimismo lo es cualquier combinación lineal de $\varphi(x)$ y $\varphi^*(x)$. Considérese una combinación lineal *adecuada* de $\varphi(x)$ y $\varphi^*(x)$.

7 Muchos núcleos inestables se desintegran por emisión de un positón y un neutrino. Los positones emergen con energías que varían entre 10 keV y unos pocos MeV. Este tipo de desintegración es con-

secuencia de las interacciones débiles, conforme hemos dicho antes. Hemos dicho también que la razón de las largas vidas que a veces se encuentran en el caso de núcleos que presentan actividad beta, es la debilidad intrínseca de esta interacción. Esto no excluye la posibilidad de que el efecto de penetración de barreras pueda también representar un importante papel. Investigar este punto con ayuda de algunos ejemplos numéricos explícitos, es decir, estimar los coeficientes de transmisión para barreras de potencial "típicas" que tiene que atravesar el positón y convénzase así de que el fenómeno de penetración de barreras no constituye aquí el factor dominante en la determinación de lo que dura la vida del núcleo.

8 L. Meitner y W. Orthmann [*Zeitschrift für Physik* **60**, 143 (1930)] llevaron a cabo en cierta ocasión una medida calorimétrica de la energía liberada en la desintegración beta del RaE. (Éste es el antiguo nombre del que hoy llamamos núcleo Bi^{210}.) En este experimento emplearon una muestra de RaE, colocada en un calorímetro adecuado, y midieron con qué velocidad se producía calor en el calorímetro. Conocido el período del RaE (5,0 días) y el tamaño de la muestra, pudieron hallar el número de desintegraciones por segundo y, en consecuencia, la cantidad de energía calorífica producida por cada desintegración. Esta cantidad de calor resultó ser igual a (0,337 ± 0,020) MeV/desintegración.

Por otra parte, se sabía que la energía cinética máxima con que pueden emitirse los electrones es de 1,170 MeV. Parece así que existe una molesta discrepancia entre la energía máxima conocida y la energía determinada con el calorímetro, por lo que no debe sorprender que los físicos estuviesen muy preocupados en aquel entonces. Dado que creemos que la desintegración tiene lugar entre dos niveles de energía determinados, hay que suponer que la energía 1,170 MeV es la energía cinética liberada en cada desintegración, con lo que se plantea el problema de por qué esta energía "desaparece" parcialmente en el calorímetro. Los físicos estaban de hecho tan preocupados, que algunos de ellos, incluyendo a Bohr, empezaron a pensar en la posibilidad de que el principio de conservación de la energía no fuera válido en la microfísica.

A la luz de lo que ahora sabemos acerca de la desintegración beta, explicar detalladamente las circunstancias que acabamos de mencionar (incluidos los sentimientos de preocupación de los físicos en aquel tiempo).

9 En el uranio que encontramos en la naturaleza la abundancia del isótopo 235 es de 0,71 por ciento y la abundancia del isótopo 238 es 99,28 por ciento. El período del U^{235} es $7{,}1 \times 10^8$ años y el período del U^{238} es de $4{,}50 \times 10^9$ años.

(*a*) Las abundancias citadas corresponden a todas las muestras terrestres y también a meteoritos que contienen uranio. ¿Qué conclusión puede deducir de esta circunstancia?

(*b*) Si se hace la hipótesis simplificadora de que las cantidades originales de los dos isótopos de uranio en el sistema solar eran iguales, ¿a qué estimación de la edad del sistema solar llegará Vd?

10 (*a*) Calcular la cantidad de radio que cabe esperar hallar en una cantidad de mineral de uranio que contiene una tonelada de

éste. ¿Implica alguna diferencia el que el mineral tenga una edad de 1 millón de años o de 500 millones de años?

(*b*) ¿Cuánto plomo espera encontrar si la edad del mineral es de 500 millones de años?

Capítulo 8

Teoría de los estados estacionarios

La cuantificación como problema de valores propios 354

El oscilador armónico. Excitaciones de vibración y rotación de las moléculas 373

Sistemas hidrogenoides 385

Un tema avanzado: las variables posición e impulso de la teoría de Schrödinger 391

Bibliografía para ulterior estudio 398

Problemas 399

Capítulo 8

Teoría de los estados estacionarios

La cuantificación como problema de valores propios

1 Nuestro subtítulo es la traducción al español del título común a los cuatro famosos trabajos de Schrödinger * sobre mecánica ondulatoria en los que demostró cómo la existencia de los niveles discretos de energía en los átomos puede explicarse en el modelo ondulatorio y, en particular, mediante la ecuación de Schrödinger.

Antes de la teoría de Schrödinger, Bohr había formulado, en 1913, una teoría semiclásica de los átomos. Decimos semiclásica porque supuso un modelo planetario, que se había de describir por las leyes de la mecánica clásica, pero con la hipótesis adicional de que no toda órbita permitida clásicamente se ocupa en la realidad. Las verdaderas órbitas están restringidas por un cierto número de *condiciones cuánticas* cuya naturaleza es ciertamente no clásica. Como ejemplo citaremos la regla según la que el momento cinético total debido al movimiento orbital de las partículas en el átomo debe ser un múltiplo entero de $\hbar$. Los valores de la energía total asociada con las órbitas permitidas por las condiciones cuánticas forman, en muchos casos (pero no siempre), un conjunto discreto. De esta manera Bohr creó una teoría de los niveles de energía discretos de un átomo. Su procedimiento se llamó *cuantificación* del movimiento en el átomo. Éste es el origen histórico de la palabra "cuantificación".

2 Las condiciones cuánticas de Bohr eran de naturaleza ad hoc y difícilmente podían considerarse satisfactorias. En el tiempo en que Schrödinger preparaba sus célebres artículos, había llegado a ser evidente que si bien la teoría de Bohr explicaba, en efecto, algunos de los hechos observados, la teoría tenía también claros defectos y evidentes fallos. El tiempo estaba, por lo tanto, maduro para nuevas ideas.

La gran contribución de Schrödinger consistió en probar que si el modelo ondulatorio de la materia se toma seriamente, existe una manera sistemática y natural de "cuantificar". Hizo notar que su ecuación de onda, en condiciones adecuadas, po-

* E. Schrödinger, "Quantisierung als Eigenwertproblem", *Annalen der Physik* **79**, 361 (1926). **79**, 489 (1926); **80**, 437 (1926); **81**, 109 (1926).

seería soluciones que representan ondas *estacionarias* y asoció estas soluciones con los estados estacionarios de los átomos. Las soluciones correspondientes a ondas estacionarias se caracterizan todas ellas por una dependencia respecto del tiempo de la forma $\exp(-i\omega t)$, donde las posibles frecuencias forman un conjunto discreto, digamos ω_1, ω_2, ω_3, ..., y la energía del n-ésimo estado estacionario viene entonces dada por $E_n = \hbar\omega_n$. En este capítulo seguiremos los pasos de Schrödinger y exploraremos esta idea.

3 Mediante un cierto número de argumentos que la hacían plausible, en el capítulo 7 llegamos a la ecuación de Schrödinger *

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) \qquad (3a)$$

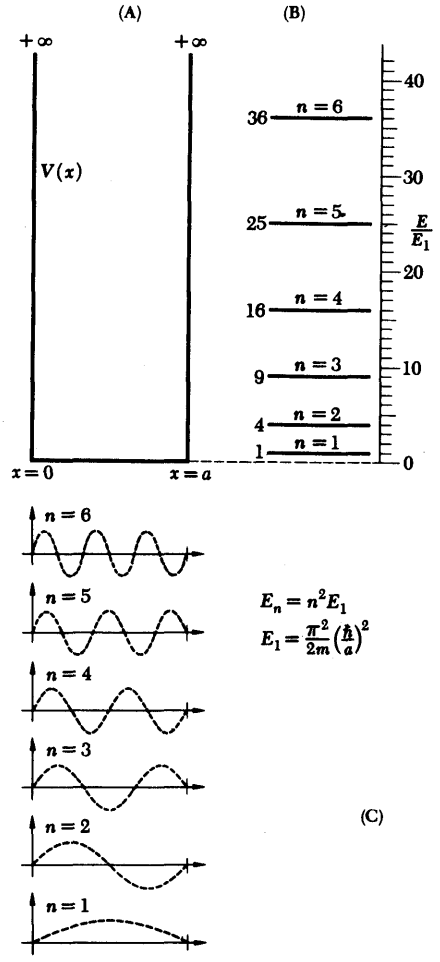
que describe el movimiento de una partícula de masa m en el campo de fuerzas que deriva de una función potencial $V(\mathbf{x})$. En nuestra "deducción" hemos reconocido que esta ecuación es claramente una aproximación: el movimiento de la partícula se trata no-relativísticamente, a la vez que se ignoran todos los fenómenos de creación y destrucción. Dimos razones por las que esta ecuación debe ser muy útil en física atómica y molecular y en ciertas situaciones de la física nuclear. En este último dominio nos apuntamos un tanto al ser capaces de explicar la dependencia de la duración de la vida de un emisor alfa respecto de la energía de la partícula emitida acudiendo para ello al efecto túnel de la mecánica cuántica.

Al igual que en nuestra discusión del capítulo 7 será aquí instructivo considerar la versión simplificada de la teoría de Schrödinger que describe problemas en una dimensión. La ecuación de Schrödinger para tales problemas es de la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \qquad (3b)$$

La ecuación (3b) es mucho más simple para ser discutida matemáticamente que la ecuación tridimensional (3a). Dado que los rasgos esenciales de los fenómenos en que ahora estamos interesados se manifiestan prácticamente de igual modo en ambas ecuaciones, podemos alcanzar un grado real de entendimiento de cómo la teoría de Schrödinger conduce a re-

* En este capítulo empleamos unidades CGS o MKS.



Figs. 4A, B, C La situación, en cierto grado poco física, de una partícula confinada en una caja unidimensional nos proporciona un ejemplo muy simple de lo esencial en la teoría de Schrödinger de los estados estacionarios. (A) representa el potencial, que se hace infinito en los puntos $x = 0$ y $x = a$. La función de onda correspondiente a un estado estacionario debe anularse en estos puntos. Esto es posible solamente si la energía (total) tiene uno de los valores representados en el esquema de términos (B) (únicamente los seis primeros niveles aparecen en la figura). En (C) se representan las correspondientes funciones de onda (funciones propias) para los seis primeros estados estacionarios.

sultados definidos mediante un estudio de la sencilla ecuación (3b). Además, hay que decir que esta ecuación tiene un carácter más físico del que cabría imaginar a primera vista: muchos problemas relativos al movimiento en tres dimensiones se pueden reducir a problemas equivalentes en una dimensión.

4 Comencemos con un problema muy simple. Una partícula está confinada dentro de una "caja" de longitud a cuyas paredes son infinitamente altas. La curva de trazo continuo en la fig. 4A representa el potencial $V(x)$ para este problema. El potencial $V(x)$ es cero para x en el intervalo $(0,a)$ y $+\infty$ fuera del mismo.

En la sección 26, capítulo 7, hemos considerado el caso en que hay solamente *una* pared de potencial de altura infinita. Encontramos entonces soluciones que corresponden a ondas estacionarias monocromáticas que describen la reflexión de una partícula de energía positiva E, cualquiera, por la pared. El nuevo elemento en la situación presente es que la partícula se encuentra confinada entre *dos* paredes de potencial infinitamente altas.

Intentemos ahora resolver la ecuación de Schrödinger (3b) suponiendo que la función de onda $\psi(x,t)$ depende del tiempo a través de un factor que es una simple función exponencial de t, es decir,

$$\psi(x,t) = \varphi(x) \exp\left(-\frac{itE}{\hbar}\right) \tag{4a}$$

Substituyendo una función de onda de esta forma en (3b) obtenemos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = [E - V(x)]\,\varphi(x) \tag{4b}$$

En nuestra discusión de la sección 26, capítulo 7, se llegó a la conclusión de que la función de onda debe anularse en una región en la que el potencial es infinito, como también *en la frontera* de dicha región. En el presente problema la función de onda debe anularse, por consiguiente, en los puntos $x = 0$ y $x = a$, como también fuera del intervalo $(0,a)$.

Dentro de la caja la solución general de la ecuación (4b) es de la forma

$$\varphi(x) = A \exp(ixk) + B \exp(-ixk) \tag{4c}$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{4d}$$

y A y B son constantes. Si ahora, en primer lugar, imponemos la condición de que la función de onda se anule en $x = 0$, hallamos que la solución físicamente aceptable debe ser de la forma

$$\varphi(x) = C\,\mathrm{sen}(xk) \tag{4e}$$

donde C es una constante no nula. La función de onda ha de anularse también en $x = a$, y obtenemos así la condición adicional

$$C\,\mathrm{sen}(ak) = 0 \quad \text{o bien} \quad ak = n\pi \tag{4f}$$

Ésta es una condición que se impone a k y, por consiguiente, una condición que debe cumplir la energía E. Teniendo en cuenta la relación entre E y k tal como viene expresada por (4d), tenemos

$$E = \frac{n^2\pi^2(\hbar/a)^2}{2m} \tag{4g}$$

donde n es un entero *positivo:* nuestro problema no tiene *ninguna* solución físicamente aceptable a menos que E sea de esta forma. El caso $n = 0$ queda excluido porque corresponde a una función de onda que se anula idénticamente, la cual no es admisible desde el punto de vista físico. Dado que hemos supuesto que k es no-negativo, de aquí se sigue que n es positivo.

5 Hemos encontrado así que para nuestra partícula en una caja la ecuación de Schrödinger (3b) tiene soluciones estacionarias cuya dependencia respecto del tiempo es una simple exponencial, es decir, soluciones de la forma $\psi(x,t) = \varphi(x)\exp(-itE/\hbar)$, *únicamente* si la energía E toma uno de los valores de un conjunto discreto $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$ dados por

$$E_n = \frac{n^2\pi^2(\hbar/a)}{2m} \tag{5a}$$

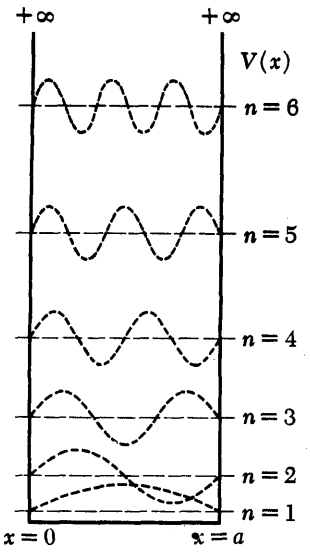


Fig. 5A Es práctica común en los textos de mecánica cuántica el presentar figuras como la que aquí aparece. Las tres figuras 4A, B, C se han reunido en una sola. Ésta es acaso una práctica deplorable, pero dado que el autor no se ha visto nunca confundido por tales figuras, supone que tampoco ésta desorientará al lector.

Los niveles de energía se indican por las rectas de trazos finos. Cada una de ellas sirve también como eje x en la figura superpuesta que representa la correspondiente función de onda.

donde n es un entero positivo cualquiera. La función de onda *normalizada* $\psi_n(x,t)$ * que corresponde a la n-ésima energía posible E_n es, pues, de la forma

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\exp\left(-\frac{itE_n}{\hbar}\right) \tag{5b}$$

dentro del intervalo $(0,a)$ y cero fuera del mismo. (Que esta función de onda está normalizada correctamente a la unidad resulta trivial integrando $|\psi_n(x,t)|^2 = (2/a)\operatorname{sen}^2(n\pi x/a)$ desde 0 a a: el resultado es 1.)

Hemos representado las energías E_n en la forma de un esquema de términos para nuestro sistema en la fig. 4B, que presenta los seis primeros niveles de energía. En la fig. 4C hemos trazado las correspondientes funciones de onda $\varphi_n(x)$. Naturalmente, estas funciones son iguales a las funciones $\psi_n(x,t)$ en el instante particular $t = 0$.

Véase también la fig. 5A para una figura compuesta.

6 Estudiemos ahora la diferencia entre soluciones estacionarias y no estacionarias de la ecuación de Schrödinger (3b).

Consideremos primero la n-ésima solución estacionaria, dada por (5b). Puesto que las soluciones se han normalizado a la unidad, el cuadrado del valor absoluto de la función de onda nos da la densidad de probabilidad $P_n(x)$ de hallar la partícula en un punto, cualquiera, del eje x. Se encuentra

$$P_n(x) = |\psi_n(x,t)|^2 = \left(\frac{2}{a}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{6a}$$

dentro del intervalo $(0,a)$ y $P_n(x) = 0$ fuera de dicho intervalo. Conforme vemos, la densidad de probabilidad *no depende del tiempo* para una solución estacionaria.

Consideremos a continuación soluciones no estacionarias. Dado que la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial lineal homogénea, la combinación lineal de dos soluciones cualesquiera nos da una nueva solución. Esta nueva solución satisfará las mismas condiciones de contorno $\psi(0,t)=\psi(a,t)=0$ con tal que las dos soluciones originales cumplan estas condiciones. De aquí deducimos que cualquier combinación lineal de ecuaciones estacionarias (5b) nos da una nueva solución

* Para una discusión de cómo se normalizan las funciones de onda de Schrödinger, véase la Sec. 49, Cap. 7.

físicamente aceptable, de acuerdo con el principio de superposición.

Para ver qué ocurre en una superposición de este tipo de dos soluciones, consideremos la combinación lineal particular

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{2}}\ [\psi_{n'}(x,t) + \psi_{n''}(x,t)] \tag{6b}$$

donde suponemos que $n' \neq n''$. Afirmamos que esta nueva solución de la ecuación de Schrödinger está normalizada a la unidad (cualquiera que sea el instante t). La densidad de probabilidad $P(x,t)$ que corresponde a la solución (6b) viene dada por

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \left(\frac{1}{a}\right)\left\{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{n''\pi x}{a}\right)\right.$$
$$\left. + 2\operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n''\pi x}{a}\right)\cos\left[\frac{t(E_{n'} - E_{n''})}{\hbar}\right]\right\} \tag{6c}$$

Conviene que el lector compruebe inmediatamente, integrando esta expresión de $P(x,t)$ entre 0 y a, que la función de onda dada en (6b) está, en efecto, normalizada a la unidad.

Como vemos, la densidad de probabilidad $P(x,t)$ depende del tiempo: el último término en la expresión (6c) presenta un comportamiento ondulatorio y la frecuencia de esta oscilación viene dada por

$$\omega_{n'n''} = \frac{(E_{n'} - E_{n''})}{\hbar} \tag{6d}$$

7 Un momento de reflexión nos dice que este comportamiento deben presentarlo *todas* las superposiciones de soluciones estacionarias (5b) en tanto por lo menos dos soluciones estacionarias diferentes formen parte de la superposición. (La superposición puede contener un número cualquiera de soluciones estacionarias; éstas pueden ser incluso en número infinito). Además, vemos fácilmente que si las soluciones estacionarias $\psi_{n'}$ y $\psi_{n''}$ forman parte de la superposición, debe haber entonces un término en la densidad de probabilidad que oscila con la frecuencia $\psi_{n'n''}$ dada por la ecuación (6d). Este término procede de los "términos cruzados" $\psi^*_{n'}\psi_{n''}$ y $\psi^*_{n''}\psi_{n'}$ que se presentan en el desarrollo del cuadrado del valor absoluto de la función de onda

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n\psi_n(x,t) \tag{7a}$$

donde las c_n son constantes.

Ahora bien, es posible demostrar un *teorema:* cualquier solución físicamente aceptable de la ecuación de Schrödinger para el problema de una partícula en la caja se puede escribir de manera única en la forma de un desarrollo, como el dado en (7a), en términos de soluciones *estacionarias* (5b) del problema. No demostraremos este teorema aquí, pero lo aceptamos como muy plausible: matemáticamente, el teorema es un teorema referente a las series de Fourier. Aceptándolo, podemos llegar a la conclusión de que las únicas soluciones de la ecuación de Schrödinger que corresponden a una densidad de probabilidad independiente del tiempo son las soluciones estacionarias.

8 Hemos aprendido ahora lo esencial de la teoría de Schrödinger acerca de los estados estacionarios y de los niveles de energía de un sistema que obedece a la mecánica cuántica. Los estados estacionarios corresponden a soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger, y para éstas la densidad de probabilidad es independiente del tiempo. En el caso de los estados no estacionarios, la densidad de probabilidad muestra una dependencia de carácter oscilatorio respecto del tiempo y las frecuencias de oscilación que pueden presentarse vienen dadas por la ecuación (6d) en función de las *diferencias* de energía de los varios niveles estacionarios. Estas frecuencias son claramente frecuencias características del sistema para las que cabe esperar que se emita y absorba radiación: éstas son las frecuencias a las que el sistema entrará en resonancia. Las frecuencias de transición $\omega_{n'n''}$ determinan, a su vez, la localización de los niveles de energía, salvo una constante aditiva común que podemos fijar asignando cierta energía adecuada al estado fundamental. (En nuestro ejemplo hemos elegido el "fondo del pozo" como energía cero.)

Podríamos ahora proponernos un ambicioso programa: resolver la ecuación de Schrödinger (generalizada adecuadamente para que se pueda aplicar a sistemas constituidos por muchas partículas) para todos los casos de interés físico en los que cabe esperar que la teoría de Schrödinger sea una buena aproximación. En particular, deberíamos buscar las soluciones estacionarias que pueden normalizarse a la unidad: éstas nos dan los estados estacionarios y los correspondientes niveles de energía. Es inútil decir que este grandioso programa está muy lejos realmente de haber sido cumplido en su totalidad: nuestros recursos matemáticos son totalmente inadecuados para resolver la

ecuación de Schrödinger exactamente en el caso de un sistema complicado, aunque podemos tratar sistemas simples bastante bien.

9 Considerando el programa arriba mencionado, podemos preguntar si es esto realmente lo que queremos. Como se discutió detenidamente en el capítulo 3, los estados "estacionarios" no son, rigurosamente hablando, en modo alguno estacionarios. Nuestra teoría de la partícula en una caja, por otra parte, nos dio efectivamente estados estrictamente estacionarios. El programa que hemos bosquejado nos daría también estados estrictamente estacionarios, en contradicción con los hechos de observación conocidos. Encontramos aquí una clara falta de la ecuación de Schrödinger: no describe las transiciones radiactivas. Por lo tanto, en la ecuación de Schrödinger no se encierra toda la historia: algo quedó fuera. En este respecto, la teoría de Schrödinger es análoga a una teoría clásica en la que se tiene en cuenta todas las interacciones electrostáticas entre los electrones y el núcleo, pero en la cual se ignora la radiación de ondas electromagnéticas por las partículas en movimiento. Sin embargo, cabe esperar que la teoría de Schrödinger sea una buena aproximación en la física atómica y molecular y que un estado estacionario predicho por la ecuación de Schrödinger corresponda a un estado *casi* estacionario en la teoría "verdadera", de modo que la "energía media" de este último estado se encontrará muy próxima al valor exacto de la energía que predice la ecuación de Schrödinger.

10 Antes de proseguir, expliquemos algunos términos comúnmente empleados. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (4b) es típica de las que hay que considerar cuando se trata de hallar los niveles de energía de un sistema. Escribamos esta ecuación en la forma simbólica

$$H\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{10a}$$

donde H representa el *operador diferencial*

$$H \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{10b}$$

Se trata de encontrar la solución $\varphi(x)$ de la ecuación diferencial (10a). Siempre tendrá soluciones esta ecuación, cualquiera que sea E, pero no todas ellas serán físicamente admisibles. Debemos considerar, por consiguiente, como una parte *esencial*

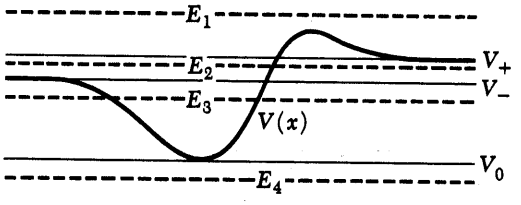
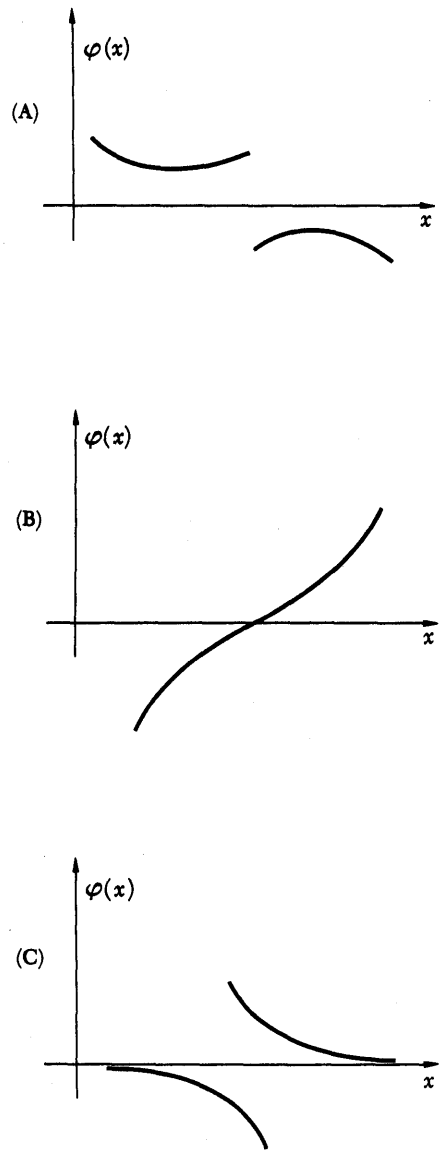


Fig. 11A Tipo particular de función potencial que tiende a los valores constantes V_+ y V_- cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$. Estudiaremos la naturaleza de las soluciones de la ecuación de Schrödinger para varios valores de la energía total E. Las rectas horizontales de trazos indican cuatro energías representativas de los casos que pueden ocurrir.



Figs. 12A, B, C Los segmentos representados en estas figuras ilustran el comportamiento local de la función de onda (real) en una región en la que se tiene $E < V(x)$. En dicha región la derivada segunda tiene el mismo signo que la función de onda.

del problema las condiciones que hacen que una solución sea aceptable desde el punto de vista físico, a saber, el que la función de onda sea de cuadrado integrable *. Si procedemos así encontramos que E no puede ser cualquiera. Aquellos valores de E para los cuales la ecuación (10a) tiene una solución físicamente admisible se llaman *valores propios del operador diferencial H.* Las correspondientes funciones de onda reciben el nombre de *funciones propias* del operador **.

Podemos comprender ahora por qué Schrödinger tituló sus artículos "Quantisierung als Eigenwertproblem".

11 El problema de una partícula confinada en un pozo de potencial cuyas paredes son infinitamente altas, se refiere a algo que está un tanto alejado de la realidad. Consideremos ahora el problema de valores propios en una dimensión de manera más general. Supongamos que el potencia $V(x)$ es finito en todo el espacio y que tiene la forma representada en la fig. 11A, de modo que la función potencial tiende al valor constante V_+ cuando $x \to +\infty$ y al valor constante V_- cuando $x \to -\infty$. Designemos por V_0 el mínimo del potencial. Naturalmente, este potencial particular es un caso especial, pero es muy instructivo analizarlo. Supongamos que $V_+ \geqq V_-$.

Veamos cuál es la naturaleza de las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (4b) para el potencial $V(x)$. Escribamos esta ecuación en la forma

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = -\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)[E - V(x)]\varphi(x) \qquad (11a)$$

Estudiemos esta ecuación diferencial para varios valores de la energía E considerada como parámetro, a saber: para $E \leqq V_0$; para $V_- \geqq E > V_0$; para $V_+ \geqq E > V_-$, y para $E > V_+$. Debe quedar bien claro que la ecuación diferencial (11a) tendrá solución cualquiera que sea el valor de E, pero estas soluciones, en general, no serán todas físicamente admisibles.

La representación gráfica de la función de onda (en general) compleja plantea algunos problemas. Una posibilidad consiste en representar el valor absoluto de la función de onda. Otra po-

* En el caso de un "pozo de potencial" con paredes infinitamente altas esta condición conduce a que la función de onda se anule fuera del pozo, al igual que en la frontera, conforme vimos en la Sec. 26, Cap. 7.

** En inglés se utilizan de ordinario los términos "eigenvalue" y "eigenfunction", que son términos híbridos germano-ingleses. Los términos alemanes son "Eigenwert" y "Eigenfunktion". ["Eigen" significa aquí que la función es *propiamente* una solución. (N. del T.)]

sibilidad es la de considerar soluciones reales de la ecuación (11a). Obsérvese que si $\varphi(x)$ es una solución (compleja) cualquiera de (11a), también lo es $\varphi^*(x)$, puesto que E y $V(x)$ son reales. La parte real $[\varphi(x) + \varphi^*(x)]/2$, y la parte imaginaria $[\varphi(x) - \varphi^*(x)]/2i$ de una solución $\varphi(x)$ son también soluciones, y cabe imaginar que representamos precisamente estas funciones *reales*.

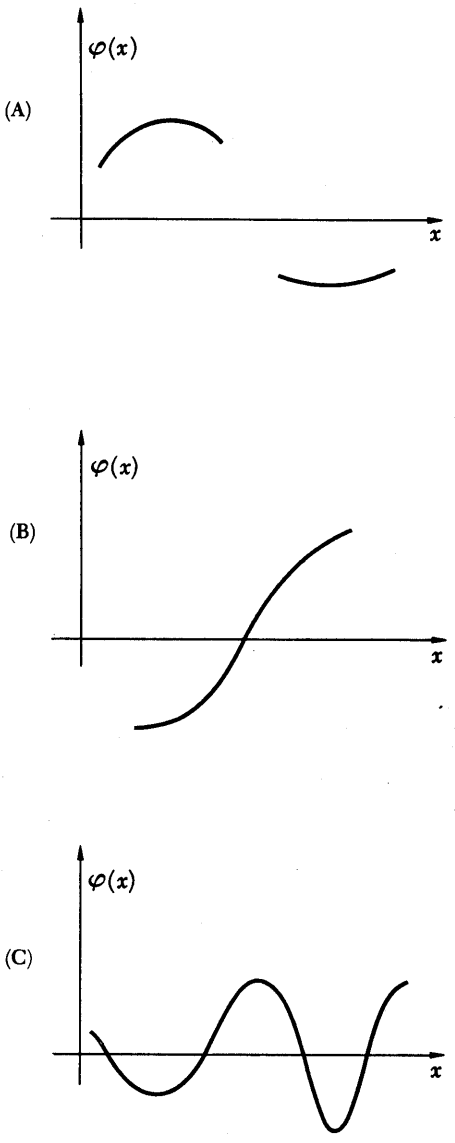
12 Consideremos primero el comportamiento *local* de las soluciones reales en una región en la que $[E - V(x)] < 0$. El examen de la ecuación de Schrödinger (11a) pone de manifiesto que en una tal región la derivada segunda de la función de onda tiene el *mismo* signo que dicha función. De aquí se sigue que si la función de onda no se anula en un intervalo, en este caso "se comba hacia el eje x" como ilustran los dos segmentos representados en la fig. 12A. Si la función de onda corta al eje, "se apartará de él" a uno y otro lado del punto en que se anula, conforme indica la fig. 12B. La función de onda puede también acercarse al eje asintóticamente por la izquierda o por la derecha, como ilustran los dos segmentos de la fig. 12C.

Llegamos así a la conclusión de que si $V(x) > E$ para *todos* los valores de x, las soluciones de (11a) no pueden ser físicamente aceptables, porque el valor absoluto de la función de onda crece sin límites sea a la izquierda o a la derecha, o, posiblemente, hacia uno y otro lado. En lo que concierne a la fig. 11A, el sistema físico no puede tener una energía E menor que V_0.

13 Consideremos ahora el comportamiento de la función de onda en una región en la que $[E - V(x)] > 0$. En este caso, la derivada segunda de la función de onda y la propia función son de signos *opuestos*. De ello se sigue que, en una región en la cual la función de onda no se anula, debe "combarse alejándose del eje x". Los dos segmentos de la fig. 13A ilustran esta situación. Si la función de onda atraviesa el eje, se dirigirá hacia el mismo a uno y otro lado del punto de intersección, apartándose de la tangente a la curva en el punto en que la función se anula. Éste es el comportamiento que se representa en la fig. 13B, que debe compararse con la fig. 12B.

Un segmento mayor de la curva que representa la función de onda puede cruzar el eje varias veces y se tiene entonces el comportamiento "oscilatorio" que muestra la fig. 13C.

14 Finalmente, consideremos el caso en que $[E - V(x)] = 0$ en *toda* una región. (Esta situación, muy especial, puede pre-



Figs. 13A, B, C Los segmentos representados en estas figuras ilustran el comportamiento local de la función de onda (real) en una región en la que se tiene $E > V(x)$ En dicha región la derivada segunda y la función de onda tienen signos opuestos. Convendría que el lector comparase cuidadosamente estas figuras con las 12A, B, C.

sentarse únicamente si la función potencial $V(x)$ es constante en todo el intervalo en cuestión). La derivada segunda de la función de onda debe ser nula, de lo que se sigue que la derivada primera ha de ser una constante. La curva que representa la función de onda es una recta, como ilustran los segmentos en las figuras 14A, B.

Haremos notar aquí, que para un potencial del tipo representado en la fig. 11A, una función de onda, que tenga sentido físico, y su derivada primera no pueden anularse *ambas* en el mismo punto, porque si esto ocurre, la función de onda ha de ser idénticamente nula. Esta proposición es un teorema de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por esta razón, los segmentos de curva representados en las firguras 12A, B, C, 13 A, B, C y 14 A, B nunca son *tangentes* al eje x, si bien pueden cruzarlo o acercarse a él asintóticamente.

15 Apliquemos lo que hemos aprendido acerca del comportamiento *local* de la función de onda al estudio de su comportamiento *global*, es decir, para *todos* los valores de x, cuando la función potencial es de la forma representada en la figura 11A. A las soluciones de la ecuación diferencial (11a) hay que imponer ahora las condiciones que deben quedar satisfechas por las funciones de onda con sentido físico.

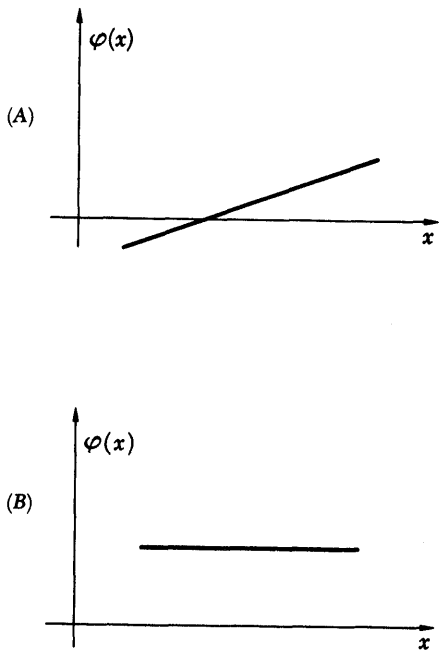
Refiriéndonos a la fig. 11A, consideremos primero el caso en que la energía E cumple la condición $E > V_+$. Una de estas energías E_1 se representa por la recta de trazos así designada en la figura. Este caso es, en realidad, un tanto especial, porque tenemos $[E - V(x)] > 0$ cualquiera que sea x. Las soluciones son oscilantes a lo largo de todo el eje y, en particular, en $+\infty$ y en $-\infty$. Las soluciones oscilan también en $+\infty$ y en $-\infty$ cuando la energía E está por debajo del máximo del potencial $V(x)$, con tal que $E > E_+$: en este caso tenemos un problema de penetración de barrera. Por lo tanto, podemos hallar dos soluciones linealmente independientes, que oscilan en el infinito, para *todo* $E > V_+$ y estas soluciones describen partículas (u ondas) en movimiento. Hemos discutido ya tales soluciones, y su interpretación física, en el capítulo 7. La solución para un valor prefijado de E no está normalizada a la unidad, pero es posible construir soluciones normalizables mediante superposición (continua) de las soluciones que representan ondas en propagación. En la sección 51, capítulo 7, convinimos en llamar a las soluciones de ese tipo correspondientes a un valor definido de E funciones de onda *impropias*, y para cualquier $E > V_+$ tenemos así dos funciones de onda im-

propias linealmente independientes. Estas funciones de onda o, mejor dicho, los paquetes de ondas normalizados que cabe formar a partir de ellas, pueden describir, por ejemplo, una partícula que incide sobre la "barrera" por la izquierda. Esta partícula es en parte reflejada y en parte transmitida a través de la barrera hacia la derecha. La situación es análoga cuando la partícula incide por la derecha.

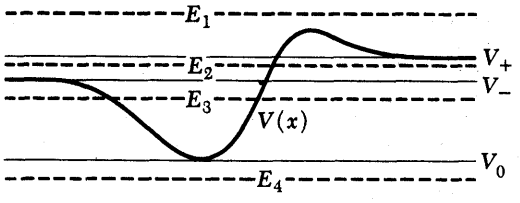
16 Supongamos ahora que $V_+ > E > V_-$. En este caso tenemos una región a la derecha de la cual es $[E - V(x)] < 0$, y una región a la izquierda de la cual se tiene $[E - V(x)] > 0$. Éste es el mismo tipo de problema que consideramos en las secciones 21-25, capítulo 7. En este caso, en la región de la derecha solamente *una* de las dos soluciones linealmente independientes es físicamente aceptable, a saber, la solución que tiende a cero cuando x tiende a $+\infty$ (lo que corresponde al segmento a la derecha en la fig. 12C). Esta solución, cuando se prolonga hacia la izquierda, presenta un comportamiento oscilante en la región en la cual $[E - V(x)] > 0$. (La función de onda y su derivada primera son continuas, naturalmente, para todo valor de x, ya que de lo contrario la función de onda no corresponde a una solución *global* de la ecuación de Schrödinger.) Para todo valor de E tal que $V_+ > E > V_-$ tenemos así *una* función de onda (impropia) y esta función de onda describe la reflexión de una partícula que procede de la izquierda por la "giba" de potencial, de la misma manera como en el problema considerado en el capítulo 7.

17 Consideremos a continuación el caso en que $V_- > E > V_0$. Un ejemplo de él lo ofrece la energía E_3 representada por la línea de trazos así designada en la fig. 11A. En este caso se tiene una región a la izquierda y una región a la derecha en las cuales $[E - V(x)] < 0$ *y*, en medio, una región en la que $[E - V(x)] > 0$. Los dos puntos frontera que separan estas regiones de otra son los *puntos de retroceso clásicos:* los designaremos por x_1 y x_2.

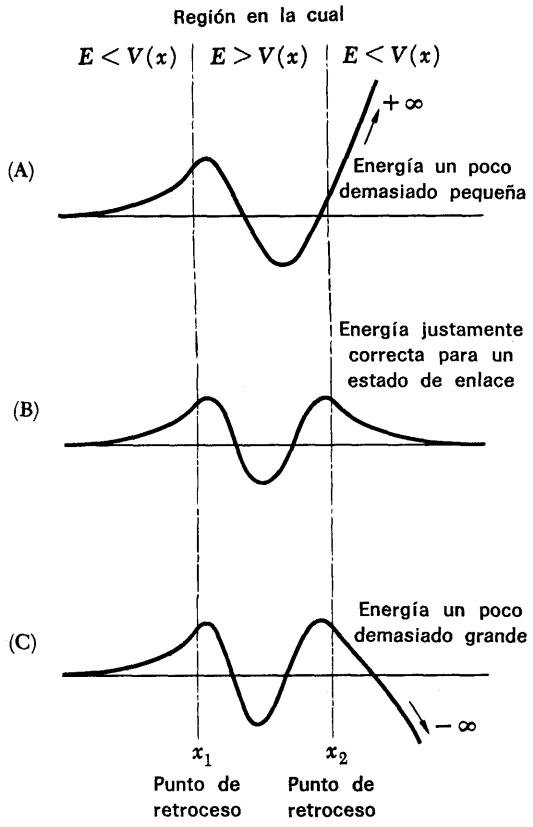
A la izquierda de x_1 la función de onda debe tender asintóticamente al eje x y su comportamiento ha de ser el indicado por el segmento a la izquierda en la fig. 12C (salvo en lo que concierne al signo de la función de onda, que carece aquí de importancia). A menos que la función de onda se comporte de esta manera, crecería cuando x tiende a $-\infty$ y una función de onda que crece con monotonía no puede ser físicamente admisible. A la derecha de x_2, la función de onda ha de comportarse como el segmento a la derecha en la fig. 12C. En la región



Figs. 14A, B Los segmentos representados en estas figuras ilustran el comportamiento local de la función de onda (real) en una región en la que se tiene $E = V(x)$. Éste es un caso muy especial que únicamente puede presentarse si el potencial $V(x)$ es constante en dicha región. La derivada segunda se anula, y la propia función de onda se reduce a una recta.



Para comodidad del lector presentamos una vez más la figura 11A. La función potencial tiende a los valores constantes V_+ y V_- cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$. Las rectas horizontales de trazos indican cuatro energías representativas de los casos que pueden ocurrir.



Figs. 18A, B, C Representación esquemática del comportamiento de las soluciones de la ecuación de Schrödinger que tienden a cero asintóticamente cuando x tienda a $-\infty$. Las tres curvas representan soluciones para tres energías diferentes. A menos que el valor del parámetro energía sea el "justamente correcto", la solución divergirá tendiendo a $+\infty$ o a $-\infty$. Las soluciones no acotadas de la ecuación diferencial no son físicamente admisibles: no son soluciones del *problema* de Schrödinger. La energía es "justamente la correcta" para la curva *B*: la función de onda tiende a cero asintóticamente cuando x tiende a $+\infty$. Esta curva representa la función de onda de un estado de enlace.

intermedia, entre x_1 y x_2, la función de onda presenta un comportamiento oscilatorio, y en esta región tenemos dos soluciones linealmente independientes que son aceptablas desde el punto de vista físico. El problema es ahora el de "empalmar" estos diferentes tipos de soluciones de forma que se obtenga una función de onda físicamente admisible que sea continua y con derivada primera continua para todo x *. *Esto no se puede conseguir para un valor de E arbitrario: una solución físicamente aceptable (que es de cuadrado integrable) puede hallarse únicamente para ciertos valores discretos de la energía E. A cada una de estas energías corresponde un estado estacionario ligado del sistema.*

18 Este fenómeno se puede comprender inmediatamente con ayuda de las figs. 18A, B, C. Supongamos que elegimos una energía arbitraria E tal que $V_- > E > V_0$. Satisfacemos las condiciones físicas a la izquierda eligiendo una solución que tiende asintóticamente al eje x cuando x tiende a $-\infty$. En el punto de retroceso x_1 esta solución debe "empalmarse" con la solución oscilante entre x_1 y x_2. Dado que tanto la función de onda como su derivada primera han de ser continuas, obtenemos una solución *única* para esta región. Esta solución debe "empalmarse" con la solución a la derecha de x_2 y de nuevo obtenemos una solución *única* a la derecha de x_2. Esta solución no presentará el comportamiento correspondiente al del segmento a la derecha en la fig. 12C a menos que la energía E sea justamente la correcta, sino que crecerá apartándose del eje, en cuyo caso la solución global no es físicamente aceptable. Las condiciones de que la función de onda ha de decrecer tanto a la izquierda como a la derecha, no son, en general, compatibles, *excepto* si E toma uno de los valores de un cierto conjunto discreto. Estos valores deben ser mayores que V_0. Habíamos llegado ya antes a la conclusión de que *no* puede haber solución admisible desde el punto de vista físico cuando $E < V_0$.

Para el problema del potencial representado en la fig. 11A el esquema de términos consiste así en un conjunto (posiblemente vacío) de niveles discretos entre V_0 y V_- y de un continuo por encima de la energía V_-.

19 Un problema unidimensional del tipo que acabamos de estudiar, y que es relativamente fácil de tratar analíticamente,

* El "empalme" se consigue automáticamente, claro está, si hallamos una solución *global* de la ecuación de onda.

se representa en la fig. 19A. En este caso tenemos $V_+ = V_-$ y la función potencial es constante a trozos. El esquema de términos se representa a la derecha y en él vemos que hay cuatro estados ligados por debajo del continuo. Las funciones de onda correspondientes a estos estados ligados aparecen en la parte izquierda de la figura. Obsérvese que la primera función de onda presenta un extremo (y ningún nodo), que la segunda función de onda tiene dos extremos (y un nodo) y que la cuarta función de onda, correspondiente al nivel de energía *discreto* más alto, tiene cuatro extremos (y tres nodos). Para un pozo de potencial más profundo, se tendrían más estados ligados, y en el caso límite de un pozo infinitamente profundo, que es el problema discutido en la sección 4, se tiene un número infinito de estados ligados. Conviene comparar los esquemas de términos en las figs. 4B y 19A: aunque las posiciones de los niveles de los cuatro primeros estados ligados no son idénticas en los dos casos, sí son semejantes.

Acaso el lector quiera resolver el problema de hallar los estados ligados para la situación representada en la fig. 19A. Ello no es particularmente difícil.

Hemos aprendido así que, tomando como base la teoría de Schrödinger, estamos en condiciones de comprender por qué un sistema que obedece a la mecánica tendrá estados ligados y por qué habrá, en general, un continuo de energías posibles por encima de un cierto límite. El comienzo del continuo es simplemente aquella energía por encima de la cual el sistema puede disociarse, lo que en los ejemplos sencillos presentados significa que la partícula se puede comportar como un paquete de ondas que se propaga mucho más allá de la "región central".

