Edición impresa:
Reverté

Edición digital:
Educación para todos

TALLERES ESTUDIANTILES
CIENCIAS UNAM

SEGUNDA EDICIÓN

mecánica

berkeley physics course - volumen 1

mecánica

mecánica

berkeley physics course—volumen 1

segunda edición

Charles Kittel
Professor of Physics
University of California
Berkeley

Walter D. Knight
Professor of Physics
University of California
Berkeley

Malvin A. Ruderman
Professor of Physics
New York University

Revisada por

A. Carl Helmholz
Professor of Physics
University of California
Berkeley

Burton J. Moyer
Dean of the College of Liberal Arts
University of Oregon
Eugene



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México

Título de la obra original

Mechanics

Edición original en lengua inglesa publicada por

McGraw-Hill Book Company

Copyright © Mc Graw-Hill, Inc.

Versión española por el

Prof. Dr. J. Aguilar Peris

Catedrático de Termología
de la Universidad Complutense de Madrid

Con la colaboración del

Prof. Dr. J. de la Rubia Pacheco

Catedrático de Mecánica Estadística
de la Universidad de Valencia.

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1989

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN 84-291-4282-7

Depósito Legal: B-36366 - 1989

Impreso por GERSA, Industria Gráfica
Tambor del Bruc, 6 - 08970 Sant Joan Despí (Barcelona)

Índice analítico

	Prólogo	VII
	Prólogo a la segunda edición del volumen 1	IX
	Prólogo original del Berkeley Physics Course	XI
	Notas didácticas	XIII
	Nota para el alumno	XVII
	Notación	XIX
	Alfabeto griego	XXI
1	Introducción	2
2	Vectores	29
3	Leyes del movimiento de Newton	61
4	Sistemas de referencia: transformaciones de Galileo	107
5	Conservación de la energía	141
6	Conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético	181
7	Oscilador armónico: propiedades y ejemplos	209
8	Dinámica elemental de los cuerpos rígidos	247
9	Fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia	277
10	Velocidad de la luz	307
11	Relatividad especial: transformaciones de Lorentz	335
12	Dinámica relativista: cantidad de movimiento y energía	359
13	Problemas de dinámica relativista	385
14	Principio de equivalencia	407
	Apéndice	419
	Lista de películas	421
	Índice alfabético	425

Prólogo

Uno de los problemas urgentes con el que se enfrentan hoy las universidades es el de la enseñanza superior. Como la investigación se ha vuelto cada vez más absorbente en el ambiente universitario, se ha empezado a sentir con demasiada frecuencia «una sutil discontinuidad en el proceso de la enseñanza» (para citar al filósofo Sidney Hook). Además, en muchos campos su contenido variable y la estructura especial de su conocimiento, que crece con la investigación, han hecho necesaria una revisión de las disciplinas. Esto es particularmente cierto, naturalmente, en las ciencias físicas.

Es un placer, por tanto, contribuir a presentar al Berkeley Physics Course and Laboràtory, *importante programa que pretende exponer la física a nivel superior y proyectado de modo que refleje la tremenda revolución que ha sufrido esta ciencia en los últimos cien años. El curso ha agrupado los esfuerzos de muchos físicos que trabajan en la vanguardia de la investigación y ha tenido la suerte de ser apoyado por la National Science Fondation a través de una subvención destinada a Educational Services Incorporated. Se ha ensayado con éxito en las clases inferiores de la división de física de la Universidad de California, Berkeley, durante un período de varios semestres. El curso representa un marcado avance en materia de educación y esperamos que se utilice ampliamente.*

La Universidad de California se siente feliz de hospedar al grupo interuniversitario responsable del desarrollo de este nuevo curso y laboratorio y se complace en que un cierto número de alumnos de Berkeley actuasen voluntariamente para ayudar a ensayar el curso. Se aprecian grandemente el apoyo económico de la National Science Foundation y la cooperación de Educational Services Incorporated. El reconocimiento máximo estriba, quizás, en el vivo interés por la enseñanza superior patentizada por un notable número de los miembros de la Universidad de California que participaron en el programa de mejora de la asignatura. La tradición de la enseñanza escolar es antigua y honorable; el trabajo dedicado a este nuevo curso y laboratorio de física demuestra que la tradición todavía se estima en la Universidad de California.