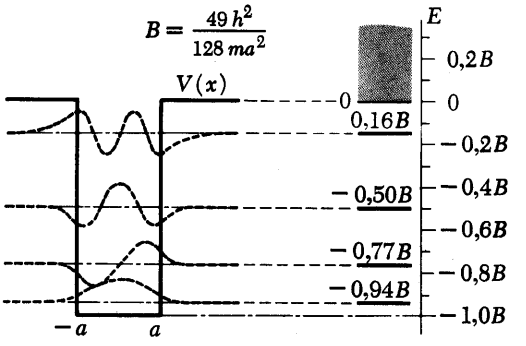


Fig. 19A El caso de una partícula en un pozo de potencial de profundidad B. Esta figura se basa en un ejemplo dado en el libro de R. B. Leigthon, *Principles of Modern Physics*, página 154 (MacGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1959). El pozo de potencial se representa a la izquierda, y el esquema de términos, a la derecha. Hay cuatro estados ligados (cuatro niveles de energía discretos). Las correspondientes funciones propias se representan a la izquierda, superpuestas al gráfico de la función potencial. El continuo comienza en el borde del pozo, como se indica en gris en el esquema de términos.

20 Indiquemos ahora cómo es posible explicar el fenómeno que encontramos en la sección 28, capítulo 3, de la existencia de niveles de energía por *encima* de aquélla en que empieza el continuo. (Véase el esquema de términos en la fig. 38A, capítulo 3.)

Cosideremos el problema del potencial unidimensional representado en la fig. 20A. Éste difiere del problema de la figura 19A en que el potencial no se conserva constante fuera del pozo, sino que decrece, tomando de manera discontinua el valor $-B_\infty$ a cierta distancia del mismo. Supondremos que más allá de estos dos escalones el potencial toma el valor constante $-B_\infty$.

De acuerdo con la presente teoría, el continuo empezará ahora a la energía $-B_\infty$, como se indica en el esquema de

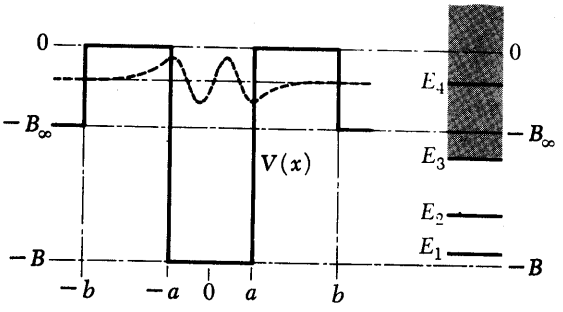


Fig. 20A Esta figura ilustra una modificación de la situación representada en la fig. 19A. Las funciones potencial son idénticas dentro del intervalo $(-b, +b)$, pero fuera de él el potencial que aquí se representa tiene el valor constante $-B_\infty < 0$. El continuo, por consiguiente, comienza en el presente caso en $-B_\infty$ y hay solamente tres estados estrictamente estacionarios. Sin embargo, si b es muy grande, lo que corresponde a una "barrera" muy gruesa, habrá todavía un cuarto estado *casi* estacionario. Este *nivel virtual* se ha designado por E_4 y corresponde al cuarto nivel estacionario de la fig. 19A.

términos a la derecha de la fig. 20A. Para un valor de b que no sea demasiado pequeño, habrán tres estados ligados. Estos niveles de energía, E_1, E_2, E_3, se encuentran muy próximos a los tres primeros niveles de energía en el esquema de términos de la fig. 19A, siempre que la constante b es *grande,* es decir, cuando las dos barreras de potencial representadas en la figura 20A son muy gruesas. Limitemos nuestras consideraciones al caso en que b es muy grande. Si b fuese infinito, el problema de la fig. 20A pasaría a ser idéntico al problema de la figura 19A. El continuo comenzaría a la energía 0 y existirían cuatro estados ligados, con las energías E_4. Para un valor b cualquiera finito, no importa cuán grande sea, tenemos sólo tres estados estrictamente estacionarios y el continuo empieza en $-B_\infty$. Sin embargo, supongamos que la anchura del pozo tiene dimensiones atómicas típicas, que su profundidad es del orden de 10 eV, en que la partícula es un electrón y que b es mayor que un kilómetro. En estas condiciones es difícil ver cómo la situación que corresponde a la fig. 20A puede, en realidad, diferir de la representada en la fig. 19A. El sentido común nos dice que el comportamiento de la partícula *en la vecindad del pozo* debe ser muy parecido en los dos casos y esperamos, por lo tanto, que el cuarto estado ligado que aparece en el esquema de términos de la fig. 19A debe manifestarse también de algún modo en el problema de la fig. 20A. Un examen matemático cuidadoso de la situación, que no emprenderemos aquí, confirma esta idea. Sin embargo, intentemos indicar una posible línea de análisis.

21 Comparemos el comportamiento, respecto del tiempo, de una función de onda de Schrödinger particular $\psi(x,t)$ en los dos casos. Supongamos que en el instante $t = 0$ la función de onda coincide con la cuarta función de onda representada en la figura 19A, que corresponde al cuarto nivel de energía $E_4 \cong -0{,}16B$. En otras palabras, tenemos

$$\psi(x,0) = \varphi_4(x) \tag{21a}$$

donde la función de onda $\varphi_4(x)$ es la representada por la línea de trazos en torno del nivel E_4 en la fig. 19A. Esta misma función de onda se representa también por una línea de trazos en la fig. 20A. Obsérvese que esta función tiende a cero con bastante rapidez fuera del pozo.

Para el problema en la fig. 19A es fácil resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (3b) sujeta a la

condición inicial dada por (21a). Dado que $\varphi_4(x)$ es una función propia del operador diferencial de Schrödinger tenemos, simplemente,

$$\psi(x,t) = \varphi_4(x) \exp\left(-\frac{itE_4}{\hbar}\right) \tag{21b}$$

lo que expresa la naturaleza estacionaria de $\psi(x,t)$. Podemos encontrar ahora la probabilidad, $P(t)$, de que la partícula se encuentre *dentro* del pozo:

$$P(t) = \int_{-a}^{a} dx\, |\psi(x,t)|^2 = P(0) \tag{21c}$$

probabilidad que, como vemos, es independiente del tiempo t, lo que de nuevo tradcce la naturaleza estacionaria de la función de onda $\psi(x,a)$. Obsérvese que la integral en (21c) se extiende únicamente al intervalo correspondiente al pozo, desde $-a$ a a.

22 Si intentamos ahora resolver el mismo problema para la situación que refleja la fig. 20A, es decir, con la misma condición inicial (21a), la solución *no* es entonces de la forma (21b), aunque se puede decir que es aproximadamente de esta forma. Si hallamos efectivamente la función de onda $\psi(x,t)$ dependiente del tiempo para el problema que corresponde a la fig. 20A y calculamos luego la probabilidad $P(t)$ de hallar la partícula *en* el pozo, es posible probar que, en vez de (21c), tenemos una relación aproximada de la forma

$$P(t) = \int_{-a}^{a} dx\, |\psi(x,t)|^2 \cong P(0) \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \tag{22a}$$

donde T es una constante positiva. Hay que subrayar que la relación (22a) es tan sólo *aproximada:* vale únicamente para valores de t que no son "demasiado grandes". La demostración detallada de este resultado nos llevaría demasiado lejos, pero intentaremos hacerlo plausible.

La interpretación del resultado (22a) es la de que si la partícula se encuentra "en el pozo" en el instante $t = 0$, con una energía aproximadamente igual a E_4, la partícula acabará por filtrarse, escapando del pozo. Si T es grande, como ocurre en el caso en que b lo es, tiene que pasar mucho tiempo para que la partícula escape y tenemos así un *estado aproximadamente estacionario.* El tiempo T es la vida media del estado. Si ha-

cemos que b tienda a infinito, T tenderá a infinito y obtenemos un estado *estrictamente* estacionario como en el problema de la fig. 19A. Si hacemos que b tienda a a, T decrece y en el límite $b = a$ el "estado" de energía E_4 pierde su significado en tanto que estado cuasiestacionario.

En vista de este resultado, no hay por qué no dibujar el cuarto nivel de energía E_4 en el esquema de términos de la fig. 20A *dentro* del continuo: corresponde a un estado aproximadamente estacionario. Tales niveles se suelen llamar ***niveles de energía virtuales.***

El resultado (22a) se puede comprender de manera cualitativa como consecuencia de un fenómeno de penetración de barrera, parecido a los que discutimos en el Cap. 7. Una partícula, de energía E_4, confinada dentro del pozo permanecería en él para siempre si fuera válida la mecánica clásica. Dentro del marco de la mecánica cuántica no ocurre así: la partícula puede filtrarse a través de las barreras a uno y otro lado del pozo. Cuanto más gruesas son éstas, más tiempo tardará la partícula en conseguirlo y tanto mayor será la constante T. Para un valor de T muy grande, la partícula tiene que rebotar dentro del pozo un número muy grande de veces y se comporta aproximadamente como si se encontrase en un estado estacionario.

23 En cada uno de los casos hasta ahora discutidos el problema de hallar los estados estacionarios puede considerarse como el problema de empalmar una función de onda que es oscilante entre dos puntos de retroceso clásicos. Para el estado fundamental, la función de onda tiene un máximo y ningún nodo. Para el estado siguiente la función de onda tiene dos extremos y un nodo. De manera general la función de onda correspondiente al m-ésimo estado tendrá m valores extremos y $(m - 1)$ nodos. Empleemos el número cuántico n para designar los estados estacionarios, donde n es el número de nodos (ceros) de la función de onda. Al estado fundamental se le asigna así el número cuántico $n = 0$, y al n-ésimo estado *excitado,* el número cuántico n. La función de onda que corresponde al número cuántico n posee $(n + 1)$ valores extremos.

Tratemos ahora de encontrar un método para determinar los niveles de energía *aproximados* de una partícula en un valle de potencial. Para ello consideremos la fig. 23A, que representa el potencial en un problema típico de esta clase.

La línea de trazo continuo define el potencial. La recta de trazos gruesos representa la energía, E_6, del sexto estado ex-

citado, y la línea oscilante de trazos, la correspondiente función de onda. Ésta se ha dibujado únicamente entre los puntos de retroceso x_1 y x_2 (que están definidos por $V(x_1) = V(x_2) = E_6$). Fuera de este intervalo la función de onda tiende asintóticamente al eje.

24 Supongamos que intentásemos representar una función de onda como la que aparece en la fig. 23A mediante una expresión de la forma

$$\varphi(x) = A(x) \operatorname{sen} [f(x)] \tag{24a}$$

donde $A(x)$ es una amplitud positiva y $f(x)$ una función de fase monótona creciente con x. Cada vez que la función de fase $f(x)$ toma un valor $k\pi$, donde k es un entero, la función de onda presenta un nodo. Consideremos el cambio Δf de la función de fase entre los dos puntos de retroceso,

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1) \tag{24b}$$

Mirando la fig. 23A vemos que, para la función de onda representada en la figura, el cambio de fase es de $(6 + \frac{1}{2})\pi$ aproximadamente. Nos dejaremos guiar por lo que sugiere esta figura y *supondremos* que la función de onda del n-ésimo estado excitado es tal que la función de fase $f(x)$ cambia en

$$\Delta f_n \cong (n + \tfrac{1}{2})\pi \tag{24c}$$

entre los puntos de retroceso.

La hipótesis (24c) se ha hecho por conveniencia, a fin de disponer de una fórmula concreta. Si quisiéramos ser más correctos, podríamos como máximo formular una *desigualdad*, a saber:

$$(n + 1)\pi \geqq \Delta f_n > n\pi \tag{24d}$$

de lo que el lector puede fácilmente convencerse por sí mismo. Si miramos la fig. 4C, vemos que en ese caso se alcanza el límite superior en (24d), mientras que en la fig. 19A nos acercamos más al límite inferior para el tercer estado excitado. Por consiguiente, la fórmula (24c) representa un compromiso.

25 Intentemos seguidamente deducir una expresión aproximada para el cambio de fase de la función de onda como función de la energía E. Consideremos primero una región en la

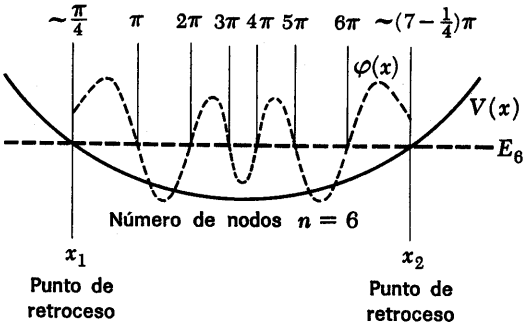


Fig. 23A Para ilustrar nuestra discusión del llamado método de la aproximación WKB para hallar estados estacionarios. Si se trata de encontrar el $(n + 1)$-ésimo estado, es decir, el n-ésimo estado excitado, buscaremos la energía E tal que se puedan ajustar $(n + \frac{1}{2})$ "medias ondas" entre los puntos de retroceso clásicos. La "longitud de onda local" en un punto depende de la energía total y del potencial en el mismo.

La curva continua representa el potencial, y la de trazos la función de onda (entre los puntos de rectroceso) para el sexto estado excitado. Los valores de la fase $f(x)$ se indican encima de los puntos de retroceso y sobre los nodos. En este caso particular el cambio total de fase (entre los puntos de retroceso) obedece a la relación $\Delta f \cong (n + \frac{1}{2})\pi = (6 + \frac{1}{2})\pi$.

cual el potencial es constante y tiene el valor V. En una región de este tipo y para $E > V$, la función de onda es de la forma

$$\varphi(x) = A \operatorname{sen}\left[(x - x_0) \frac{p}{\hbar} \right] \tag{25a}$$

donde A y x_0 son constantes y

$$p = \sqrt{2m(E - V)} \tag{25b}$$

Comparando (25a) con (24a), encontramos que

$$f(x) = (x - x_0) \left(\frac{p}{\hbar} \right) \tag{25c}$$

Para un desplazamiento dx hacia la derecha, el cambio de fase, df, es entonces

$$df = \left(\frac{p}{\hbar} \right) dx = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V)}\, dx \tag{25d}$$

Utilicemos ahora (25d) como expresión *aproximada* del cambio de fase con x en el caso en que $V(x)$ *no* es constante. Esta aproximación está tanto más justificada cuanto más lentamente varíe el potencial $V(x)$ con la posición. Dentro de esta aproximación, el cambio *total* de fase entre los dos puntos de retroceso x_1 y x_2 viene dado por

$$\Delta f = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dx} dx \cong \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx\, \sqrt{2m\,[E - V(x)\,]} \tag{25e}$$

Apliquemos esta relación al caso del $(n + 1)$-ésimo estado estacionario de energía $E = E_n$. El cambio de fase total está *también* dado aproximadamente por (24c) y si igualamos las dos expresiones correspondientes a dicho cambio, obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \sqrt{2m[E_n - V(x)\,]} \cong (n + \tfrac{1}{2})\pi\hbar \tag{25f}$$

26 La ecuación (25f) es una ecuación que nos permite determinar la energía E_n del $(n + 1)$-ésimo estado estacionario. Para conseguirlo determinamos primero los puntos de retroceso x_1 y x_2 en función de la energía E, considerada como un parámetro, resolviendo las ecuaciones

$$V(x_1) = V(x_2) = E, \qquad x_2 > x_1 \tag{26a}$$

Designemos las soluciones por $x_1(E)$ y $x_2(E)$. Calculamos luego la integral

$$g(E) = \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx \sqrt{2m[E - V(x)]} \tag{26b}$$

que nos da una función $g(E)$ de E. Las energías E_n se hallan finalmente como soluciones de la ecuación

$$g(E) = (n + \tfrac{1}{2})\pi\hbar \tag{26c}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$

El método *aproximado* que acabamos de encontrar para determinar los niveles de energía de una partícula en un "valle de potencial" como el que se presenta en la fig. 23A, se conoce con el nombre de *método WKB* *. En muchos casos da resultados bastante precisos, y es siempre útil cuando se trata de formarnos una idea aproximada de dónde se encuentran los niveles. Por su naturaleza, esta aproximación se parece mucho a la que nos permitió deducir la fórmula (36b) en el Cap. 7 para el coeficiente de transmisión de una barrera de potencial: integrales del mismo tipo aparecen, en efecto, en ambos casos.

Es interesante advertir que la ecuación (25f), que hemos deducido dentro del marco de la mecánica ondulatoria, es *idéntica* a la llamada condición cuántica de Bohr-Sommerfeld de la antigua teoría de Bohr. Comprendemos así hasta cierto punto por qué la teoría de Bohr resulta a veces bastante eficaz y podemos también ver por qué dicha teoría puede a veces fallar lastimosamente: la ecuación (25f) no es rigurosamente exacta, sino tan sólo una relación aproximada.

El oscilador armónico. Excitaciones de vibración y rotación de las moléculas

27 Apliquemos nuestro método de aproximación a uno de los más importantes problemas de valores propios: el de hallar los niveles de energía de un oscilador armónico unidimensional. Para este problema el potencial $V(x)$ viene dado por

$$V(x) = \frac{K}{2}x^2 \tag{27a}$$

* Llamado así por los nombres de G. Wentzel, H. A. Kramers y L. Brillouin. Véase H. A. Kramers, "Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung", *Zeitschrift für Physik* **39**, 828 (1926).

donde K es la "constante del resorte". Si la masa de la partícula es m, la frecuencia (angular) de oscilación, ω_0, viene dada en mecánica clásica por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{27b}$$

Para aplicar el procedimiento de cuantificación descrito en la sección 26, debemos hallar primero los puntos de retroceso. Estos puntos se encuentran situados simétricamente respecto del origen y podemos escribir $x_1 = -x_0$, $x_2 = x_0$, donde, de acuerdo con (26a), tenemos

$$x_0(E) = \sqrt{\frac{2E}{K}}, \qquad E = \frac{K}{2}x_0^2 \tag{27c}$$

Determinemos luego la función $g(E)$, definida como en (26b) por

$$g(E) = \int_{x_1}^{x_2} dx\ \sqrt{2m[E - V(x)]} = \int_{-x_0}^{x_0} dx\ \sqrt{Km(x_0^2 - x^2)} \tag{27d}$$

Introduciendo una nueva variable de integración θ definida por $x = x_0 \operatorname{sen} \theta$, obtenemos

$$g(E) = 2\ \sqrt{Km}\, x_0^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2\theta = \pi E \sqrt{\frac{m}{K}} \tag{27e}$$

donde se ha eliminado x_0 utilizando (27c). Substituyendo esta expresión de $g(E)$ en (26c), obtenemos el resultado muy simple

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\,\omega_0 \tag{27f}$$

para la energía E_n del $(n + 1)$-ésimo estado estacionario del oscilador armónico, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$, es un entero cualquiera no negativo.

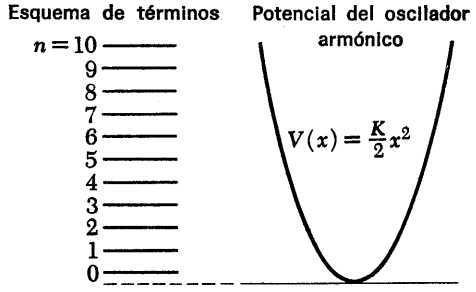


Fig. 28A El potencial (a la derecha) y el esquema de términos (a la izquierda) para un oscilador armónico. Medida a partir del fondo del "pozo" de potencial, la energía del $(n+1)$-ésimo nivel viene dada por $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0$, donde ω_0 es la frecuencia clásica. El método WKB da el mismo resultado que la teoría rigurosa

28 Ahora bien, resulta que la solución rigurosa de la ecuación de Schrödinger (4b) para el caso de un oscilador armónico, es decir, para una función potencial como la dada en (27a), conduce *precisamente* al resultado (27f).

Este libro no está dedicado a la resolución de casos especiales de la ecuación de Schrödinger y no intentaremos resolver al problema del oscilador armónico rigurosamente. Debido a una notable coincidencia, nuestro método de aproximación

nos da realmente el resultado correcto, lo que es más de lo que teníamos derecho a esperar.

La figura 28A presenta el esquema de términos (a la izquierda) y la función potencial (a la derecha) para un oscilador armónico. Obsérvese el igual espaciado característico entre los niveles. En la figura se ha elegido el fondo del pozo de potencial como origen de energías: esto es, naturalmente, un convenio arbitrario.

Si la partícula que oscila posee carga, cabe esperar transiciones radiativas entre los niveles de energía, los cuales, cuando se tienen en cuenta los procesos de radiación, no serían ya absolutamente estables para $n > 0$. Se puede demostrar que la regla de selección correspondiente a las *transiciones dipolares eléctricas* es la de que n debe cambiar en una unidad. De acuerdo con esto, el cuanto emitido ha de poseer la frecuencia clásica ω_0 para *cualquier* transición de esta naturaleza. Esto es también lo que hubiéramos predicho tomando como base la teoría clásica.

29 La teoría del oscilador armónico es importante en física, porque las ecuaciones del movimiento para muchísimos sistemas físicos, en apariencia sin relación alguna entre sí, son formalmente equivalentes a las ecuaciones del movimiento de un sistema de osciladores armónicos que interactúan entre sí tan sólo de manera muy débil. En una primera aproximación, en la cual se prescinde de la interacción entre los osciladores, la teoría cuántica de tales sistemas equivale matemáticamente a la teoría de un sistema de osciladores armónicos completamente independientes, teoría muy simple desde el punto de vista analítico. Es fácil estudiar este último tipo de sistemas, ya que cada oscilador oscila entonces por sí mismo, como si los demás no existiesen, y es claro que si podemos describir *uno* de tales osciladores, podemos describir un número cualquiera de ellos.

Como ejemplos de sistemas de este tipo cabe mencionar el campo electromagnético, un sólido en vibración elástica y muchos campos cuánticos. Además, todas las moléculas poseen modos vibracionales que pueden describirse con buena aproximación en términos de la teoría de los osciladores armónicos. De manera muy general podemos decir que la teoría del oscilador armónico se aplica a sistemas que satisfacen ecuaciones de movimiento *lineales,* o *aproximadamente lineales.*

30 La figura 30A ilustra la naturaleza *aproximadamente* armónica de un oscilador lineal molecular real, a saber, la molé-

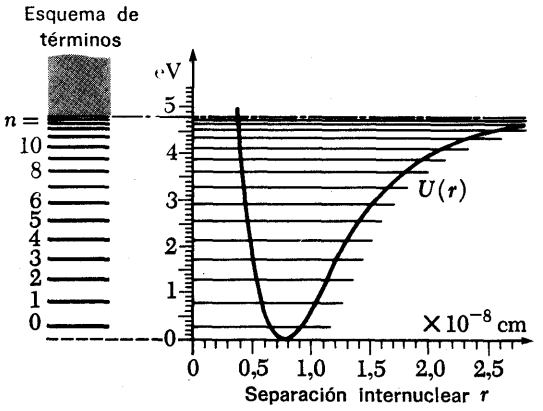


Fig. 30A La parte derecha de la figura representa el potencial internuclear efectivo $U(r)$ en la molécula de hidrógeno, y la parte izquierda, el correspondiente esquema de términos. Para los estados excitados más bajos, la molécula se comporta como un oscilador armónico. La curva de potencial cerca del mínimo es de forma aproximadamente parabólica y los niveles bajos se distribuyen más o menos como en el caso de un oscilador armónico. (Véase fig. 28A.) A medida que aumenta la separación internuclear, el potencial tiende a un valor constante. El continuo en el esquema de términos comienza en este nivel, que corresponde a la disociación de la molécula.

El potencial $U(r)$ no representa un tipo "nuevo" de fuerza: es la fuerza electromagnética disfrazada.

cula de hidrógeno. Esta molécula posee modos de excitación en los que cada protón oscila respecto del otro. Estos modos pueden explicarse en términos de un potencial intermolecular efectivo, que es el representado en la parte derecha de la figura. El gráfico de la energía potencial del sistema (en eV) en función de la distancia internuclear. La existencia de este potencial efectivo y su dependencia funcional respecto de la distancia entre núcleos se puede interpretar bien desde el punto de vista teórico. Discutiremos este potencial en la sección siguiente. Para estudiar los estados vibracionales de esta molécula diatómica, o de cualquier otra, podemos, por lo tanto, hallar primero el potencial efectivo y resolver luego la ecuación de Schrödinger unidimensional con este potencial para hallar los niveles de energía de los estados de vibración.

Hemos tomado el fondo del pozo de potencial como origen de energías, al igual que en la fig. 28A. Podemos suponer que a medida que la distancia entre núcleos r tiende a cero, el potencial tiende a infinito. En cambio, cuando r tiende a infinito, el potencial tiende a una constante, + 4,8 eV en la figura. A esta energía, la molécula se disocia y comienza el continuo, como se indica en el esquema de términos a la izquierda en la figura. La energía potencial, por lo tanto, no coincide idénticamente con la energía potencial de un oscilador armónico, pero si no vamos a niveles muy por encima del fondo del pozo de potencial, la curva tiene una forma aproximadamente parabólica. De hecho, cualquier curva lisa con un mínimo, y derivada segunda no nula en él, tiene una "forma aproximadamente parabólica" en la vecindad del mismo. En consecuencia, cabe esperar que el sistema se comporte, para excitaciones no demasiado altas, *aproximadamente* como un oscilador armónico. La diferencia entre un verdadero oscilador armónico y uno que lo es sólo aproximadamente puede verse comparando las figuras 28A y 30A. Los niveles *no* están espaciados por igual en el esquema de términos de la fig. 30A. Pero para pequeñas excitaciones la separación entre dos niveles consecutivos es la misma. Además, hay sólo un número *finito* de estados vibracionales de una molécula.

La energía de disociación de la molécula es la energía que hay que proporcionarle en su estado fundamental para provocar la disociación. De la fig. 30A se sigue que la energía de disociación de la molécula de hidrógeno es de unos 4,5 eV: ésta es la diferencia de energía entre el límite inferior del continuo y el estado fundamental.

Cuando la molécula se encuentra en su estado fundamental,

la distancia media entre los núcleos (protones) es de unos 0,75 Å. La función de onda de dicho estado se concentra claramente en torno del valor de r correspondiente al mínimo del potencial.

31 Discutamos ahora el significado del potencial internuclear efectivo que se representa en la parte derecha de la fig. 30A. A este potencial nos conduce un esquema de aproximación para el estudio de la estructura molecular conocido con el nombre de aproximación de Born-Oppenheimer. La idea es la siguiente. Dado que los núcleos (protones) tienen una masa mucho mayor que los electrones, se moverán en una molécula con una velocidad que es pequeña comparada con la de los electrones. En una *primera* aproximación podemos suponer que los núcleos se encuentran en reposo y a una distancia fija r_0 uno de otro. Para concretar, discutiremos el caso de la molécula de hidrógeno, pero consideraciones similares se aplican también a otras moléculas. El problema que hay que resolver en esta primera aproximación es entonces el de hallar el estado fundamental de los dos electrones en el campo electrostático de los dos protones. Supongamos que hemos resuelto este problema para una separación entre núcleos r arbitraria, en cuyo caso encontramos la energía $U(r)$ del estado fundamental del *sistema,* es decir, incluyendo la energía de repulsión electrostática entre los dos protones, en función de r. Para valores muy pequeños de esta separación, la energía $U(r)$ es grande y positiva, porque la energía de repulsión electrostática entre los dos protones tiende a $+\infty$ cuando la separación r entre ellos tiende a cero. Para valores muy grandes de r, la energía $U(r)$ tiende a un valor constante, U_∞, que es la energía del estado fundamental de los dos átomos de hidrógeno cuando están infinitamente alejados uno de otro. Resulta además que existe un intervalo de valores de r en el cual $U(r) < U_\infty$, como muestra la fig. 30A. La función $U(r)$ presenta un mínimo en el punto $r_0 \cong 0{,}75$ Å. La energía más baja posible de la molécula, admitida la hipótesis de que los protones no se mueven, es, por consiguiente, $U(r_0)$ y en este primer paso en la aproximación de Born-Oppenheimer este valor es la energía del estado fundamental de la molécula.

32 Sin embargo, los protones se mueven, y en el paso siguiente de la aproximación de Born-Oppenheimer este movimiento se tiene en cuenta. Se admite para ello que los protones oscilan el uno respecto del otro en torno de la "separación de equili-

brio" r_0. En este (lento) movimiento oscilatorio (que, naturalmente, ha de describirse de acuerdo con la mecánica cuántica) la energía potencial efectiva viene dada por la función $U(r)$ que se encontró en la fase primera del esquema de aproximación.

La función $U(r)$ es así la energía potencial efectiva en el segundo paso de la aproximación de Born-Oppenheimer, paso en el cual se tiene en cuenta la oscilación de los dos protones, cada uno *respecto* del otro. La interacción *fundamental* en términos de la que hemos de explicarnos la estructura molecular es, por lo tanto, la interacción electrostática entre las cuatro partículas cargadas que constituyen la molécula de hidrógeno. El potencial efectivo $U(r)$ aparece como una consecuencia de esta interacción fundamental y no describe, por lo tanto, un *nuevo* tipo de fuerza. Podemos decir que es la fuerza electrostática disfrazada. *Es éste un punto importante que hay que comprender.*

33 El problema de cómo hallar $U(r)$ explícitamente está mucho más allá de lo que se persigue en este libro. Sin embargo, intentemos explicarnos, de modo muy cualitativo, cómo es que $U(r)$ tiene un mínimo. Para ello hay que llegar al convencimiento de que existen configuraciones de las partículas en la molécula en las que la energía electrostática es menor (es decir, más negativa) que para dos átomos de hidrógeno separados por una distancia infinita, si bien las distancias electrón-protón no son menores en la molécula que en los átomos. Ciertamente, es ésta una condición necesaria, pero no suficiente, para que exista el enlace molecular.

Consideremos la configuración representada en la fig. 33A en la cual los electrones y los dos protones están colocados en los vértices de un cuadrado cuyos lados tienen la longitud a. Las rectas simbolizan las interacciones electrostáticas entre los seis pares de partículas. En esta configuración particular la energía potencial electrostática total E'_{pot} vale

$$E'_{\text{pot}} = +2\frac{e^2}{a\sqrt{2}} - 4\frac{e^2}{a} = \frac{e^2}{a}(\sqrt{2} - 4) \tag{33a}$$

Esta energía potencial ha de compararse con la energía *potencial* total E''_{pot} de los dos átomos de hidrógeno separados entre sí por una distancia muy grande, energía que viene dada por

$$E''_{\text{pot}} = -2\frac{e^2}{a_0} \tag{33b}$$

donde a_0 es el radio de Bohr. En el caso particular en que elegimos $a = a_0$, la *diferencia* de las dos cantidades E'_{pot} y E''_{pot} es *negativa,* es decir,

$$\Delta E'_{\text{pot}} = E'_{\text{pot}} - E''_{\text{pot}} = \frac{e^2}{a_0}(\sqrt{2} - 2) \cong -1.2R_\infty \qquad (33c)$$

donde R_∞ es la constante de Rydberg, $R_\infty = e^2/(2a_0) \cong 13{,}6$ eV.

Hemos encontrado así una configuración especial para la que ΔE_{pot} es negativa. Sin embargo, es claro que existen configuraciones "vecinas" tales que ΔE_{pot} es también negativa: no es necesario que las partículas se encuentran en los vértices de un cuadrado.

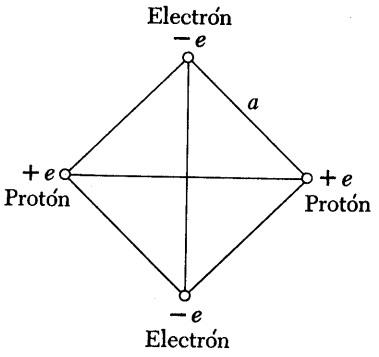


Fig. 33A Si en esta configuración se tiene $a = a_0$, la energía *potencial* será menor que la energía potencial total de dos átomos de hidrógeno separados por una gran distancia. Las distancias electrón-protón son entonces las mismas para esta "molécula" que en el átomo de hidrógeno y podemos imaginar esta configuración como la que resulta cuando dos átomos de hidrógeno se juntan. Este ejemplo muestra que la fuerza entre dos átomos de hidrógeno *pudiera* ser atractiva, pero en modo alguno *prueba* que pueda existir de hecho una molécula estable.

34 La energía *total* de la molécula de hidrógeno es la suma de la energía potencial y de la energía cinética. Si recordamos ahora nuestra discusión en la sección 14, capítulo 6, acerca de lo que implica la relación de indeterminación para la estructura del átomo de hidrógeno, advertimos que a los electrones en la molécula de hidrógeno debe dárseles "espacio suficiente" dentro de la molécula, porque de otro modo la relación de indeterminación exige que sus impulsos, y con ellos sus energías cinéticas, sean grandes. En nuestro estudio del átomo de hidrógeno se llegó a la conclusión de que si la indeterminación en la posición del electrón es del orden de a_0, lo que significa que "ocupa" una región de tamaño lineal a_0, la energía cinética será del orden de R_∞. Las mismas consideraciones son aplicables a la molécula de hidrógeno: si la energía cinética ha de ser de este orden de magnitud, debemos permitir que los electrones ocupen una región de tamaño a_0.

Para poder proseguir debiéramos ensayar varias regiones de confinamiento para los electrones, y para cada valor elegido debiéramos calcular las energías potencial y cinética, teniendo en cuenta lo que impone el principio de indeterminación. Esto es un tanto complicado y no intentaremos hacerlo aquí. La mejor manera de atacar este problema es ver de idear funciones de onda adecuadas que describan ambos electrones y calcular luego la energía total para estas funciones de onda de acuerdo con la teoría de Schrödinger. Dado que no hemos discutido funciones de onda para los partículas, no estamos preparados para intentar abordar el problema de esta manera *. Teniendo

* La primera teoría satisfactoria del enlace molecular se presentó en el trabajo de W. Heitler y F. London, "Wechselwirkung neutraler Atome und homöopolare Bindung nach der Quantenmechanik", ***Zeitschrift für Physik*** **44**, 455 (1927).

en cuenta lo que se dijo, el lector estará quizá dispuesto a creer que existe un mínimo para la energía total $U(r)$ considerada como función de la distancia r entre núcleos. Justamente como en nuestra discusión del átomo de hidrógeno el mínimo de la energía es el resultado de un compromiso: hay que conceder a los electrones espacio bastante para que la energía cinética se pueda mantener pequeña, pero hay que confinarlos en una región suficientemente pequeña para que sea apreciable la energía potencial. Hablando en términos aproximados, la energía potencial total es *negativa* e inversamente proporcional al "tamaño" de la molécula, mientras que la energía cinética total es *positiva* e inversamente proporcional al *cuadrado* del tamaño. Para cierto tamaño óptimo de la molécula, la suma de estas dos contribuciones a la energía tendrá un mínimo.

35 Intentemos ahora estimar las frecuencias de vibración "típicas" de una molécula (diatómica). La curva que representa la energía potencial es aproximadamente parabólica en la vecindad del mínimo (en $r = r_0$) y podemos intentar representar la función potencial $U(r)$ por la expresión

$$U(r) \sim \left(\frac{r - r_0}{a_0}\right)^2 R_\infty + U(r_0) \tag{35a}$$

Ésta es una hipótesis razonable. Para $r = r_0$ el segundo miembro toma el valor correcto $U(r_0)$. Para $|r - r_0| = a_0$ el potencial es mayor que $U(r_0)$, difiriendo de él en el valor R_∞. Dado que el tamaño de una molécula es del orden de a_0 y puesto que la energía de enlace es del orden de R_∞, cabe esperar que el potencial se comporte más o menos de esta manera.

El segundo miembro de (35a) es el potencial de un oscilador armónico. La "constante del resorte" K para este oscilador viene dada por

$$K \sim \frac{2R_\infty}{{a_0}^2} = \frac{\alpha^2 mc^2}{{a_0}^2} \tag{35b}$$

Supongamos que la masa efectiva del mismo es M. La frecuencia de vibración ω_v de la molécula es entonces

$$\omega_v = \sqrt{\frac{K}{M}} \sim \alpha^2 \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) \sqrt{\frac{m}{M}} \tag{35c}$$

donde hemos substituido la expresión $a_0 = \alpha^{-1}(\hbar/mc)$ por el radio de Bohr. Debemos subrayar que la estimación (35c) es solamente una estimación aproximada del orden de magnitud.

En nuestra discusión en el Cap. 2 acerca de las magnitudes características en física atómica, llegamos a la conclusión de que la cantidad

$$\omega_e = \alpha^2\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) \tag{35d}$$

puede considerarse como una frecuencia "típica" asociada con las transiciones *ópticas* en un átomo o en una molécula, es decir, con transiciones en las que cambia la configuración electrónica. Podemos entonces escribir (35c) en la forma

$$\omega_v \sim \omega_e\sqrt{\frac{m}{M}} \tag{35e}$$

La cantidad M es para todas las moléculas del orden de una masa nuclear, mientras que m es la masa del electrón. Las frecuencias electrónicas "típicas", ω_e, se encuentran en la región visible del espectro electromagnético. Como vemos, las frecuencias vibracionales "típicas" de las moléculas, ω_v, son menores al venir multiplicadas por el factor $\sqrt{m/M}$. Por consiguiente, se encontrarán en la región del infrarrojo próximo y esta predicción concuerda con las observaciones.

TABLA 35A. Frecuencias de vibración de algunas moléculas diatómicas

molécula	*frecuencia Hz*	*número de onda cm*$^{-1}$
C_2	$4{,}921 \times 10^{13}$	1641,35
N_2	$7{,}074 \times 10^{13}$	2359,61
O_2	$4{,}374 \times 10^{13}$	1580,36
NO	$5{,}708 \times 10^{13}$	1904,03
CO	$6{,}506 \times 10^{13}$	2170,21
IBr	$0{,}805 \times 10^{13}$	268,4
S_2	$2{,}176 \times 10^{13}$	725,68

36 Hallemos la masa efectiva M explícitamente para una molécula *diatómica* en la que las masas de los núcleos son M_1 y M_2. Los dos núcleos oscilan uno respecto del otro de tal manera que el centro de masa se encuentra sobre la recta que los une. Sea r la separación internuclear y r_1 y r_2 las distancias de los dos núcleos contadas a partir del centro de masa, conforme se indica en la fig. 36A. La energía cinética de este sistema viene entonces dada por

$$T = \tfrac{1}{2}M_1\dot{r}_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2\dot{r}_2^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}\right)\dot{r}^2 \tag{36a}$$

donde los puntos indican derivadas respecto del tiempo. La energía potencial del oscilador es la dada en función de r por (35a), y la energía cinética, por (36a) en función de $\dot{r}$. La masa efectiva M del oscilador es entonces el coeficiente de $\dot{r}^2/2$, o sea

$$M = \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} \tag{36b}$$

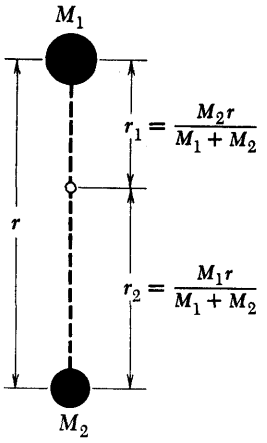


Fig. 36A Representación esquemática de una molécula diatómica. Las masas de los núcleos son M_1 y M_2. El pequeño círculo blanco sobre la recta que une los núcleos indica la posición del centro de masa del sistema. En el texto consideramos excitaciones de vibración en las que los núcleos oscilan el uno respecto del otro.

y ésta es la expresión que debe substituirse en (35c). La cantidad M se conoce con el nombre de *masa reducida* del sistema de dos cuerpos.

37. Dado que no disponemos de una expresión precisa para la "constante del resorte" K, que hemos *estimado* en la sección 35, no es posible hallar la frecuencia de vibración *exacta* de la molécula diatómica. Sin embargo, podemos predecir con muy buena aproximación el *efecto isotópico.* Consideremos primero una molécula en la cual las masas nucleares son M'_1 y M'_2, y la frecuencia de vibración, ω'_v. Consideremos luego una molécula idéntica a ésta, es decir, una molécula químicamente idéntica, salvo que en ella substituimos los isótopos originales por otros de masas M_1'' y M_2''. Sea ω_v'' la frecuencia de vibración para esta molécula. La constante elástica K es la misma para ambas moléculas (dentro de la aproximación de Born-Oppenheimer), porque hemos hallado el potencial efectivo $U(r)$ ignorando el movimiento nuclear. De aquí se sigue que las frecuencias ω'_v y ω''_v deben estar ligadas por

$$\frac{\omega'_v}{\omega''_v} = \sqrt{\frac{M_1'M_2'(M_1' + M_2')}{M_1''M_2''(M_1'' + M_2'')}} \tag{37a}$$

Se ha encontrado que esta predicción concuerda muy bien con las observaciones. El que esto sea así aumenta nuestra creencia en la corrección esencial de las simples ideas que hemos presentado.

38 Consideremos ahora las *excitaciones* de rotación de una molécula. Con cada molécula está asociado un sistema de estados de rotación discretos de la misma, estados en los que la molécula gira como un todo en torno de cierto eje. Veamos de estimar el orden de magnitud de las diferencias de energía asociadas con las excitaciones rotacionales.

Para simplificar consideremos una molécula diatómica, como la representada esquemáticamente en la figura 36A. Supongamos que en un estado particular de rotación la molécula gira con una velocidad angular ω_a en torno de un eje que pasa por el centro de masa de la misma y *perpendicular* al eje de simetría de la molécula, es decir, a la recta que une los dos núcleos. Prescindimos por el momento del movimiento de vibración y consideramos así la molécula como una pesa gimnástica rígida. Con la notación de la figura 36A, la velocidad del núcleo 1 es entonces $\omega_a r_1$, y la del núcleo 2, $\omega_a r_2$. La energía

cinética T_r del movimiento de rotación viene dada, en consecuencia, por

$$T_r = \tfrac{1}{2}M_1(\omega_a r_1)^2 + \tfrac{1}{2}M_2(\omega_a r_2)^2 \tag{38a}$$

Expresando r_1 y r_2 en función de las masas M_1 y M_2 y de la separación internuclear r, como en la fig. 36A, obtenemos

$$T_r = \tfrac{1}{2}\left(\frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}\right)(\omega_a r)^2 = \tfrac{1}{2}M(\omega_a r)^2 \tag{38b}$$

donde M es la masa reducida de la molécula tal como se definió en la ec. (36b).

El momento de inercia, I, de la molécula respecto del eje de rotación es

$$I = M_1r_1^2 + M_2r_2^2 = Mr^2 \tag{38c}$$

Determinemos también el momento cinético J de la misma respecto del eje de rotación. J viene dado por

$$J = M_1r_1^2\omega_a + M_2r_2^2\omega_a = Mr^2\omega_a = I\omega_a \tag{38d}$$

Podemos estonces escribir la energía cinética de la molécula en la forma

$$T_r = \frac{J^2}{2I} \tag{38e}$$

donde hemos eliminado la velocidad angular ω_a que aparece en la expresión (38b) utilizando las relaciones (38d).

39 Cabe presumir que los momentos cinéticos que encontramos en las moléculas serán típicamente del orden de $\hbar$. De aquí se sigue que las energías típicas asociadas con las excitaciones de rotación serán del orden de magnitud de

$$T_r \sim \frac{\hbar^2}{2I} \tag{39a}$$

Designando la correspondiente frecuencia por ω_r, podemos escribir

$$\omega_r = \frac{T_r}{\hbar} \sim \frac{\hbar}{2I} \tag{39b}$$

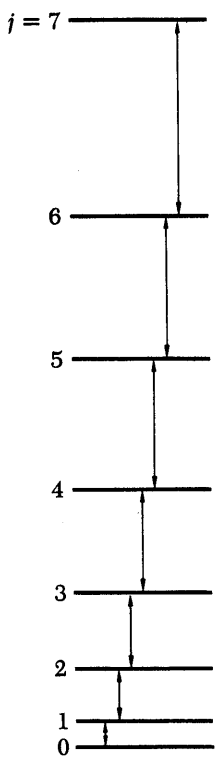


Fig. 39A Esquema de términos en el que se representan los ocho primeros niveles de energía de rotación de una molécula diatómica (considerando la molécula como una pesa gimnástica rígida). De acuerdo con la ecuación (39c) la energía E_j del estado en que el momento cinético es j viene dada por $E_j = Bj(j+1)$, donde $B = \hbar^2/(2I)$ es la constante *rotacional* de la molécula. Las flechas verticales representan transiciones dipolares eléctricas en las que j cambia en una unidad.

TABLA 39B. Constante rotacional B_e para algunas moléculas diatómicas

molécula	B_e (*MHz*)	r (Å)
BrF	10700	1,76
KCl	3800	2,79
KBr	2400	2,94
$C^{12}O^{16}$	57900	1,13
OH	566000	0,97
NO	51100	1,15

La constante B (véase fig. 39A) se expresa aquí en términos de la correspondiente frecuencia $B_e = B/h = h/(8\pi^2 I)$, en megahertz. La tercera columna da la distancia r entre núcleos.

De acuerdo con (38b), el momento cinético viene dado por $J = I\omega_a$, y puesto que se supuso que $J \sim \hbar$, resulta $\omega_a \sim \hbar/I$. La velocidad angular ω_a y la frecuencia rotacional característica ω_r definida por (39b) son así del mismo orden de magnitud, como cabía esperar basándonos en un modelo clásico.

La teoría cuántica completa de la molécula en forma de pesa gimnástica conduce a una expresión muy simple para los niveles de energía. Cada estado de rotación está caracterizado por un valor entero no negativo del *número cuántico del momento cinético j*, y la energía del estado viene dada por

$$E_j = \frac{j(j+1)\hbar^2}{2I} \tag{39c}$$

donde $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Aunque no deduciremos aquí esta fórmula, el autor tiene la impresión de que, todos modos, merece la pena citarla.

40 La separación entre los núcleos en una molécula cualquiera es del orden del radio de Bohr a_0. Por lo tanto, $I \sim Ma_0^2$ constituye una estimación del momento de inercia y si substituimos esta expresión de I en (39b), obtenemos

$$\omega_r \sim \frac{\hbar}{2Ma_0^2} \tag{40a}$$

Es instructivo formular esta estimación en términos de la frecuencia electrónica característica $\omega_e = \alpha^2(mc^2/\hbar)$. Dado que el radio de Bohr vale $a_0 = \alpha^{-1}(\hbar/mc)$, podemos escribir (40a) en la forma

$$\omega_r \sim \omega_e \left(\frac{m}{M}\right) \tag{40b}$$

como estimación del orden de magnitud. (Un factor dos, naturalmente, carece de importancia en una estimación como ésta.)

Comparemos las frecuencias de rotación características con las frecuencias vibracionales típicas estimadas en la sección 35. Combinando las estimaciones (35e) y (40b), podemos escribir

$$\omega_e : \omega_v : \omega_r \sim 1 : \sqrt{m/M} : (m/M) \tag{40c}$$

En esta relación ω_e es la frecuencia de transición electrónica "típica", ω_v la frecuencia de transición de vibración "típica" y ω_r la frecuencia de transición rotacional "típica". Conforme ve-

mos, las frecuencias de transición de rotación son mucho menores que las correspondientes frecuencias electrónica y vibracional. Aquéllas se encuentran en la región del infrarrojo lejano (en la de las microondas).

41 La idea clave en la explicación completa del muy complicado *espectro de bandas* óptico emitido por las moléculas es la de que cualquier molécula posee tres tipos diferentes de excitación: *excitaciones electrónicas,* caracterizadas por la frecuencia electrónica ω_e, *excitaciones de vibración,* caracterizadas por la frecuencia ω_v y *excitaciones rotacionales,* que lo están por la frecuencia ω_r. Si simplificamos la situación al límite, podemos imaginar que tenemos tres sistemas de energías correspondientes a los tres tipos de excitación diferentes. La energía de un estado estacionario de una molécula es así la suma de tres términos: un término electrónico, un término de vibración y un término rotacional. Al experimentar transiciones entre los varios niveles de energía posibles, la molécula emite o absorbe fotones. En una transición óptica el estado (configuración) electrónico de la molécula cambia y, en general, al mismo tiempo cambiará también los estados de vibración y de rotación. El número de frecuencias de transición posibles, por lo tanto, es muy grande y el espectro presenta bandas constituidas por rayas extremadamente juntas. (Véase, por ejemplo, la fig. 6B, capítulo 3.)

Es posible estudiar los espectros de vibración y de rotación por separado, es decir, estudiar transiciones en las cuales el estado *electrónico* de la molécula no cambia. Después de la segunda guerra mundial se introdujeron nuevos métodos para este estudio y la espectroscopia de microondas quedó establecida como una rama de la espectroscopia que complementa la antigua rama de la espectroscopia óptica.

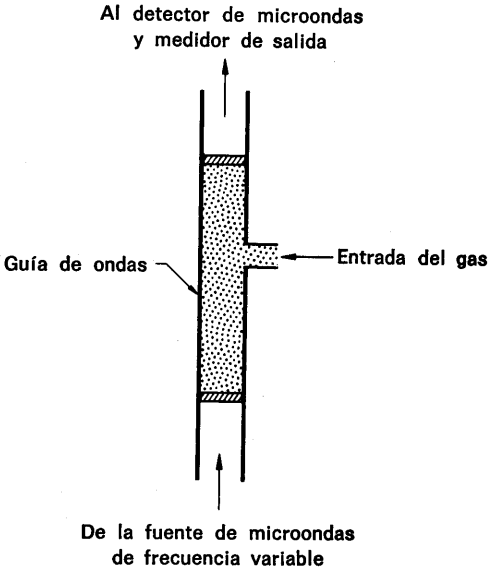


Fig. 41A Representación muy esquemática de un dispositivo que se puede utilizar en espectroscopia de microondas. Las moléculas que hay que estudiar se presentan en forma de gas que llena una porción de una guía de ondas. La radiación (en la región de las microondas) pasa por la guía de ondas y la cantidad de la primera que se transmite se mide por el detector y el medidor de salida. En las frecuencias de resonancia de la molécula, el gas absorbe la radiación de microondas, y midiendo la absorción en función de la frecuencia se puede determinar las frecuencias de resonancia.

Por "región de las microondas" entendemos la región de longitudes de onda entre, aproximadamente, 1 mm y 1 metro.

Sistemas hidrogenoides

42 Consideremos ahora un problema tridimensional, a saber, el problema de hallar los niveles de energía del átomo de hidrógeno. No *resolveremos* realmente este problema en el presente curso, pero aclarará las cosas considerar ciertos aspectos del mismo.

De hecho consideraremos un problema algo más general. Una partícula de masa m y carga $-e$ se mueve en el potencial electrostático debido a un núcleo de carga $+eZ$. Supondremos que el núcleo no se mueve, sino que permanece fijo en

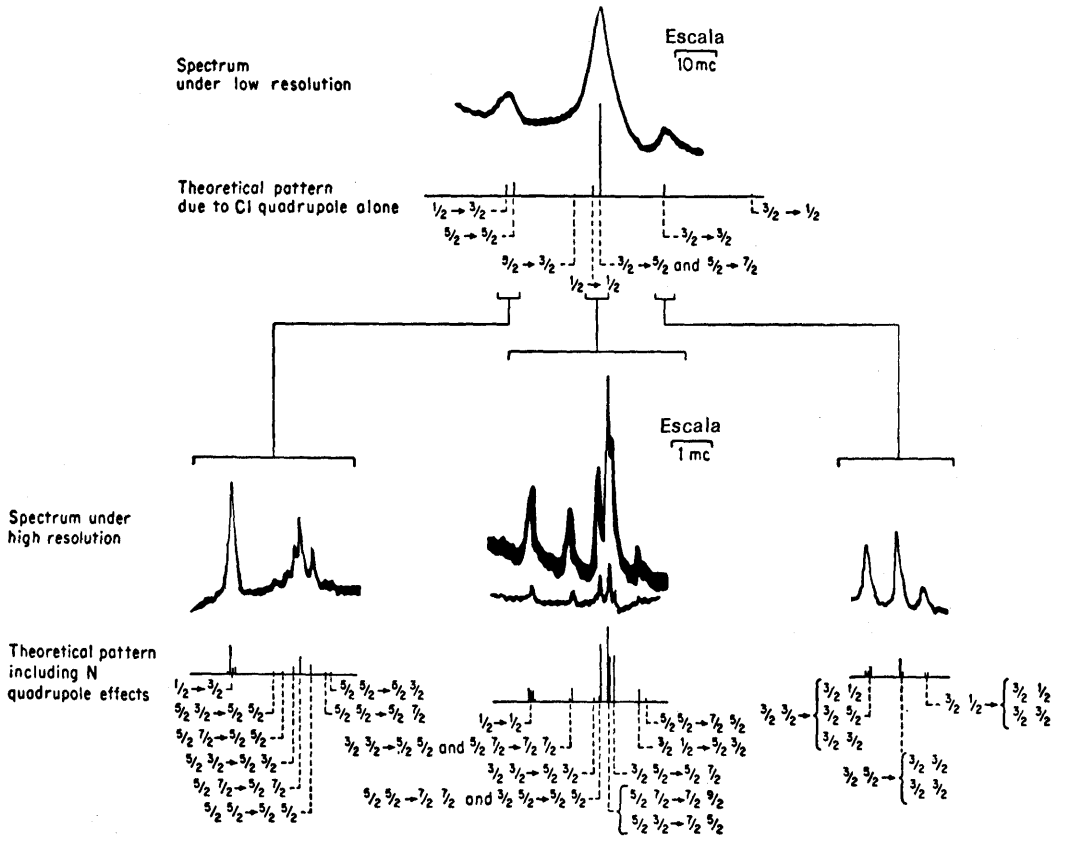


Fig. 41B Espectro de microondas para resoluciones baja y alta que muestran la transición de $J = 1$ a $J = 2$ en la molécula triatómica $Cl^{35}C^{12}N^{14}$. Conforme vemos, esta raya de transición de microondas presenta una estructura fina: está formada por varias componentes muy próximas entre sí. La frecuencia del pico central es de 23883,30 MHz. Las curvas en diente de sierra muestran lo que realmente se mide: la absorción de potencia de las microondas en función de la frecuencia.

El espectro en la parte inferior nos da buena idea de la alta precisión que se puede conseguir en la espectroscopia de microondas. Obsérvese asimismo cuán bien puede explicarse todo teóricamente.

Esta figura aparece en la página 171 del libro de C. H. Townes y A. L. Schawlow, *Microwave Spectroscopy* (McGraw-Hill Book, Co., Nueva York, 1955). Véase también C. H. Townes, A. N. Holden y F. R. Merrit, "Microwave Spectra of Some Linear XYZ Molecules", *Physical Review* **74**, 1113 (1948). *(Ilustración cedida por el profesor C. H. Townes, Berkeley.)*

el origen. En realidad, el núcleo se mantendría fijo solamente si fuera infinitamente pesado. Sin embargo, si la razón M/m de la masa nuclear M a la masa del "electrón" m es muy grande, en primera aproximación podemos considerar el núcleo como partícula de masa infinita.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para nuestro problema es entonces de la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi(\mathbf{x}) - \frac{e^2Z}{x}\varphi(\mathbf{x}) = E\varphi(\mathbf{x}) \tag{42a}$$

donde $x = |\mathbf{x}|$.

43 Introduzcamos la nueva variable independiente y definida por

$$\mathbf{x} = \frac{\hbar}{mc\alpha Z}\mathbf{y}, \qquad \text{donde } \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \tag{43a}$$

e introduzcamos también un nuevo "parámetro de energía" λ dado por

$$E = (\alpha Z)^2 mc^2 \lambda \tag{43b}$$

al igual que la función de onda $f(y)$ definida así:

$$\varphi(x) = f(y) \tag{43c}$$

Escribiendo la ecuación diferencial (42a) en términos de nuestras variables y parámetros nuevos, obtenemos

$$-\frac{1}{2}\nabla_y^2 f(y) - \frac{1}{y} f(y) = \lambda f(y) \tag{43d}$$

donde ∇_y^2 representa el operador diferencial de Laplace respecto de la variable y.

La ecuación (43d) es la "forma sin dimensiones" de la ecuaci0n de Schrödinger (42a). Carece de dimensiones en el sentido de que las constantes físicas m, e, $\hbar$, c y Z ya no aparecen en ella. Si podemos resolver (43d), será posible introducir de nuevo las antiguas variables utilizando las ecs. (43a) a (43c) y las dos ecuaciones (43d) y (42a) son, evidentemente, por completo equivalentes.

44 Nos encontramos así frente el problema puramente matemático de resolver la ecuación (43d). No la resolveremos, sino que nos limitaremos a dar los resultados, que son los siguientes *:

I. La ecuación de Schrödinger (43d) tiene soluciones de cuadrado integrable solamente cuando el parámetro λ es de la forma

$$\lambda_n = -\frac{1}{2n^2} \tag{44a}$$

donde n es un entero positivo cualquiera. Este entero se llama *número cuántico principal* de un átomo hidrogenoide. (No hay que confundirlo con el número cuántico n que introdujimos en nuestra discusión del oscilador cuántico.)

* Naturalmente, la solución del problema del átomo de hidrógeno se deduce en cualquier texto superior o intermedio de mecánica cuántica. Por vez primera fue presentada por Schrödinger en su primer trabajo sobre mecánica ondulatoria: "Quantisierung als Eigenwertproblem", *Annalen der Physik* **79**, 361 (1926).

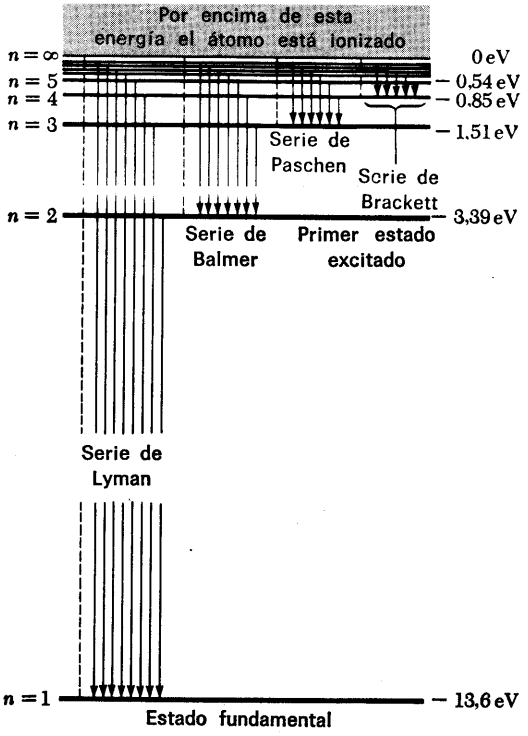


Fig. 45A Esquema de términos del átomo de hidrógeno. Con muy buena aproximación, la energía E_n de un nivel cuyo número cuántico principal es n viene dada por $E_n = -R_H/n^2$, donde $R_H = (1 + m/M_p)^{-1} R_\infty = 13{,}5976$ eV.

Las rectas verticales indican posibles transiciones dipolares eléctricas. Estas transiciones se han agrupado en cuatro series que llevan los nombres de los primeros físicos que trabajaron en espectroscopia. Las rayas de Lyman se encuentran todas en la región ultravioleta. Las rayas de la serie de Balmer aparecen en la región visible. Véase la fig. 1B, Cap. 3, para el aspecto del espectro visible del hidrógeno y las longitudes de onda de algunas de las rayas de Balmer.

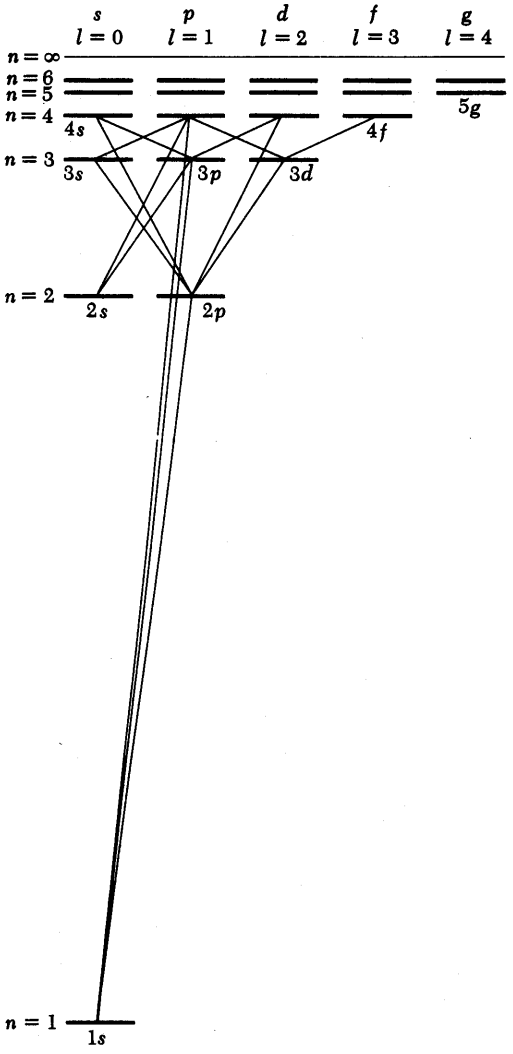


Fig. 45B Esquema de términos de un átomo hidrogenoide. Los niveles se han agrupado en columnas correspondientes a valores diferentes del número cuántico del momento cinético orbital. Se han representado todas las transiciones dipolares eléctricas entre niveles cuyos números cuánticos principales son cuatro o menores que cuatro. En ellas l debe cambiar en una unidad. Obsérvese que el estado $2s$ no puede decaer por transición dipolar eléctrica: el nivel es metaestable.

Compárese este esquema de términos con el esquema de términos de elementos alcalinos en las figs. 28A y 32A, cap. 3. Son similares desde más de un punto de vista.

II. El continuo empieza en $\lambda = 0$. De aquí se sigue, teniendo en cuenta (43b), que el átomo está ionizado por encima de la energía $E = 0$.

III. Para un valor de n dado cualquiera y con $\lambda = \lambda_n$, la ecuación diferencial (43b) tiene n^2 soluciones linealmente independientes. Estas soluciones pueden clasificarse mediante un número cuántico l que describe las propiedades de simetría espacial de las funciones de onda. Por ejemplo, todas las soluciones para las que $l = 0$ presentan simetría esférica. El número cuántico l varía entre 0 y $(n - 1)$, y para cada par (n, l) la ecuación tiene $(2l + 1)$ soluciones linealmente independientes, que corresponden a diferentes *orientaciones* del átomo. Al número cuántico l puede darse también la interpretación física de medida del momento cinético del átomo y, por ello, se le llama *número cuántico del momento cinético orbital* *.

45 En vistas de estos hechos matemáticos, podemos ahora concluir que los posibles niveles de energía del átomo (en su estado no ionizado) vienen dados por

$$E_n = -\frac{1}{2}(\alpha Z)^2 mc^2 \left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{45a}$$

Para satisfacer la curiosidad del lector, citaremos *una* solución explícita de la ecuación de Schrödinger (42a), a saber, la función de onda del estado fundamental. En este caso se tiene $n = 1$ y, en consecuencia, $l = 0$, lo que significa que la función de onda posee simetría esférica. Explícitamente, la función de onda viene dada por

$$\varphi_{10}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{xZ}{a_0}\right) \tag{45b}$$

donde $a_0 = \hbar/(mc\alpha)$.

No estaría de más que el lector comprobase por sí mismo que la función de onda $\varphi_{10}(\mathbf{x})$ satisface efectivamente la ecuación (42a) y que está normalizada a la unidad, lo que significa que la integral extendida a todo el espacio del cuadrado de la función de onda es igual a 1.

46 Hasta aquí nuestra discusión se ha basado en la hipótesis de que el núcleo permanece fijo. Podemos generalizar muy fá-

* Compárese con la discusión en las Secs. 30-31 y 54, Cap. 3.

cilmente nuestra discusión al caso de que también el núcleo se mueve. Sea M la masa del núcleo y m la masa del electrón. La masa reducida μ del sistema núcleo-electrón viene entonces dada por

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = m\left(1+\frac{m}{M}\right)^{-1} \tag{46a}$$

de acuerdo con nuestra discusión en la sección 36.

El problema de estudiar el movimiento de dos partículas en su sistema del centro de masa bajo la influencia de una fuerza que se puede representar por un potencial que depende tan sólo de la distancia entre las dos partículas, es completamente equivalente al problema de estudiar el movimiento de una partícula única (ficticia) cuya masa es la masa reducida del sistema. Esta partícula se mueve en un campo de fuerza *fijo* que deriva de un potencial descrito por el potencial original en función de la distancia entre las dos partículas. Para tener en cuenta el movimiento nuclear, hemos de substituir en todas nuestras fórmulas m por la masa reducida μ. Los niveles de energía del sistema vienen dados por

$$E_n = -\frac{1}{2}(\alpha Z)^2 \mu c^2 \left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{46b}$$

Podemos también escribir esta expresión en la forma

$$E_n = -\left(\frac{\mu}{m}\right) Z^2 R_\infty \left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{46c}$$

donde R_∞ es la constante de Rydberg

$$R_\infty = \tfrac{1}{2}\alpha^2 mc^2 \cong 13{,}6 \text{ eV} \tag{46d}$$

Se advierte desde luego que en el caso del átomo de hidrógeno (para el cual $m/M \cong 1/1836$) la masa reducida está muy próxima a la masa del electrón. Conforme podemos ver en la ecuación (46a), la diferencia es de 1 parte en dos mil, aproximadamente.

Observemos también que la masa reducida del átomo de deuterio no coincide con la masa reducida del átomo de hidrógeno, razón por la cual el espectro del deuterio difiere ligeramente del espectro del hidrógeno. (Véase prob. 7, Cap. 2.) Es fácil observar la diferencia espectroscópicamente.

47 Nuestras fórmulas (46c) describen los niveles de energía de los "sistemas hidrogenoides" en general, por los que entendemos los sistemas enlazados de dos partículas cuyas cargas son opuestas, con tal que el enlace se deba solamente a la atracción coulombiana entre ellas. Haciendo $Z = 2$ en (46c), obtenemos los niveles de energía del helio simplemente ionizado, y haciendo $Z = 3$, los niveles de energía del litio doblemente ionizado. Las masas reducidas correctas, que difieren muy poco de la masa del electrón, se obtienen mediante la ec. (46a), donde M representa la masa del núcleo de helio o del núcleo de litio.

Los "átomos" en los que un electrón está reemplazado por un muón (mesón-mu) se conocen con el nombre de *átomos muónicos*. Estos átomos se forman cuando un muón negativo es capturado por el campo de Coulomb de un núcleo a medida que el muón pierde velocidad en la materia macroscópica. Haremos notar primero que el radio de Bohr de un "átomo" es *inversamente* proporcional a la masa del "electrón". Esto significa que un átomo muónico debe ser unas 200 veces más pequeño que un átomo ordinario, porque la masa del muón es aproximadamente, unas 200 veces mayor que la del electrón. Supongamos ahora que un muón es capturado por, digamos, un átomo de aluminio. Por emisión de radiación electromagnética, el sistema pasa rápidamente a un estado en el cual el muón se encuentra muy próximo al núcleo de aluminio, es decir, el paquete de ondas del muón está mucho más concentrado en torno del núcleo que el paquete de ondas de los electrones. El muón y el núcleo de aluminio forman entonces un pequeño átomo muónico *dentro* de la "nube" de electrones, y este átomo muónico es, evidentemente, un sistema hidrogenoide. Que efectivamente se forman átomos muónicos de la manera que acabamos de describir ha sido probado experimentalmente mediante la observación de la radiación electromagnética emitida por estos "átomos"*. Esta radiación se encuentra siempre en la región de los rayos X, como podemos ver considerando (46b): la masa reducida es en este caso próxima a la masa del *muón*.

Uno de los subtítulos en el capítulo 5 era: "No hay sino una constante de Planck". Observemos aquí que la comprobación experimental de la predicción teórica para los niveles de energía de los átomos muónicos es una buena prueba en favor de la universalidad de la relación de De Broglie.

* V. L. Fitch y J. Rainwater, "Studies of X-rays from Mu-Mesonic Atoms", *The Physical Review* **92**, 789 (1953).

48 Resumamos nuestra discusión acerca de los "átomos" hidrogenoides como sigue. El sistema está formado por dos partículas, una de carga $-e$ y otra de carga $+eZ$. Sin resolver explícitamente la ecuación de Schrödinger para *dos* partículas que describe el sistema (y que ni tan sólo hemos escrito), podemos llegar a la conclusión de que sus niveles de energía discretos vienen dados por

$$E_n = (\alpha Z)^2 (\mu c^2) \lambda_n \tag{48a}$$

donde μ es la masa reducida, α la constante de estructura fina y donde los números sin dimensiones λ_n son los valores propios definidos por la ecuación de Schrödinger sin dimensiones (43d) correspondiente a una partícula. Hallar los números λ_n es un problema puramente matemático que hemos dejado para un curso posterior, aunque sí hemos revelado que estos números vienen dados precisamente por $\lambda_n = -1/(2n^2)$.

En otras palabras: si conocemos el espectro del hidrógeno, conocemos también los espectros del deuterio, del helio simplemente ionizado, del litio doblemente ionizado y de todos los átomos muónicos en los que un muón se encuentra ligado por el campo electrostático de un núcleo cualquiera. Esto es así porque pudimos descubrir cómo los niveles de energía han de depender de los parámetros físicos que importan, tales como el número de carga Z y las masas de las dos partículas. Nuestra discusión ilustra el poder de simples argumentos dimensionales.

*Un tema avanzado: Las variables posición e impulso en la teoría de Schrödinger**

49 Intentemos ahora descubrir, dentro de nuestra simple teoría de Schrödinger, los objetos matemáticos que en mecánica cuántica representan el papel de las variables clásicas posición e impulso.

Sea $\psi(x,t)$ una función de onda de Schrödinger normalizada a la unidad. En esta sección y en la que sigue consideraremos la función de onda en un instante fijo t; por lo tanto, podemos suprimir la variable tiempo y escribir, para abreviar, $\psi(x)$.

Dado que $|\psi(x)|^2$ es una densidad de probabilidad que de-

* Puede omitirse en una primera lectura.

fine la distribución probabilística del observable físico x, los valores medios de x y x^2 deben venir dados por

$$\mathrm{M}(x) = \bar{x} = \langle\psi|x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x|\psi(x)|^2 \tag{49a}$$

$$\mathrm{M}(x^2) = \langle\psi|x^2|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2|\psi(x)|^2 \tag{49b}$$

La notación $\langle\psi|x|\psi\rangle$, que se lee "valor esperado de x en el estado ψ", es de empleo muy común en mecánica cuántica.

Si ahora $\bar{x}$ designa el valor medio de x, definimos la *indeterminación en x*, o la desviación cuadrática media de x, por

$$\Delta x = \sqrt{\mathrm{M}\left((x - \bar{x})^2\right)} \tag{49c}$$

o bien

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (x - \bar{x})^2\, |\psi(x)|^2 = \mathrm{M}(x^2) - 2\bar{x}\,\mathrm{M}(x) + \bar{x}^2 \tag{49d}$$

de donde se sigue que

$$(\Delta x)^2 = \mathrm{M}\left((x - \bar{x})^2\right) = \mathrm{M}(x^2) - [\mathrm{M}(x)]^2 \tag{49e}$$

Obsérvese que cuanto más concentrada se encuentra la función de onda $\psi(x)$ en torno de la posición media $\bar{x}$, tanto menor es Δx. Un estado en el que se conoce *exactamente* la posición, es decir, para el cual $\Delta x = 0$ no se puede conseguir físicamente.

El valor medio de cualquier función de x se calcula por analogía con las fórmulas (49a) y (49b) que dan los valores medios de x y x^2. En particular, el valor medio de la energía potencial es

$$\mathrm{M}(E_{\mathrm{pot}}) = \mathrm{M}\left(V(x)\right) = \langle\psi|\,V(x)\,|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, V(x)\,|\psi(x)|^2 \tag{49f}$$

50 Meditemos con mucho cuidado qué significa realmente lo que precede. La interpretación probabilística de la función de onda de Schrödinger nos *fuerza* a definir el *promedio* de la variable posición x como en la ec. (49a). La integral en el segundo miembro de esta ecuación permite así hallar el valor numérico del *valor medio de la variable cuántica posición* x, dada la función de onda que describe un estado cualquiera de la partícula. Pero, ¿cuál es el valor numérico de la "*propia* variable cuántica x"? La respuesta es que una variable cuántica no posee un valor *numérico: está definida solamente en términos de un procedimiento mediante el cual se puede calcular su valor medio para una función de onda dada cualquiera.*

La variable posición x es una variable particularmente simple en la teoría de Schrödinger, y para esta variable todo lo que implica el principio básico de que las variables de la mecánica cuántica están definidas por sus promedios (para todos los estados) no es inmediatamente obvio. El símbolo x aparece también como variable independiente en la función de onda y, por lo tanto, la definición (49a) no puede causarnos la impresión de ser particularmente profunda. Consideremos, sin embargo, la variable cuántica de impulso (la designaremos por p). El símbolo p no "aparece" en la función de onda, y en vista de ello podemos al pronto preguntarnos si es que "existe" realmente una variable impulso. Para resolver esta cuestión, *definiremos* la variable cuántica impulso p mediante una determinada prescripción que nos permite calcular el *valor medio* de p para un estado dado cualquiera. El problema real es, por lo tanto, el de si podemos definir el valor medio del impulso de una manera físicamente razonable.

51 Para orientarnos, consideremos primero una función de onda, normalizada a la unidad, que en un amplio intervalo es de la forma $\psi(x) = C \exp(ix\bar{p}'/\hbar)$. Fuera de este intervalo la función de onda tiende a cero. Para una tal función, el valor medio del impulso debe ser muy próximo a $\bar{p}'$ y podemos escribir $\mathbf{M}(p) = \bar{p}'$. En el intervalo antes citado tenemos

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = \bar{p}'\psi(x) \tag{51a}$$

y puesto que la función de onda está normalizada a la unidad, resulta

$$\bar{p}' \cong \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) \tag{51b}$$

Hemos supuesto aquí que la más importante contribución a la integral procede de la región en la que vale (51a). Para una función de onda de la forma especial considerada podemos hallar, por lo tanto, el valor medio de un impulso calculando la integral (51b). Supondremos ahora que esta integral da exactamente el valor medio del impulso para *todas* las funciones de onda (normalizadas). *Postulamos* así que:

$$\mathrm{M}(p) = \langle\psi|p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \qquad (51c)$$

para *cualquier* función de onda de Schrödinger normalizada $\psi(x)$. Esto significa que en la teoría de Schrödinger la variable impulso p está representada por un *operador diferencial,* operador que actúa sobre la función de onda que aparece a su derecha en el integrando de la ec. (51c). En otras palabras:

$$p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad (51d)$$

52 El cuadrado de la variable impulso viene entonces representado por el operador diferencial

$$p^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (52a)$$

y el valor medio del cuadrado del impulso resulta de la igualdad

$$\mathrm{M}(p^2) = \langle\psi|p^2|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x) \qquad (52b)$$

De manera completamente análoga a como obtuvimos las fórmulas (49c) a (49e), definiremos la indeterminación Δp en el valor de p por las ecuaciones

$$\Delta p = \sqrt{\mathrm{M}\left((p-\bar{p})^2\right)} \qquad (52c)$$

$$(\Delta p)^2 = \mathrm{M}\left((p-\bar{p})^2\right) = \mathrm{M}(p^2) - [\mathrm{M}(p)]^2 \qquad (52d)$$

donde $\bar{p} = \mathbf{M}(p)$.

Obsérvese que el mismo argumento que nos condujo a definir el valor medio del impulso, ec. (51c), es aplicable a la definición del valor medio de p^2 como en la ec. (52b).

53 Si consideramos ahora las expresiones (49a), (49b), (49f), (51c) y (52c) descubrimos un elemento común: el valor medio de una variable cuántica Q viene dado por una expresión de la forma

$$\mathrm{M}\,(Q) = \langle\psi|Q|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)Q\,\psi(x) \tag{53a}$$

donde Q es o un operador diferencial que se aplica a la función de onda que aparece a su derecha o, si no, simplemente x o x^2 u otra función de x. De hecho es éste el esquema general de acuerdo con el que se definen las variables de la mecánica cuántica (en la teoría de Schrödinger): el *valor medio* de la variable Q viene dado por una expresión como la que aparece en el segundo miembro de la ec. (53a), donde Q es un operador lineal adecuado que actúa sobre la función de onda que aparece a la derecha del mismo. (Para la variable posición el operador lineal es simplemente la "multiplicación por x".) Además: el valor medio de Q^2 se obtiene substituyendo Q en la integral por Q^2, donde $Q^2\psi(x)$ es la función que obtenemos aplicando dos veces Q a $\psi(x)$.

54 Ilustremos estas ideas mediante algunos ejemplos más. Sea m la masa de la partícula. La energía cinética de la misma, E_{cin}, viene entonces representada por el operador diferencial.

$$E_{\mathrm{cin}} = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{54a}$$

La energía *total* de la partícula lo está por el operador H, que es la suma de los operadores correspondientes a las energías cinética y potencial. En la teoría de Schrödinger el operador energía H es así un operador diferencial:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \tag{54b}$$

de acuerdo con lo que vimos en la sección 10 de este capítulo.

55 El lector debe advertir que hasta la sección 51 hemos sido bien poco precisos en cuanto a lo que significaba para nosotros el impulso en la teoría de Schrödinger. En tanto se trate de una onda de la forma $\exp(ixp/\hbar)$, es claro que la variable p que aparece en el exponente es el impulso. Sin embargo, hemos de definir el impulso de manera general, para *todas* las funciones

de Schrödinger (normalizadas), y esto es precisamente lo que hemos hecho mediante las relaciones (51c) y (51d).

Cabe preguntarnos si hubiera sido posible definir el impulso de manera diferente. Un examen cuidadoso de esta cuestión pone de manifiesto que nuestra definición es esencialmente única, en el sentido de que es la que exige la condición de que la variable impulso elegida tenga una interpretación física razonable de acuerdo con nuestra noción de lo que es el impulso en la física clásica.

56 La plausibilidad de la definición (51c) del valor medio del impulso se ve fuertemente apoyada por el siguiente teorema, debido a P. Ehrenfest, que enunciaremos, si bien no demostraremos aquí:*

Los valores medios de las variables de la mecánica cuántica satisfacen las mismas ecuaciones del movimiento que las variables clásicas correspondientes en la descripción clásica asociada. Concretamente este teorema dice que

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{M}\,(x) = \frac{1}{m}\,\mathrm{M}\,(p) \tag{56a}$$

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{M}\,(p) = -\,\mathrm{M}\left(\frac{dV(x)}{dx}\right) \tag{56b}$$

con tal que la función de onda de Schrödinger, $\psi(x,t)$ respecto de la cual se calculan esos valores medios satisfaga la ecuación de Schrödinger

$$H\psi(x,t) = i\hbar\,\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \tag{56c}$$

donde H es el operador diferencial dado en la ec. (54b).

La función de onda de Schrödinger $\psi(x,t)$ depende del tiempo t, y esta dependencia temporal viene descrita por la ecuación de Schrödinger (56c). De aquí se sigue que los valores medios de x y p dependerán también del tiempo y cabe demostrar que, en efecto, las ecuaciones (56a) y (56b) son válidas. La demostración no es particularmente difícil. Efectuamos las derivaciones respecto del tiempo dentro de la integral que define el valor medio en cuestión. Eliminamos luego las derivadas

* P. Ehrenfest, "Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik", *Zeitschrift für Physik* **45**, 455 (1927).

respecto del tiempo de ψ y ψ^* valiéndonos de la ecuación de Schrödinger (56c) y de su conjugada compleja. Reagrupando los términos mediante integración por partes, obtenemos los resultados que se formulan en las ecuaciones (56a) y (56b). El lector que esté interesado puede llevar a cabo este proceso en sus pormenores; no daremos las demostraciones detalladas, ya que son un tanto tediosas *.

57 El teorema que acabamos de enunciar, y que se puede generalizar sin dificultad al caso de tres dimensiones, tiene gran importancia para nuestra comprensión conceptual de la mecánica cuántica. Nos explica por qué la mecánica clásica puede considerarse como un caso límite de la mecánica cuántica siempre que puede ignorarse la indeterminación en las variables, es decir, la dispersión estadística de las mismas típica en mecánica cuántica. Queremos, naturalmente, que exista una correspondencia de este tipo entre las mecánicas clásica y cuántica, y el hecho de que el teorema de Ehrenfest se pueda demostrar para nuestra variable impulso indica, sin dejar lugar a muchas dudas, que nuestra elección es la correcta.

Que la mecánica clásica debe resultar como caso límite de la mecánica cuántica constituye la esencia del llamado *principio de correspondencia* de Bohr. Es éste un principio importante, porque si la mecánica cuántica ha de proporcionar una descripción general, debe ser capaz de explicar *todos* los fenómenos físicos, incluidos aquellos que también se pueden describir clásicamente. Desde el punto de vista histórico, el principio de correspondencia sirvió de guía en la fase primera del desarrollo de la mecánica cuántica. Podemos decir que impone una limitación a las posibles nuevas teorías, pero no debemos pensar que las determina unívocamente. No puede haber reglas de "cuantificación", es decir, no puede haber ninguna prescripción acerca de cómo se pasa de una descripción clásica a una descripción en términos de la mecánica cuántica. Es obvio que carece de sentido decir: "A fin de hallar las ecuaciones (cuánticas) *correctas* es necesario formular primero las ecuaciones (clásicas) *erróneas,* hecho lo cual se pasa de las ecuaciones incorrectas a las ecuaciones correctas mediante una cierta operación mágica". Las ecuaciones correctas de la física se descubren más bien por una inteligente conjetura, guiada

* El lector encontrará demostraciones en E. Merzbacher, *Quantum Mechanics* (John Wiley and Sons, Nueva York, 1961), pág. 41, y en L. I. Schiff, *Quantum Mechanics,* 3.ª ed. (McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1968), página 28.

por hechos experimentales conocidos, y estas conjeturas se sujetan luego a ulteriores contrastes experimentales.

58 Para una variable cuántica cualquiera Q, la cantidad

$$\Delta Q = \sqrt{\mathrm{M}\,(Q^2) - [\mathrm{M}\,(Q)]^2} \tag{58a}$$

calculada para una función de onda dada puede emplearse como medida de la precisión con la que se conoce la variable Q para el estado representado por esta función de onda. La variable Q tienen un valor *preciso* en un estado particular sólo cuando $\Delta Q = 0$ para este estado. Como ejemplo de esta idea podemos mencionar què la variable H se conoce exactamente para cada estado estacionario: tiene el valor E, donde E es la energía del estado. Para un estado no estacionario se tiene $\Delta H > 0$.

Una relación de indeterminación en general es una restricción impuesta a la precisión con la que dos variables diferentes se pueden conocer simultáneamente: su forma es la de una desigualdad en la que aparecen $\Delta Q'$ y $\Delta Q''$ para las dos variables Q' y Q''. Disponemos ahora de una definición precisa de Δx, la dada por la ec. (49e), y de una definición precisa de Δp, la dada por la ec. (52d). Sin mucha dificultad, podríamos demostrar la relación de indeterminación *exacta.*

$$\Delta x\, \Delta p \geqq \frac{\hbar}{2} \tag{58b}$$

es decir, demostrar que la desigualdad (58b) vale para *todas* las funciones de onda, y que, además, existen ciertas funciones de onda para las que (58b) se reduce a una igualdad. No emprenderemos aquí esta tarea, puesto que hemos alcanzado ya un grado considerable de compresión cualitativa de *por qué* una relación tal como la (58b) ha de ser válida, y esto es suficiente para el presente curso.

Bibliografía para ulterior estudio

1) Para la discusión de otros problemas simples en la teoría de Schrödinger, véanse los libros mencionados al final del Cap. 7 (en las citas 2).

2) G. M. Barrow: *The Structure of Molecules* (W. A. Benjamin, Inc., Nueva York, 1963). Es una introducción de lectura fácil al estudio de los espectros y a la estructura moleculares. La discusión es elemental y la preparación alcanzada aquí basta para una lectura completa de este libro.

3) F. O. Rice y E. Teller: *The Structure of Matter* (Science Editions, Inc., 1961). Como indica su título, el libro está dedicado a una discusión ge-

neral de la estructura de la materia (desde el punto de vista de las ideas de la mecánica cuántica). La discusión es elemental, y el libro se puede leer fácilmente con el grado de preparación alcanzado. El lector podría completar lo aquí discutido leyendo algunas partes del mismo.

Problemas

1 (*a*) Considérese el problema de una partícula confinada en un pozo de potencial cuyas paredes son de altura infinita, como el representado en la fig. 4A. Estudiemos la función de onda dada por la expresión (6b) para $n' = 17$ y $n'' = 18$. Represéntese gráficamente la densidad de probabilidad, dada por la ec. (6c), para los instantes siguientes: $t = 0$, $t = t_0/4$; $t = t_0/2$; $t = 3t_0/4$ y $t = t_0$ donde $t_0 = (4ma^2)/(35\pi\hbar)$. Estos gráficos le sugerirán el movimiento periódico de una partícula hacia adelante y hacia atrás entre las paredes. El período del movimiento es t_0.

(*b*) Considérese el movimiento de una partícula clásica de masa m y energía $E_c = \frac{1}{2}(E_{17} + E_{18})$ en el mismo pozo de potencial y compárese el período de este movimiento con el valor t_0 ya encontrado.

(*c*) El paquete de ondas en la parte (*a*) de este problema no está particularmente bien confinado. De hecho se extiende hasta más allá de $\frac{1}{2}$ del tamaño del pozo. Para conseguir un paquete de ondas perfectamente delimitado que se parezca más a la partícula puntual clásica, necesitamos superponer un número grande de funciones propias. Si la posición ha de quedar bien definida, el impulso, y con él la energía, estará mal definido. Obsérvese ahora que la energía del n-ésimo nivel es proporcional a n^2, mientras que la distancia entre dos niveles consecutivos es aproximadamente proporcional a n. Para un paquete de ondas cuya energía media sea elevada, es posible, por lo tanto, tener una superposición de gran número de funciones propias tales que la posición instantánea de la partícula esté razonablemente bien definida, a la vez que la dispersión *relativa* del valor de la energía es también pequeña. Encontramos aquí otro ejemplo del paso al límite clásico. Un paquete de ondas en un pozo de potencial puede comportarse como una partícula clásica con tal que su energía media sea grande comparada con la del estado fundamental.

No podemos estudiar aquí el paso al límite clásico con todo detenimiento, pero limitémonos a estudiar tan sólo un aspecto del problema. Sea $n' = n$ y $n'' = n + 1$. Hallar el período del movimiento del paquete representado por la superposición (6b) y comparar este período con el de una partícula clásica que se mueve con una energía E tal que $E_{n+1} \geqq E \geqq E_n$. Considérese, en particular, el límite para $n \to \infty$.

2 Con objeto de debatir algunos aspectos, el autor hará la siguiente afirmación (inspirada por ciertos intentos de "explicar" la mecánica cuántica en algunos artículos de divulgación). La densidad de probabilidad $P(x) = |\psi(x,t)|^2$ para un estado *estacionario* definido por la función de onda $\psi(x,t)$ puede interpretarse como representación del *promedio temporal* de la densidad de probabilidad para una partícula que se mueve *clásicamente* en el potencial, con la energía del estado estacionario. En otras palabras: la partícula se mueve de acuerdo con las leyes clásicas, pero si tomamos el valor medio de este movimiento en un intervalo de tiempo que es grande comparado con el período natural del mismo, nos vemos conducidos a la densidad de probabi-

lidad $P(x)$. Para una partícula en movimiento tridimensional, por ejemplo un electrón en el átomo de hidrógeno, podemos dar una interpretación similar al cuadrado del módulo de la función de onda que representa un estado *estacionario.* La partícula se mueve clásicamente, pero nuestros instrumentos de medida son demasiado toscos para poder seguir los detalles del movimiento y observamos así, en cambio, una distribución de probabilidad del electrón en el átomo, lo que se puede comprender como resultado de promediar el movimiento clásico en un largo intervalo de tiempo.

Observará el lector que esta afirmación, interpretada al pie de la letra, se puede refutar inmediatamente. En consecuencia, el autor retrocede un poco en su afirmación. Afirma, en cambio, que mientras esta interpretación del cuadrado de la función de onda no es estrictamente correcta, resulta, sin embargo, una manera muy *útil* de imaginar el movimiento de una partícula en el sentido de la mecánica cuántica: nos proporciona una visión real acerca de lo que sucede, con tal que ello se entienda en un sentido aproximado.

Es tarea del lector el rebatir definitivamente estas ideas, tanto la primera afirmación como la versión modificada de la misma. Al hacerlo, el lector debe tener en cuenta lo discutido al principio de este capítulo, como también nuestro análisis de los "experimentos de doble rendija" en los capítulos 4 y 5.

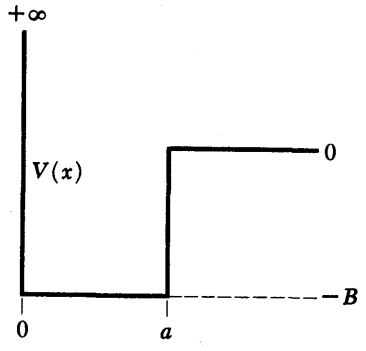
3 La integración en la ec. (22a) se extiende desde $-a$ a $+a$. Supongamos que integramos entre $-\infty$ y $+\infty$. ¿Cómo depende del tiempo t *esta* integral y cuál es su valor para $t = 0$?

4 Conviene que nos convenzamos de que un potencial atractivo no conduce necesariamente a estados ligados. Para ello consideremos el ejemplo concreto representado en la figura que sigue al problema 5. Sea B la profundidad del pozo, a su anchura y m la masa de la partícula. Probar que si la cantidad $G = a^2Bm/\hbar^2$ es menor que un cierto número G_0, no habrá estados ligados, mientras que por lo menos existirá uno si se tiene $G > G_0$. Hallar la constante G_0. Obsérvese que estas consideraciones son válidas únicamente en el caso de un pozo para el cual una de las paredes es de altura infinita. En el caso de un pozo como el representado en la fig. 19A, existirá por lo menos un estado ligado cualquiera que sea la profundidad de aquél.

Guiado por este ejemplo, presente argumentos de por qué cada una de las siguientes condiciones favorece la aparición de estados ligados: (*a*) Una masa m grande. (*b*) Un pozo profundo. (*c*) Un pozo ancho. Ilustre sus argumentos, que convendría se refirieran a un pozo de potencial más general que el que se representa en la fig. 19A, con gráficos dibujados de manera adecuada.

Tomando este ejemplo como base, podemos comprender por qué dos átomos no siempre forman una molécula estable, a pesar del hecho de que las fuerzas entre ellos pueden ser atractivas para ciertas distancias interatómicas. (Si la fuerza es siempre *repulsiva,* como a veces ocurre, no puede haber estados ligados, naturalmente.) Podemos considerar el potencial representado en la figura de este problema como una idealización del potencial molecular, más ajustado a la realidad, que se representa en la fig. 30A.

5 Como simple modelo *unidimensional* del deuterón (que es un estado de enlace de un neutrón y un protón) supongamos que el po-



Esta figura se refiere a los problemas 4 y 5. En el problema 5 la curva continua representa la energía potencial del sistema neutrón-protón según un modelo muy simplificado que, sin embargo, es útil para comprender ciertas propiedades del deuterón y algunos rasgos de la dispersión neutrón-protón a baja energía. En abscisas se toma la distancia entre el neutrón y el protón.

tencial neutrón-protón tiene la forma indicada en la figura adjunta, con $a = 1{,}85 \times 10^{-13}$ cm y $B = 41{,}6$ MeV. Hallar la energía de enlace del deuterón en este modelo y compararla con el valor experimental 2,21 MeV. El excelente grado de concordancia alcanzado *no* es, claro está, un triunfo para la teoría, porque se han utilizado la energía de enlace observada y otros datos experimentales para determinar valores razonables de a y B. El potencial que estamos considerando no es el real, aunque reproduce correctamente *algunos* rasgos de la interacción neutrón-protón. El problema de hallar el potencial efectivo partiendo de "principios fundamentales" está sin resolver. *Observación:* la masa m es la masa *reducida* del sistema protón-neutrón, $m = M_p/2$.

6 En el espectro *vibracional* del cloruro de hidrógeno, HCl, se encuentra que las rayas espectrales son, en realidad, dobletes muy juntos. La componente de longitud de onda corta de estos dobletes tiene una intensidad que es más o menos el triple de la intensidad de la componente de longitud de onda larga. Para las rayas que se presentan en la vecindad de unos 5600 cm^{-1} (números de onda) la separación medida de las dos componentes es de 4 cm^{-1}, aproximadamente. Explicar este fenómeno y deducir teóricamente la separación entre las componentes. Explicar también las intensidades relativas de los dos miembros de los dobletes.

7 En el estudio de las frecuencias asociadas con las transiciones *de rotación* en la molécula del cloruro de iodo, se han medido las siguientes frecuencias (en megahertz).

ICl^{35}	6980 MHz	27,336 MHz
ICl^{37}	6684 MHz	26,181 MHz

La primera fila se refiere a la columna que contiene el isótopo Cl^{35}, mientras que la segunda corresponde a la molécula formada con el isótopo Cl^{37}. El núcleo de iodo es el isótopo $_{53}I^{127}$ en ambas moléculas.

(*a*) ¿Puede Vd. explicar las frecuencias en la segunda fila, dadas las frecuencias que aparecen en la primera?

(*b*) Si la muestra utilizada en la medición se prepara con cloro natural, se observarán, claro está, las cuatro frecuencias. ¿Puede predecir el valor de la razón de las intensidades de las rayas en la primera fila a las intensidades de las correspondientes rayas en la segunda?

(*c*) Considérese el efecto isotópico en general para niveles rotacionales de una molécula diatómica. Sea ω'_r una frecuencia de transición rotacional para una molécula en la que las masas nucleares son M'_1 y M'_2 y sea ω_r'' la correspondiente frecuencia para una molécula químicamente idéntica que, sin embargo, se ha formado con isótopos diferentes, cuyas masas nucleares son M_1'' y M_2''. También aquí podemos establecer una relación *entre* ω_r' y ω_r'' sin acudir a una teoría detallada de la molécula. Probar que la razón de las dos frecuencias es de la forma

$$\frac{\omega'_r}{\omega''_r} = \left(\frac{M'_1M'_2(M'_1 + M'_2)}{M''_1M''_2(M''_1 + M''_2)}\right)^k$$

Isotopic species	$J=1\leftarrow 0$, $v=0$ Rotational frequencies (Mc/sec)	B_e (Mc
$C^{12}O^{16}$	115 271,204±0,005	57 89
$C^{13}O^{16}$	110 201,370±0,008	55 3
$C^{12}O^{18}$	109 782,182±0,008	55
$C^{14}O^{16}$	105 871,110±0,004	53
$C^{13}O^{18}$	104 711,416±0,008	5
$C^{12}O^{17}$	112 359,276±0,060[b]	

Frecuencias de rotación medidas experimentalmente para las moléculas de monóxido de carbono de diferentes composiciones isotópicas. El fragmento de la tabla se ha tomado de un artículo por B. Rosenblum, A. H. Nethercot, Jr. y C. H. Townes, "Isotopic mass ratios, magnetic moments and sign of electric dipole moment in Co", *The Physical Reviw* **109**, 2228 (1958). Los números que en él aparecen dan buena idea de la precisión que se puede alcanzar en espectroscopia de microondas.

El lector que ha resuelto el problema 7 puede contrastar sus resultados con los datos que se dan en esta tabla. La concordancia será buena, pero no perfecta. Nuestra teoría, en la cual la molécula diatómica se considera rígida, constituye una simplificación más bien tosca. Para poder explicar los valores numéricos experimentales con la precisión con que se conocen se necesita un método teórico más refinado.

y determinar el exponente correcto k. Conviene que compare cuidadosamente la expresión a que llegue con la expresión (37a) que describe el efecto isotópico sobre el espectro de vibración. La dependencia respecto de las masas de los isótopos es diferente en los dos casos.

8 Considérese un cristal "típico" formado por átomos de peso atómico A. Supongamos que el cristal tiene la forma de un cubo de lado L. Deducir una estimación del orden de magnitud para (*a*) la frecuencia de resonancia (vibracional) del cristal; (*b*) la frecuencia de resonancia más alta del mismo. Escribá los resultados a que llegue de manera que la dependencia de las frecuencias respecto de las constantes fundamentales α, $\beta = m/M_p$ y $\hbar/mc^2$, al igual que con relación a las constantes A y $N \sim L/a_0$ (donde a_0 es el radio de Bohr y M_p la masa del protón), quede claramente de manifiesto. (*c*) Presentar algugunos ejemplos numéricos concretos en los que se den las frecuencias en megahertz.

9 En la sección 50, capítulo 2, dijimos que es posible, en principio, deducir una expresión para la razón de la velocidad del sonido, c_s, a la velocidad de la luz, c, tal que c_s/c se expresa en términos de únicamente cuatro constantes: la constante de estructura fina $\alpha \cong 1/137$, la razón de las masas del electrón al protón $\beta = m/M_p$ y el peso atómico A y el número atómico Z de los átomos que forman el cristal. Deducir una expresión *precisa* que dé c_s/c constituye un problema formidable, pero se puede llegar fácilmente a una estimación del orden de magnitud que ponga de manifiesto la dependencia principal de c_s/c respecto de α, β y A. Deducir esa relación para el orden de magnitud y contrastar la fórmula obtenida para el caso del cobre. ($A = 63{,}5$, $c_s = 4700$ m/s.)

10 (*a*) En el potencial $U(r)$ representado en la fig. 30A observamos que la distancia entre niveles vecinos *disminuye* a medida que aumenta el número cuántico n. Explicar cualitativamente por qué ocurre así.

(*b*) Dibujar una parábola que represente el potencial para un oscilador estrictamente armónico. Sobre el mismo gráfico, trazar otras dos curvas de potencial, simétricas respecto del origen, que representen dos potenciales "casi armónicos" y tales que el radio de curvatura de las tres curvas sea el mismo en el origen (= mínimo del potencial). Esas dos curvas deben dibujarse de manera que para la primera de ellas el espaciado entre niveles vecinos *aumente* con el número cuántico n, mientras que para la segunda la distancia entre niveles vecinos *disminuya* al crecer n. No es necesario hallar los niveles explícitamente, pero debiera explicar por qué las dos curvas tienen las propiedades que acabamos de señalar.

11 Como se explicó en la sección 47, los niveles de energía del litio doblemente ionizado se obtienen a partir de los niveles de energía del helio simplemente ionizado sin más que aplicar un factor de escala, factor que es aproximadamente igual a 9/4. Ambos iones son sistemas hidrogenoides con un solo electrón. Únicamente para discutir el asunto, el autor sostiene que los niveles de energía del litio simplemente ionizado debieran poderse obtener a partir de los niveles de energía del helio neutro aplicando un cambio de escala similar, porque ambos sistemas están constituidos por dos electrones y difieren sola-

mente en el valor de la carga nuclear. En otras palabras, las razones de las longitudes de onda de las correspondientes rayas espectrales debieran reducirse a una misma constante, justamente como ocurre en el caso del litio doblemente ionizado y del helio simplemente ionizado. Sin embargo, no es esto lo que nos releva la experiencia. Los esquemas de términos del helio neutro y del litio simplemente ionizado son muy parecidos, pero no se pueden obtener el uno a partir del otro mediante un mero cambio de escala. Explicar claramente por qué el razonamiento basado en un factor de escala es válido para sistemas con un solo electrón, pero no para sistemas con dos electrones.

12 La vida media del estado $2p$ en hidrógeno es de $0{,}16 \times 10^{-8}$ s. ¿Cuál es la vida media del estado $2p$ en el helio simplemente ionizado?

13 Con referencia al problema que precede: ¿Cuál es la vida media del estado $2p$ en el átomo muónico que se forma cuando muones negativos son capturados en aluminio?

14 Calcular la longitud de onda del fotón emitido cuando un átomo muónico de aluminio experimenta una transición desde el estado $3s$ al estado $2p$.

15 Hallar el "radio de Bohr" (*a*) de un átomo de aluminio muónico; (*b*) de un átomo de plomo muónico, y comparar estos radios con los radios nucleares. Es interesante hacer esta comparación, porque si el "radio de Bohr" resulta comparable con el radio nuclear, es evidente que no podemos considerar el núcleo como una carga puntual sin extensión, lo que significa que los niveles de energía del átomo muónico no pueden darse de manera precisa por una fórmula como la (46b). Se ha encontrado experimentalmente que los sistemas de niveles de los átomos muónicos *pesados* se desvían considerablemente de lo que predice la fórmula (36b). Mediante una observación sistemática de estas desviaciones, ha sido posible llegar a conclusiones definidas acerca de la distribución de carga en los núcleos y acerca de su tamaño.

16* Intente probar el teorema de Ehrenfest, citado en la sección 56, siguiendo las ideas apuntadas en dicha sección. Para orientación adicional, véase la sección 50, capítulo 7.

17* (*a*) Aplicar el teorema de Ehrenfest al caso de un oscilador armónico para el que la función potencial viene dada por $V(x)=(K/2)x^2$ y obtener dos ecuaciones diferenciales de las que son solución $M[x(t)]$ y $M[p(t)]$. Resolver estas ecuaciones y expresar $M[x(t)]$ en función de $M[x(0)]$ y $M[p(0)]$. Comparar la solución con la del correspondiente problema clásico.

(*b*) Para un estado estacionario se tiene $M[x(t)] = 0$, pero para un estado no estacionario $M[x(t)]$ es, en general, una función oscilante no nula del tiempo. Teniendo en cuenta la discusión en la sección 27, presentar argumentos que se apoyen en los resultados obtenidos en la parte (*a*) de este problema y expliquen el efecto de que los niveles

* Estos problemas se refieren a un tema avanzado.

de energía del oscilador armónico han de estar igualmente espaciados, con una separación entre niveles consecutivos $\hbar\sqrt{K/m}$. Obsérvese que nuestra discusión en la sección 27 únicamente nos dice que la distancia entre niveles debe ser aproximadamente constante, aunque de hecho ocurre que el espaciado entre niveles es exactamente constante e igual a $\hbar\sqrt{K/m}$.

18 Consideremos una molécula diatómica en forma de pesa gimnástica. Hemos discutido las excitaciones rotacionales de una molécula de este tipo en las secciones 38-40. Supongamos que el centro de carga de la molécula no coincide con su centro de masa. La molécula poseerá entonces un momento dipolar eléctrico, y dado que gira, es de esperar, clásicamente, que emitirá radiación electromagnética con una frecuencia igual a la velocidad angular clásica ω_a.

Según la mecánica cuántica, los niveles de energía de la molécula vienen dados por la ec. (39c). Es razonable suponer que el número cuántico j cambia en una unidad si la molécula emite, o absorbe, radiación dipolar eléctrica. Expresar la frecuencia de la radiación emitida en función del número cuántico del momento cinético j del estado inicial de la molécula y comparar el resultado con la fórmula deducida clásicamente. Para grandes valores de j debiéramos aproximarnos al "límite clásico". ¿Ocurre efectivamente así?

Capítulo 9

Las particulas elementales y sus interacciones

Procesos de colisión y el modelo ondulatorio 406

¿Qué se entiende por partícula? 422

Ideas fundamentales de la teoría cuántica de campos 433

Piones y fuerzas nucleares 445

Consideraciones finales 452

Bibliografía para ulterior estudio 454

Problemas 454

Capítulo 9

Las partículas elementales y sus interacciones

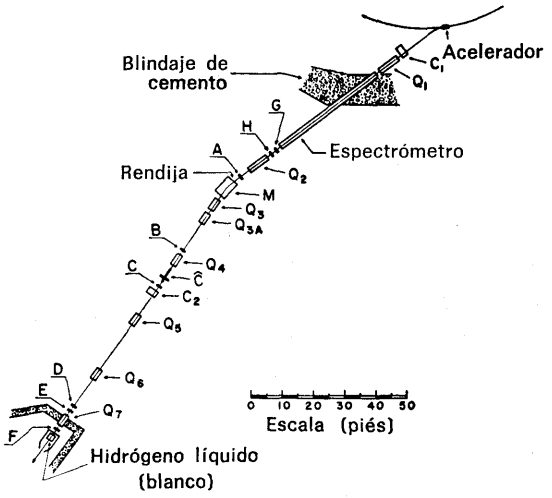


Fig. 2.1 Plan general de un experimento para medir varias secciones eficaces correspondientes a la dispersión elástica e inelástica antiprotón-protón. Los antiprotones salen del blanco en el acelerador (arriba a la derecha) y son desviados y enfocados sobre un blanco de hidrógeno líquido (abajo a la izquierda). C_1, C_2 y M son imanes deflectores. Q_1-Q_7 son imanes de enfoque. A-H son contadores de centelleo. C es un contador de Cerenkov. Los sucesos que tienen lugar en el blanco de hidrógeno líquido se observan medianto contadores que lo rodean. (Estos contadores no se muestran en la figura.) La finalidad del dispositivo, un tanto complejo, de contadores e imanes, es la de definir el haz de antiprotones y discriminar respecto de los sucesos en el blanco debidos a partículas que no son antiprotones. Las mediciones se llevaron a cabo con antiprotones de 1,0, 1,25 y 2,0 GeV.

La ilustración se ha tomado del trabajo de R. Armenteros y cols., "Antiproton-Proton Cross Sections at 1.0, 1.25, and 2.0 BeV", *The Physical Review* **119**, 2068 (1960). Convendría que el lector consultara este artículo para más detalles. En cuanto a resultados, véase la figura 5A en este capítulo. *(Cedida por The Phisical Review.)*

Procesos de colisión y el modelo ondulatorio

1 En este capítulo final se discutirán algunos aspectos de las más básicas y centrales conclusiones a que ha llegado la física de hoy en lo que concierne a las partículas elementales y sus interacciones. En este dominio de la física encontramos un gran número de problemas para los que en el presente carecemos de solución. Quisiéramos poder contar con una teoría que nos permitiera "comprender" por qué existen las varias partículas elementales y por qué tienen las propiedades que poseen. En otras palabras, esperamos que sea posible formular unos pocos principios muy fundamentales que nos permitan explicar la gran multitud de fenómenos que han sido observados. ¿Está justificada esta esperanza? Ciertamente no por razones lógicas, cualesquiera que sean. Muy bien pudiera ocurrir que estemos condenados a vivir con teorías fenomenológicas que resumen los hechos experimentales de una manera ligeramente más económica de lo que podrían hacer un conjunto de tablas y gráficos pero a las que les falta la comprensibilidad, la simplicidad conceptual y la belleza que nos gustaría ver en una teoría fundamental. Al autor le resulta sumamente desagradable pensar en esta posibilidad. Prefiere creer que, en algún sentido, las cosas son en último término simples y encuentra un cierto aliento al pensar en el desarrollo histórico de la física. Como cuerpo de doctrina, la física se ha desarrollado muy rápidamente y la cantidad de información que ahora poseemos acerca de fenómenos detallados es asombrosa. Sin embargo, lo que todavía asombra más es el hecho de que podamos explicar los pormenores tan bien, como de hecho lo hacemos, acudiendo a teorías relativamente sencillas. Con esto el autor no quiere decir que la física teórica sea un asunto trivial, pero sí siente que los principios básicos que soportan nuestras teorías (tal como los entendemos hoy) están caracterizados por una simplicidad *conceptual* muy sorprendente. Conforme hemos señalado antes, no existe hoy una teoría general "simple" de las partículas elementales. En este capítulo intentaremos dar al lector una cierta idea de los caminos que se ha intentado seguir, y de los resultados y problemas que encontramos en este dominio de la física.

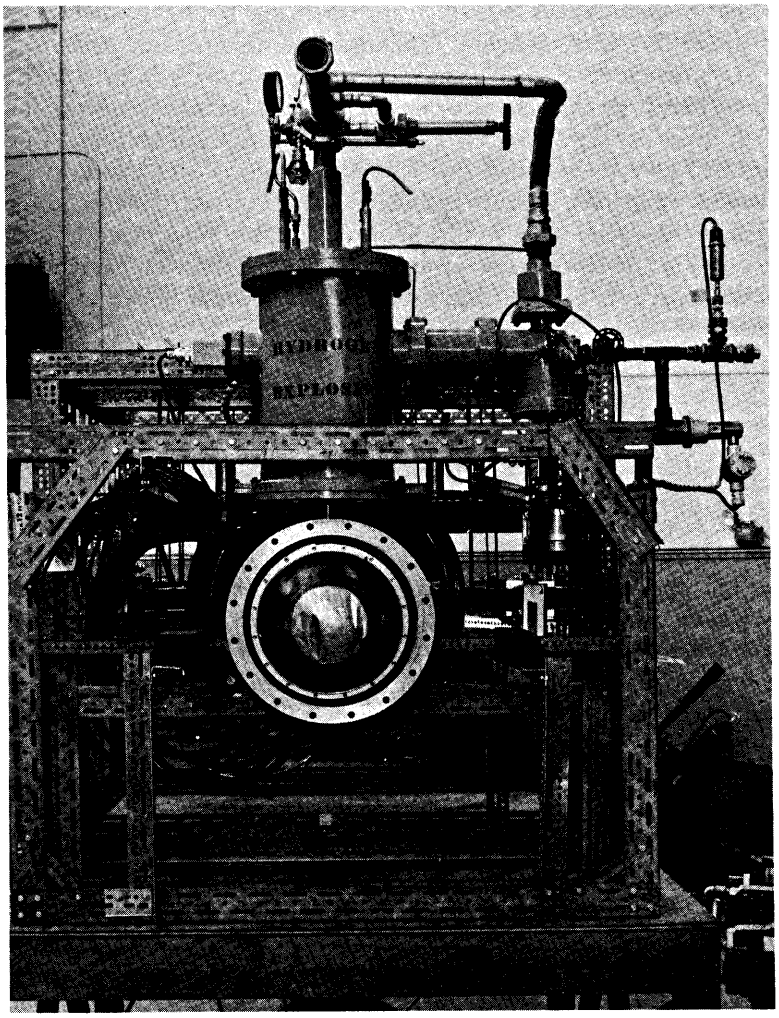


Fig. 2B Fotografía del blanco de hidrógeno líquido utilizado en el experimento descrito en la figura 2A. El hidrógeno se encuentra en la vasija en el centro del aparato. Los antiprotones inciden perpendicularmente al plano de la figura. *(Fotografía proporcionada por el Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley.)*

2 La mayor parte de nuestros conocimientos acerca de las partículas elementales procede de un análisis de los experimentos de colisión. Por consiguiente, conviene que digamos algo aquí acerca de la interpretación de dichos experimentos. En un experimento de dispersión un haz de partículas A procedentes de un acelerador inciden sobre un blanco constituido por partículas B (que forman un sólido, un líquido o un gas). Observamos las partículas que resultan en cada colisión de una partícula A con una partícula B. Decimos que el choque es *elástico* si en la colisión no aparecen nuevas partículas: la par-

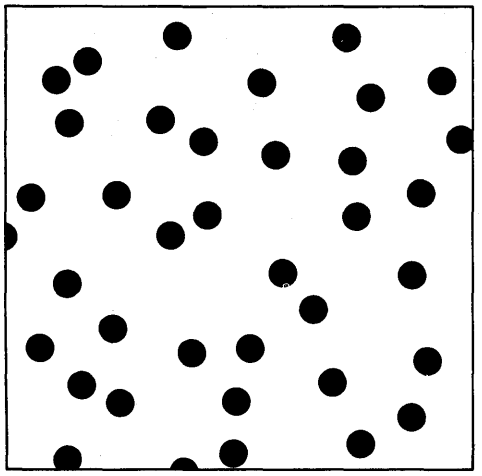


Fig. 3A Podemos expresar la eficacia con que las partículas B (en el blanco) separan partículas A del haz incidente por una sección eficaz total σ_T. Con cada partícula B va asociado un disco circular de área σ_T tal que la partícula A (imaginada puntual) interactúa con la partícula B si y solamente si choca con el disco. La figura muestra estos discos imaginarios para una lámina muy delgada de partículas B. Si hay n partículas B por unidad de área, el área total "bloqueada" por unidad de área será $n\sigma_T$. La probabilidad de que una partícula A atraviese dicha lámina es, por consiguiente $(1 - n\sigma_T)$. Esta figura, claro está, no debe tomarse literalmente. Las partículas B no son en realidad pequeños discos o esferas.

tícula A es entonces meramente dispersada por la partícula B. Si aparecen otras partículas, hablamos de un proceso *inelástico.*

Los resultados de la observación se expresan, por lo común, en términos de varias *secciones eficaces.* Consideremos primero la más simple de éstas, a saber, la *sección eficaz total.* Designaremos esta cantidad por σ_T. Para definir σ_T de modo operacional imaginemos que el blanco es un estrato plano, muy delgado, de partículas B distribuidas al azar. Supongamos que la densidad uniforme (en promedio) de partículas en la lámina es de n partículas por unidad de área. La sección eficaz total se define entonces por

$$\sigma_T = \frac{P}{n} \tag{2a}$$

donde P es la probabilidad de que una partícula A que incide perpendicularmente sobre la lámina experimenta *alguna* interacción con una de las partículas B y quede separada del haz incidente. En esta definición es esencial que la lámina sea suficientemente delgada, de modo que la probabilidad observada P será pequeña comparada con la unidad. (Insistiremos sobre este punto en la Sec. 4.)

3 Podemos interpretar la sección eficaz total en términos del siguiente modelo. A cada partícula B se le asigna un disco circular de área σ_T. Los discos están orientados perpendicularmente a la dirección del haz incidente de partículas A e imaginamos que esos discos tienen la propiedad de que una partícula A que choca con uno de ellos desaparece del haz, mientras que la partícula A no experimenta efecto alguno si no choca con un disco. Consideremos de nuevo nuestro blanco en forma de lámina delgada de n partículas B por unidad de área. El área total cubierta por los discos contenidos en una región de área F es igual a $nF\sigma_T$. Esto significa que una fracción $n\sigma_T$ de la lámina es "opaca" y una fracción $(1 - n\sigma_T)$ es "transparente". La probabilidad de que una partícula A del haz incidente se separe del mismo es, según esto, $P = n\sigma_T$. La relación (2a) puede así interpretarse de esta manera, pero el lector debe comprender que los discos opacos existen solamente en nuestra imaginación. La sección eficaz es una medida muy conveniente de la tendencia de las partículas A y B a interactuar entre sí, pero no hay que pensar que se refiera a propiedades geométricas ni de una ni de otra partícula.

4 Consideremos la generalización de la relación (2a) al caso en que el blanco, en forma de lámina, no es necesariamente delgado. Sea $P(n)$ la probabilidad de que una partícula A desaparezca si choca con una capa de partícula B uniformemente distribuidas con una densidad superficial proyectada n. La cantidad $T(n) = 1 - P(n)$ es entonces la probabilidad de transmisión a través de la lámina. Supongamos que se coloca una lámina con una densidad superficial proyectada n_1 detrás de otra en la que dicha densidad es n_2. La densidad superficial de la lámina compuesta es entonces $(n_1 + n_2)$. La probabilidad de que una partícula atraviese *ambas* láminas viene dada, evidentemente, por

$$T(n_1 + n_2) = T(n_1)T(n_2) \tag{4a}$$

Esta ecuación debe ser válida para todos los números reales positivos n_1 y n_2. Su solución general es

$$T(n) = \exp(-Cn) \tag{4b}$$

donde C es una constante real. Tenemos así

$$P(n) = 1 - \exp(-Cn) \tag{4c}$$

Obsérvese ahora que

$$\lim_{n\to 0} \frac{P(n)}{n} = C \tag{4d}$$

y si comparamos esta relación con la relación (2a) (que por hipótesis es válida para n muy pequeño) llegamos a la conclusión de que $C = \sigma_T$. Tenemos así

$$P(n) = 1 - \exp(-n\sigma_T), \qquad T(n) = \exp(-n\sigma_T) \tag{4e}$$

Como vemos la intensidad del haz transmitido disminuye exponencialmente cuando aumenta el grosor del blanco. En la práctica podríamos tener blancos en forma de láminas finas de diferentes grosores. Para medir la sección eficaz total se lleva a cabo una simple medida de atenuación: determinamos (con contadores) la disminución relativa de la intensidad del haz transmitido en función del grosor de la lámina. La sección eficaz se calcula entonces mediante las relaciones (4e).

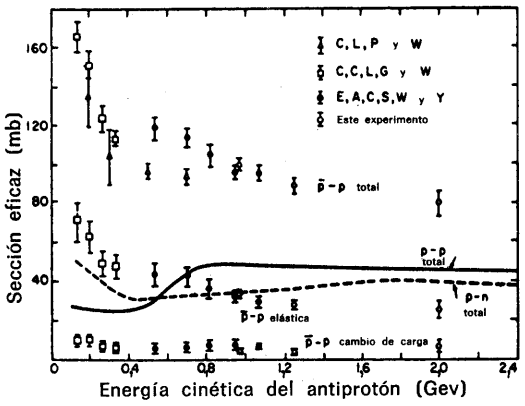


Fig. 5A Gráfico que representa la sección eficaz antiprotón-protón en función de la energía cinética del antiprotón. Los tres puntos experimentales representados por círculos en blanco se obtuvieron en el experimento descrito en la figura 2A. La sección eficaz de dispersión protón-protón se ha representado en el mismo gráfico a fin de poder comparar. Obsérvese que la sección eficaz total protón-antiprotón es unas dos veces mayor que la sección eficaz total protón-protón.

Este gráfico se ha tomado del trabajo de R. Armenteros y cols., "Antiproton-proton Cross Sections at 1.0, 1.25 and 2.0 BeV", *The Physicar Review* **119**, 2068 (1960). *(Cedida por The Physical Review.)*

5 De manera análoga definimos otros tipos de secciones eficaces. Cabe imaginar, por ejemplo, que la partícula A puede reaccionar con la partícula B produciendo una partícula C y una partícula D:

$$A + B \rightarrow C + D \tag{5a}$$

La *sección eficaz de reacción* $\sigma_{AB\rightarrow CD}$ para este proceso se define entonces por

$$\sigma_{AB\rightarrow CD} = \sigma_T P_{AB\rightarrow CD} \tag{5b}$$

donde $P_{AB\rightarrow CD}$ es la probabilidad de que se produzca la reacción (5a) cuando una partícula A desaparece del haz por interacción con una partícula B en el blanco. Supongamos que (5a) es la única *reacción,* es decir, el único proceso *inelástico,* que puede tener lugar. Sin embargo, es posible que una partícula se separe del haz por dispersión *elástica,* proceso en el que subsisten las partículas A y B después de la colisión. La *sección eficaz elástica* σ_e se define por

$$\sigma_e = \sigma_T P_e \tag{5c}$$

donde P_e es la probabilidad de que una colisión que separa la partícula del haz conduzca a dispersión elástica. Las tres secciones eficaces están así ligadas por

$$\sigma_T = \sigma_e + \sigma_{AB\rightarrow CD} \tag{5d}$$

puesto que se tiene, evidentemente, $P_e + P_{AB\rightarrow CD} = 1$.

6 Para expresar las secciones eficaces en física nuclear y en física de las partículas elementales se emplean las unidades *barn* (b) y *milibarn* (mb), donde

$$1\ \text{barn} = 10^{-24}\ \text{cm}^2, \qquad 1\ \text{mb} = 10^{-3}\ \text{barn} \tag{6a}$$

La fig. 6A presenta la sección eficaz neutrónica total del cadmio en función de la energía cinética del neutrón, y la figura 6B muestra un gráfico análogo para las colisiones de neutrones con núcleos de plata. Obsérvese que estas curvas se refieren a los *elementos químicos* y que, por lo tanto, son promedios para los diferentes isótopos que se presentan naturalmente.

Una mirada a estos gráficos pone inmediatamente de manifiesto que la sección eficaz total no tiene nada que ver con las

propiedades "geométricas" de los núcleos. Obsérvese, por ejemplo, la fuerte dependencia de la sección eficaz respecto de la energía. En el cadmio la sección eficaz cae desde el valor máximo de 7200 barns para una energía del neutrón de 0,176 eV al valor de 20 b a 1 eV. La curva de sección eficaz para la plata presenta también una fuerte dependencia respecto de la energía, con un pronunciado pico de resonancia a unos 0,52 eV.

Consideremos también los órdenes de magnitud de las secciones eficaces. Los núcleos de plata y de cadmio tienen aproximadamente el mismo tamaño. Tomando como base la fórmula

$$r \cong A^{1/3} \times (1{,}2 \times 10^{-13}\,\text{cm}) \qquad (6b)$$

que da el radio r de un núcleo en función de su número másico A, estimamos que los radios son de $r \sim 5{,}8$ fermis (puesto que $A \sim 110$). La correspondiente sección transversal *geométrica* πr^2 es, según esto, de 1,0 b. Este valor es 7000 veces menor que el pico que presenta la sección eficaz en la figura 6A.

Convendría que el lector examinara también las figuras 24A y 24B de este capítulo. La figura 24B representa las secciones eficaces elásticas para la dispersión de piones positivos y negativos por protones. En la figura 24A se presenta lo que esencialmente es la sección eficaz de reacción correspondiente a la reacción $Al^{27} + p \rightarrow Si^{28} + \gamma$. Obsérvese el gran número de picos de resonancia muy pronunciados.

7 Las secciones eficaces de que hemos hablado (medidas como funciones de la energía) nos proporcionan una cierta información acerca de las interacciones entre las partículas en un proceso de colisión. Mucha más información obtenemos si medimos también la *distribución angular* de las partículas que salen de la región de colisión. Para simplificar, consideremos la dispersión elástica de las partículas A en el haz por las partículas B en el blanco. Medimos la intensidad de las partículas A dispersadas en diferentes direcciones mediante un contador cocolocado en varias posiciones a una distancia fija del blanco. La intensidad del haz incidente se mantiene constante durante esta serie de mediciones. Los resultados se expresan en términos de una *sección eficaz diferencial* $\sigma_e(E;\theta,\varphi)$. Esta cantidad es función de los ángulos polares θ y φ que determinan la dirección de observación. Es también función de la energía E como hemos indicado explícitamente. La sección eficaz diferencial se define de modo que $\sigma_e(E;\theta,\varphi)d\Omega$ es igual a la probabilidad de que una partícula A incidente sea dispersada en una dirección

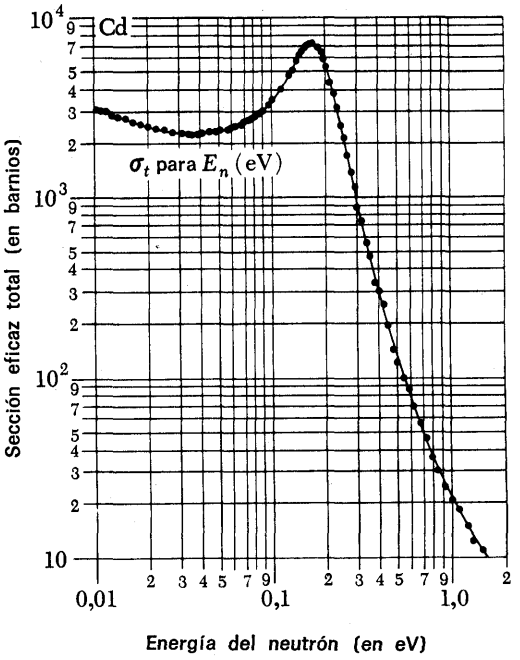


Fig. 6A Curva que representa la sección eficaz total del cadmio respecto de los neutrones en función de la energía del neutrón. Obsérvese que esta curva se refiere al cadmio tal como se encuentra en la naturaleza. Por consiguiente, la sección eficaz es un promedio de las secciones eficaces de los diferentes isótopos. Una tal sección eficaz tiene sólo un interés limitado desde el punto de vista de una teoría básica cuyo objetivo es la sección eficaz de los isótopos individuales. La sección eficaz promedia, con todo, es un concepto útil en las aplicaciones a la ingeniería. Debido a su gran sección eficaz para neutrones de baja energía, el cadmio es de uso común para controlar el número de reacciones por unidad de tiempo en los reactores nucleares.

Esta curva es una porción de un gráfico que se encuentra en la compilación realizada por H. H. Goldsmith, H. W. Ibser, y B. T. Feld, "Neutron Cross Sections of the Elements", *Reviews of Modern Physics* **19**, 259 (1947).

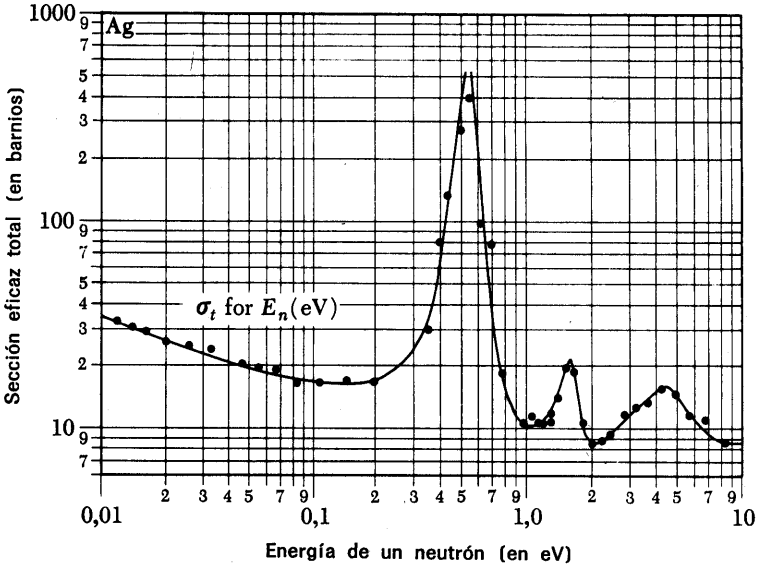


Fig. 6B Curva que representa la sección eficaz total neutrónica de la plata tal como aparece en la naturaleza en función de la energía del neutrón. Obsérvese el pronunciado pico de resonancia. Una ojeada a esta figura, y la figura análoga 6A, pone de manifiesto inmediatamente que la sección eficaz no tiene relación particular alguna con el tamaño de un núcleo. Las curvas para la plata y el cadmio son muy diferentes y ambas muestran una rápida variación con la energía. La teoría ondulatoria de las colisiones puede explicar muy bien la naturaleza general de las curvas de sección eficaz observadas.

Esta curva es una porción de un gráfico que aparece en la compilación realizada por H. H. Goldsmith, H. W. Ibser, y B. T. Feld, "Neutron Cross Sections of the Elements", *Reviews of Modern Physics* **19**, 259 (1947). Convendría consultar este artículo para información acerca de los primeros trabajos en este campo.

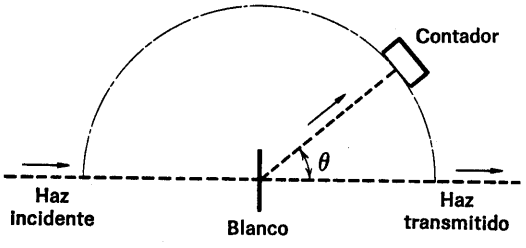


Fig. 7A Representación muy esquemática de un experimento de dispersión. Un haz de partículas procedentes de un acelerador inciden sobre un blanco. El número relativo de partículas dispersadas en varias direcciones se determina con un contador. La figura representa la detección de partículas para un ángulo de dispersión θ. En un experimento de este tipo podemos determinar la sección eficaz diferencial del proceso de dispersión.

contenida dentro de un ángulo sólido $d\Omega$ centrado en torno de la dirección determinada por los ángulos θ y φ para el caso en que el blanco sea una lámina en la que la densidad superficial de partículas B es la unidad. Para el mismo contador mantenido a una distancia fija del blanco, pero orientado en diferentes direcciones, el número de cuentas por unidad de tiempo es directamente proporcional a la sección eficaz diferencial.

En la mayoría de casos de dispersión, la sección eficaz diferencial depende en la práctica solamente de la energía y del ángulo formado por el haz incidente y la dirección de la partícula A dispersada. Si designamos por θ este ángulo, podemos escribir la sección eficaz diferencial en la forma $\sigma_e(E;\theta)$, puesto que no depende del otro ángulo polar *.

La sección eficaz elástica total se obtiene integrando la sección eficaz diferencial respecto de todas las direcciones. Si es independiente del ángulo φ, como en el caso anterior, tenemos, por lo tanto,

$$\sigma_e(E) = \int_{\bigcirc} d\Omega\, \sigma_e(E;\theta) = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \,\mathrm{sen}\,\theta\, \sigma_e(E;\theta) \qquad (7a)$$

* Esta notación, bastante generalizada, no es del todo satisfactoria, ya que se utiliza el mismo signo para la sección eficaz diferencial y para la sección eficaz "total" discutida antes. Los dos tipos de secciones eficaces se distinguen uno de otro por la presencia explícita o ausencia explícita de las variables angulares en el símbolo de la correspondiente cantidad.

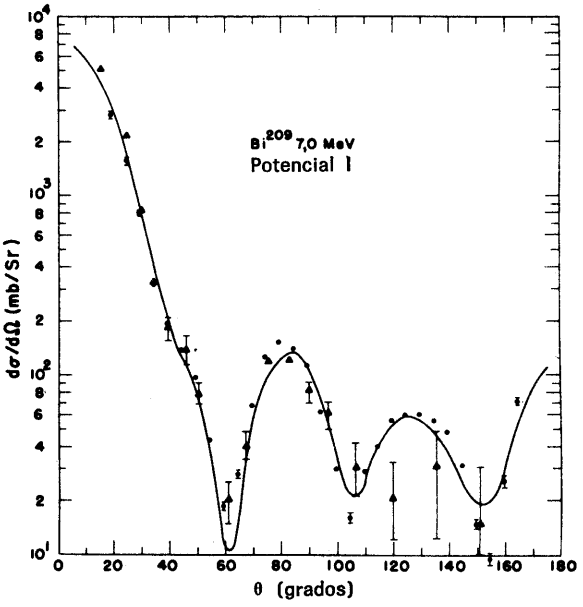
Podríamos definir de manera análoga una sección eficaz diferencial para un proceso inelástico.

8 Las diferentes secciones eficaces, como funciones de la energía, constituyen los datos primarios que se obtienen a partir de experimentos de dispersión. Nos encontramos entonces ante el problema de inferir algo acerca de la naturaleza de las tal vez desconocidas interacciones partiendo de dichos datos. O acaso contamos ya con la teoría, y entonces calculamos las secciones eficaces esperadas a que conduce y las comparamos luego con los resultados experimentales.

Conforme hemos dicho antes, la mayor parte de la información acerca de las partículas elementales procede del análisis de experimentos de dispersión. Se han desarrollado métodos matemáticos especiales para llevarlo a cabo. Nos conduciría demasiado lejos el discutirlo aquí. No hay que decir que el problema de hallar las "fuerzas" a partir de las secciones eficaces está muy lejos de ser trivial en la práctica, si bien (en cierto sentido) no es fundamentalmente complejo.

9 Si tuviéramos que interpretar una dispersión clásicamente, diríamos que la partícula incidente es desviada por el campo de fuerzas de la partícula blanco. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, consideramos la dispersión como una manifestación de la difracción de ondas. Así es, en efecto, como discutimos la difracción de los electrones en el Capítulo 5. Nuestra explicación de los fenómenos observados fue la de que la onda del electrón incidente es difractada por todos los átomos del cristal. En ciertas direcciones las ondas difractadas pueden interferir constructivamente, y éstas son las direcciones en las que observamos máximos de intensidad. La dispersión es así una manifestación de la difracción de las ondas de De Broglie por *obstáculos,* es decir, por los átomos en el cristal.

El lector advertirá ahora que en nuestra descripción de la difracción de electrones hay un aspecto "asimétrico" al que cabe presentar reparos. Decimos que las ondas de electrón incidentes son difractadas por "obstáculos". Pero los "obstáculos" son también partículas físicas, y sabemos que todas las partículas físicas son ondas. Es evidente la inconsecuencia que supone el considerar arbitrariamente ciertas partículas como ondas y otras partículas como "obstáculos" *clásicos.* Lo que vemos en los experimentos de difracción de electrones es la interacción de las ondas de electrón incidentes con los paquetes de ondas que representan los átomos en el cristal. Si queremos ser consecuen-



Sección eficaz diferencial de dispersión elástica de neutrones por el isótopo del bismuto Bi^{209}. El gráfico presenta los puntos experimentales junto con una curva teórica basada en un modelo particular. En abscisas se toman los ángulos de dispersión, y en ordenadas, la sección eficaz diferencial en milibarnios por unidad de ángulo sólido. La energía cinética de los neutrones era de 7 MeV.

Este gráfico se ha tomado del trabajo por C. D. Zafiratos, T. A. Oliphant, J. S. Levin y L. Cranberg, "Large-Angle Neutron Scattering from Lead at 7 MeV", *Physical Review Letters* **14** 913 (1965). *(Cedida por Physical Review Letters.)*

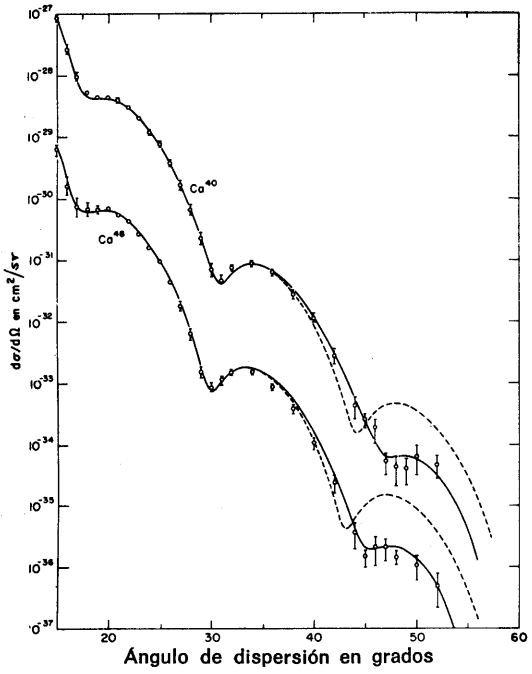


Gráfico que representa las secciones eficaces diferenciales de dispersión elástica de electrones para dos isótopos del calcio diferentes. En ordenadas se representa la sección eficaz diferencial tomando como unidad el cm^2 por unidad de ángulo sólido, con tal que los datos para el Ca^{48} se multipliquen por 10 y los datos para el Ca^{40} se dividan por 10. (Las curvas son muy parecidas, razón por la cual se han separado utilizando estos factores de escala). La energía de los electrones era de 750 MeV.

La interacción electromagnética entre el electrón y el núcleo es la que determina la dispersión, y la finalidad de la medición fue explorar la distribución de carga del núcleo. Obsérvese la tremenda variación (en un factor 10^9) de la sección eficaz diferencial al variar el ángulo de dispersión.

Gráfico tomado del trabajo por J. B. Bellicard y cols. "Scattering of 750 MeV Electrons by Calcium Isotopes", *Physical Review Letters* **19**, 527 (1967). *(Cedida por Physical Review Letters.)*

tes, hemos de decir que la *dispersión se produce como resultado de la interacción de ondas con ondas.*

Seguiremos explorando esta idea más adelante en el presente capítulo. Por el momento haremos observar que este nuevo punto de vista no invalida en modo alguno nuestra discusión de la difracción de electrones. Lo que importa es que la onda incidente encuentra *algo,* y que la interacción con este algo conduce a una difracción de la onda. En tanto fijemos nuestra atención solamente sobre la partícula incidente, carece por completo de importancia qué es lo que la partícula encuentra, sea un "obstáculo clásico" o un paquete de ondas concentrado.

10 Intentemos ahora presentar el más simplificado esquema de una teoría ondulatoria de la dispersión. Consideraremos el caso más simple posible, aquél en el que la onda que representa una partícula A es dispersada (difractada) elásticamente por un campo de fuerzas fijo que presenta simetría central. Podemos imaginar que el campo de fuerzas deriva de un potencial que tiende rápidamente a cero al aumentar la distancia desde el centro del campo de fuerzas. Nuestro problema es hasta cierto punto análogo a los problemas de barrera que se estudiaron en el capítulo 7. La partícula A se encuentra en una región en la que la función potencial varía con la posición y, en consecuencia, una onda plana incidente será difractada por dicho potencial.

De acuerdo con el modelo que estamos considerando, representaremos la partícula B en el blanco por un potencial con simetría esférica, aunque sabemos que la partícula B debiera describirse también como una onda. Sin embargo, el caso es que la descripción cuántica correcta de la dispersión de dos partículas es *matemáticamente equivalente* a nuestro modelo. Éste, por lo tanto, no es malo, en absoluto. Si consideramos cuidadosamente lo que estamos haciendo, nos daremos cuenta de que ya antes procedimos de manera análoga. Al discutir la radiactividad alfa en el capítulo 7, la situación se describió en términos del movimiento de una partícula alfa que obedece a la mecánica cuántica en un campo de fuerzas que deriva de un potencial. Al discutir las vibraciones moleculares, consideramos el movimiento de una partícula bajo la influencia de un potencial molecular aproximadamente armónico. En cada uno de estos casos se substituyó el problema real, que implica siempre el movimiento de, por lo menos, dos partículas, por un problema-modelo en el que una partícula única se mueve en un

potencial que describe sus interacciones con todas las otras partículas.

11 Supongamos que una onda plana de la forma

$$\psi_i(\mathbf{x},t) = C \exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i - i\omega t) \tag{11a}$$

representa una partícula A que incide sobre una partícula B (situada en el origen $\mathbf{x} = 0$). Aquí, $\mathbf{p}_i$ es el impulso de la onda, ω es la energía * y C una constante de normalización. La onda será difractada por la partícula B. Intentemos prever la forma de la función de onda que representa la onda difractada a distancia *muy grande* del origen. Afirmamos que la función

$$\psi_s(\mathbf{x},t) \cong C f(\theta)\frac{1}{x}\exp(ixp - i\omega t) \tag{11b}$$

constituye una elección razonable. Se ha designado por x la distancia desde el origen, y por p el módulo del impulso incidente, es decir, $x = |\mathbf{x}|$, $p = |\mathbf{p}_i|$. La función $f(\theta)$ es una cierta función del ángulo θ formado por la dirección del impulso incidente $\mathbf{p}_i$ y la dirección del vector posición $\mathbf{x}$ (orientado desde el origen hacia el "punto de observación").

Estudiemos ahora varias características de la función de onda ψ_s para ver si efectivamente puede representar la onda dispersada. La amplitud de ésta es proporcional a la amplitud C de la onda incidente y la forma elegida refleja así la hipótesis razonable de que la respuesta es *lineal*. La frecuencia ω de la onda dispersada es la misma que la frecuencia de la onda incidente. Esto significa que la energía de la partícula A se conserva, como debe suceder puesto que se trata de la dispersión elástica en el campo de fuerzas fijo de la partícula B.

El factor $\exp(ixp - i\omega t)$ representa, evidentemente, una onda esférica que se propaga *hacia afuera*. En un punto cualquiera la velocidad de fase se dirige, apartándose del origen, a lo largo del radio vector. Una onda que representa una partícula dispersada debe poseer, evidentemente, esta propiedad. El factor $1/x$ en la expresión (11b) describe la disminución de la amplitud de la onda dispersada con la distancia. La *intensidad* de la onda es proporcional al cuadrado del valor absoluto de la función de onda. Dicha intensidad mide el flujo de probabilidad saliente (o si se quiere, el flujo de partículas en una sucesión de mediciones repetidas) y esta cantidad *debe* decrecer

* Empleamos unidades tales que $\hbar = 1$.

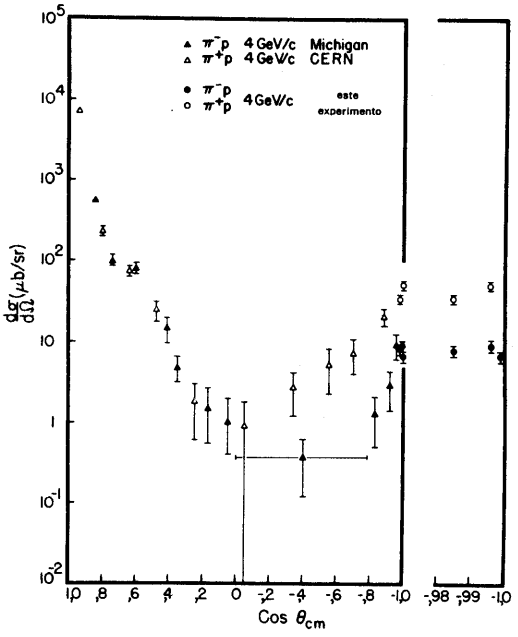


Diagrama de las secciones eficaces diferenciales elásticas pión-protón para un pión de impulso 4 GeV/c. En abcisas se toman los cosenos del ángulo de dispersión en el sistema del centro de masa. Las ordenadas son las secciones eficaces diferenciales en microbarnios por unidad de ángulo sólido. La sección eficaz en la vecindad de la dirección hacia atrás (es decir, para cos θ_{cm} próximo a -1) se representa a la derecha en una escala horizontal dilatada. Obsérvese que los datos se dan tanto para piones positivos como para piones negativos; los diferentes puntos experimentales se identifican en la parte superior del gráfico.

Esta figura se ha tomado del trabajo por W. R. Frisken y cols. "Backward Elastic Scattering of High-Energy Pions by Protons", *Physical Review Letters* 15, 313 (1965). (Cedida por *Physical Review Letters.*)

como $1/x^2$ al aumentar la distancia. Por lo tanto, la amplitud ha de disminuir como $1/x$, conforme hemos supuesto.

12 Vemos así que simples consideraciones físicas exigen que la función de onda que describe la onda dispersada sea de la forma (11b). La función $f(\theta)$ se llama *amplitud de dispersión.* Es evidente que define la distribución angular de las partículas dispersadas. Pora establecer la relación que existe entre la amplitud de dispersión y la sección eficaz diferencial razonaremos como sigue. Considérese una pequeña región en torno del punto **x** sobre la superficie de la esfera con centro en el origen y que pasa por **x**. Sea dF su área. La probabilidad dP de que la partícula dispersada pase por dicha área debe ser entonces proporcional al producto de dF por el cuadrado del valor absoluto de la función de onda $\psi_s(\mathbf{x},t)$. Según esto podemos escribir

$$dP = k\,|\,\psi_s(\mathbf{x},t)\,|^2 dF = k\,|C|^2\,|f(\theta)|^2\left(\frac{dF}{x^2}\right) \tag{12a}$$

donde k es una constante fija de proporcionalidad. Dado que $dF/x^2 = d\Omega$ es el valor del ángulo sólido subtendido por la pequeña porción de superficie vista desde el origen, podemos escribir también

$$dP = k\,|C|^2\,|f(\theta)|^2\,d\Omega \tag{12b}$$

y vemos así que dP es la probabilidad de que la partícula dispersada salga dentro del pequeño cono de ángulo sólido $d\Omega$.

Consideremos luego la onda incidente dada por (11a). Imaginemos un disco (circular) de área *unidad* perpendicular al impulso incidente $\mathbf{p}_i$ y centrado en el origen. La probabilidad de que la partícula incidente atraviesa este disco ha de ser igual a

$$P_i = k|\,\psi_i\,|^2 = k|C|^2 \tag{12c}$$

donde k es la *misma* constante que aparece en (12a) y (12b).

Considerando las expresiones (12b) y (12c), podemos decir lo siguiente. En una sucesión de experimentos de dispersión repetidos (en la que las partículas A tienen siempre el mismo impulso inicial $\mathbf{p}_i$) la razón del número de partículas dispersadas que emergen dentro del cono de ángulo sólido $d\Omega$ al número de partículas que inciden sobre el disco unidad es igual a

$$\frac{dP}{P_i} = |f(\theta)|^2\,d\Omega \tag{12d}$$

Si ahora recordamos nuestra discusión relativa a la sección eficaz diferencial $\sigma_e(\theta)$ en la sección 7, observamos que la razón dP/P_i es justamente el producto de la sección eficaz diferencial por $d\Omega$. Obtenemos así la importante relación

$$\sigma_e(\theta) = |f(\theta)|^2 \tag{12e}$$

que nos dice que la sección eficaz diferencial es simplemente el cuadrado del valor absoluto de la amplitud de dispersión.

13 Si queremos hallar una expresión teórica para la amplitud de dispersión $f(\theta)$, debemos, claro está, resolver explícitamente nuestro problema de difracción. Esto significa que hay que hallar una solución de la ecuación de Schrödinger, o acaso de alguna otra ecuación, correspondiente al problema de que se trata. En nuestro modelo hemos de hallar una solución de la ecuación de Schrödinger con el potencial que ve la partícula A y debido a la presencia de la partícula B. Las ecuaciones de onda de la mecánica cuántica tienen una infinidad de soluciones y es también necesario encontrar la *correcta,* la que puede interpretarse como correspondiente al caso de dispersión. La condición que hemos de imponer es que a *grandes* distancias del origen la función de onda sea de la forma

$$\psi(\mathbf{x},t) \cong C \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i - i\omega t) + Cf(\theta)\frac{1}{x}\exp(ixp - i\omega t) \tag{13a}$$

Esto significa que lejos del centro de dispersión tenemos la "onda incidente" plana junto con la onda dispersada saliente. No intentaremos resolver aquí este problema. Es posible probar, en condiciones muy generales, que para cada impulso incidente elegido $\mathbf{p}_i$ existe una *única* solución de la función de onda que tiene la forma asintótica (13a). La amplitud de dispersión está así determinada unívocamente para un impulso incidente dado y una interacción (potencial) dada. Dicha amplitud dependerá, en general, del módulo p del impulso incidente, y si queremos subrayar este hecho podemos escribir la amplitud de dispersión en la forma $f(p;\theta)$. Una vez determinada la amplitud de dispersión, la sección eficaz diferencial se encuentra mediante (12e).

14 Consideremos el caso especial, importante y simple, en el que la amplitud de dispersión es *independiente* del ángulo de

dispersión θ, es decir, $f(\theta) = f =$ una constante, y la distribución angular presenta simetría esférica. Esta situación tiende a presentarse para dispersión a bajas energías. Es fácil comprender cualitativamente la razón de ello. La distribución angular tiende a ser compleja, es decir, rápidamente variable como función de θ, cuando la longitud de onda de la onda incidente es pequeña comparada con el tamaño del "objeto" por el que es difractada. Podemos imaginar que la difracción se produce sobre todo el objeto, de modo que cada "parte" del mismo emite una onda difractada. En una dirección dada estas ondas pueden interferir constructivamente o destructivamente según sean sus fases relativas. Si la longitud de onda es pequeña comparada con el objeto, un pequeño cambio en la dirección de observación puede tener un efecto apreciable sobre las fases relativas, con lo cual es posible que la sección eficaz diferencial varíe muy rápidamente con el ángulo θ. Sin embargo, si la longitud de onda es grande comparada con el objeto, estos efectos de interferencia "geométrica" no se presentan y la amplitud de dispersión es una función lentamente variable de la dirección. En el caso límite extremo de bajas energías, en el que la longitud de onda es *muy* grande comparada con el tamaño del objeto dispersor, la amplitud de dispersión resulta independiente del ángulo y ésta presenta simetría esférica.

15 En el caso en que $f(\theta) = f =$ una constante, la onda dispersada

$$\psi_s(\mathbf{x},t) = \frac{Cf}{x} \exp(ixp - i\omega t) \tag{15a}$$

depende de la onda incidente *sólo* a través del parámetro C que expresa la amplitud de la onda incidente en el origen. En particular, la onda dispersada es independiente de la dirección del impulso incidente $\mathbf{p}_i$. Esto es lo que cabía esperar si el objeto dispersor es muy pequeño comparado con la longitud de onda.

Supongamos que se substituye la onda plana dada en (11a) por su valor medio (uniforme) respecto de todas las direcciones de $\mathbf{p}_i$. Esto es, consideremos un nuevo problema de dispersión en el que la onda incidente es de la forma

$$\psi_{i0}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\bigcirc} d\Omega_p \, C \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i - i\omega t) \tag{15b}$$

Esta integral extendida a todas las direcciones se calcula fácilmente si elegimos el ángulo θ formado por $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}_i$ como uno de los ángulos polares de $\mathbf{p}_i$. Obtenemos

$$\psi_{i0}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \,\mathrm{sen}\,\theta\, C \exp\,(ixp\cos\theta - i\omega t)$$

$$= \frac{C}{2ixp}\left(\exp\,(ixp) - \exp\,(-ixp)\right)\exp\,(-i\omega t) \qquad (15c)$$

Si la onda dispersada no depende de la dirección del impulso incidente, una onda incidente de la forma ψ_{i0} determinará la *misma* onda dispersada que la onda plana en (11a). Podemos imaginar la onda ψ_{i0} como la *parte esféricamente simétrica* de la onda plana incidente. Sólo esta parte de dicha onda conduce a la onda con simetría esférica ψ_s dada en (15a).

16 La parte esféricamente simétrica ψ_{i0} de la onda plana incidente tiene una forma interesante. Si examinamos la expresión (15c), advertiremos que la onda es la suma de una onda esférica *divergente* y de una onda esférica *convergente*. Una onda plana "contiene" dos ondas de esta naturaleza, porque describe un movimiento hacia el origen a la vez que un movimiento que se aparta de él. Las amplitudes de las dos ondas son iguales en valor absoluto. Así *debe* ser, porque de otro modo el flujo saliente diferiría del flujo entrante. Dado que hemos supuesto que la dispersión es elástica (con lo que se conservan las partículas A), los flujos entrante y saliente (de partículas A) deben ser iguales.

Consideremos ahora el promedio sobre la esfera unidad de la expresión (13a) en el caso en que $f(\theta) = f =$ una constante. Este valor medio viene dado por

$$\psi_0(\mathbf{x},t) = \psi_{i0}(\mathbf{x},t) + \psi_s(\mathbf{x},t)$$

$$= \frac{C}{2ixp}\left([1 + 2ipf]\exp\,(ixp) - \exp\,(-ixp)\right)\exp\,(-i\omega t) \qquad (16a)$$

Podemos interpretar esta expresión como la forma asintótica de la función de onda que describe la situación de dispersión en la que la onda esférica ψ_{i0} representa el papel de onda incidente. El examen de (16a) prueba que la onda $\psi_0(\mathbf{x},t)$ tiene también una parte convergente y una parte divergente. Si el proceso de dispersión es elástico, los valores absolutos de las amplitudes

de estas dos ondas *deben* ser iguales. Esto conduce a la importante condición

$$|1 + 2ipf| = 1 \tag{16b}$$

que debe cumplir la amplitud de dispersión f.

Es conveniente escribir la solución general de la ecuación (16b) en la forma

$$f = \frac{1}{2ip}(e^{2i\delta} - 1) \tag{16c}$$

donde δ es un número *real*. La cantidad δ se llama el *desplazamiento de fase* (de la onda-s). En general es una función del valor absoluto p del impulso.

17 Investiguemos cuán grande puede ser la sección eficaz elástica en el caso de dispersión con simetría esférica. La sección eficaz diferencial es igual a $|f|^2$ y la sección eficaz elástica total σ_e se obtiene integrando la sección eficaz diferencial respecto de todas las direcciones. Tenemos así [teniendo en cuenta (16c)]

$$\sigma_e = \frac{\pi}{p^2}|e^{2i\delta} - 1|^2 \tag{17a}$$

Para un valor fijo p esta cantidad toma su valor máximo si δ es de la forma $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$, donde n es un entero. El valor máximo es igual a

$$(\sigma_e)_{\max} = \frac{4\pi}{p^2} \tag{17b}$$

La fórmula que precede se refiere a un sistema de unidades en el que $\hbar = 1$. Es muy fácil "restablecer" la constante $\hbar$. Debe aparecer elevada al cuadrado en el numerador debido a que las dimensiones de la sección eficaz son las de una área. En los sistemas de unidades CGS o MKS tenemos así

$$(\sigma_e)_{\max} = 4\pi\left(\frac{\hbar}{p}\right)^2 \tag{17c}$$

La sección eficaz máxima para dispersión con simetría esférica, por lo tanto, es $(1/\pi)$ veces el cuadrado de la longitud de onda de De Broglie h/p de la partícula incidente. Para impulsos pequeños esta sección eficaz puede ser muy grande.

Tomando como base el modelo ondulatorio de la dispersión es posible así entender fácilmente por qué las secciones eficaces de que se habló en la sección 6 son tan grandes, lo que quizá pueda haber causado al lector cierta preocupación.

18 Conforme hemos dicho el desplazamiento de fase δ es una función del módulo p del impulso incidente. Dado que la energía de incidencia ω es una función monótona de p, podemos igualmente considerar δ como función de la energía. Escribamos, pues, $\delta(\omega)$ para el desplazamiento de fase a fin de resaltar el hecho de que depende de la energía.

Cada vez que el desplazamiento de fase, como función de la energía, pasa por uno de los valores $(n + \frac{1}{2})\pi$ la sección eficaz toma el valor máximo dado en (17b). Se dice entonces que la dispersión es resonante en dicho punto. Estudiemos el comportamiento de la amplitud de dispersión y de la sección eficaz en la vecindad inmediata de una resonancia. Designemos la energía en la resonancia por ω_0, con lo cual tendremos $\delta(\omega_0) = (n_0 + \frac{1}{2})\pi$ para cierto entero n_0.

Escribiremos (16c) de otra forma utilizando las relaciones de definición

$$\operatorname{ctg}(\delta) = \frac{\cos(\delta)}{\operatorname{sen}(\delta)} = \frac{i(e^{i\delta} + e^{-i\delta})}{(e^{i\delta} - e^{-i\delta})} \tag{18a}$$

para la cotangente. El lector se convencerá inmediatamente de que podemos escribir

$$f(\omega) = \frac{1}{2ip}\left(e^{2i\delta(\omega)} - 1\right) = \frac{(1/p)}{\operatorname{ctg}[\delta(\omega)] - i} \tag{18b}$$

En el punto $\omega = \omega_0$ tenemos $\operatorname{ctg}[\delta(\omega_0)] = 0$. Cabe entonces intentar desarrollar $\operatorname{ctg}[\delta(\omega)$ en potencias de $(\omega - \omega_0)$ en un entorno del punto $\omega = \omega_0$. Conservando únicamente el término lineal, tenemos

$$\operatorname{ctg}[\delta(\omega)] \cong -\frac{2}{\Gamma}(\omega - \omega_0) \tag{18c}$$

donde, siguiendo una costumbre establecida, hemos escrito la derivada de $\operatorname{ctg}[\delta(\omega)]$ en ω_0 en la forma $-2/\Gamma$.

Supondremos que el desplazamiento de fase aumenta con la energía en un entorno de la resonancia. Esto significa que $\operatorname{ctg}[\delta(\omega)]$ disminuye al aumentar la energía y el parámetro Γ que hemos introducido en (18c) es positivo. Substituyendo la

expresión aproximada (18c) (que es válida únicamente cerca de la resonancia) en (18b) obtenemos

$$f(\omega) \cong -\frac{1}{p}\left(\frac{\Gamma/2}{(\omega - \omega_0) + i\Gamma/2}\right) \tag{18d}$$

y

$$\sigma_e(\omega) \cong \frac{4\pi}{p^2}\left(\frac{(\Gamma/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2}\right) \tag{18e}$$

El lector reconocerá en la fórmula (18e) la fórmula de resonancia de Breit-Wigner (21d) del capítulo 3, fórmula que dedujimos allí siguiendo un razonamiento diferente. La cantidad Γ es la anchura de la resonancia. En el capítulo 3 asociamos con las resonancias ciertos niveles excitados y a esta idea nos atendremos también aquí. La cantidad $1/\Gamma = \tau$ es entonces la vida media del nivel excitado que se manifiesta como resonancia.

¿Qué se entiende por partícula?

Antes de proseguir al análisis del problema de las interacciones conviene que examinemos nuestras nociones acerca de una partícula. Imaginemos que intentamos formular condiciones razonables para que algo pase a ser miembro del conjunto de las partículas.

Una partícula es, en cierto sentido, un "único" objeto coherente que tiene una identidad definida y que se puede localizar en una región limitada del espacio en un instante dado. Está caracterizada por atributos físicos definidos y con carácter tentativo podemos exigir qne posea una masa definida, una carga definida, un momento cinético intrínseco definido, etc., y que sea absolutamente estable cuando se encuentra sola en el espacio.

20 De acuerdo con estas reglas, admitiríamos el protón, el electrón, el positón, los neutrinos, el fotón y los núcleos estables. Estas normas de admisión suscitan, sin embargo, algunos problemas inmediatos. Los átomos neutros y todos los iones en sus estados fundamentales satisfacen también aquellos criterios y, por lo tanto, debieran ser admitidos en la clase. Lo mismo vale para todas las moléculas e iones moleculares en sus estados fundamentales, con lo cual la clase que hemos definido llega a ser excesivamente amplia si incluimos también estos

objetos, lo que para ser justos debiéramos hacer. Por otra parte, tendríamos que rechazar un objeto tal como el núcleo de radio con actividad alfa $_{88}Ra^{226}$ basándonos en que no es estable. Esto no es satisfactorio, porque hay que convenir en que es *casi* estable (período 1622 años), y desde el punto de vista del químico el átomo de radio es tan respetable como el átomo de bario. Todavía peor, deberíamos rechazar el neutrón. El neutrón es el hermano gemelo del protón y lo consideramos como uno de los sillares con que se construyen los núcleos. Dentro de un núcleo estable el neutrón es tan estable como el protón, si bien se desintegra cuando se encuentra solo en el espacio. Con todo, su vida media es de 17 minutos, que es un tiempo muy largo en la escala de tiempos nuclear o atómica (es decir, grande comparado con 10^{-24} ó 10^{-8} segundos).

En un experimento en el que el fenómeno en estudio ocurre en un intervalo de tiempo que es muy corto comparable con 17 minutos, el neutrón se comporta como una partícula estable. Por ejemplo, podemos llevar a cabo experimentos de difracción haciendo incidir neutrones sobre un cristal.

Finalmente, en contra de nuestras normas de admisión se puede aducir que acaso algunos de los núcleos "estables" que hemos admitido son de hecho inestables, si bien sus vidas son tan largas que no hemos podido todavía darnos cuenta de su inestabilidad. Esto pudiera dar lugar a la expulsión de objetos que habíamos ya admitido de buen grado.

21 Visto todo lo que procede, nos damos cuenta, como personas sensatas, que hemos de modificar nuestros criterios de admisión. Admitiremos ahora objetos que son "tan sólo un poquitín inestables" y según estas nuevas reglas recibiremos como miembros al neutrón y al núcleo de radio. Esto significa que también renunciamos a nuestra condición de que una partícula ha de tener una masa definida, porque, conforme aprendimos en el capítulo 3, si un sistema tiene una vida finita τ, la energía (en este caso la energía de la partícula en reposo) está definida tan sólo dentro de una indeterminación del orden de h/τ. En otras palabras, si la vida media de una partícula es τ, la indeterminación en el valor de su masa en reposo debe ser del orden de

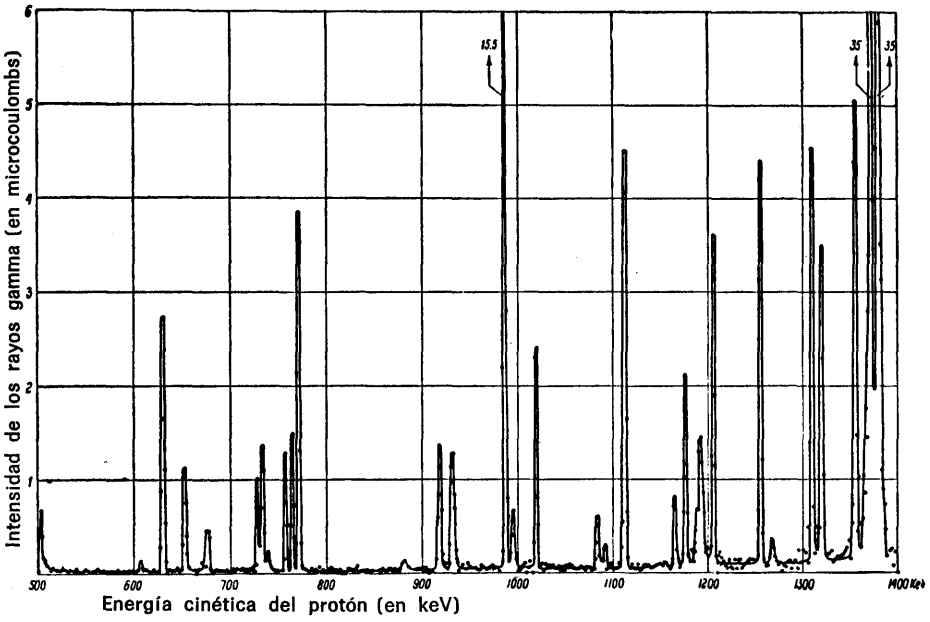
$$\Delta m \sim \frac{\hbar}{\tau c^2} \tag{21a}$$

Para el neutrón esta indeterminación es sumamente pequeña; resulta ser menor que 10^{-27} u.

22 Una vez hemos renunciado al requisito de estabilidad absoluta, encontramos muy difícil el decidir hasta qué punto consentiremos que una partícula sea inestable. El muón tiene un período de unos 10^{-6} segundos, que es pequeño en la escala macroscópica, pero muy grande en la escala de tiempos nuclear. Lo mismo cabe decir de los piones cargados, cuyos períodos son de unos 10^{-8} segundos. Estas partículas deben, por lo tanto, ser amitidas. El pión neutro tiene un período del orden de 10^{-6} segundos. Este período es todavía grande comparado con 10^{-24} segundos y, además, el pión neutro está evidentemente relacionado con los piones cargados. De acuerdo con esto admitimos también el pión neutro, junto con partículas como los mesones K y los hiperones. Las vidas medias de los mesones K y los hiperones son por lo general del orden de 10^{-10} segundos. Obsérvese que las indeterminaciones correspondientes en los valores de sus masas, dadas por la ecuación (21a), son aún muy pequeñas comparadas con sus masas en reposo.

23 Debemos decidir ahora si admitimos o no todos los estados excitados de los átomos, moléculas y núcleos. En favor de su admisión puede aducirse que muchos de los estados excitados tienen vidas que son muy largas comparadas con la del pión neutro, o de hecho largas comparadas con la del neutrón. Algunos de los estados excitados decaen por emisión de partículas materiales y otros lo hacen por emisión de fotones. ¿Es justo excluir los estados excitados si admitimos el "estado fundamental" del ${}_{88}Ra^{226}$, que también decae por emisión de una partícula? Además: ¿no cabe que alguno de los hiperones debiera acaso considerarse como "estado excitado" del nucleón? (Los hiperones decaen todos dando lugar a otras partículas, una y solamente una de las cuales es un nucleón.) Encontramos muy difícil resistir estas presiones y por ello admitimos a los "estados excitados".

24 Llegados a este punto nos damos cuenta de que el número de miembros ha pasado del millón, lo que no nos gusta. Si nuestra intención original fue la de formar una sociedad relativamente pequeña y manejable de partículas respetables, este objetivo se ha visto ahora desbaratado. Además, nuestra última concesión, la de admitir los "estados excitados", suscita algunas serias dudas acerca de todas nuestras normas de admisión. Para ver esto consideramos la determinación experimental de un estado excitado, es decir, de un nivel de energía por encima del estado fundamental de un sistema. En el capítulo 3 explicamos cómo los estados excitados se manifiestan en los procesos de



dispersión en forma de resonancias. Un ejemplo de esto lo ofrece la dispersión resonante de la luz por un átomo. Si medimos la eficacia de un átomo como dispersor de luz en función de la frecuencia de ésta, encontramos máximos pronunciados en las frecuencias que corresponden a las diferencias de energía entre los estados excitados y el estado fundamental. Este fenómeno, sin embargo, no queda restringido a la dispersión de la luz: también lo encontramos en la dispersión de partículas materiales. La figura 24 A ofrece un ejemplo. Las ordenadas representan medidas de la sección eficaz y la curva muestra así la sección eficaz experimentalmente medida como función de la energía para la absorción de protones por aluminio. Los picos agudos en la sección eficaz revelan las posiciones de los estados excitados del núcleo de silicio producido en la reacción.

La anchura T de un pico de resonancia mide la indeterminación en la energía del correspondiente estado excitado. Mientras las resonancias son muy pronunciadas, su interpretación como manifestaciones de estados excitados es bien clara. Hemos convenido en que tales estados excitados son "partículas". Veamos ahora la figura 24B que presenta la sección eficaz de dispersión de piones por protones en función de la energía. La sección eficaz para piones positivos presenta un pico pronunciado, como también un ligera "prominencia" a una energía más

Fig. 24A Curva de rendimiento para la reacción $Al^{27} + p \rightarrow Si^{28} + \gamma$ tomada de un trabajo por K. J. Broström, T. Huus y R. Tangen, "Gamma-Ray Yield Curve of Aluminum Bombarded with Protons", *Physical Review* **71**, 661 (1947). Las ordenadas son una medida de las secciones eficaces de reacción. En abscisas se representan las energías cinéticas de los protones incidentes, en keV, en el sistema de referencia del laboratorio. Los picos agudos son resonancias, que revelan la existencia de estados excitados en el núcleo de silicio producido en la reacción. *(Cedida por The Physical Review.)*

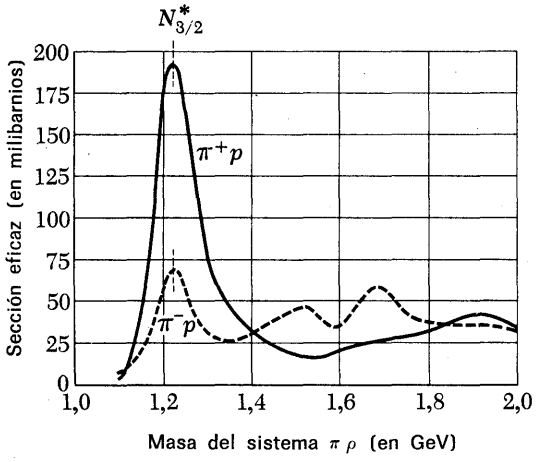


Fig. 24B Las dos curvas muestran la sección eficaz observada en la dispersión de piones positivos y negativos por protones. Las ordenadas dan la sección eficaz total en milibarnios, y las abcisas, la energía del pión y del protón en el sistema de referencia del centro de masa. Es conveniente expresar así esta energía, porque la situación de un pico prominente corresponde directamente a la masa de la "partícula" o estado de resonancia.

Obsérvese el gran pico a una energía de aproximadamente 1,238 GeV. Esta energía corresponde a una energía cinética del pión de unos 195 MeV en el sistema del laboratorio en el cual el pión incidente choca con un protón en reposo.

Hemos designado estas resonancias con el símbolo $N^*_{3/2}$. La notación $\Delta(1238)$ se encuentra también frecuentemente en la literatura.

alta. La sección eficaz para piones negativos presenta tres picos moderadamente bien definidos. ¿Todos estos picos corresponden a partículas? Muchos físicos se inclinan hoy a decir que sí, que corresponden a partículas. Las masas de estas "partículas" (?) son simplemente las abscisas de los máximos.

25 El dilema con que nos enfrentamos es el de dónde trazar la frontera. Indiscutiblemente, no queremos decir que toda pequeña "prominencia" en una curva que representa una sección eficaz en función de la energía corresponde a una partícula, pero, por otra parte, cualquier regla según la cual una resonancia debe ser "suficientemente" estrecha para que la aceptemos como algo que define a una partícula será un tanto arbitraria. En otras palabras: si un objeto debe ser admitido en el conjunto de las partículas, su vida no puede ser *demasiado* corta; pero, ¿dónde trazar la frontera?

Examinemos nuevamente nuestros fines. Quizá no se gana realmente nada al intentar definir *precisamente* qué entendemos por una partícula en general. Nuestos intentos nos han conducido a una clase de objetos con millones de miembros que contienen, entre otras partículas, objetos tan cualitativamente distintos como los piones y las moléculas de proteínas. De acuerdo con el uso común del lenguaje, estos objetos se pueden llamar razonablemente partículas, pero difícilmente podemos esperar aprender algo profundo acerca de las interacciones fundamentales si tratamos los piones y las moléculas de proteínas como iguales en nuestra teoría básica. Algunas de las partículas son evidentemente sistemas compuestos y como a tales debiéramos describirlas en nuestra teoría: habría que "explicarlas" en términos de las interacciones de sus constituyentes más elementales.

Desde un punto de vista práctico cabe imaginar una jerarquía de partículas cada vez más y más elementales. Según sea la naturaleza del fenómeno físico que queremos considerar, cambia nuestra noción de los "componentes elementales" de un sistema compuesto. Es una forma común de hablar la de decir que una molécula es un estado ligado de átomos, que un átomo es un estado ligado de un núcleo y de un cierto número de electrones y que un núcleo es un estado ligado de protones y neutrones. Ahora bien, ni el protón, ni el neutrón, ni el electrón no son, en modo alguno obvio, estados ligados de alguna otra cosa: bien pudiera ocurrir que figuraran entre las partículas elementales últimas. Como a tales, son objetos de particular interés en una teoría básica.

TABLA 26B El octeto mesónico principal

Partícula	Masa MeV	Vida media s	Modos principales de desintegración
π^+ piones cargados π^-	139,60	$2{,}61 \times 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu$ $\mu^- \bar{\nu}_\mu$
π^0 pión neutro	134,98	$0{,}89 \times 10^{-16}$	$\gamma\,\gamma$ $\gamma\, e^+ e^-$
K^+ mesones-K cargados K^-	493,8	$1{,}23 \times 10^{-8}$	$\mu^\pm \nu$ $\pi^\pm \pi^0$ $\pi^\pm \pi^+ \pi^-$
K^0 mesones-K neutros $\bar{K}^0$ — K_1	497,9	$0{,}87 \times 10^{-10}$	$\pi^+ \pi^-$ $\pi^0 \pi^0$
K^0 mesones-K neutros $\bar{K}^0$ — K_2		$5{,}68 \times 10^{-8}$	$\pi^0 \pi^0 \pi^0$ $\pi^+ \pi^- \pi^0$ $\pi\ \mu\ \nu$ $\pi\ e\ \nu$
η mesón-eta	548,6	? $< 7 \times 10^{-20}$ $> 7 \times 10^{-21}$	$\gamma\ \gamma$ $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ $\pi^0 \gamma\,\gamma$ $\pi^+ \pi^- \pi^0$ $\pi^+ \pi^- \gamma$

Estos mesones tienen spin 0 y número bariónico 0. Los dos mesones-K neutros, K^0 y $\bar{K}_0$, se comportan en sus desintegraciones como si fuesen "mezclas" de dos partículas K_1 y K_2 de vidas diferentes y masas muy ligeramente distintas.

26 Entre todas nuestras partículas consideremos el subconjunto de las (¿verdaderamente?) partículas elementales. Nuestro primer principio será el de que ningún objeto que es "obviamente compuesto" se admitirá en este menor y más selecto conjunto. En el capítulo 1 discutimos algunos criterios experimentales acerca de la naturaleza compuesta o elementales de una partícula. Todos los átomos, todas las moléculas y todos los núcleos más pesados que el protón son, evidentemente, sistemas compuestos y, por consiguiente, quedan excluidos de nuestro nuevo conjunto. Con esto nos encontramos ante aproximadamente un centenar de partículas que "no son obviamente compuestas". Admitimos el protón, el neutrón, el antiprotón, el

TABLA 26A Los leptones

Partícula	Carga	Masa MeV
e^- electrón	$-e$	0,511
e^+ positón	$+e$	0,511
μ^- muones	$-e$	105,7
μ^+	$+e$	105,7
ν_e neutrino-e	0	0
$\bar{\nu}_e$ antineutrino-e	0	0
ν_μ neutrino-μ	0	0
$\bar{\nu}_\mu$ antineutrino-μ	0	0

Los muones son inestables y se desintegran de acuerdo con la fórmula: $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \bar{\nu} + \nu$. (De los neutrinos, probablemente uno es un neutrino-μ, y el otro, un neutrino-e.) La vida media de los muones es de $2{,}20 \times 10^{-6}$ s. Las otras partículas son estables. Todos los leptones tienen momento cinético de spin 1/2.

TABLA 26C El octeto bariónico principal

Partícula	Masa MeV	Vida media s	Modos principales de desintegración
p protón	938,256	estable	—
n neutrón	939,550	$1{,}01 \times 10^3$	$pe^-\bar{\nu}$
Λ hiperón-lambda	1115,58	$2{,}51 \times 10^{-10}$	$p\pi^-$ $n\pi^0$
Σ^+ hiperones-sigma	1189,47	$0{,}81 \times 10^{-10}$	$p\pi^0$ $n\pi^+$
Σ^0	1192,56	$< 10^{-14}$	$\Lambda\gamma$
Σ^-	1197,44	$1{,}65 \times 10^{-10}$	$n\pi^-$
Ξ^0 partículas de	1314,7	$3{,}0 \times 10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$
Ξ^- cascada	1321,2	$1{,}7 \times 10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$

Estas partículas tienen todas spin 1/2 y número bariónico + 1. Existe un octeto antibariónico formado por las antipartículas de estas partículas. Las antipartículas tienen todas las mismas masas, spins, y vidas medias que las partículas, pero cargas y número bariónico opuestos.

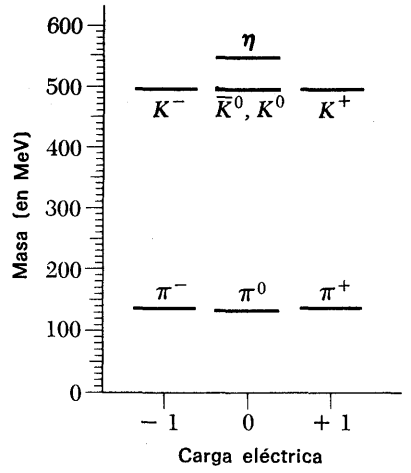


Fig. 27A Espectro de masas del octeto mesónico al que pertenecen los piones y los mesones-*K*. Estas partículas tienen todas número bariónico cero y spin nulo. Los dos mesones-*K* neutros, K^0 y $\overline{K}_0$, indicados por la doble raya en el esquema de términos, tienen la misma masa dentro de la precisión del dibujo. Los pares partícula-antipartícula se encuentran situados simétricamente respecto de la vertical que corresponde a carga cero. Las partículas π^0 y η son sus propias antipartículas. $\overline{K}_0$ es la antipartícula de K^0.

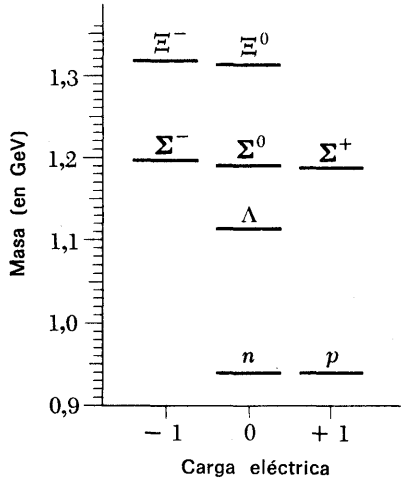


Fig. 27B Espectro de masas del octeto bariónico al que pertenecen el protón (*p*) y el neutrón (*n*). Estas partículas tienen todas el número bariónico + 1 y spin 1/2. El diagrama se puede interpretar como un esquema de términos que representa los ocho estados diferentes de la "partícula general" asociada con este multiplete.

antineutrón, los hiperones de larga vida y sus antipartículas, los piones, los mesones K, los muones, los neutrinos, el electrón y el positón, y el fotón. Excepto el protón, el antiprotón, el electrón, el positón, el fotón y los neutrinos, todas estas partículas son inestables, pero vista nuestra anterior discusión no utilizaremos la estabilidad absoluta como una condición de admisibilidad.

Las partículas elementales se dividen en cuatro clases. El fotón es el único miembro de la primera de ellas. Las otras clases son los *leptones,* los *mesones* y los *bariones* (incluyendo los antibariones). Las tablas 26A-C presentan una lista de algunas de las propiedades de los leptones y de los mesones y bariones más respetables *. (Véase también la Tabla B en el Apéndice).

27 En las figuras 27A-B se presentan los mesones y bariones que aparecen en las tablas 26B-C formando diagramas que se parecen muchísimo a los esquemas de términos que se discutieron en el capítulo 3. Cada partícula se representa por una corta barra horizontal en un gráfico en el cual las ordenadas son las masas en reposo (en MeV) y las abscisas son la carga eléctrica. (El centro de la barra indica la carga de la partícula.)

De acuerdo con las ideas corrientes, nuestros diagramas de partículas debieran considerarse como enteramente análogos a los esquemas de términos para átomos. Cada diagrama corresponde a un "multiplete" de partículas íntimamente relacionadas que, en cierto sentido, se podrían considerar como estados diferentes de la partícula "general" del multiplete.

La figura 27C presenta el multiplete antibarión de ocho partículas que son las antipartículas de los ocho bariones de la figura 27B. Las antipartículas de los mesones representadas en la figura 27A están contenidas en los mismos diagramas: decimos entonces que el octeto mesónico es autoconjugado. El pión negativo es así la antipartícula del pión positivo, y el mesón K negativo, la antipartícula del mesón K positivo. Las partículas designadas por K_0 y $\overline{K}_0$ forman un par partícula-antipartícula. El pión neutro y el mesón eta son sus propias antipartículas.

* La nomenclatura para las partículas elementales parece haber sido inventada para dar un cierto aroma clásico griego al asunto. Aunque el conocimiento que de las lenguas clásicas tiene el autor es sumamente limitado, sin embargo, tiene la impresión de que hay buenas razones para sospechar que los principios lingüísticos que se encuentran en la base de la construcción de los términos que suenan "a griego" no son del todo correctos.

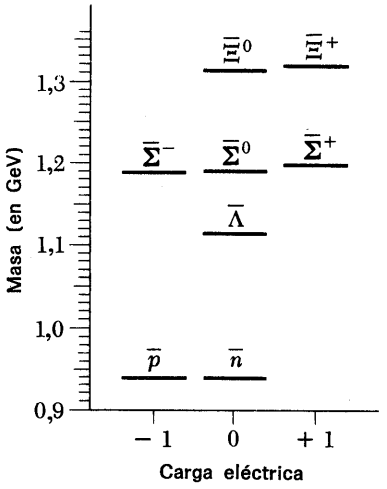


Fig. 27C Espectro de masas del octeto antibariónico constituido por las antipartículas de las partículas representadas en la figura 27B. Las partículas en el multiplete a la derecha tienen todas número bariónico — 1 y spin 1/2.

Si reflejamos el diagrama bariónico respecto de la vertical que corresponde a cargo cero, obtenemos el diagrama antibariónico y viceversa.

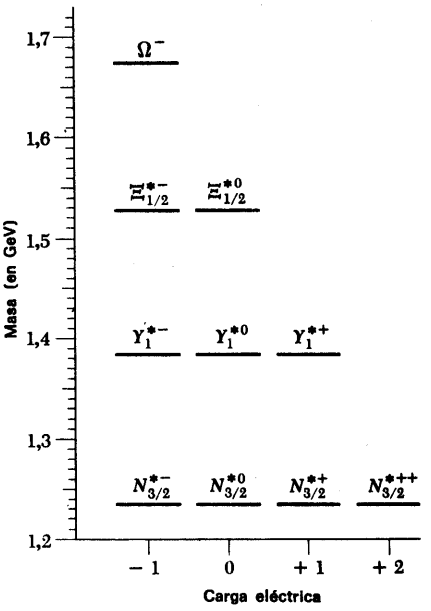


Fig. 27D Esquema de términos que representa un multiplete de diez bariones que incluye las resonancias más importantes en la dispersión pión-nucleón. (Véase la figura 24B para las secciones eficaces pión-nucleón.) Las resonancias se indican en el diagrama por $N^*_{3/2}$. (El símbolo Δ se emplea también en la literatura para designar estas partículas.) Todas las partículas representadas tienen número bariónico + 1 y spin 3/2. Las regularidades en esta distribución de partículas son muy sorprendentes. Por el momento no se comprenden bien los detalles. Que las resonancias pión-nucleón debieran incluirse en un multiplete de diez partículas puede explicarse tomando como base el principio de simetría conocido con el nombre de Octuple Sendero. La partícula omega-menos fue, en efecto, predicha teóricamente antes de que se la encontrara experimentalmente. La vida media de esta partícula es de $1{,}5 \times 10^{-10}$ s. Todas las demás partículas del diagrama tienen vidas *extraordinariamente* cortas.

La fig. 27D presenta un multiplete de diez bariones que contiene la resonancia designada por $N^*_{3/2}$ en la figura 24B. La posición de estas partículas (resonancias) acaso no está del todo clara, pero la mayoría de los físicos se sentiría hoy inclinada a aceptarlas entre las partículas elementales.

28 Clasificamos las interacciones que se presentan en la naturaleza en *interacciones fuertes* (las "fuerzas nucleares" pertenecen a esta clase), *interacciones electromagnéticas, interacciones débiles* e *interacciones gravitatorias*. Los mesones, bariones y antibariones interactúan todos ellos entre sí fuertemente. El fotón y los leptones no se ven afectados por las interacciones fuertes: su comportamiento viene regido por las interacciones electromagnética y débil. Las partículas susceptibles de interacción fuerte (que actualmente suelen llamarse *hadrones*) participan también en las interacciones electromagnética y débil. De entre ellas, muchas de las que son inestables se desintegran "vía" interacción débil y, por consiguiente, sus vidas son muy largas en la escala de tiempos nuclear.

Las interacciones de las partículas elementales obedecen a un cierto número de leyes de conservación y principios de simetría muy sorprendentes. Una de estas leyes de conservación dice que la carga eléctrica total se conserva en *todas* las interacciones.* Hay también una ley de conservación análoga para el *número bariónico*. Si asignamos el número bariónico cero al fotón, los leptones y los mesones, el número bariónico + 1

* La conservación de la carga es un principio *básico* de la teoría electromagnética. Véase Berkeley Physics Course, Vol. II, *Electricidad y Magnetismo*, pág. 4, para una discusión.

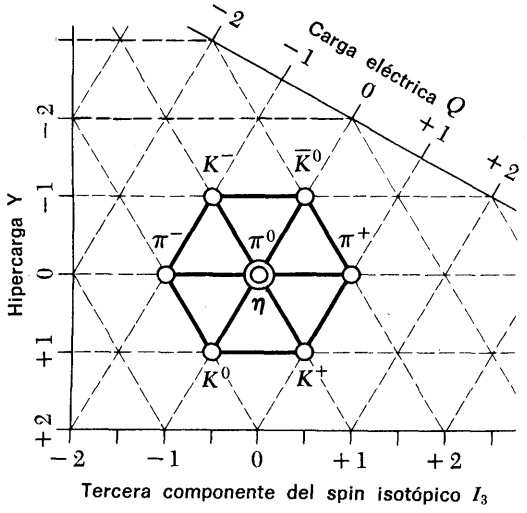


Fig. 29A Diagrama que representa la carga eléctrica y la hipercarga de las partículas en el octeto mesónico cuyo espectro de masas aparece en la figura 27A. La hipercarga total se conserva en las interacciones fuertes o electromagnéticas. La carga total se conserva en *todas* las interacciones.

La distribución toma una forma particularmente llamativa si las partículas se representan en una red hexagonal de coordenadas, como se ha hecho aquí. La teoría de simetría del Octuple Sendero predice que la distribución de las partículas debiera ser como la representada en dicho diagrama. En particular, la teoría predice dos partículas en el centro del mismo, en este caso las partículas π^0 y η.

Las abcisas expresan otro número cuántico utilizado comúnmente y que se llama tercera componente del spin isotópico. Esta cantidad (designada por I_3) se conserva también en todas las interacciones fuertes y electromagnéticas.

Las partículas que aparecen en el diagrama tienen todas número bariónico 0 y spin 0.

a los barıones de la tabla 26C, y el número bariónico — 1 a los correspondientes antibariones, podemos afirmar entonces que el número bariónico total se conserva en todas las interacciones. Este principio "explica" en cierto sentido la estabilidad del protón. Dado que es el más ligero entre los bariones, no puede desintegrarse dando lugar a otras partículas sin violar este principio de conservación.

29 Las dos leyes de conservación que acabamos de mencionar se cree que son válidas para *todas* las interacciones. Se conocen otras leyes de conservación que parecen ser características de los diferentes tipos de interacción. La conservación en las interacciones fuerte y electromagnética de algo conocido con el nombre de *hipercarga* ofrece un ejemplo de ello. Podemos asignar un número cuántico de hipercarga (que es un entero) a cada una de las partículas que interactúan fuertemente de tal manera que la hipercarga total se conserve siempre en todos los procesos debidos a las interacciones fuerte y electromagnética. Sin embargo, las interacciones débiles no conservan la hipercarga. Los diagramas en las figuras 29A-D muestran los números cuánticos de hipercarga asignados para seleccionar las partículas que interactúan fuertemente.

Consideremos algunos ejemplos que ilustran lo que implica la conservación de la hipercarga. La reacción

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^- & + & p & \rightarrow & K^0 & + & \Lambda^0 \\ (0) & & (+1) & & (+1) & & (0) \end{array} \qquad (29a)$$

está permitida por el principio de conservación de la hipercarga y es bien sabido que se produce fácilmente siempre que piones negativos de energía suficiente chocan con protones. (Los números debajo de los símbolos de las partículas indican sus hipercargas.) La reacción

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^- & + & p & \rightarrow & \pi^0 & + & \Lambda^0 \\ (0) & & (+1) & & (0) & & (0) \end{array} \qquad (29b)$$

está prohibida por el principio de conservación de la hipercarga. Esto implica, en particular, que no se puede producir una partícula lambda en una colisión pión-protón a menos que exista energía disponible suficiente para la creación de un mesón K de acuerdo con la reacción (29a). No se ha observado jamás un ejemplo de la reacción (29b). La reacción

$$\begin{array}{ccccccc} n & + & p & \rightarrow & \Lambda^0 & + & p \\ (+1) & & (+1) & & (0) & & (+1) \end{array} \qquad (29c)$$

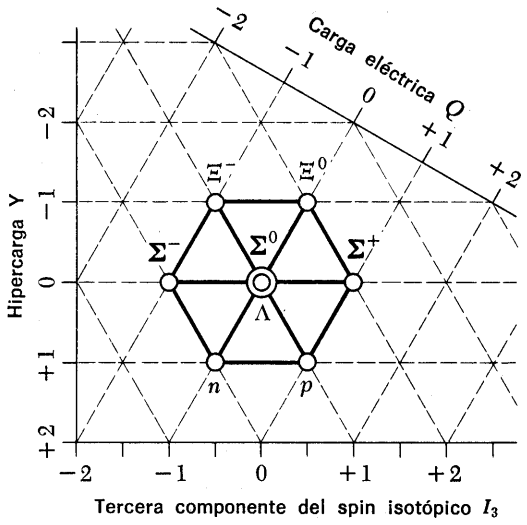


Fig. 29B Diagrama de simetría del Octuple Sendero para el octeto bariónico al que pertenecen el protón y el neutrón. Ha de quedar bien claro que la figura formada por las partículas en un gráfico de hipercarga en función de la carga está determinada por los valores observados experimentalmente de estas cantidades. El diagrama, por lo tanto, expresa resultados experimentales que, sin embargo, se ajustan de modo muy aceptable a la teoría de simetría del Octuple Sendero. Obsérvese que la estructura de este octeto es la misma que la estructura del octeto mesónico de la figura 29A.

Todas estas partículas tienen número bariónico + 1 y spin 1/2.

está también prohibida. Que realmente no se produce en la naturaleza como interacción fuerte es un hecho experimentalmente bien establecido.

Uno de los modos de desintegración de la partícula lambda es

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^0 & \rightarrow & \pi^- & + & p \\ (0) & & (0) & & (+1) \end{array} \qquad (29d)$$

que viola la conservación de la hipercarga. Las interacciones *débiles* son las responsables de esta desintegración, conforme indica la velocidad relativamente pequeña con que tiene lugar. La explicación de que la partícula lambda tenga una vida larga (una vida media de 10^{-10} s es larga en una escala de tiempos "nuclear") consiste en que los principios de conservación del número bariónico y de la hipercarga impiden la desintegración por cualquier camino que no sea el de las interacciones débiles.

30 Los diagramas en las figuras 29A-D reflejan propiedades observadas experimentalmente de las partículas. Su aspecto es muy sorprendente y es claro que se vislumbra aquí cierta simetría secreta de la naturaleza. Tenemos la misma impresión si miramos el esquema de términos en la figura 27D: obsérvese el notable espaciado regular de los niveles.

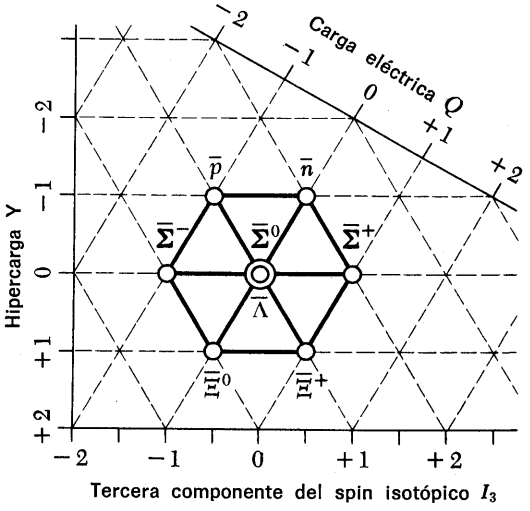
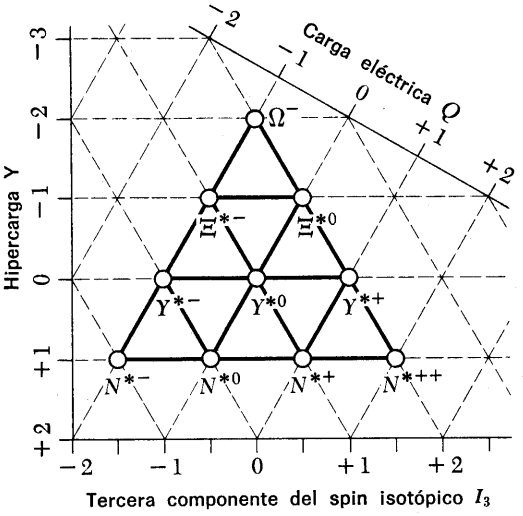


Fig. 29C Diagrama de simetría del Octuple Sendero para el octeto de antibariones que corresponden a los bariones representados en la figura 29B. Las antipartículas se indican aquí por una barra encima del símbolo correspondiente. Las partículas representadas en este diagrama tienen todas números bariónicos iguales a — 1 y spin 1/2.

Una antipartícula tiene la carga opuesta y la hipercarga opuesta a las de las correspondientes partículas.

Fig. 29D Diagrama de simetría del Octuple Sendero para el decuplete bariónico al que pertenecen las resonancias principales pión-nucleón. El diagrama presenta las hipercargas atribuidas a las partículas en el decuplete. Las masas de esas partículas se indican en la figura 27D.



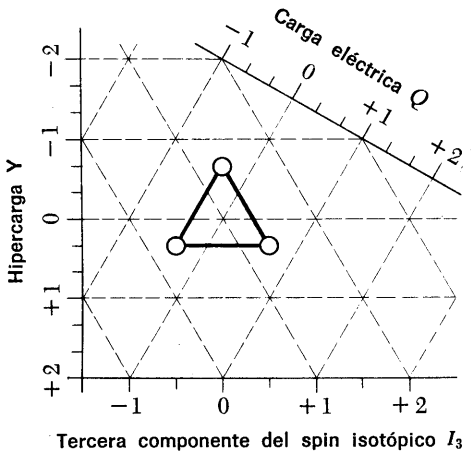


Fig. 31A Si efectivamente existen los quarks, su diagrama de simetría del Octuple Sendero sería como el que aquí se presenta. Las partículas en este triplete tendrían todas número bariónico + 1/3 y probablemente spin 1/2. Obsérvese que dos de las partículas tienen carga eléctrica — 1/3, mientras que la tercera tiene carga + 2/3. El correspondiente triplete de antiquarks tiene un diagrama de simetría que resulta del de la figura mediante una reflexión respecto de la recta que corresponde a carga eléctrica cero. Los antiquarks tendrían número bariónico — 1/3. Los mesones del octeto representado en la figura 29A se podrían considerar como estados de enlace de un quark y un antiquark. Los bariones en el octeto que aparece en la figura 29B podrían considerarse como estados de enlace de tres quarks.

Si la teoría de los quarks tiene alguna relación, cualquiera que sea, con la realidad, debe existir por lo menos una partícula estable con carga fraccionaria. Nunca se ha detectado experimentalmente una tal partícula y bien pudiera ocurrir que no existan partículas con carga fraccionaria. En la actualidad, la idea de los quarks es pura especulación.

En la actualidad nuestra compresión de lo que "se encuentra detrás" de estas simetrías y regularidades que han sido descubiertas experimentalmente y constituyen algo así como un suplicio de Tántalo, es muy limitada. Existe, sin embargo, una teoría fenomenológica (conocida con el nombre de "the Eighfold Way", el Octuple Sendero) para explicar los diagramas de simetría que aparecen en las figuras 29A-D. Basándose en esta teoría se pueden hallar todos los diagramas de simetría *posibles*, y cabe decir bastantes cosas acerca de las partículas asociadas con los diagramas. El más sorprendente apoyo a esta teoría lo prestó la comprobación experimental de que existe la partícula designada por Ω^- en las figuras 27D y 29D, como había predicho Murray Gell-Mann *.

31 Las partículas elementales que acabamos de citar (y unas cuantas más) son al parecer "igualmente elementales": ninguna se manifiesta como "compuesta". Sin embargo, algunos científicos han pensado que acaso pudiera haber entidades todavía más elementales. Así, Gell-Mann ha sugerido que los mesones y los bariones pudieran ser sistemas compuestos constituidos por partículas hasta ahora desconocidas, para las que ha propuesto el nombre de *quarks*. No es ésta una sugerencia descabellada e irresponsable: Gell-Mann ha hecho notar que cier-

* V. E. Barnes y cols., "Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three", *Physical Review Letters* **12**, 204 (1964). (¡Cabe mencionar que este trabajo va firmado por treinta y tres autores!)

tas propiedades de los mesones y bariones, y en particular los principios de simetría que rigen sus interacciones, podrían explicarse de manera estéticamente satisfactoria si efectivamente existieran los quarks y antiquarks. De acuerdo con las ideas de Gell-Mann estas partículas poseerían las cargas $\pm e/3$ y $\pm 2e/3$, donde e es la carga del protón, y desde este punto de vista diferirían sorprendentemente de todas las partículas conocidas. El diagrama de simetría de los quarks se presenta en la figura 31A.

La búsqueda de los quarks prosigue, pero hasta la fecha no se ha encontrado ninguno. Comparados con los nucleones, los quarks deben ser muy pesados, ya que de otro modo se les hubiera "visto" en los experimentos con aceleradores. De aquí cabe concluir que si efectivamente un nucleón es un estado ligado de (tres) quarks, entonces la energía de enlace debe ser muy grande comparada con la masa del nucleón. Éste sería así un sistema muy fuertemente ligado y en este respecto diferiría radicalmente de los sistemas ligados que nos son familiares, a saber, los átomos, moléculas y núcleos. (La energía de enlace de un átomo, una molécula o un núcleo es *pequeña* comparada con la masa del sistema.) En consecuencia, es prudente decir que considerando que acaso algún día puede resultar que los nucleones son objetos compuestos, cabe con certeza afirmar que no lo son en el mismo sentido que, por ejemplo, el deuterón.

Ideas fundamentales de la teoría cuántica de campos

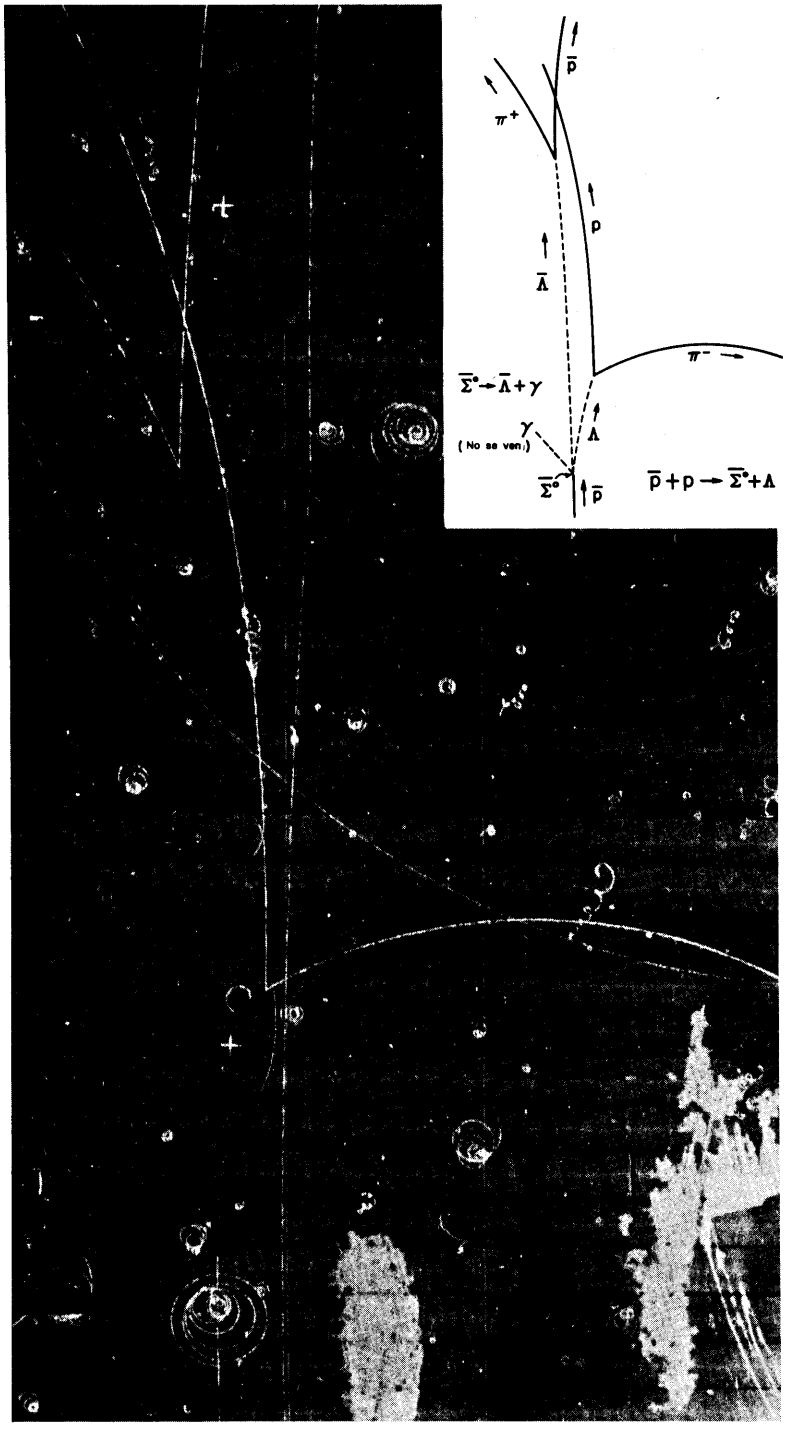
32 Pasemos ahora a considerar ciertos intentos teóricos encaminados a comprender las interacciones de las partículas. Nos atendremos a la idea, a la que llegamos ya en la sección 9, de que el fenómeno de dispersión debe considerarse como una manifestación de la interacción de ondas con ondas. A la idea clásica de dos partículas, cada una de las cuales ejerce una fuerza sobre la otra, corresponde en mecánica cuántica la idea de que las ondas de De Broglie de las partículas interactúan entre sí. ¿Qué significa esto? Esto significa que la presencia de una onda de De Broglie de *una* partícula influye sobre la propagación de una onda de De Broglie de *otra* partícula. A su vez, esto puede ocurrir solamente si el medio en que se propagan las ondas de De Broglie es no-lineal, es decir, si el medio "responde" no-linealmente. En un medio lineal, para el que la propagación de ondas se describe por una ecuación diferencial li-

neal, cualquier superposición lineal de dos ondas es otra onda posible y la presencia de una onda no afecta al comportamiento de otra.

33 Discutamos la naturaleza del *vacío,* es decir, del espacio vacío. Cuando la teoría electromagnética se desarrolló en el siglo diecinueve, el vacío se conocía con otro nombre, a saber, el de "éter". Cuando consideramos ondas es natural preguntar qué es lo que "oscila", y un físico del siglo pasado hubiera dicho que es el éter lo que oscila. El comportamiento de las ondas electromagnéticas en el éter viene descrito por las ecuaciones de Maxwell. Parecía natural a los físicos de aquel tiempo intentar comprender el electromagnetismo acudiendo a modelos *mecánicos* y considerar las ondas electromagnéticas como algo análogo a las ondas elásticas en un sólido. Muchos esfuerzos se dedicaron a la construcción de tales interpretaciones. Las propiedades mecánicas del éter resultaron, ciertamente, ser muy diferentes de las propiedades de cualquier sólido o fluido genuinos, pero esa circunstancia no debe esgrimirse de por sí en contra de la teoría.

Sin embargo, cabe presentar graves objeciones en contra de la teoría mecánica del éter por motivos epistemológicos: considerar las propiedades mecánicas del éter es una actividad innecesaria que nada añade a nuestra comprensión del electromagnetismo. Las ecuaciones de Maxwell *por sí solas,* sin ninguna interpretación mecánica, nos dicen acerca de la teoría electromagnética clásica todo lo que posee significado experimental. Por ejemplo, si queremos describir la propagación de ondas de radio de una antena a otra, basta resolver las ecuaciones de Maxwell con las condiciones de contorno apropiadas y no tiene consecuencia ninguna el que tengamos o no un modelo mecánico para la propagación de la onda. Poco a poco los físicos llegaron a darse cuenta de que en el estudio del electromagnetismo lo único que importa son las ecuaciones de Maxwell. En consecuencia, se abandonaron los intentos de construir modelos mecánicos y la pregunta de "qué es realmente lo que oscila" se reconoció como una pregunta carente de sentido desde el punto de vista operacional.

34 El desarrollo de la teoría especial de la relatividad contribuyó mucho a apresurar el abandono de la teoría mecánica del éter. Recordemos las razones para ello. Si el éter tiene propiedades en algún aspecto parecidas a las de un sólido ordinario, o fluido, hemos de esperar ciertamente que exista un sistema



Fotografía obtenida en una cámara de burbujas que presenta la producción y desintegración de una partícula antisigma-cero. La figura inserta muestra las reacciones e identifica las diferentes trazas. Las partículas neutras (representadas por líneas de puntos en la figura esquemática) no dejan, naturalmente, traza ninguna visible. Las trazas de las partículas cargadas presentan una curvatura porque la cámara se encuentran en un campo magnético perpendicular al plano de la figura.

La reacción de producción, en la que la partícula antisigma-cero y una partícula lambda resultan en una colisión de un antiprotón con un protón, es una interacción fuerte. La partícula antisigma-cero se desintegra por interacción electromagnética en una partícula antilambda y un rayo gamma. Los otros procesos de desintegración que se ven en la figura son todos manifestaciones de las interacciones débiles. *(Fotografía cedida por el Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley.)*

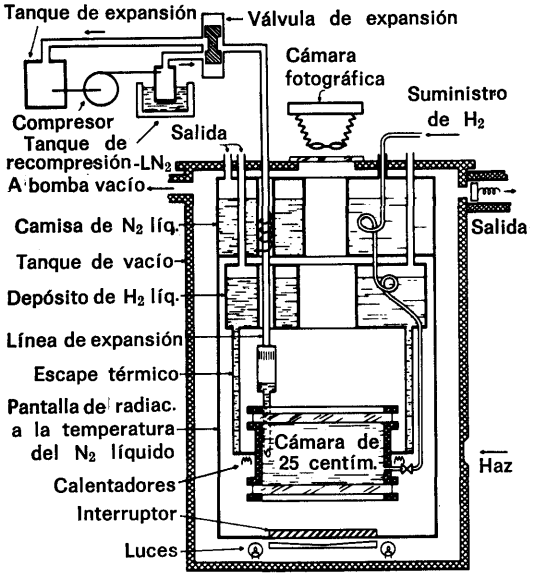


Figura esquemática de una cámara de burbujas de hidrógeno líquido. La cámara se activa por una disminución súbita de la presión del hidrógeno líquido. La temperatura de éste se encuentra por encima del punto de ebullición a presión reducida, pero la ebullición no empieza inmediatamente: el líquido permanece durante un corto intervalo en estado supercalentado. El paso de una partícula cargada a través del líquido conduce a vaporización local a lo largo del camino. Se forma una traza visible constituida por burbujas de gas muy distintas, traza que se fotografía con la cámara fotográfica situada encima de la de burbujas. Entonces se aumenta de nuevo la presión y todas las trazas desaparecen. La cámara está a punto para la siguiente exposición. *(Ilustración cedida por el Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley.)*

de referencia inercial respecto del que el éter en encuentra en reposo, por lo menos localmente. Por otra parte, cualquier experimento pertinente parece indicar que *no* hay manera de determinar un estado absoluto de movimiento respecto del éter: todos los sistemas inerciales son por completo equivalentes entre sí. Esta última proposición es, naturalmente, una de las piedras angulares de la teoría de la relatividad especial. Si es realmente verdadera, lo que creemos firmemente, ello significa que el éter en movimiento tiene las mismas propiedades físicas que el éter en reposo, y esto es ciertamente una propiedad del todo extraña a cualquier sólido o fluido ordinarios. En vista de esta propiedad "no mecánica" del éter, parece descabellado intentar asignarle otras propiedades mecánicas.

35 Hoy el éter *mecánico* ha sido desterrado del mundo de la física, y la propia palabra "éter", debido a sus "malas" connotaciones, no aparece ya en los textos de física. Hablamos ostentosamente, en cambio, del "vacío", indicando con ello nuestra falta de interés por el *medio* en que se propagan las ondas. Cuando estudiamos las ondas electromagnéticas o las de De Broglie, ya no preguntamos qué es lo que realmente "oscila". Lo único que queremos hacer es formular *ecuaciones de onda* para ellas, ecuaciones mediante las cuales podamos predecir fenómenos observables experimentalmente. Conforme hemos dicho ya, estas ecuaciones de onda deben ser no-lineales si han de describir partículas en interacción. La formulación de tales ecuaciones de onda y la obtención a partir de ellas de predicciones experimentales son los objetivos de la teoría *cuántica de campos,* que pretender ser una teoría fundamental de las partículas elementales. En esta teoría las ondas se describen por *campos cuánticos* y, en cierto sentido, constituye una generalización cuántica de la teoría clásica de las ondas.

La idea de describir partículas en interacción mediante campos cuánticos es atractiva desde muchos puntos de vista y puede ser adecuado intentar aprehender los rasgos generales de esa teoría. Una discusión completa requiere herramientas matemáticas un tanto complejas de las que no disponemos ahora y debemos, por lo tanto, prescindir de todos los pormenores.

36 Consideremos, de modo muy general, el problema de describir una interacción entre dos (o varias) partículas. Para orientarnos, examinemos primero este problema dentro del marco de la física clásica. En una teoría no relativista cabe introducir fuerzas, depedientes de la posición, que actúan entre las

partículas. La fuerza que actúa sobre una de ellas depende de la posición de la misma, como también de las posiciones de todas las otras partículas en el mismo instante. La acción de la fuerza en ese caso es instantánea: si súbitamente se cambia la posición de una partícula, el correspondiente cambio en la fuerza es percibido instantáneamente por la otra partícula.

Creemos que cualquier teoría fundamental de la naturaleza debe estar de acuerdo con los principios de la relatividad especial. Observemos que una interacción del tipo de la que acabamos de describir se encuentra en patente contradicción con estos principios. Ninguna señal se puede propagar con una velocidad mayor que c, de lo que se sigue que la acción de las fuerzas no puede ser instantánea. Si la posición, o estado de movimiento, de una partícula cambia súbitamente, debe pasar cierto tiempo antes de que este cambio sea percibido por la otra partícula, y el tiempo mínimo que ello debe requerir es el tiempo necesario para que una señal luminosa pase de una a otra partícula.

No es en absoluto una cuestión trivial el formular una teoría relativísticamente invariante de partículas clásicas en interacción. Ello exige un profundo cambio en la idea no relativista de una acción instantánea a distancia.

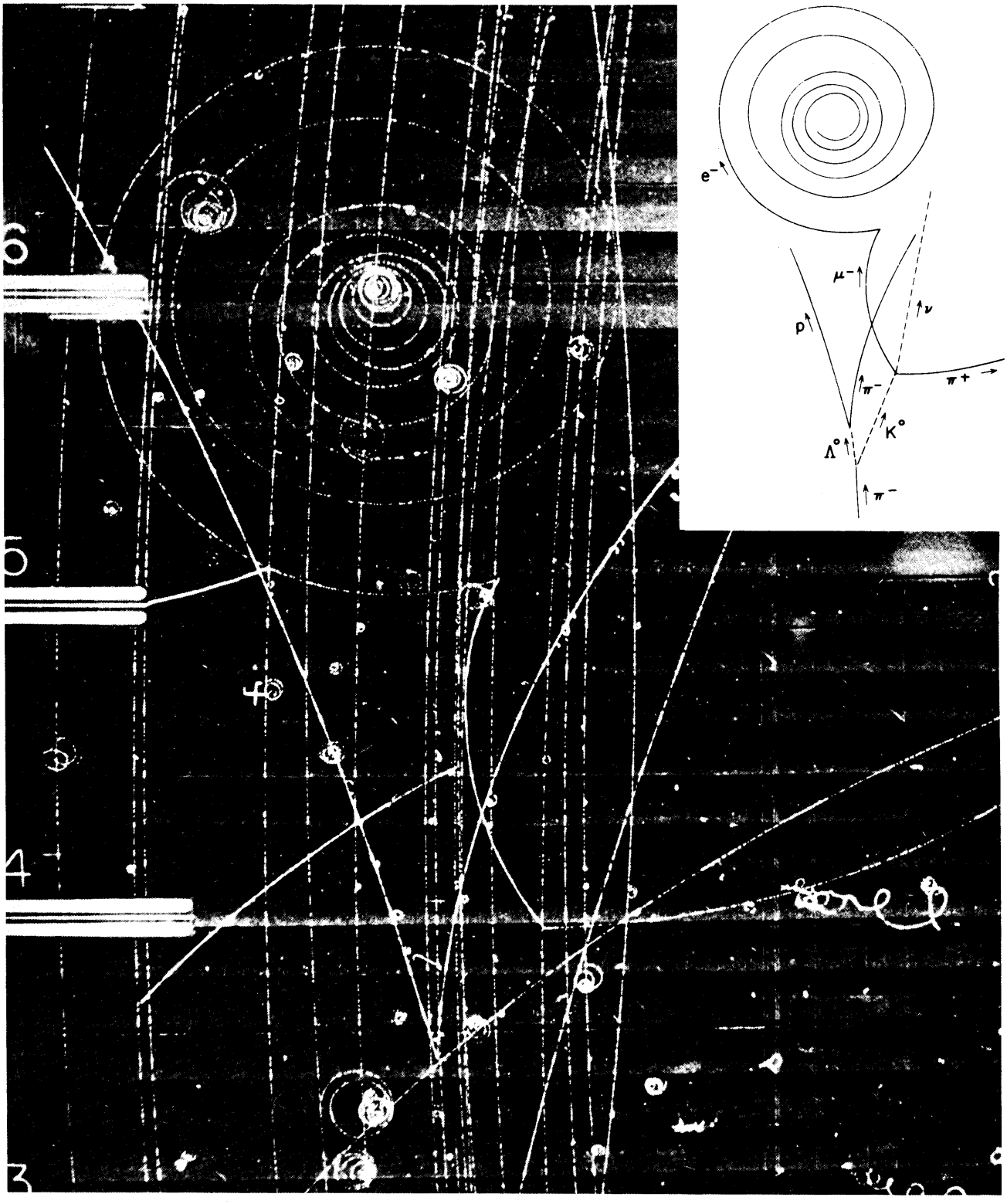
37 Una posible salida a este dilema lo ofrece la introducción de un *campo* (clásico). Cada partícula es la fuente de un campo que se propaga en el espacio, pero nunca con una velocidad mayor que c, y este campo puede entonces influir sobre el movimiento de otras partículas. En una teoría *clásica* relativista de esta naturaleza nos vemos así llevados a considerar a la vez partículas y campos. La interacción de partículas cargadas por mediación del campo electromagnético es un buen ejemplo de una tal teoría: las cargas son las fuentes del campo electromagnético y éste, a su vez, influye sobre el movimiento de las partículas cargadas.

38 Examinemos el problema de las interacciones entre partículas desde otro punto de vista. En la teoría clásica, no relativista en la que describimos la interacción mediante una fuerza que actúa instantáneamente, el comportamiento futuro de un sistema de varias partículas aislado está determinado unívocamente si se dan las posiciones y velocidades de todas las partículas en cierto instante. En otras palabras, si hay N partículas, el estado de movimiento del sistema viene determinado por $6N$ parámetros: el sistema tiene un número finito de grados

de libertad. Por otra parte, en una teoría relativista, en la que la interacción se describe por un campo, no basta el especificar meramente las posiciones y velocidades de todas las partículas en un instante dado. Debemos especificar *también* el estado del campo. La teoría electromagnética clásica ilustra esto muy claramente: el campo electromagnético en modo alguno está determinado unívocamente por sólo las posiciones y velocidades, en un cierto instante, de todas las partículas cargadas. Entre las condiciones iniciales debemos incluir también la especificación de los campos eléctrico y magnético en todo el espacio. Sin embargo, la descripción del estado del campo electromagnético requiere un número infinito de parámetros y nuestro sistema no es ya un sistema con un número finito de grados de libertad. Esto es claramente una distinción profunda entre las teorías relativista y no relativista.

39 Hay otro rasgo de la teoría relativista (clásica) que debemos hacer notar: en un instante cualquiera, parte de la energía total del sistema se encontrará en el campo. Tal es necesariamente el caso en una teoría en la que la interacción se produce por medio de un campo. Considérese, por ejemplo, dos partículas A y B en interacción mutua. Supongamos que la partícula A experimenta una súbita colisión con una tercera partícula C que no interactúa directamente con la partícula B. El estado de movimiento de A cambiará entonces, y al cabo de un cierto tiempo este cambio se manifestará en un cambio en el campo debido a la partícula A en la posición ocupada por la partícula B. El estado de movimiento de esta partícula, por lo tanto, cambiará finalmente y, en particular, puede cambiar su energía cinética. Se producirá así un intercambio de energía entre las partículas A y B por mediación del campo. Si pretendemos contar con una teoría en la que tenga sentido hablar de la energía total en un instante, y si queremos conservar el principio de que la energía total de un sistema aislado es una constante del movimiento, podemos preguntar dónde se encuentra la energía que, en último término, se va a ceder a B durante

Fotografía obtenida en una cámara de burbujas que presenta la producción y desintegración de una partícula lambda (neutra) y un mesón-K neutro. Las diferentes trazas se identifican en la figura inserta. Únicamente las partículas cargadas dejan trazas visibles y éstas aparecen curvadas debido a que la cámara se encuentra en un campo magnético. La reacción de producción por interacción *fuerte* es: $p + \pi^- = \Lambda^0 + K^0$. Las interacciones de desintegración son todas *débiles*. El muón negativo que se emite en la desintegración del K^0 se desintegra a su vez en un electrón, un neutrino y un antineutrino. Las dos últimas partículas son neutras y no pueden verse. *(Fotografía cedida por el Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley.)*


e⁻
μ⁻
ν
p
π⁻
π⁺
K°
Λ°
π⁻

el tiempo que transcurre entre el instante en que A choca con C y el instante en que el cambio resultante en el estado de movimiento de A se nota por vez primera en B. Nos vemos forzados a llegar a la conclusión de que esta energía debe residir en el campo.

40 Este modo de razonar conduce a otra interesante conclusión. Supongamos que la situación es la misma, salvo que no existe la partícula B. En el instante en que A choca con C el campo debido a A experimenta un cambio: una cierta cantidad de energía le es transferida. Esta cantidad de energía debe ser la misma que en el caso en que estaba presente B, porque la partícula A no puede "saber" que la partícula B no se encuentra allí, dispuesta a recibir la energía. Ahora bien, si B no se encuentra allí, ¿adónde va a parar la energía transferida al campo? A alguna parte tiene que ir y una posibilidad es la de que sea radiada. Éste es, en efecto, el caso de la teoría electromagnética: si una partícula A choca con una partícula C (que podemos suponer que carece de carga), la partícula A emitirá una onda electromagnética y esta onda llevará energía "al infinito" si no hay otra partícula presente que absorba parte de la misma.

Por lo tanto, nos vemos conducidos a esperar de manera muy general que si la interacción entre las partículas se produce mediante un campo, este campo puede manifestarse en forma de ondas que se propagan libremente y transportan energía.

41 Examinemos ahora el problema de las interacciones entre partículas desde el punto de vista de la mecánica cuántica. Lo discutido en los capítulos anteriores nos ha llevado a la creencia de que existe una onda asociada con cada partícula y que, recíprocamente, cada onda tiene ciertos aspectos en común con una partícula. Podemos decir que la onda de la mecánica cuántica es, en realidad, la misma cosa que la partícula de la mecánica cuántica: es un objeto único que no es del todo ni una partícula clásica ni un paquete de ondas clásico. Esto nos conduce ahora a una unificación sumamente notable en nuestros conceptos. En la física clásica introducimos dos tipos distintos de objetos, a saber: de una parte, las partículas, y de otra, los campos, por mediación de los cuales las partículas interactúan entre sí. En la física cuántica podemos evitar este dualismo, nada satisfactorio, tratando las "partículas" y los campos en pie de igualdad. Formulamos una teoría de campos que describe la propagación de campos de ondas, que son ondas de De Broglie de

partículas. Al mismo tiempo, la teoría de campos describe la interacción entre las ondas y con ello, en cierto sentido, describe las fuerzas efectivas entre las partículas.

Esta idea es evidentemente muy atractiva y constituye la idea básica de la teoría cuántica de campos. En la teoría de Schrödinger las fuerzas entre partículas debían introducirse ad hoc. Dadas estas fuerzas, es posible hacer predicciones acerca del movimiento de las partículas, pero la teoría de Schrödinger no nos proporciona ninguna "explicación" de por qué las fuerzas son lo que son. En la teoría cuántica de campos, por otra parte, la existencia y naturaleza de las fuerzas está íntimamente ligada con la existencia de las partículas: tenemos una descripción unificada de partículas, ondas y fuerzas. La electrodinámica cuántica, que es un ejemplo de teoría de campos, nos proporciona una ilustración de estos rasgos. Dicha teoría describe las fuerzas ente electrones (positones) como producidas por medio del campo electromagnético, y describe también los cuantos electromagnéticos (fotones) que pueden ser emitidos por los electrones en interacción.

42 Revisemos las características fundamentales de una teoría cuántica de campos. Para describir las partículas y sus interacciones se introducen campos cuánticos. Los campos son funciones de la posición y del tiempo y describen, por así decirlo, el estado *local* del vacío.* Los aspectos ondulatorios de la materia se introducen en la teoría ya desde el principio: las soluciones de las ecuaciones de la teoría cuántica de campos son ondas. Las ondas poseen también aspectos corpusculares. Una partícula bien localizada corresponde a un paquete de ondas concentrado: la probabilidad de encontrar la partícula es máxima en aquellas regiones del espacio-tiempo en las que es grande la amplitud del campo.

Las ecuaciones del campo son ecuaciones no lineales y pueden así describir *interacciones* entre paquetes de ondas (partículas). El carácter no lineal se manifiesta, naturalmente, sólo cuando las amplitudes del campo son grandes: si las amplitudes son pequeñas, las ondas se propagan aproximadamente como en una teoría lineal. Si dos paquetes de ondas correspondientes a dos partículas se solapan en una región del es-

* Los campos no son, en realidad, funciones complejas "ordinarias" de la posición y del tiempo. Sos objetos matemáticos conocidos con el nombre de "distribuciones de operadores" en el espacio-tiempo. Sin embargo, para nuestros fines podemos imaginarlos como funciones ordinarias (que representan "ondas acústicas en el éter no lineal").

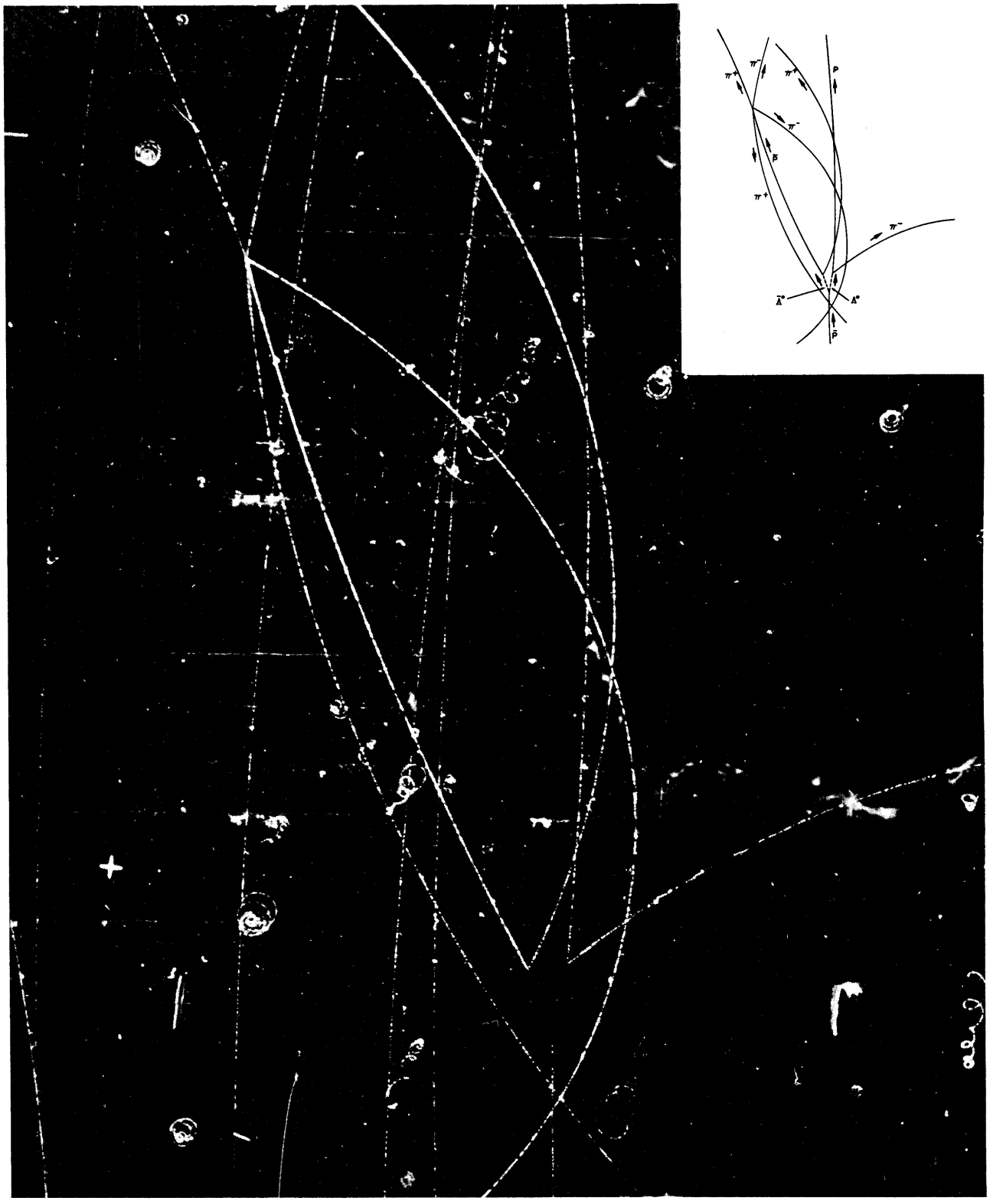
pacio en determinado instante, se manifiestan las características no lineales y cada onda influye sobre la otra. En el modelo clásico, esto corresponde a una interacción entre las dos partículas. Por otra parte, la interacción entre las ondas es pequeña si no se solapan de manera apreciable, y a esta situación corresponde el modelo clásico en el que la interacción entre dos partículas es muy débil si la distancia entre ellas es grande.

43 La teoría cuántica de campos es en esencia una *teoría de sistemas con muchas partículas:* tenemos un solo formalismo unificado mediante el cual podemos describir estados del universo en el que están presentes un número cualquiera de partículas de una especie dada. El fenómeno de creación y destrucción de partículas es un rasgo natural de la teoría cuántica de campos y resulta de la naturaleza no lineal de las ecuaciones del campo. Dos paquetes de ondas (correspondientes a dos partículas) pueden solaparse e interactuar dando lugar a nuevos paquetes de ondas (correspondientes a nuevas partículas). Así, por ejemplo, si dos electrones chocan (es decir, si la distancia entre ellos llega a ser pequeña) se puede emitir una onda electromagnética. Decimos entonces que se ha creado un fotón.

44 Se han formulado muchas teorías cuánticas de campos, más o menos generales, de acuerdo con estas ideas. La teoría de la electrodinámica cuántica es una teoría de este tipo y se ha apuntado algunos éxitos espectaculares en la descripción de las interacciones electromagnéticas entre partículas cargadas y, en particular, en la física atómica. Las teorías específicas propuestas para otros tipos de campos, destinadas a describir las interacciones débiles y fuertes, han tenido mucho menos éxito. Estas teorías han proporcionado un cierto grado de entendimiento de unas pocas propiedades generales de las partículas elementales, pero —esto aparte— no nos han conducido real-

Fotografía obtenida en una cámara de burbujas que presenta la producción y desintegración de un par lambda-antilambda. El dibujo en la parte superior derecha identifica las trazas de las diferentes partículas. Un antiprotón incidente choca con un protón y produce el par lambda-antilambda. Estas dos partículas no dejan trazas visibles debido a que son neutras. El lambda se desintegra en un pión negativo y un protón (en un proceso de interacción débil) y el antilambda se desintegra en un pión positivo y un antiprotón. El antiprotón choca luego con un protón y se aniquila dando lugar a piones, cuatro de los cuales poseen carga y producen trazas visibles.

Esta fotografía se presenta a la mitad de nuestra discusión de los campos cuánticos para recordar al lector que uno de los objetivos de la teoría cuántica de los campos es el de proporcionarnos una explicación teórica de sucesos como los que se ven en la fotografía. *(Cedida por el Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley.)*



mente a ninguna predicción experimental útil, En el caso de las interacciones fuertes el esquema de aproximaciones sucesivas sobre el que se habían basado las predicciones de la electrodinámica cuántica ha resultado inaplicable. La razón del éxito de la electrodinámica es, sin lugar a dudas, la pequeñez de la constante de estructura fina, es decir, la poca intensidad de las interacciones electromagnéticas. Las interacciones fuertes lo son de manera esencial. No ha sido así posible resolver las ecuaciones de los campos propuestas y no se puede decir si estas ecuaciones son o no realmente correctas. Es muy probable que no lo sean. De hecho, las posibilidades de elección de de ecuaciones son infinitas y el único principio que en el pasado nos guió fue el "principio de simplicidad". En electrodinámica cuántica, además, nos ha servido de guía de manera decisiva la analogía clásica de bolas de billar cargadas en interacción con el campo electromagnético.

45 El hecho de que hayamos sido incapaces de superar las considerables dificultades matemáticas que surgen en la teoría y de *resolver* efectivamente las ecuaciones específicas del campo que han sido propuestas para describir las interacciones fuertes, ha conducido naturalmente a una cierta desilusión con respecto a la teoría de campos como a tal y se han oído voces instando a abandonar todo intento en dicha dirección.

Objeciones más graves, de carácter epistemológico, se pueden aducir en contra de la teoría cuántica de los campos. Cabe decir que es recusable el que muchos de los *conceptos primarios* de esta teoría no poseen un significado operacional inmediato. Por consiguiente, no está claro cómo los campos, ellos, pueden medirse: solamente en ciertos casos particulares ha encontrado este problema una solución, aunque sólo sea remotamente satisfactoria. ¿Qué queremos decir al hablar del campo en una región muy pequeña, por ejemplo, de dimensiones lineales 10^{-100} cm? ¿Cómo y con qué instrumentos, hemos de medir los campos en una región tal? ¿Quién ha medido realmente, cualquiera que sea el sentido de esta palabra, distancias menores que 10^{-13} cm?

Ciertamente, estas objeciones son serias. En su contra puede decirse que no es realmente necesario que todo concepto en una teoría tenga una significación operacional *inmediata.* Aunque es difícil ver cómo podrían "medirse" distancias de 10^{-100} centímetros, podría aun ser posible conservar, con todo, nuestras coordenadas de espacio-tiempo como entes que describen la "arena" en la que tienen lugar los sucesos físicos. Por otra parte, puede también ocurrir que una teoría satisfactoria futura

de las interacciones entre partículas elementales deba basarse en un abandonar alguna de nuestras nociones de espacio y de tiempo. Las teorías cuánticas de los campos describen en *detalle* lo que ocurre en cada punto del espacio y en cada instante, y acaso esto sea demasiado: en principio, puede encontrarse más allá de nuestro conocimiento.

46 Consideraciones de este tipo condujeron a Werner Heisenberg a intentar formular, en 1943, la llamada teoría de la matriz S de las interacciones entre partículas. En esta teoría, que no discutiremos aquí, Heisenberg intentó admitir solamente aquellos conceptos que tienen una significación operacional clara, siguiendo así el mismo principio que le condujo en 1925 a su formulación de la mecánica matricial. Podríamos decir que a la teoría conciernen solamente los *resultados* de los procesos de colisión, no la sucesión detallada de hechos que ocurren *durante* el proceso. Por el momento estos intentos no han conducido a una teoría satisfactoria.

En la actualidad no existe ninguna teoría *fundamental* de las interacciones fuertes. Las tentativas han sido muchas, pero los resultados no parecen particularmente convincentes. Es inútil especular acerca de si la teoría última futura será una teoría de campos, o una teoría de la matriz S o, acaso, un tipo enteramente nuevo de teoría creado por uno de los lectores.



Hideki Yukawa. Nació en Tokio en 1907. Yukawa estudió física en la Universidad de Kyoto, en la que se graduó en el año 1929. Tras ocupar cargos de profesor adjunto en la Universidad de Kyoto y en la de Osaka, fue nombrado profesor de física teórica de la Universidad de Kyoto en 1939. Después de la segunda guerra mundial Yukawa pasó algún tiempo en los Estados Unidos como miembro del Institut for Advanced Study en Princeton y como profesor de Física en la Universidad de Columbia. Regresó al Japón en 1955 para pasar a ser director del Instituto de Investigaciones de Física Fundamental en Kyoto que acababa de ser fundado y volvió a ocupar su cargo de profesor de física en la Universidad de Kyoto. A Yukawa se le concedió el premio Nobel en 1949 por sus trabajos sobre mesones y teoría de campos. *(Fotografía cedida por Physics Today.)*

Piones y fuerzas nucleares

47 No cabe ni pensar en discutir la teoría cuántica de los campos en este libro, cualquiera que sea el grado de detalle: hacerlo exige efectivamente el empleo de herramientas matemáticas bastante avanzadas. Por otra parte, acabamos de ver que las ideas básicas de esta teoría no son en modo alguno complicadas. Antes de dejar este asunto consideraremos un problema que fue atacado con éxito por primera vez por Hideki Yukawa en 1934.

El problema se refiere a la siguiente cuestión. ¿Existe una partícula asociada con la fuerza nuclear, es decir, un cuanto del campo de fuerzas nucleares? Si es así, ¿cuáles son las propiedades de esta partícula? ¿Podemos hallarla experimentalmente?

Sabemos que existe una partícula asociada con las fuerzas electromagnéticas que actúan entre las partículas cargadas, a saber, el fotón. También sabemos que las fuerzas que mantienen unidas las componentes de los núcleos no pueden ser de

origen electromagnético. Estas fuerzas son mucho más intensas que las fuerzas electromagnéticas y, además, se distinguen por su corto alcance. A distancias mayores que, por ejemplo, 10^{-12} cm estas fuerzas tienden rápidamente a cero y dejan de existir para cualquier fin práctico más allá de una distancia de 10^{-11} cm. Si aceptamos ahora las ideas de la teoría cuántica de los campos, debemos esperar que el campo de las fuerzas nucleares pueda también manifestarse como ondas que se propagan libremente y cabe buscar las correspondientes partículas. Al igual que los fotones se emiten cuando chocan dos partículas cargadas, podemos esperar que se emitirán los cuantos del campo de fuerzas nucleares en una colisión suficientemente violenta de dos nucleones.

48. Es muy probable que el lector haya oído decir que estas partículas efectivamente existen y que no son sino los *piones.* Sin embargo, en los días en que Yukawa desarrollaba su trabajo no se conocían los mesones y su sugerencia de que existían fue verdaderamente una predicción. Él conocía las dos propiedades sobresalientes de las fuerzas nucleares, a saber, su gran intensidad y su poco alcance, y se planteó las mismas cuestiones que hemos formulado. Tomando como base su conocimiento de las propiedades de las fuerzas nucleares fue capaz de predecir la existencia de los cuantos, como también el que su masa debiera ser aproximadamente de unas 200 veces la masa del electrón. En este estudio se guió, sin duda alguna, por la analogía con la interacción electromagnética.

El descubrimiento experimental de los mesones de Yukawa ofrece un curioso viraje. Allá por el año 1937 se descubrieron en la radiación cósmica partículas cuya masa era de unas 200 veces la masa del electrón y, naturalmente, se pensó que estas partículas eran precisamente los cuantos de Yukawa. Sin embargo, estudios posteriores pusieron de manifiesto que estas partículas, conocidas ahora con el nombre de *muones,* o de *mesones mu,* interactúan tan sólo muy débilmente con la materia (es decir, con los núcleos). En consecuencia, difícilmente podrían ser las partículas responsables de las intensas fuerzas nucleares. Este misterio fue resuelto al fin, en buena medida, gracias al trabajo de C. F. Powell y sus colaboradores, en 1947, cuando se descubrió otro tipo de partículas en la radiación cósmica.* Esta partícula era el pión. Su masa es de unas 280

* C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini y C. F. Powell, "Processes involving charged mesons", *Nature* **159**, 694 (1947). Véase también, C. M. G. Lattes, G. P. S. Occhialini y C. F. Powell, "Observations on the tracks of slow mesons in photographic emulsions", *Nature* **160**, 453 (1947).

masas de electrón; interactúa fuertemente con los núcleos y debe identificarse sin ninguna duda con el cuanto de Yukawa.

Allá por 1948 el desarrollo de los aceleradores de partículas había alcanzado un estadio en el que llegó a ser posible producir piones en cantidad mediante colisiones nucleón-nucleón de alta energía. Las propiedades de los piones se han estudiado experimentalmente en múltiples direcciones y hoy se sabe que desempeñan un papel esencial en todos los fenómenos en que intervienen las interacciones fuertes.

49 Intentemos ahora "repetir" la hazaña de Yukawa.** Consideremos la fuerza entre dos nucleones en reposo como algo que es análogo a la fuerza electrostática entre dos partículas cargadas, asimismo en reposo, e intentaremos resolver nuestro problema tomando como base esta supuesta analogía. Hay que admitir que la analogía está lejos de ser perfecta, pero esta manera de razonar nos conduce, sin embargo, a la relación fundamental correcta entre la masa del pión y la naturaleza de la fuerza entre dos nucleones.

Razonaremos como sigue. Cuando no existe ninguna fuente, las ecuaciones de Maxwell describen ondas electromagnéticas que se propagan libremente. Las *mismas* ecuaciones describen también el campo electrostático de una carga puntual en reposo, y con ello la energía potencial de interacción de dos cargas puntuales ambas en reposo. En efecto, el potencial electrostático debido a una de las cargas satisface la ecuación de onda en todo el espacio fuera de la carga y esta solución de la ecuación de onda posee las propiedades especiales de presentar *simetría esférica* y de ser *estática,* es decir, independiente del tiempo. Supongamos, por lo tanto, que se trata de analizar la ecuación de onda satisfecha por los mesones que se propagan libremente y de buscar soluciones de esta ecuación que presenten simetría esférica y sean estáticas. Esperamos que esto nos dará el potencial del campo de fuerzas nucleares debido a un nucleón aislado situado en el origen. Designemos el potencial por $V(r)$. La energía de interacción de dos nucleones en reposo separados por una distancia r será entonces proporcional a $V(r)$, donde la constante de proporcionalidad describe la intensidad del acoplamiento del nucleón con el campo de piones.

** Esto no nos pondrá en condiciones de obtener el premio Nobel. Es fácil hacer algo cuando sabemos que se puede hacer y que se ha hecho antes. La cuestión consiste en hacerlo el primero. La teoría de Yukawa aparece en el trabajo: "On the Interaction of Elementary Particles", *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan,* **17,** 48 (1935).

50 La ecuación de onda a que satisface la función de onda de De Broglie del pión $\psi(\mathbf{x},t)$ es la ecuación de Klein-Gordon, que hemos deducido ya y discutido en el capítulo 5. Si designamos la masa del pión por m_π y empleamos unidades tales que $\hbar = c = 1$, la ecuación de onda se escribe

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi(\mathbf{x},t) - \nabla^2\psi(\mathbf{x},t) = -m_\pi{}^2\,\psi(\mathbf{x},t) \tag{50a}$$

donde ∇^2 representa el operador laplaciano

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} \tag{50b}$$

La ecuación de onda (50a) describe el comportamiento de las ondas de De Broglie de mesones cuando no hay fuentes. De acuerdo con nuestro programa intentemos ahora hallar una solución, estática y que presente simetría esférica, de esta ecuación, solución que podría describir el campo mesónico fuera de un nucleón situado en el origen. La fuente en este caso es una fuente puntual, el nucleón en el origen, y la ecuación de onda (50a) no tiene por qué quedar satisfecha en dicho punto, pero sí debe cumplirse fuera de él. Consideraremos la solución como una función potencial y la designaremos por $V(r)$. Esta solución es así independiente del tiempo y, en consecuencia, el término en que figura la derivada segunda respecto de aquél en la ecuación (50a) puede suprimirse. Nuestra ecuación toma la forma

$$\nabla^2\,V(r) = m_\pi{}^2\,V(r) \tag{50c}$$

51 La función $V(r)$ es una función de $r = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}$ solamente y hemos de determinar ahora la acción sobre ella del operador diferencial de Laplace. Observemos primero que

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} \tag{51a}$$

Aplicando las reglas de derivación, encontramos entonces que

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x_1} = \frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_1} = \left(\frac{x_1}{r}\right)\frac{dV(r)}{dr} \tag{51b}$$

Derivando una vez más respecto de x_1, obtenemos

$$\frac{\partial^2 V(r)}{\partial x_1{}^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr} + \frac{x_1{}^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\right) \tag{51c}$$

lo que nos da

$$\nabla^2 V(r) = \frac{3}{r}\frac{dV(r)}{dr} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\right) \tag{51d}$$

Una reordenación trivial del segundo miembro de (51d) permite escribirlo en la forma

$$\nabla^2 V(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right) \tag{51e}$$

Esta importante ecuación describe así la acción del operador diferencial de Laplace sobre una función $V(r)$ que depende únicamente de r.

52 Por lo tanto, nuestra ecuación diferencial, que es ahora una ecuación diferencial ordinaria, lineal y de segundo orden, es de la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right) = m_\pi{}^2 V(r) \tag{52a}$$

Esta ecuación puede resolverse en términos de funciones elementales y, como el lector puede comprobar calculando las derivadas, dos soluciones de la misma linealmente independientes son

$$\frac{1}{r}\exp(-rm_\pi), \qquad \frac{1}{r}\exp(+rm_\pi) \tag{52b}$$

La solución general se obtiene como combinación lineal de estas dos soluciones particulares. Ahora bien, la segunda solución correspondería a un potencial que *crece* tendiendo a infinito cuando r aumenta y esta solución representaría una fuerza entre nucleones que aumenta con la distancia. Es claro que esta solución no es aceptable físicamente y llegamos así a la conclusión de que el potencial ha de ser proporcional a la primera solución (52b), con lo que tenemos

$$V(r) = C'\frac{1}{r}\exp(-rm_\pi) \tag{52c}$$

donde C' es una constante.

El haber rechazado la segunda solución ilustra una vez más un importante principio que hemos encontrado antes: no toda

solución de las ecuaciones de onda de la mecánica cuántica posee un significado físico. Las funciones de onda con significación física no solamente han de satisfacer la ecuación de onda, sino que deben también cumplir un cierto número de *condiciones de contorno,* una de las cuales es la de que la solución no ha de crecer infinitamente en el infinito.

53 Hemos alcanzado ahora nuestro fin: la energía potencial $U(r)$ de dos nucleones en reposo separados por la distancia r viene dada por

$$U(r) = \frac{C}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda\!\!\!^{-}_{\pi}}\right) \tag{53a}$$

donde $\lambda\!\!\!^{-}_{\pi} = 1/m_{\pi}$, y C es una constante que determina la intensidad del acoplamiento.

Debido al factor exponencial, el potencial $U(r)$ disminuye muy rápidamente cuando r aumenta. Podríamos decir que el *alcance* del potencial es del orden de $\lambda\!\!\!^{-}_{\pi}$: mucho más allá de esta distancia el potencial se convierte en una cantidad por completo insignificante. Hemos examinado ya este punto mediante algunos ejemplos numéricos en la Sec. 38, Cap. 2.

Sabemos hoy que la masa de los piones es de 140 MeV. La cantidad $\lambda\!\!\!^{-}_{\pi} = 1/m_{\pi}$ no es sino la longitud de onda de Compton del pión. (En unidades CGS tendríamos $\lambda\!\!\!^{-}_{\pi} = \hbar/m_{\pi}c$.) Numéricamente se tiene $\lambda\!\!\!^{-}_{\pi} = 1{,}4 \times 10^{-13}$ cm y éste es, por consiguiente, el "alcance" del campo de las fuerzas nucleares. Cuando Yukawa hizo su predicción sabía, gracias a toda una serie de experimentos, que el alcance del campo de fuerzas es de unos 10^{-13} cm y pudo así *predecir* que la masa del mesón hipotético habría de ser de unos 100 MeV, lo que equivale a unas 200 veces la masa del electrón.

Obsérvese que el alcance es inversamente proporcional a la masa de la partícula, en este caso el pión. Una partícula sin masa, como el fotón, hace de intermediario para una fuerza de "alcance infinito": el potencial $U(r)$ dado por la ecuación (53a) se convierte entonces en el potencial de Coulomb. Naturalmente, también este potencial disminuye al aumentar la distancia, pero no disminuye exponencialmente. Podemos así afirmar justificadamente que hemos alcanzado un cierto grado de comprensión en lo que concierne a la relación entre el pión y las propiedades del campo de fuerzas nucleares.

54 Aprovecharemos esta oportunidad para explicar una terminología de empleo común. Muchos físicos dirían que la interac-

ción entre dos nucleones resulta del *intercambio de un pión.* Análogamente, dirían que la interacción de Coulomb entre dos partículas cargadas se produce por el *intercambio de un fotón.* Estas afirmaciones, en realidad significan meramente que la interacción entre dos nucleones pueda hallarse precisamente tal como la hemos hallado, es decir, que la misma ecuación de onda que describe la propagación de piones (o fotones) libres describe también las fuerzas en las que los piones (o los fotones) hacen de intermediarios. Al oír esta terminología, el lector no debe imaginarse algo así como bolas de billar que se intercambian entre dos nucleones: se trata meramente de una forma de lenguaje. Una vez esto se ha comprendido, no hay, claro está, mal alguno en hablar de "intercambios de partículas"; es ésta una práctica común. Si seguimos lo que es costumbre, podemos describir nuestros descubrimientos como sigue. De las fuerzas entre dos partículas que pueden interactuar entre sí mediante sus interacciones con una tercera partícula, cabe decir que son el resultado de un intercambio de la tercera partícula. El alcance de la fuerza resultante es inversamente proporcional a la masa de la partícula que se intercambia.

55 Hay un punto todavía que debemos poner en claro puesto que, de no hacerlo, podría preocupar al lector. Al principio de este capítulo hablamos mucho de la naturaleza *no*-lineal de las ecuaciones de la teoría cuántica de los campos. Sin embargo, hemos encontrado el potencial de Yukawa, dado por la expresión (53a), resolviendo una ecuación de onda *lineal.* El lector puede, por lo tanto, tener dudas acerca de si hemos procedido correctamente. De hecho, estas dudas están hasta cierto punto justificadas. La teoría linealizada que hemos estudiado ha de considerarse como una aproximación válida siempre que el campo mesónico, o el potencial $V(r)$, no es demasiado intenso. En consecuencia, el potencial de Yukawa debiera ser correcto a grandes distancias, es decir, más allá de la longitud de onda de Compton del pión, pero posiblemente podría resultar incorrecto a distancias *muy* pequeñas. La verdad es que no sabemos en la actualidad cuál es la interacción a distancias muy pequeñas, pero no tenemos razón alguna para dudar de que a distancias mayores que unos 10^{-13} cm la fuerza efectiva es del mismo tipo general que aquél a que pertenece el potencial de Yukawa. El hecho de que hayamos empleado una aproximación lineal no invalida, por lo tanto, nuestra conclusión principal de que el alcance de la fuerza es inversamente proporcional a la masa de la partícula intercambiada.

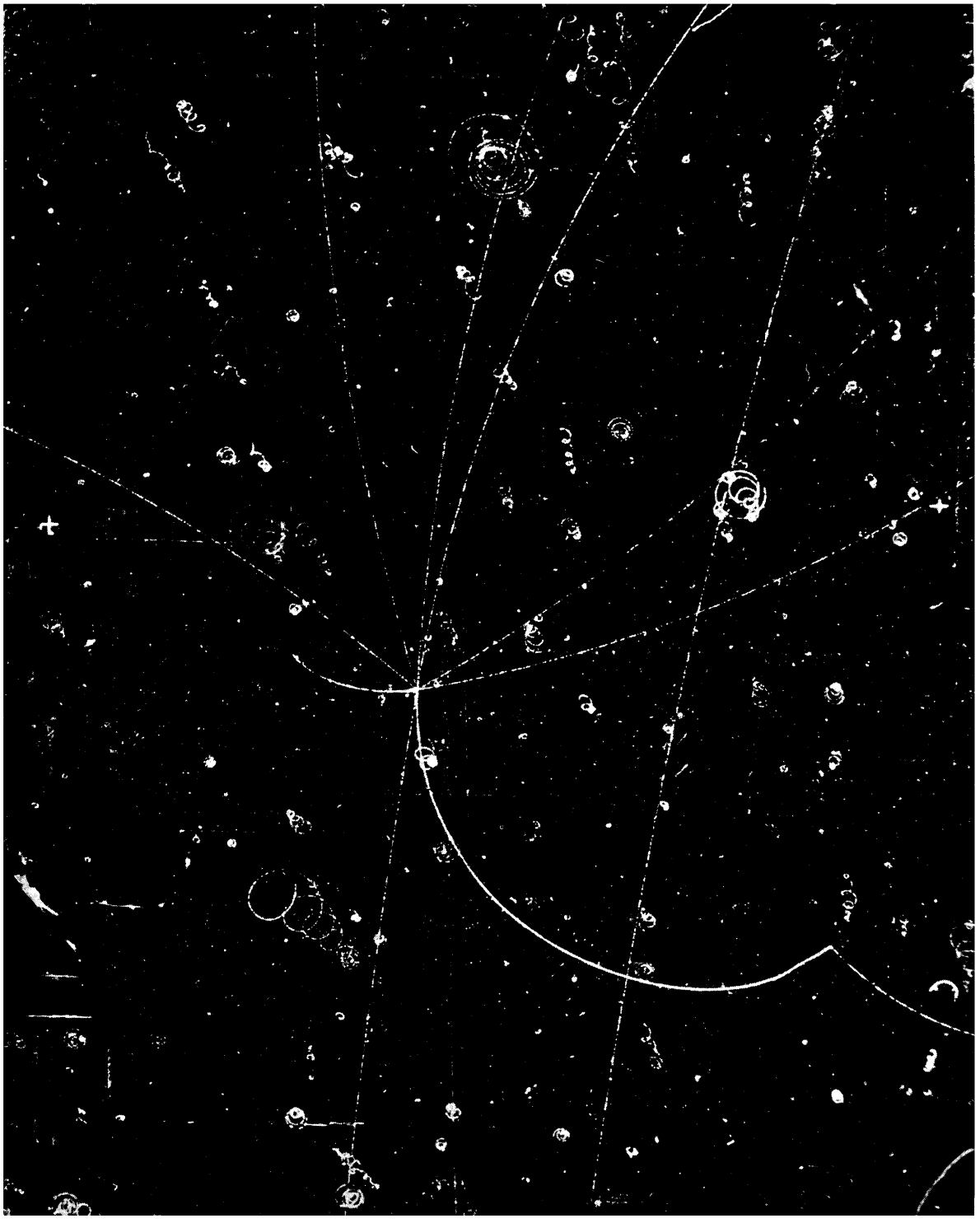
Consideraciones finales

56 En los capítulos que preceden hemos aprendido a pensar de acuerdo con las ideas de la mecánica cuántica acerca de muchos fenómenos físicos. Ciertamente, nuestra discusión es muy incompleta, lo que no debiera sorprender a nadie, puesto que en realidad este libro se propone ser una *introducción.* Hay muchos principios generales importantes que no hemos tratado, y nuestra discusión de la aplicación sistemática de los principios que hemos aprendido resulta deficiente, tanto en su alcance como en su profundidad. Con todo, hemos de recordar que la física cuántica es una doctrina que se ha venido estudiando intensamente durante los últimos 40 ó 50 años y que se ha acumulado una enorme cantidad de conocimiento en este campo. Difícilmente un libro de introducción podría pasar revista a este vasto dominio y, por lo tanto, queda mucho más por aprender mediante el simple procedimiento de asistir a cursos y leer libros. Ningún lector debe sentirse ni desanimado ni ofendido por esta afirmación: es la simple manifestación de un hecho.

Sin embargo, ha sido un buen comienzo. Hemos aprendido que todas las partículas físicas tienen una naturaleza ondulatoria. Hemos visto cómo muchos fenómenos físicos que eran incomprensibles tomando como base la física clásica, se pueden entender acudiendo al modelo ondulatorio, y hemos alcanzado también un cierto grado de comprensión acerca de cómo las leyes clásicas de la física pueden resultar ser "casos límite" de las leyes de la mecánica cuántica. Hemos aprendido que a todo sistema físico van asociados niveles de energía y también cómo la aparición de estos niveles podría explicarse dentro de la mecánica cuántica. En el curso de nuestros estudios hemos alcanzado un cierto grado de familiaridad con el (a primera vista) extraño mundo de la microfísica. Algo hemos aprendido acerca del orden de magnitud de las cantidades físicas en microfísica,

Fotografía obtenida en una cámara de burbujas que presenta la aniquilación de un protón y un antiprotón dando lugar a piones. El suceso más importante tiene lugar en la parte media del campo visual. El antiprotón incide desde abajo y su camino queda de manifiesto por la traza "de puntos" casi recta. En la aniquilación se producen ocho piones cargados. Uno de ellos, aquél cuya traza se dirige inicialmente en sentido opuesto a la dirección del antiprotón incidente, se desintegra en un muón y un neutrino. El muón se desintegra a su vez en un positón y dos neutrinos. La traza del muón es difícil de distinguir de la del pión, pero se puede ver claramente el punto donde empieza la traza del positón.

La cámara se encuentra en un campo magnético perpendicular al de la figura. Las trazas de las partículas negativas giran en el sentido de las agujas de un reloj, y las trazas de las partículas positivas, en sentido opuesto. Las partículas que se mueven lentamente dejan trazas densas, mientras que las partículas muy rápidas tienden a dejarlas en forma "punteada". *(Fotografía cedida por el Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley.)*



y también de cómo hacer estimaciones simples basadas en simples modelos.

El lector que se ha abierto paso a través del libro hasta el fin del último capítulo ha logrado vislumbrar algunos de los resultados más centrales de la física moderna. Ha aprendido que la física no es un tema cerrado: existen muchos problemas básicos para los que no hay actualmente ninguna solución a la vista.

El autor termina deseando al lector Felices Estudios Futuros en Física Cuántica.

Bibliografía para ulterior estudio

1) D. H. Frish y A. M. Thorndike: *Elementary Particles* (D. van Nostrand Co., Inc., 1964). Este librito (148 páginas) ofrece una puesta a punto simple y al día, y, por ello, lo recomendamos especialmente. Las técnicas experimentales en este campo se describen con elegancia.

2) Tómese nota de los siguientes artículos en el *Scientific American:*

a) F. J. Dyson: "Field Theory", abril 1953, pág. 57.

b) G. F. Chew, M. Gell-Mann y A. H. Rosenfeld: "Strongly Interacting Particles", febrero 1964, pág. 74.

c) M. Gell-Mann y E. P. Rosenbaum: "Elementary Particles", julio 1957, página 72.

d) G. Feinberg y M. Goldhaber: "The Conservation Laws of Physics", octubre 1963, pág. 36.

e) F. J. Dyson: "Mathematics in the Physical Sciences", septiembre 1964, página 128.

f) W. B. Fowler y N. P. Samios: "The Omega-Minus Experiment", octubre 1964, pág. 36.

g) K. W. Ford: "Magnetic Monopoles", diciembre 1963, pág. 122.

h) G. W. Gray: "The Ultimate Particles", junio 1948, pág. 26.

i) H. A. Bethe: "What holds the Nucleus Together?", septiembre 1953, página 58.

j) R. E. Marshak: "The Nuclear Force", marzo 1960, pág. 98.

k) S. Penman: "The Muon", julio 1961, pág. 46.

Problemas

1 (a) Calcular la probabilidad de transmisión para neutrones de energía 0,1 eV que inciden perpendicularmente sobre una lámina de cadmio de 0,1 mm de grosor. La densidad del cadmio es de 8,7 g/cm^3. Obtener la sección eficaz para los neutrones en la figura 6A.

(*b*) Análogamente, calcular la probabilidad de transmisión para neutrones de 1 eV que inciden perpendicularmente sobre una lámina de cadmio de 1 cm.

2 La sección eficaz total de interacción de un mesón K^+ con un protón es de unos 15 mb cuando la energía cinética del mesón K (que choca con un protón en reposo) es de 400 MeV. ¿Cuál es en promedio el número de interacciones por cm de camino para un mesón K de esta energía en hidrógeno líquido (en una cámara de burbujas)? La densidad del hidrógeno líquido es de 0,071 g/cm^3.

3 La sección eficaz de producción de un par electrón-positón cuando un cuanto gamma de 10 MeV choca con un átomo de plomo es de unos 14 barnios. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca un par cuando un rayo gamma de esta energía incide perpendicularmente sobre una placa de plomo de 2,5 mm de grueso? La densidad del plomo es de 11,3 g/cm^3.

4 En un experimento se midió la sección eficaz de dispersión de Compton para un rayo gamma de 100 keV y resultó ser de 0,49 barnios. A esta energía, que es considerablemente menor que la energía en reposo de un electrón, un simple cálculo no relativista conduce a un resultado que es casi el correcto. Intente realizar este cálculo para ver hasta dónde es capaz de llegar. En la dispersión de Compton un rayo gamma es dispersado por un electrón "libre" inicialmente en reposo. (Hemos discutido el efecto Compton en el Cap. 4, pero no se habló de la sección eficaz de dispersión.) Supongamos que una onda plana de amplitud A y frecuencia ω incide sobre un electrón inicialmente en reposo. El electrón adquirirá un movimiento oscilatorio en la dirección del vector eléctrico de la onda. Sea x la amplitud de esta oscilación. Evidentemente, la cantidad x es proporcional a la amplitud A de la onda y, además, x depende de la frecuencia ω y de la masa y la carga del electrón. El electrón en movimiento oscilatorio actúa como un dipolo eléctrico de momento ex. Este dipolo emite radiación electromagnética con una potencia total W. (Hemos dado la fórmula para esta potencia en la Sec. 48, Cap. 3.) Deberíamos estar así en condiciones de calcular qué fracción de la energía incidente por unidad de área (que contiene el electrón) será dispersada por el electrón. Exprese su resultado adaptándolo a la forma de una sección eficaz de dispersión. Ésta es la sección eficaz de Compton. La sección eficaz de Compton correspondiente a un átomo es el producto de la sección eficaz para un electrón multiplicada por el número de electrones en el mismo.

5 (*a*) En la Sec. 17 se presentó una teoría simple que da la sección eficaz máxima en el caso en que la dispersión presenta simetría esférica. Es interesante comparar esta teoría con la sección eficaz medida experimentalmente para el proceso $\pi^+ - p$ representada en la figura 24B. Simplificaremos el problema admitiendo que la masa del protón es infinita. La energía que importa en la dispersión es entonces la energía cinética del pión positivo, que es de unos 195 MeV (en el sistema de referencia del laboratorio) allí donde se presenta la resonancia prominente designada por $N^*_{3/2}$. Efectúe esta comparación. Encontrará que el orden de magnitud es el correcto, pero que la sección eficaz experimental difiere de la calculada teóricamente en un "factor del orden de la unidad". Lo que explica esta discrepancia es meramente el hecho de que la dispersión *no* presenta simetría esférica. Nuestra teoría simplificada debiera haberse modificado para incluir otras posibles distribuciones angulares. Con esta modificación se encuentra que

la sección eficaz experimental en el máximo concuerda bien con la predicción teórica.

(*b*) A partir de la curva representada en la figura 24B estimar la vida media de la "partícula" N^*.

6 Utilizando la teoría simplificada expuesta en las secciones 17-18 para la dispersión resonante, estimar la sección eficaz de absorción por resonancia de rayos gamma de 14,4 keV por el núcleo Fe^{57}. (Esta estimación tiene importancia para los resultados experimentales que se presentan en la figura 16A, Capítulo 4.) Suponiendo que los núcleos de hierro absorbentes se encuentran en una lámina de 1 mm de grueso, ¿cuál es la probabilidad de que un rayo gamma atraviese la lámina?

Obsérvese que nuestra teoría simplificada no se puede aplicar en realidad a fotones, entre otras razones porque éstos tienen spin igual a la unidad. En consecuencia, no puede esperar obtener un valor numéricamente correcto para la sección eficaz. Sin embargo, la dependencia de la sección eficaz máxima respecto de la longitud de onda viene dada correctamente por nuestra teoría y su estimación es, por lo tanto, útil en lo que concierne al orden de magnitud.

7 La sección eficaz máxima de dispersión de la luz por resonancia debida a un átomo puede, evidentemente, ser muy grande debido a que lo es la longitud de onda de la luz visible. Consideremos el caso de la dispersión por resonancia de luz amarilla de longitud de onda 5896 Å por átomos de sodio.

(*a*) Dentro del orden de ideas del problema que precede, estimar la sección eficaz máxima en la resonancia.

(*b*) En un experimento real podríamos tener como "blanco" vapor de sodio en una vasija de vidrio para realizar el experimento de dispersión. (Considérese, por ejemplo, los dispositivos experimentales descritos en el prob. 3, Cap. 3.) Los átomos de sodio no tendrán todos la misma velocidad, y en consecuencia, el desplazamiento Doppler hará más ancha la raya de absorción. La vida media del sodio en el estado $3p_{1/2}$ es de unos 10^{-8} s. A partir de esto puede calcular la anchura de la raya para un átomo de sodio aislado en reposo. Suponga que la luz incidente tiene esta anchura de la raya. Suponga, además, que los átomos en la vasija que contiene el absorbente poseen una velocidad media al azar correspondiente a una temperatura de 200°C. Estimar la sección eficaz de dispersión *efectiva* de un átomo en la vasija para los fotones del haz incidente.

(*c*) Utilizando la estimación de la sección eficaz efectiva obtenida en la parte (*b*), hallar el número de átomos de sodio por cm^3 que deben encontrarse en la vasija para que la intensidad de la luz incidente se reduzca a la mitad al atravesar una capa de gas de 1 cm de grosor. Es innecesario decir que un gas de estas características es completamente transparente a la luz de cualquier otra longitud de onda que no sea la de resonancia.

8 Consideremos las partículas que forman el octeto bariónico cuyo espectro de masas es el representado en la figura 29B. De estas partículas una es estable. Entre las demás partículas inestables, una se desintegra por interacción electromagnética (su vida media es notablemente más corta que la de las otras partículas) y las demás se desintegran por interacción débil. Vea si puede explicar estas características

del octeto teniendo en cuenta las leyes mencionadas de conservación del número bariónico, de la carga y de la hipercarga. Para ello debiera investigar todos los modos de desintegración en partículas que pueda imaginar y, que se han señalado en el texto, teniendo en cuenta las masas determinadas experimentalmente de estas partículas. Por ejemplo: pudiera usted empezar preguntándose si la partícula Σ^+ puede desintegrarse en un mesón K^+ y algo más. Pronto descubrirá que las posibilidades están seriamente limitadas y que no son muchos los casos que cabe considerar.

El problema consiste así en probar en detalle que las leyes de conservación que hemos discutido implican que ninguna de las partículas pueda desintegrarse por interacción fuerte y que únicamente una de ellas puede hacerlo por interacción electromagnética.

9 Los diagramas de simetría en las figuras 29A-D muestran los valores para varias partículas de una cantidad llamada la tercera componente del spin isotópico (designada por I_3). Hemos dicho ya que esta cantidad se conserva también en todas las interacciones fuertes y electromagnéticas.

Investigar si esta ley de conservación implica algo más que las otras leyes de conservación que hemos mencionado y que se refieren a la conservación de la carga, la hipercarga y el número bariónico.

10 En la literatura referente a las partículas elementales se utiliza a menudo un atributo llamado "extrañeza" para caracterizar las partículas que interactúan fuertemente. A cada una de tales partículas se puede asignar un número cuántico de extrañeza S, que podemos definir por $S = Y - B$, donde Y es la hipercarga y B el número bariónico. De acuerdo con esta regla, los piones y los nucleones tienen extrañeza cero: no son extrañas, sino "familiares".

(*a*) ¿En qué tipo de interacciones se conserva la extrañeza total?

(*b*) Existe una simple relación lineal entre la extrañeza S, la carga eléctrica Q, el número bariónico B y la tercera componente de spin isotópico I_3. Hallar esta relación (que queda de manifiesto en los diagramas de simetría de las figuras 29A-D).

11 Queremos producir partículas lambda en colisiones protón-protón. ¿Cuál es la energía cinética mínima que debe poseer un protón que incide sobre otro protón en reposo para que esto sea posible?

12 (*a*) En la Sec. 11 supusimos que una onda dispersada debe ser de la forma

$$\psi_s(\mathbf{x},t) = Cf(\theta)\frac{1}{x}\exp(ixp - i\omega t) \qquad \text{(a)}$$

a grandes distancias del centro de dispersión. Probar que para el caso especial en que la dispersión presente simetría esférica, en el cual $f(\theta) = f$ es independiente del ángulo de dispersión θ, la función de onda dada por (a) es efectivamente una solución de la ecuación de Klein-Gordon en el vacío (excepto en el punto $x = 0$). En relación con esto puede ser útil considerar lo dicho en las secciones 51-52.

(*b*) Probar que para una $f(\theta)$ arbitraria la expresión (*a*) es una solución *aproximada* de la ecuación de Klein-Gordon. Lo que debe probar es que si esta función de onda se substituye en la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación queda satisfecha salvo un término que tiende a cero como $1/x^2$ cuando x tiende a infinito.

Apéndices

A. Constantes físicas generales **460**

B. Las partículas elementales más estables **462**

C. Los elementos químicos **464**

Para tablas de unidades y factores de conversión, véase el dorso de la tapa posterior del libro.

Para una tabla de valores aproximados de constantes físicas importantes véase el dorso de la tapa anterior del libro.

TABLA A Constantes físicas generales*

Constante de Planck:	$h = 2\pi\hbar = (6{,}62559 \pm 0{,}00015) \times 10^{-27}$ erg s $\hbar = \frac{h}{2\pi} = (1{,}05449 \pm 0{,}00003) \times 10^{-27}$ erg s
Velocidad de la luz:	$c = (2{,}997925 \pm 0{,}000001) \times 10^{10}$ cm s^{-1}
Carga del electrón:	$e = (4{,}80298 \pm 0{,}00006) \times 10^{-10}$ Fr $= (1{,}60210 \pm 0{,}00002) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitatoria:	$G = (6{,}670 \pm 0{,}005) \times 10^{-8}$ dyn cm^2 g^{-2}
Constante de estructura fina:	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = (7{,}29720 \pm 0{,}00003) \times 10^{-3}$ $\frac{1}{\alpha} = 137{,}0388 \pm 0{,}0006$
Número de Avogadro:	$N_0 = (6{,}02252 \pm 0{,}00009) \times 10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Boltzmann:	$k = (1{,}38054 \pm 0{,}00006) \times 10^{-16}$ erg $(°K)^{-1}$
Constante de Faraday:	$N_0 e = (96487{,}0 \pm 0{,}5)$ C mol^{-1}
Constante universal de los gases:	$R = N_0 k = 8{,}314 \times 10^7$ erg $(°K)^{-1}$ mol^{-1} $= 1{,}986$ cal $(°K)^{-1}$ mol^{-1}
Masa del electrón:	$m = (9{,}10908 \pm 0{,}00013) \times 10^{-28}$ g $= (5{,}48597 \pm 0{,}00003) \times 10^{-4}$ u $= (0{,}511006 \pm 0{,}000002)$ MeV/c^2
Unidad atómica de masa:	u $= (1{,}66043 \pm 0{,}00002) \times 10^{-24}$ g $= (931{,}478 \pm 0{,}005)$ MeV/c^2
Masa del protón:	$M_p = (1{,}67252 \pm 0{,}00003) \times 10^{-24}$ g $= (1{,}00727663 \pm 0{,}00000008)$ u $= (938{,}256 \pm 0{,}005)$ MeV/c^2

* La mayor parte de los datos de esta tabla se han tomado de un artículo por E. R. Cohen y J. W. M. DuMond, "Our knowledge of the Fundamental Constants of Physics and Chemistry in 1965", *Reviews of Modern Physics* **37**, 537 (1965).

TABLA A Constantes físicas generales (continuación)

Masa del neutrón:	$M_n = (1{,}0086654 \pm 0{,}0000004)$ u $= (939{,}550 \pm 0{,}005)$ MeV/c^2
Longitud de onda de Compton del electrón	$\lambda_e = \frac{h}{mc} = (2{,}42621 \pm 0{,}00002) \times 10^{-10}$ cm $\lambda\!\!\!^{-}_e = \frac{\hbar}{mc} = (3{,}86144 \pm 0{,}00003) \times 10^{-11}$ cm
Primer radio de Bohr:	$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \alpha^{-1}\lambda\!\!\!^{-}_e$ $= (5{,}29167 \pm 0{,}00002) \times 10^{-9}$ cm
«Radio clásico» del electrón:	$\frac{e^2}{mc^2} = \alpha\lambda\!\!\!^{-}_e = (2{,}81777 \pm 0{,}00004) \times 10^{-13}$ cm
Potencia de ionización no relativista del hidrógeno para una masa del protón infinita:	$R_\infty = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 = (13{,}60535 \pm 0{,}00013)$ eV
Constante de Rydberg para masa del protón infinita:	$\tilde{R}_\infty = \frac{\alpha}{4\pi a_0} = \frac{R_\infty}{hc} = (109737{,}31 \pm 0{,}01)$ cm^{-1}
Constante de Rydberg para el hidrógeno:	$\tilde{R}_H = (109677{,}576 \pm 0{,}012)$ cm^{-1}
Magnetón de Bohr:	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ $= (9{,}27314 \pm 0{,}00021) \times 10^{-21}$ erg gauss^{-1}
Frecuencia asociada a 1 eV:	$(2{,}41804 \pm 0{,}00002) \times 10^{14}$ Hz
Número de onda asociado a 1 eV:	$(8065{,}73 \pm 0{,}08)$ cm^{-1}
Temperatura asociada a 1 eV:	$(11604{,}9 \pm 0{,}5)$ °K

TABLA B Las partículas elementales más estables*

Partícula	*Spin*	*Masa* MeV	*Vida media* s	*Desintegraciones importantes* ** *Modo parcial*	*Fracción de ramificación*	*Q* MeV
γ fotón	1	0	estable	estable		
LEPTONES						
ν_e neutrino-e	$\frac{1}{2}$	0 (< 0,2 keV)	estable	estable		
ν_μ neutrino-μ		0 (< 2 MeV)				
$e^{\mp}$ electrón-positón	$\frac{1}{2}$	0,511006	estable	estable		
$\mu^{\mp}$ muones	$\frac{1}{2}$	105,659	$2{,}20 \times 10^{-6}$	$e\nu\nu$	100%	105
BARIONES ‡						
p protón	$\frac{1}{2}$	938,256	estable	estable		
n neutrón		939,550	$1{,}01 \times 10^{3}$	$pe^{-}\nu$	100%	0,78
Λ hiperón-lambda	$\frac{1}{2}$	1115,58	$2{,}51 \times 10^{-10}$	$p\pi^{-}$	66%	30
				$n\pi^{0}$	34%	41
				$p\mu\nu$	1.4×10^{-4}	72
				$pe\nu$	$0{,}88 \times 10^{-3}$	177
Σ^{+} hiperones-sigma	$\frac{1}{2}$	1189,47	$0{,}81 \times 10^{-10}$	$p\pi^{0}$	53%	116
				$n\pi^{+}$	47%	110
				$p\gamma$	$1{,}9 \times 10^{-3}$	251
Σ^{0}		1192,56	$< 1{,}0 \times 10^{-14}$	$\Lambda\gamma$	100%	77
Σ^{-}		1197,44	$1{,}65 \times 10^{-10}$	$n\pi^{-}$	100%	118
				$ne^{-}\nu$	$1{,}3 \times 10^{-3}$	257
				$n\mu^{-}\nu$	$0{,}6 \times 10^{-3}$	152
				$\Lambda e^{-}\nu$	$0{,}6 \times 10^{-4}$	81
Ξ^{0} partículas de cascada	$\frac{1}{2}$	1314,7	$3{,}0 \times 10^{-10}$	$\Lambda\pi^{0}$	100%	7
Ξ^{-}		1321,2	$1{,}74 \times 10^{-10}$	$\Lambda\pi^{-}$	100%	5
				$\Lambda e^{-}\nu$	$3{,}0 \times 10^{-3}$	205
Ω^{-} omega-menos	$\frac{3}{2}$	1674	$1{,}5 \times 10^{-10}$	$\Xi\pi$	~50%	221
				$\Lambda\overline{K}$	~50%	66

TABLA B Las partículas elementales más estables (continuación)

Partícula	*Spin*	*Masa* MeV	*Vida media* s	*Desintegraciones importantes* ** *Modo parcial*	*Fracción de ramificación*	*Q* MeV
MESONES						
$\pi^{\pm}$ piones cargados	0	139,58	$2{,}608 \times 10^{-8}$	$\mu\nu$	100%	34
				$e\nu$	$1{,}24 \times 10^{-4}$	139
				$\mu\nu\gamma$	$1{,}24 \times 10^{-4}$	34
				$\pi^0 e\nu$	$1{,}0 \times 10^{-8}$	4,08
π^0 pión neutro	0	134,98	$0{,}89 \times 10^{-16}$	$\gamma\gamma$	98,8%	135
				γe^+e^-	1,2%	134
$K^{\pm}$ kaones cargados (mesón-K)	0	493,8	$1{,}235 \times 10^{-8}$	$\mu\nu$	63,4%	388
				$\pi^{\pm}\pi^0$	21,0%	219
				$\pi^{\pm}\pi^-\pi^+$	5,6%	75
				$\pi^{\pm}\pi^0\pi^0$	1,7%	84
				$\mu^{\pm}\pi^0\nu$	3,4%	253
				$e^{\pm}\pi^0\nu$	4,8%	358
K^0 kaones neutros	0	497,9				
K_1			$0{,}87 \times 10^{-10}$	$\pi^+\pi^-$	69,3%	219
				$\pi^0\pi^0$	30,7%	228
K_2			$5{,}68 \times 10^{-8}$	$\pi^0\pi^0\pi^0$	23,5%	93
				$\pi^+\pi^-\pi^0$	11,5%	84
				$\pi\mu\nu$	27,5%	253
				$\pi e\nu$	37,4%	358
				$\pi^+\pi^-$	0,15%	219
				$\pi^0\pi^0$	0,36%	228
η mesón-eta	0	548,6	$< 7 \times 10^{-20}$ $> 0{,}7 \times 10^{-20}$	$\gamma\gamma$	31,4%	549
				$\pi^0\pi^0\pi^0$	21,0%	144
				$\pi^0\gamma\gamma$	20,5%	414
				$\pi^+\pi^-\pi^0$	22,4%	135
				$\pi^+\pi^-\gamma$	4,6%	269

** *Q* designa la energía cinética liberada en la desintegración.

‡ A cada uno de los bariones corresponde un antibarión que no se ha incluido separadamente en la lista.

* Los datos de esta tabla se han tomado de un artículo de puesta a punto por A. H. Rosenfeld y cols., "Data on Particles and Resonant States", *Reviews of Modern Physics* **39**, 1 (1967). En este artículo se presentan datos para muchas más partículas. Se da también información adicional acerca de las partículas especialmente estables. Algunos de los modos de desintegración raros conocidos no se han incluido en nuestra tabla.

TABLA C Los elementos químicos

Elemento	*Símbolo*	*Número atómico*	*Masa atómica* *	*Elemento*	*Símbolo*	*Número atómico*	*Masa atómica* *
Actinio	Ac	89	(227)	Cromo	Cr	24	51,996
Aluminio	Al	13	26,9815	Curio	Cm	96	(247)
Americio	Am	95	(243)	Disprosio	Dy	66	162,50
Antimonio	Sb	51	121,75	Einstenio	Es	99	(254)
Argón	Ar	18	39,948	Erbio	Er	68	167,26
Arsénico	As	33	74,9216	Escandio	Sc	21	44,956
Ástato	At	85	(210)	Estaño	Sn	50	118,69
Azufre	S	16	32,064	Estroncio	Sr	38	87,62
Bario	Ba	56	137,34	Europio	Eu	63	151,96
Berilio	Be	4	9,0122	Fermio	Fm	100	(253)
Berquelio	Bk	97	(247)	Flúor	F	9	18,9984
Bismuto	Bi	83	208,980	Fósforo	P	15	30,9738
Boro	B	5	10.811	Francio	Fr	87	(223)
Bromo	Br	35	79,909	Gadolinio	Gd	64	157,25
Cadmio	Cd	48	112,40	Galio	Ga	31	69,72
Calcio	Ca	20	40,08	Germanio	Ge	32	72,59
Californio	Cf	98	(251)	Hafnio	Hf	72	178,49
Carbono	C	6	12,01115	Helio	He	2	4,0026
Cerio	Ce	58	140,12	Hidrógeno	H	1	1.00797
Cesio	Cs	55	132,905	Hierro	Fe	26	55,847
Cinc	Zn	30	65,37	Holmio	Ho	67	164,930
Circonio	Zr	40	91,22	Indio	In	49	114,82
Cloro	Cl	17	35,453	Iridio	Ir	77	192,2
Cobalto	Co	27	58,9332	Iterbio	Yb	70	173,04
Cobre	Cu	29	63,54	Itrio	Y	39	88,905
Criptón	Kr	36	83,80	Lantano	La	57	138,91

* Los números entre paréntesis en la columna de masas atómicas son los números de masa de los isótopos más estables de los elementos radiactivos.

TABLA C Los elementos químicos (continuación)

Elemento	*Símbolo*	*Número atómico*	*Masa atómica* *	*Elemento*	*Símbolo*	*Número atómico*	*Masa atómica* *
Laurencio	Lw	103	(257)	Prometio	Pm	61	(145)
Litio	Li	3	6,939	Protactinio	Pa	91	(231)
Lutecio	Lu	71	174,97	Radio	Ra	88	226,0254
Magnesio	Mg	12	24,312	Radón	Rn	86	(222)
Manganeso	Mn	25	54,9380	Renio	Re	75	186,2
Mendelevio	Md	101	(256)	Rodio	Rh	45	102,905
Mercurio	Hg	80	200,59	Rubidio	Rb	37	85,47
Molibdeno	Mo	42	95,94	Rutenio	Ru	44	101,07
Neodimio	Nd	60	144,24	Samario	Sm	62	150,35
Neón	Ne	10	20,183	Selenio	Se	34	78,96
Neptunio	Np	93	(237)	Silicio	Si	14	28,086
Niobio	Nb	41	92,906	Sodio	Na	11	22,9898
Níquel	Ni	28	58,71	Talio	Tl	81	204,37
Nitrógeno	N	7	14,0067	Tantalio	Ta	73	180,948
Nobelio	No	102	(255)	Tecnecio	Tc	43	(98)
Oro	Au	79	196,967	Telurio	Te	52	127,60
Osmio	Os	76	190,2	Terbio	Tb	65	158,924
Oxígeno	O	8	15,9994	Titanio	Ti	22	47,90
Paladio	Pd	46	106,4	Torio	Th	90	232,038
Plata	Ag	47	107,870	Tulio	Tm	69	168,934
Platino	Pt	78	195,09	Uranio	U	92	238,03
Plomo	Pb	82	207,19	Vanadio	V	23	50,942
Plutonio	Pu	94	(244)	Volframio	W	74	183,85
Polonio	Po	84	(209)	Xenón	Xe	54	131,30
Potasio	K	19	39,102	Yodo	I	53	126,9044
Praseodimio	Pr	59	140,907				

* Los números entre paréntesis en la columna de masas atómicas son los números de masas de los isótopos más estables de los elementos radiactivos.

Índice alfabético

Absorción y emisión de luz, 106, 456
  ley de Kirchhoff, 28
Abundancia de elementos, cósmica, 341
  terrestre, 342
Acción, 16
Acción a distancia, 436
Activación óptica de electrones, 72
Ajzenberg, F., 137, 152, 154
Aluminio, sección atravesada por protones, 425
Amplitud de onda en el espacio de impulsos, 232 (*ver también* Función de onda)
Amplitud de probabilidad, 280
Amplitudes e intensidades, 280
Análisis de Fourier, 232
Análisis de onda parcial para dispersión de onda S, 419
Anchura de niveles de energía, 115
  y principio de indeterminación, 261
  y vida media, 122
Anchura de la raya, 123
Anchura de rayas, ensanchamiento de colisión, 143
  ensanchamiento natural, 122
  ensanchamiento por efecto Doppler, 140, 141
  principio de indeterminación, 261
Anderson, C. D., 176, 197
Ångström, A. J., 34
  unidad de longitud, 34
Aniquilación, 10, 176, 442
  de antineutrón y protón, 180
  de antiprotón y protón, 443, 453
  estrella en emulsión fotográfica, 179
Anotación espectroscópica, 129
Antibariones, 427, 429, 431
Antilambda, 427, 443
Antineutrino, 139, 427
Antineutrón, 180, 427
Antipartícula, 179, 180, 427
Antiprotón, 179, 180, 406, 410, 427, 443, 453
Aproximación de Born-Oppenheimer, 377
Aproximación WKB, 373
Argumentos dimensionales, 68
Armenteros, R., 406, 410
Aston, W. F., 77
Atenuación del haz al atravesar la materia, 409
Átomo de cadmio, niveles de energía, 133
Átomo de cerio, parte del espectro, 123
Átomo de cinc, niveles de energía, 133
Átomo de sodio, tabla de niveles de energía, 130
  doblete amarillo, 130, 153
  esquema de términos, 128
Átomo multielectrón, 70
  estructura en capas, 71, 135
Átomos alcalinos, 130, 133
Átomos con un electrón, 385
  esquemas de términos, 340, 341
  números cuánticos, 387
Átomos, niveles de energía (*ver* Niveles de energía)
  de los atomistas griegos, 6
  muónicos, 390
Átomo *(continuación)*
  sistemas hidrogenoides, 385
  tamaño y estabilidad, 36, 65, 259
Avogadro, número, 7, 22, 53, 460
  determinación, 23, 45

Balmer, series, 387
Banda de espectro molecular, fotografía, 110
  teoría, 385
Bariones, 427, 432, 462
Barkla, C. G., 173
Barn, 410
Barnes, V. E., 432
Barrera, penetración, 325
  analogía óptica, 327
  coeficiente de transmisión, 329
  y radiactividad alfa, 330

Barrera de Coulomb en las reacciones nucleares, 99, 332
Barreras de potencial, 315
Barrow, G. M., 398
Bearden, J. A., 176
Becquerel, H., 44
Bellicard, J. B., 414
de Benedetti, S., 152
Bethe, H. A., 454
Bilaniuk, O. M., 295
Blanco, hidrógeno líquido (fotografía), 407
  en dispersión, 408, 412
Bloom, A. L., 152
Bohr, N., 40, 105
  biografía, 35
  predicción del hafnio, 134
  principio de correspondencia, 397
  teoría de la emisión y absorción de luz, 106
  teoría de los átomos, 36, 66, 154
Bolef, D. I., 168
Boltzmann, L., 7
Boorse, H. A., 44, 135, 195
Born, M., 241, 306
  biografía, 306
Breit-Wigner, fórmula, 121, 422
Brillouin, L., 373
de Broglie, L. V., 202
  biografía, 203
  longitud de onda, 205, 208
  teoría de las ondas de la materia, 202
Broström, K. J., 425
Burbidje, E. M., 347
Burbidje, G. R., 195, 347

Calor, 24, 60
Caloría, 59
Cámara de burbujas, dibujo esquemático, 436
  aniquilación protón-antiprotón, 453
  antisigma-cero, 435
  dispersión e intercambio de carga, 180
  lambda y mesón-*K*, 439
  par lambda-antilambda, 443
Campo, 437, 441
  electromagnético, 433, 438, 441, 442, 447
  mesón, 447
  teoría, 443
  y descripción de partículas, 441
Campo cuántico, 441
Campo electromagnético, interacción de partículas cargadas, 437, 447
  interpretación cuántica, 190
  máxima intensidad de campos macroscópicos, 84
  transformación de Lorenz, 166
Campo estático del mesón, 447
Capas *K*, *L*, *M*, 135
Captura de un electrón, 339
Captura - *K*, 339
Carga, del electrón, 22, 51, 64, 460
  de las partículas elementales, 427, 432
  del núcleo, 75, 137
  fraccional, 432
Carga, independencia de las fuerzas nucleares, 81, 138
Carga elemental, 22
Carga nuclear, determinación, 136
Cascadas de desintegración gamma, 140
Centelleo, 45, 273
Centelleo de las estrellas, 46
Cerenkov, contador, 406
  radiación, 197
Cerio, parte del espectro, 123
Cero absoluto, 25, 63
Cloruro de cerio, estructura cristalina, 94
Coeficiente de transmisión en la penetración de la barrera, 329
Cohen, E. R., 97, 460
Colisión, sección eficaz, 408 (*ver también* Sección eficaz)
  experimentos, 407, 412
Collins, G. B., 195, 295
Compton, A. H., 170, 172
Compton, efecto, experimentos, 171
  longitud de onda, 170
  teoría, 169
Condiciones cuánticas, Bohr, 40
  Bohr-Sommerfeld, 373
Condiciones de contorno para funciones de onda, 324, 356 450
Condon, E. U., 336
Configuración electrónica de los átomos, 135
Conjunto estadístico, 273
Conjuntos mezclados y puros, 286
  promedio de variables, 274
  superposición coherente, 280
  superposición incoherente, 277, 280
  y funciones de onda, 289
Conjuntos, 262
Conservación, del momento cinético, 127
  de la carga, 91, 428
  energía e impulso, 221
  energía en la desintegración beta, 350
  número bariónico, hipercarga, 930
Constante de Boltzmann, 26, 59, 460
  determinación, 30
Constante de desintegración, 338
Constante de estructura fina, 65, 87, 460
  y electrodinámica cuántica, 305
Constante de Faraday, 22, 460
Constante de Planck, 16, 54, 460
  determinación por Millikan, 33
  universalidad 219
  y límite del espectro de rayos X, 174
  y principio de indeterminación, 18, 257

Constante de Rydberg, 66, 461
Constante universal de los gases, 26, 54, 460
Constantes de acoplamiento, 90
  desintegración beta, 139
  electrodinámica, 65, 303
  gravitatoria, 83
Constantes de la naturaleza, 88, 460, 461
Constantes físicas, asociadas con electrones, 51, 66
  tablas, 460, 461
Contador de centelleo, 273, 275
Contador de Cerenkov, 406
Contador Geiger-Müller, 262, 263
Contadores (*ver* Detectores de partículas)
Courant, R., 242
Cranberg, L., 413
Cristal de cloruro de sodio, 22
Cristales, 5
  redes de difracción, 24, 209, 212
  y número de Avogadro, 23
Crowe, K., 97
Cuantificación, 354
  de la carga, 91
  del momento cinético, 40, 127
  y ondas estacionarias, 355
Cuanto de acción, 16
Curie, M., 97
Curie, P., 97
Curva de rendimiento para reacción nuclear, 425

Chadwich, J., 75
Chamberlain, O., 179
Chambers, R. G., 227
Chaparrones en cascada, 10
Chew, G. F., 454

Darrow, K. K., 242
Davis, S. P., 107, 108, 110
Davisson, C. J., 208
Davisson-Germer, experimentos, 208
Debye-Scherrer, método, 211
Defecto de masa del núcleo, 75
Densidad de probabilidad, 305
  estados estacionarios y no estacionarios, 358
Desintegración, formas, bariones y mesones, 427, 462, 463
Desintegración beta, 139, 339
  del cobalto, 140
  producción de calor, 350
Desplazamiento en fase de dispersión, 420
Desplazamiento Doppler longitudinal, 160
Detectores de partículas, contador Geiger-Müller, 262, 263
  contadores de centelleo, 273, 275
  fotomultiplicador, 264, 266, 267
  tiempo de resolución, 299
Deuterio, 98
Deuterón, energía de enlace, 90, 114
Deuterón, esquema de términos, 114
  estado fundamental, 400
Difracción con una red de rayos, 245
Difracción de átomos y moléculas, 212
Difracción de electrones, descubrimiento, 208
  efecto de las fluctuaciones térmicas, 272
  efecto del tamaño del cristal, 218
  en estaño, 219
  en un cristal de níquel, 216
Difracción de los rayos X, 23
  en estaño, 211
  método de Debye-Scherrer, 211
Difracción en cristales, 23, 209-211, 216-220, 224
  en estructuras periódicas, 212
  en sistemas de rendijas, 186, 192, 197, 227, 255, 268, 280-284
Dirac, P. A. M., 239
  ecuación, 303
Dispersión, amplitud, 415
  antiprotones con protones, 406
  experimentos, 406, 412
  interpretación de la mecánica cuántica, 413
  onda S, 419
  resonancia, 421
  sección eficaz, 408 (*ver también* Sección eficaz)
Dispersión con intercambio de carga, 180
Dispersión elástica, 406
Dispersión estadística, 274
Dispersión inelástica, 408
  de paquetes de ondas, 442
Distribución angular de dispersión, 411, 415
  electrones con el calcio, 414
  neutrones con el bismuto, 413
  piones con protones, 415
Distribución angular en la emisión de luz, 148, 155
Düker, H., 227
DuMond, J. W. M., 97, 460
Dyson, F. J., 454

Ecuación de Klein-Gordon, 231, 305
  para mesones, 448
Ecuación de onda «relativista», 230, 303, 305
Ecuación de Schrödinger, suposiciones básicas, 302
  aproximación WKB, 373
  deducción, 311
  forma dependiente del tiempo, 308, 315
  forma independiente del tiempo, 315
  problemas de la barrera unidimensional, 315
Ecuaciones de campo no lineales, 441
Ecuaciones de Maxwell, 235, 434, 447
Ecuaciones de onda, 303
  Dirac, 303
  Klein-Gordon, 233
  Schrödinger (*ver* Ecuación de Schrödinger)
  soluciones de frecuencia negativa, 233

Edad de la Tierra, 340
Efecto de Compton, experimentos, 171
  teoría, 169
Efecto de retroceso en la emisión y absorción de fotones, 196
Efecto fotoeléctrico, primeros experimentos, 31, 32
  teoría cuántica, 32
Efecto isotópico, rotaciones moleculares, 401
  vibraciones moleculares, 381
Efecto Stark, 84
Efecto túnel, 325 (*ver también* Barrera, penetración)
Efecto Zeeman, 84
Efectos par-impar en el núcleo, 79
Eficiencia cuántica, 267
Ehrenfest, P., 396
  teorema, 396
Einsporu, E., 112
Einstein, A., 3, 32, 112
  biografía, 3
  relatividad general, 83
  teoría fotoeléctrica, 32, 112
Eisberg, R. M., 347
Electrodinámica cuántica, 60, 305
  y la ley de Coulomb, 451
Electrón, carga, masa, 22, 64, 460
  difracción, 208 (*ver también* Difracción de electrones)
  longitud de onda de Compton, 170, 461
  radio clásico, 14, 39, 461
  sección eficaz en la dispersión del calcio, 414
Electrón-protón, relación de masas, 22
Electronvolt (eV), 56
Elemento voltaico, 74
Elementos actínidos, 134
Elementos lantánidos, 134
Elementos químicos, 52
  estructura en capas, 135
  origen, 342
  tabla periódica, 134
  tablas, 51, 52, 464, 465
Emisión de luz, 106
  regla de selección, 126
Energía, magnitudes características, 61, 62
  unidades, 56
Energía cuántica del oscilador, 29
Energía de disociación de las moléculas, 74
Energía de enlace, en los átomos, 66, 70, 113, 136, 257
  de las moléculas, 73, 375
  del deuterón, 114, 400
  del núcleo, 75, 113, 260
Energía de enlace nuclear, gráfica, 76
Energía de ionización del hidrógeno, 66
  y principio de indeterminación, 257
Energía de repulsión nuclear de Coulomb, 100
Energía de traslación de las moléculas, 60
Energía electrostática, del electrón, 13
Energía electrostática, del núcleo, 100
Energía potencial, en átomos, 67
  molecular, 376
Enlace molecular, 73, 378
Ensanchamiento de las rayas espectrales, 140 (*ver también* Anchura de rayas)
Ensanchamiento por colisión de las rayas espectrales, 141
Ensanchamiento por presión de las rayas espectrales, 143
Espacio vectorial, 237
  de estados físicos, 236
  dimensión, 239
Espectro, banda, 108, 110, 385
  característico de los rayos X, 174
Espectro *(continuación)*
  emisión y absorción, 106, 109, 110
  fragmento de tabla de rayas, 104
  microonda, 385
Espectro atómico, 104
  absorción y emisión, 109, 110
Espectro de bandas, fotografía, 110
Espectro de la molécula de carbono, fotografía, 110
  helio, 108
  hidrógeno, 105
  mercurio, 111
  microonda, de molécula, 386
Espectro de masas, bariones, 427, 428, 429
  del xenón, 78
  mesones, 427, 428
Espectro de masas del xenón, 78
Espectrógrafo de masas, 76
Espectroscopia beta, 276
Espectroscopia de microondas, 385, 386
Esquemas de nivel de energía (*ver* Esquemas de términos)
Esquemas de términos, 108, 109, 110, 113
  átomo de helio, 131
  átomo de hidrógeno, 387, 388
  átomo de litio, 124
  átomo de mercurio, 111
  átomo de sodio, 128
  átomo de talio, 132
  átomos de cinc, cadmio y mercurio, 133
  desintegración alfa del bismuto, 139
  desintegración beta del neutrón, 140
  desintegración del cobalto, 140
  deuterón, 114
Esquemas de términos *(continuación)*
  isótopos del boro y el carbono, 138
  isótopos del litio y el berilio, 138
  núcleo del boro, 137
Estabilidad de los átomos, 259
  del núcleo, 78
Estado estacionario, 106
  en la teoría de Schrödinger, 354
Estado fundamental, 110
Estados cuánticos, 108, 354

Estados cuasiestacionarios, 370
Estados excitados, 108, 109 (*ver también* Niveles de energía; Esquemas de términos)
  vida media y anchura, 122
Estados metastables, 369
Estados propios del operador, 362 (*ver también* Estado estacionario; Niveles de energía)
Estermann, I., 212
Estructura atómica, teoría de Bohr, 36, 65, 154
  relación de indeterminación, 259
  teoría de Schrödinger, 355, 386
Estructura fina, 86
  en átomos alcalinos, 130
Éter, 434
Excitación de átomos por colisiones, 111
  y temperatura, 109
Excitación óptica de los átomos, 108, 115
Excitaciones de rotación en moléculas, 382
  efecto isotópico, 401
Excitaciones vibratorias de las moléculas, 380
  efecto isotópico, 382
Excitaciones vibratorias de las moléculas *(continuación)*
  molécula de hidrógeno, 375
  parámetros característicos, 381
Experimento de Davisson-Germer, 208
Experimento de Hess y Lawson, 45
Experimentos de Geiger y Marsden, 36
«Extrañeza», 457

Feinberg, G., 454
Feld, B. T., 411, 412
Fenómeno de aniquilación, 10, 443
Fenómeno de creación, 10, 435, 439, 443
  y teoría de campo, 442
Fermi, E., 80
  unidad de longitud, 78
Feynman, R. P., 242
Física clásica, 2
  límite de la física cuántica, 256, 397
Fisión espontánea, 100
Fisión nuclear, 100
Fitch, V. L., 390
Flujo de radiación, 162
Fluorescencia, 112
  de resonancia, 115
Ford, K. W., 454
Forma de transición para la emisión de luz, 144
Fórmula de Breit-Wigner, 121, 422
Fórmula de las series K , 136
Fotodesintegración del deuterón, 114
Fotografía en cámara de niebla, emisión de partículas alfa, 331
  chaparrones en cascada, 10
  positón, 176
Fotón, 31
Fotón, efecto de retroceso en emisión y absorción, 196
  emisión desde un foco en movimiento, 168
  masa en reposo cero, 161
  propiedades de las partículas, 158
  teoría cuántica, 189
Fowler, W. Q., 347
Fowler, W. B., 454
Franck, J., 112
Frauenfelder, H., 196
Frecuencia, 54
Fretter, W. B., 9
Friedrich, W., 24, 173
Frisch, D. H., 295, 454
Frisken, W. R., 415
Fuerzas nucleares, alcance, 80
  energía, 258
  y teoría mesónica, 446
Función de onda, de Broglie, 307
  comportamiento global, 364
  comportamiento local, 363
  estado fundamental del hidrógeno, 388
  nodos, 371
  normalización, 343
  onda plana, 330, 346
  para potencial en escalón, 317
  partícula en un pozo de potencial, 356, 367
  principio de superposición, 229
  propiedades matemáticas, 319, 344, 363
  Schrödinger, 308
  y conjuntos estadísticos, 289
Función de onda de Schrödinger, 308
  interpretación probabilística, 306
  velocidad de grupo y fase, 309
Funciones propias del operador, 362 (*ver también* Función de onda)
  combinaciones lineales, 359
  estado fundamental del hidrógeno, 388
  para potenciales de fondo de pozo, 355, 367
Fusión nuclear, 101

Gamow, G., 242, 336
Gas ideal, 26
Gell-Mann, M., 454
  teoría Eighfold Way (Óctuple sendero), 432
Germer, L. H., 208
Glaser, D. Q., 295
Goldhaber, M., 454
Goldsmidth, H. H., 411, 412
Goorvitch, D., 105
Gordon, G., 211
Gordon, J. P., 152
Grados Kelvin, 25, 59
Gravitación, 82
Gray, G. W., 454
Grimsehl, E., 43

Grotrian, W., 124, 132, 133, 151
esquemas de términos, 124 (*ver también* Esquemas de términos)
Gurney, R. W., 336

Hadrones, 429
Hafnium, predicción de Bohr, 134
Halliday, D., 151, 295, 347
Harnwell, G. P., 43
Harrison, G. R., 104
Heathcote, N. H. de V., 44
Heisenberg, W., 241, 250
biografía, 241
mecánica matricial, 241
principio de indeterminación, 18
teoría de la matriz S, 445
Heitler W., 379
Helio, espectro, 108
esquema de términos, 131
Henry, G. E., 195
Hertz, G., 111
Hertzberg, G., 151
Hidrógeno, átomo, teoría de Bohr, 39, 65, 154
constante de Rydberg, 66, 389, 461
efecto del movimiento nuclear, 389
espectro, 105
esquema de términos, 387, 388
función de onda del estado fundamental, 388
teoría de Schrödinger, 386
Hidrógeno, molécula, estados vibracionales, 375
Hidrógeno líquido, cámara de burbujas, 436
blanco, 407
Hilbert, D , 242
Hines, W., 211, 219, 220
Hipercarga, 430
Hiperón, 10, 427
Hiperon lambda, 427
par lambda-antilambda, 443
producción y desintegración, 439
Hiperón sigma, 427
Hipótesis de Prout, 44
Hofstadter, R., 78
Hohenberg, C. M., 342
Holden, A. N., 386
Hooke, R., 5
Hoyle, F., 195, 347
Huus, T., 425
Huygens, C., 5

Ibser, H. W., 411, 412
Impulso cedido en la difracción, 215
Impulso y operador diferencial, 394
Integral de Fourier y relación de indeterminación, 253
Interacciones, 436
clasificación, 429
Interacciones, débil, 90, 140, 429
electromagnética (*ver* Campo electromagnético)
fuerte, 90
Interferencia de la luz, manantiales débiles, 188
visibilidad de franjas, 271
Interferómetro de Michelson, 270
Interpretación estadística, de las mediciones, 265
de la función de onda, 306
Interpretación probabilística de la mecánica cuántica, 306
Isótopos, 52, 79, 381, 401
abundancia relativa en el hidrógeno, 98
abundancia relativa en el oxígeno, 53
espectro de masas del xenón, 78
gráfica, 78
tabla, 52
Isotropía del espacio físico, 149

Jammer, M., 43
Johnson, F. T., 176
Jordan, P., 241
Jordan, W. H., 195

Kilogramo, 93
King, J. G., 91
Kittel, C., 242
Klemperer, O., 178
Knight, W., 211, 219, 220
Knipping, P., 24, 173
Kramers, H. A., 373
Kurlbaum, F., 31

Laborde, 97
Lane, M., 24, 173
Lattes, C. M. G., 446
Lauritsen, T., 137, 152, 154
Leighton, R. B., 242, 367
Lenard, P., 32
Leptones, 427, 428, 462
Levin, J. S., 413
Ley de Coulomb e intercambio de fotones, 451
Ley de Kepler (Tercera ley), 38
Ley de Kirchhoff, 28
Ley del desplazamiento de Wien, 27, 46
Ley exponencial de desintegración del núcleo, 44, 337
Leyes de transformación «relativistas» (*ver* Transformación de Lorentz)
Límite cuántico, 176
Límite de disociación, 137
Límite de ionización, 113
Livingood, J. J., 43
London, F., 379
Longitud de onda, 55
fragmento de una tabla de longitudes, 104
Longitud de onda de Compton, 170
Loschmidt, 7

Luz, emisión (*ver* Emisión de luz)
polarizada y no polarizada, 291
región visible, 69
Luz coherente, 295
Luz incoherente, 295
Lyons, H., 152

MacRae, A. U., 216
Magnetón de Bohr, 101
Marsden, E., 36
Marshak, R. E., 454
Masa, electrón, 22, 460
partículas elementales, 462, 463
Masa atómica, peso, 51
tablas, 51, 52, 464
Masa electromagnética del electrón, 14
Masa mecánica del electrón, 14
Masa reducida, en moléculas diatómicas, 382
en átomos hidrogenoides, 388
Matriz S, 445
Maxwell, J. C., 7
Mecánica cuántica, 2
Mecánica matricial, 240
Meitner, L., 331, 350
Mendeleev, D. I., 135
Mercurio, espectro, 111
esquema de términos, 111, 133
Merritt, F. R., 386
Merzbacher, E., 347, 397
Meson-eta, 427, 430, 463
Merones, descubrimiento, 446
tablas, 427, 463
y fuerzas nucleares, 445
Mesones-*K*, 8, 427
Mesones-pi (piones), 8, 332
desintegración, 182, 439
sección eficaz en protones, 415, 426
y fuerzas nucleares, 445, 450
Método de Debye-Scherrer, 211
Método del frenado de campo, 33
Método del polvo, 211, 218
Metro, 93
Mezclas estadísticas, 286
Microscopio electrónico, poder de resolución, 243
Michel, G., 31
Milibarn, 410
Millikan, R. A., 23, 33, 34
biografía, 183
medición de la carga electrónica, 23
medición de la constante de Planck, 33
Mitchell, D. P., 212
Mol, 7, 54
Molécula en forma de pesa gimnástica, 381, 404
Moléculas, propiedades características, 74
diatónicas, 381
Moléculas, distancias internucleares, 74
efecto isotópico, 382, 401
excitaciones electrónicas, 385
excitaciones rotacionales, 382, 384
excitaciones vibracionales, 380
Möllenstedt, G., 227
Momento cinético, 16, 40, 129
de moléculas diatónicas, 383
números cuánticos, 127
orbital, spin, total, 129
reglas de selección, 127, 149
y principios de simetría, 149
Momento cinético orbital, 129, 388
cuantificación en la teoría de Bohr, 40
Momento cinético total, 129
Momento dipolar magnético en los átomos, 101, 146, 148
Moog, F., 97
Moore, C. E., 126, 130
Morrison, E., 242
Morrison, P., 242
Moseley, H. G. J., 135
esquemas, 136
Mössbauer, R. L., 196
Motz, L., 44, 135, 195
Movimiento absoluto, 436
Movimiento al azar, 63, 269
Movimiento térmico, 60, 269
Muirhead, H., 446
Multiplete, en la espectroscopia atómica, 131
en la teoría de la partícula elemental, 428
Multiplicidad de los niveles de energía, 131
Muón, 390, 427, 446
desintegración, 182, 439

Nethercot, A. H., 401
v. Neumann, J., 242
Neutrino, en desintegración beta, 139
en desintegración mesónica, 427
Neutrino-mu, 427
Neutrón, desintegración beta, 140
Neutrón *(continuación)*
descubrimiento, 75
masa, 75, 461
sección eficaz de la plata, 412
sección eficaz del bismuto, 413
sección eficaz del cadmio, 411
Nivel virtual, estado virtual, 370
Niveles continuos de energía, 113
Niveles de energía, 104
anchuras, 118
de rotación de una molécula, 384
de sistemas hidrogenoides, 388
de un oscilador armónico, 374
de vibración de la molécula, 375
para potencial de fondo de pozo, 367

Niveles de energía, representación gráfica, 110 (*ver también* Esquemas de términos)
teoría de Schrödinger, 354
Niveles de energía de un cuerpo rígido que gira, 384
Niveles de energía del núcleo de boro, 137
Nodos de funciones de onda, 371
Núcleo, composición masa, 75
estable, 79
estable, gráfica, 79
hijo, 138
padre, 138
Nucleón, 75
Núcleos espejo, 100, 138
Número atómico, 52, 75, 134, 135, 464
Número bariónico, 430
Número cuántico principal, 387
Número de Avogadro (*ver* Avogadro, número)
Número de onda, 55
Números cuánticos, 125

Occhialini, G. P. S., 446
Octeto mesónico, 427, 428, 430
Oliphant, T. A., 413
Ondas de materia, 200
Ondas estacionarias y cuantificación, 355
Ondas guía, 228
Ondas piloto, 228
Ondas planas en teoría, 346
O'Neill, G. K., 295
Operador de energía, 395
Operador laplaciano, 230, 448
Operadores, energía, impulso, posición, 391
Operadores diferenciales, 230, 362, 394
energía, 395
momento, 394
valores propios, 362
Origen de los elementos
Orthmann, W., 350
Oscilador, Planck, 29, 46
en mecánica ondulatoria, 373
Oscilador armónico, 373
respuesta a la onda electromagnética, 120
Pake, G. E., 152
Par, creación y aniquilación, 8, 10, 176, 443, 453
Partícula, definición, 422
Partícula beta, rayos beta (*ver* Desintegración beta; Electrón)
Partícula omega-menos, 429, 432
Partículas alfa, alcance, 331
contaje, 45
descubrimiento de la transmutación del núcleo, 7
dispersión por el núcleo, 36
fotografía con cámara de niebla, 331
recorrido en el aire, 331
Partículas de carga fraccionaria, 432
Partículas de cascada, 427
Partículas elementales, 5, 422
clasificación de interacciones, 429
multipletes, 428-433
tablas, 427, 462, 463
Partículas inestables, 423
Patrón atómico de medida, 94
Pauli, W., 71
principio de exclusión, 71, 135
Peuman, S., 454
Planck, M., 29, 44
biografía, 17
postulado de cuantificación, 29
teoría del espectro del cuerpo negro, 29
Plano de fase del oscilador, 47
Plomo, radiactividad, 340
Podesek, F. Q., 342
Polarización de la luz, 291
de partículas materiales, 235
de rayos X, 173
Positones, aniquilación, 176
descubrimiento, 176
en chaparrones, 10
en desintegración beta, 140
propiedades, 427
Potencial, en la teoría de Schrödinger, 310
en escalón en la teoría de Schrödinger, 317
fondo de pozo, 356, 367, 376
molecular, 377
Yukawa, 450
Potenciales, críticos, 111
de excitación, 112
de ionización de los átomos, 70
Powell, C. F., 446
Powers, P. N., 212
Predicción en mecánica cuántica, 286
Presión de radiación, 162
Principio de combinación de Ritz, 105
Principio de correspondencia, 397
Principio de exclusión, 71
y tabla periódica, 137
Principio de indeterminación, 18, 248
intento de refutación, 296, 297
transformación de Fourier, 253
y difracción, 257
y energía de enlace del hidrógeno, 257
y estructura atómica, 258
y estructura nuclear, 259
y masa en reposo de partículas inestables, 424
Principio de superposición de la mecánica cuántica, 229
Pringsheim, E., 17, 31
Probabilidad de un contador, 265
Proceso de colisión (*ver también* Dispersión)
y penetración en la barrera, 338
leyes de conservación, 221

Promedio de variables físicas, 264
Protón, 75
  sección eficaz del aluminio, 425
Protón-antiprotón, aniquilamiento, 179
Punto de retroceso, 316, 371

Quarks, 432

Radiación, de Cerenkov, 197
  de frenado, 10, 174
Radiación del cuerpo negro, 26
  ley de radiación de Planck, 29
Radiación dipolar, 127, 144
Radiación electromagnética, en aniquilación, 176
  cuerpo negro, 26
  de los tubos de rayos X, 175
  densidad de energía, flujo, 162, 190
  descripción teórico-cuántica, 189
  dispersión de Compton, 169
  emisión y absorción por átomos, 106
  emisión y dispersión por el oscilador, 119
  hipótesis del fotón de Einstein, 32, 112
  polarización, 291
  presión de la radiación, 162
  propiedades de la partícula, 161
Radiación solar, 98
Radiactividad, 44, 138, 330, 339
  emisores alfa, 336
  en geología, 340
  ley exponencial de la desintegración, 44, 337
  series 4n + 2, 339
  series uranio-radio-plomo, 340
Radiactividad alfa, 330
  desintegración del bismuto, 138
  desintegración del radio, 45, 97, 98
  emisores típicos, 336
  evolución del calor, 97
  penetración de la barrera, 332
  tiempo de vida en función de la energía, 335
Radio, 97, 334, 340
  evolución del calor, 97
Radio, de los átomos, 40, 65, 70
  de los núcleos, 78
Radio atómico, 36, 39, 66, 70, 257
Radio clásico del electrón, 14, 39, 461
Radio de Bohr, 39, 66, 461
Radio nuclear, 78
  y dispersión de partículas alfa, 36
  y núcleo espejo, 100
Rainwater, L. J., 295, 390
Rayos espectrales, 104
Rayos cósmicos, descubrimiento de piones y muones, 446
  fotografía de los chaparrones, 9
Rayos gamma, modulados acústicamente, 168
  a partir del estado excitado del níquel, 140
Rayos X, características de radiación, 174
  difracción (*ver también* Difracción)
  difracción de muestras de polvo, 211
  difracción en cristales, 23
  dispersión, efecto de Compton, 170
  espectro continuo, 174
  longitudes de onda mínimas, 175, 176
  mediciones de Moseley, 135
  polarización, 173
  radiación característica, 174
  tubo, 173
Razón de ramificación, 133
Reacción en cadena, 100
Reacciones nucleares, barrera de Coulomb, 339
  descubrimiento, 7
Reacciones químicas, 6
  energías de reacción macroscópicas, 74
Reactor nuclear, 101
Recombinación radiactiva, 113
Red cristalina, 23, 213 (*ver también* Cristales)
  cloruro de cerio, 94
  cloruro de sodio, 22
  diamante, grafito, 23
Reflexión de fotones, 164
Reflexión total, 327
Refracción de la luz, 201
Regla de Stokes, 112
Reglas de selección, para espectros alcalinos, 126
  para el momento cinético, 127
  para transiciones dipolares, 150
Relación de indeterminación, 18, 248
  posición-impulso, 251
  tiempo-frecuencia, 260
  vida media-anchura de rayas, 261
Relatividad, teoría general, 83
  teoría especial, 15, 159, 172, 203, 437
Resonancia, curva universal de respuesta, 121
Resonancias, y niveles de energía atómica, 116
  en colisiones del protón con aluminio, 425
  en dispersión de pion-protón, 426
  en partículas físicas elementales, 424
  fórmula de Breit-Wigner, 121, 422
Reynolds, J. H., 77, 78, 342, 347
Rice, F. O., 398
Rochester, G. D., 295
Röntgen, W. C., 173
Rosenbaum, E. P., 454
Rosenblum, B., 401
Rosenfeld, A. H., 454, 463
Rubens, H., 31
Ruby, S. L., 168
Rutherford, E., 7, 36, 341
  biografía, 36
  descubrimiento de las reacciones nucleares, 7
  teoría de la dispersión de la partícula alfa, 36

Saltos cuánticos, 108, 115
Samios, N. P., 454
Sands, M., 242
Schawlow, A. L., 152, 386
Schiff, L. I., 253, 347, 397
Schilpp, P. A., 44
Schmidt, P., 180
Schrödinger, E., 241, 242, 303, 347, 354, 387
  biografía, 302
Sección eficaz, 408
  Breit-Wigner, 121, 421
  desplazamiento de fase, 420
  diferencial, 411
  electrones de calcio, gráfica, 414
  interpretación geométrica, 408, 411
  neutrones de bismuto, 413
  neutrones de cadmio, 411
  neutrones de plata, 412
  pion-protón, 415, 426
  protones de aluminio, 425
  reacción elástica, inelástica, 410
  total, 408
Segrè, E., 151, 179, 347
Segundo, 94
Serie de Brackett, 387
Serie uranio-radio-plomo, 340
Series de Lyman, 387
Series de Paschen, 387
Series del espectro de hidrógeno, 387
Shamos, M. H., 44
Shull, C. G., 212
Simetría de rotación, 149
Simetría partícula-antipartícula, 179
Simón, A. W., 172
Sistemas hidrogenoides, 385
Sommerfeld, A., 67
Spin, electrón, 129
  isotópico, 430
  partículas elementales, 427, 462, 463
Stern, O., 212
Subcapas en átomos multi-electrónicos, 135
Sugar, J., 123
Superposición coherente, 280
  luz, 285, 295
Superposición incoherente, 277, 278
Superposición de funciones de onda, 229, 359

Tabla periódica de los elementos, 134
Tangen, R., 425
Taylor, G. I., 188
Teller, E., 398
Temperatura absoluta, 25, 59
Teoría, de la medida, 262
  de las interacciones entre partículas en el campo, 440
  del óctuple sendero, 431
Teoría general de la relatividad, 83
Teoría cinética de los gases, 26
Teoría cuántica, de campos, 433
  de las transiciones, 108
Teoría de Schrödinger de la mecánica cuántica, 360
  estados estacionarios, 354, 360
  variables de posición e impulso, 391
Términos espectrales, 105 (*ver también* Esquemas de términos)
  en el hierro, 126
  en el sodio, 130
Thomson, G. P., 208
Thomson, J. J., 22, 52
  biografía, 21
Thorndike, A. M., 295, 454
Tiempo de resolución de los detectores de partículas, 299
Tierra, edad, 341
  composición de la corteza, 342
Tierras raras, 134
Tomaschek, R., 43
Townes, C. H., 386, 401
Trabajo de extracción, 32
Transformación de Lorentz, frecuencia, 159
  energía y momento, 160, 205
  posición y tiempo, 205
Transiciones, cuádruples eléctricas, 147
  dipolares eléctricas, 127, 144
  dipolares magnéticas, 148
  permitidas, 126, 151
  prohibidas, 150
  postulados cuánticos, 106
Tren de ondas de luz, esquema clásico, 182
Tripletes de niveles de energía de helio, 131
Tubo fotomultiplicador, 264, 266
  eficiencia cuántica, 267

Ulrey, C. T., 174
Unidades de masa atómica, 53, 460
  energía equivalente, 58, 460
Unidades de medida, macroscópica, 50, 93
  naturales en física cuántica, 56
Uranio en la tierra, 340
  fisión, 101
Urey, H., 98

Vacío, teoría, 434
Valores, esperados, 392, 395
  propios del operador, 362 (*ver también,* Niveles de energía)
Variable aleatoria, 274
Variable dinámica, 16
  asociada al operador diferencial, 394
Variables conjugadas, 47
Velocidad, de fase de ondas de materia, 182
  de grupo de ondas de materia, 202
  de la luz, 15, 95, 460

Vida media, 120
Vida media de los estados excitados, 123, 145
  y anchura de los niveles de energía, 122
Volt, su medida, 74

Watts, H. M., 176
Wentzel, G., 373
White, H., 151
Whittaker, E., 43
Wiegand, C., 179
Wigner, E. P., 150
Wilson, C. T. R., 172
Wilson, J. G., 295
Wollan, E. O., 212
Wu, C. S., 295

Yagoda, H., 295
Yound, D. E., 295
Ypsilantis, T., 179
Yukawa, H., 447
  biografía, 445
  potencial, 450
  teoría mesónica de fuerzas nucleares, 446

Zafiratos, C. D., 413

*B. Unidades y factores de conversión**

Longitud:	1 micrón (μ) = 10^{-6} metros
	1 milimicrón ($m\mu$) = 10^{-9} m = 10^{-7} cm
	1 Ångström (Å) = 10^{-8} cm
	1 fermi (f) = 10^{-13} cm
Área:	1 barnio (b) = 10^{-24} cm^2
	1 milibarnio (mb) = 10^{-27} cm^2
Tiempo:	1 año (a) $\cong$ 3,156 × 10^7 s
Fuerza:	1 newton (N) = 10^5 dyn
Energía:	1 joule (J) = 10^7 erg $\cong$ (0,2389 = 1/4,186) calorías
	1 electrón-voltio (eV) = (1,60210 ± 0,00002) × 10^{-19} J
Masa:	1 unidad de masa atómica (u) = (1,66043 ± 0,00002) × 10^{-24} g
Carga:	1 coulomb (c) = (2,997925 ± 0,000001) × 10^9 Fr = 0,1 uem
Potencial:	1 erg/Fr = (299,7925 ± 0,0001) voltio (V)
Inducción magnética:	1 voltio-s/m^2 = 10^4 gauss
Equivalente en energía de la unidad de masa atómica:	(1 u) × c^2 = (9,31478 ± 0,00005) × 10^8 eV
Actividad de una muestra radiactiva:	1 curio (Ci) = 3,7 × 10^{10} desintegraciones por segundo
Frecuencia asociada a 1 eV:	(2,41804 ± 0,00002) × 10^{14} s^{-1}
Longitud de onda asociada a 1 eV:	(1,239810 ± 0,000013) × 10^{-4} cm
Número de onda asociado a 1 eV:	(8,06573 ± 0,00008) × 10^3 cm^{-1}

* Para otras tablas de constantes físicas, véase el Apéndice.

C. Factores de conversión entre unidades, utilizados para expresar cantidades de energía

	Energía		Energía macroscópica		Temp.	Masa	Frec.	Número de onda	Longitud de onda
	E		N_0E		E/k	E/c^2	E/h	$E/(hc)$	$(hc)/E$
	eV	erg	$\frac{\text{erg}}{\text{mol}}$	$\frac{\text{cal}}{\text{mol}}$	°K	u	Hz	cm^{-1}	Å
1 eV	1	$1{,}6021 \times 10^{-12}$	$9{,}6487 \times 10^{11}$	23050	11605	$1{,}0736 \times 10^{-9}$	$2{,}4181 \times 10^{14}$	8065,8	12398
1 erg	$6{,}2418 \times 10^{11}$	1	$6{,}0226 \times 10^{23}$	$1{,}439 \times 10^{16}$	$7{,}244 \times 10^{15}$	$6{,}7010 \times 10^{2}$	$1{,}5093 \times 10^{26}$	$5{,}0345 \times 10^{15}$	$1{,}9863 \times 10^{-8}$
1 $\frac{\text{erg}}{\text{mol}}$	$1{,}0364 \times 10^{-12}$	$1{,}6604 \times 10^{-24}$	1	$2{,}389 \times 10^{-8}$	$1{,}203 \times 10^{-8}$	$1{,}1126 \times 10^{-21}$	250,61	$8{,}3594 \times 10^{-9}$	$1{,}1963 \times 10^{16}$
1 $\frac{\text{cal}}{\text{mol}}$	$4{,}338 \times 10^{-5}$	$6{,}951 \times 10^{-17}$	$4{,}186 \times 10^{7}$	1	0,503	$4{,}658 \times 10^{-14}$	$1{,}049 \times 10^{10}$	0,3499	$2{,}858 \times 10^{8}$
1 °K	$8{,}617 \times 10^{-5}$	$1{,}381 \times 10^{-16}$	$8{,}314 \times 10^{7}$	1,986	1	$9{,}251 \times 10^{-14}$	$2{,}084 \times 10^{10}$	0,6950	$1{,}439 \times 10^{8}$
1 u	$931{,}48 \times 10^{6}$	$1{,}4923 \times 10^{-3}$	$8{,}9876 \times 10^{20}$	$2{,}147 \times 10^{13}$	$1{,}081 \times 10^{13}$	1	$2{,}2524 \times 10^{23}$	$7{,}5131 \times 10^{12}$	$1{,}3310 \times 10^{-5}$
1 Hz	$4{,}1355 \times 10^{-15}$	$6{,}6255 \times 10^{-27}$	$3{,}9903 \times 10^{-8}$	$9{,}532 \times 10^{-11}$	$4{,}799 \times 10^{-11}$	$4{,}4398 \times 10^{-24}$	1	$3{,}3356 \times 10^{-11}$	$2{,}9979 \times 10^{18}$
1 cm^{-1}	$1{,}2398 \times 10^{-4}$	$1{,}9863 \times 10^{-16}$	$1{,}1963 \times 10^{8}$	2,858	1,439	$1{,}3310 \times 10^{-13}$	$2{,}9979 \times 10^{10}$	1	10^{8}
1 Å	$1{,}2398 \times 10^{4}$	$1{,}9863 \times 10^{-8}$	$1{,}1963 \times 10^{16}$	$2{,}858 \times 10^{8}$	$1{,}439 \times 10^{8}$	$1{,}3310 \times 10^{-5}$	$2{,}9979 \times 10^{18}$	10^{8}	1
Masa del electrón mc^2	511006	$8{,}1868 \times 10^{-7}$	$4{,}9306 \times 10^{17}$	$1{,}178 \times 10^{10}$	$5{,}930 \times 10^{9}$	$5{,}4859 \times 10^{-4}$	$1{,}2356 \times 10^{20}$	$4{,}1217 \times 10^{9}$	$2{,}4262 \times 10^{-2}$
Rydberg R_∞	13,605	$2{,}1797 \times 10^{-11}$	$1{,}3127 \times 10^{13}$	$3{,}136 \times 10^{5}$	$1{,}579 \times 10^{5}$	$1{,}4606 \times 10^{-8}$	$3{,}2898 \times 10^{15}$	109737	911,27