Clark Kerr

Prólogo a la segunda edición del volumen 1

El Volumen I del Curso de Física de Berkeley ha permanecido en su forma original durante siete años. Hace ya varios años que se consideró apropiado realizar una revisión. Cada uno de nosotros había explicado el curso en Berkeley varias veces y sobre la base de nuestra experiencia y conversaciones con los colegas, tanto de Berkeley como de otras instituciones, habíamos desarrollado y considerado ciertos cambios para que el texto resultara más «pedagógico» en un curso de introducción de estudiantes de ingeniería y de ciencias físicas. En estas circunstancias procedimos a tal revisión.

Hemos procurado mantener el aire vigorizador que fue característico de todo el Curso de Física de Berkeley, el uso de ejemplos tomados de los laboratorios de investigación y la presentación de temas de interés que con frecuencia se juzgaban demasiado avanzados para un curso introductorio. Hemos retirado algunos Temas Avanzados del Vol. 1, así como el Cap. 15, Partículas de la Física Moderna, convencidos de que no se usan con frecuencia en este nivel. El cambio más sustancial ha sido el Cap. 8, sobre el «Movimiento del cuerpo rígido», que ha sido escrito totalmente de nuevo. Aunque ciertamente este capítulo es ahora más universal, resulta más apropiado al nivel de los alumnos. El orden de presentación de los temas permanece el mismo excepto los Caps. 3 y 4, que se han intercambiado con la esperanza de que cierta familiaridad con las aplicaciones ordinarias de las leyes del movimiento de Newton proporcionarán al alumno una mejor base para comprender el concepto algo más avanzado de las transformaciones de Galileo. Por último, como los alumnos han encontrado dificultades sustanciales con las matemáticas, particularmente las ecuaciones diferenciales, hemos añadido cierto número de Notas Matemáticas.

Las Notas Pedagógicas que se presentan a continuación ofrecen algunos detalles de la filosofía de utilizar este libro como texto. Hay todavía mucho más material del que puede usarse cómodamente en un curso cuatrimestral o semestral. Por ello, el instructor debe realizar una selección juiciosa del material que desea explicar. En los últimos años el cambio al sistema de cuatrimestres en Berkeley ha sido poco afortunado, pues hizo necesaria la separación del trabajo de laboratorio del primer período, que cubría la mecánica. Un curso de introducción debería estar siempre asociado al laboratorio y, por ello, la revisión del Berkeley Physics Laboratory de Alan Portis y Hugh Young proporciona trabajos de laboratorio válidos para cualquier introducción a la mecánica.

Agradecemos la ayuda y crítica constructiva de muchos colegas. La colaboración de Miss Miriam Machlis en la preparación de esta revisión ha sido particularmente extensa.

A. Carl Helmholz
Burton J. Moyer

Prólogo original del Berkeley Physics Course

Este es un curso de física básica de dos años de duración para estudiantes de la licenciatura de ciencias e ingeniería. La intención de los autores ha sido presentar la física básica en lo posible en la línea que siguen los físicos que trabajan en primera fila de su campo respectivo. Hemos intentado desarrollar un curso que subraye vigorosamente los fundamentos de la física. Nuestro objetivo específico fue presentar coherentemente en un programa elemental las ideas de la relatividad especial, la física cuántica y la física estadística.

Este curso puede seguirse por cualquier alumno que haya dado un curso de física de grado medio. Debe estudiarse simultáneamente con otro curso de matemáticas que incluya el cálculo diferencial e integral.

En el momento presente se están desarrollando diversos nuevos cursos de física a este nivel en las universidades de los Estados Unidos. La idea de preparar un nuevo curso surgió en un grupo numeroso de físicos, que se veían influidos por las necesidades derivadas del avance de la ciencia y la ingeniería y por la importancia creciente de la ciencias en los colegios de grado elemental y medio. Nuestro propio curso se concibió años atrás, en 1961, en una conversación entablada entre Philip Morrison, de la Cornell University, y C. Kittel. Nos vimos animados por John Mays y sus colegas de la National Science Foundation y por Walter C. Michels, entonces Presidente de la Comisión del College Physics. Se formó un comité provisional para guiar el curso a través de sus primeras fases. Este se componía originalmente de Luis Alvarez, William B. Fretter, Charles Kittel, Walter D. Knight, Philip Morrison, Edward M. Purcell, Malvin A. Ruderman y Jerrold R. Zacharias. El comité se reunió primeramente en mayo de 1962, en Berkeley; en esa época bosquejó un esquema provisional de un curso de física enteramente nuevo. Debido a las ineludibles obligaciones de algunos de sus miembros originales, el comité se reconstruyó parcialmente en enero de 1964 y ahora está compuesto por los abajo firmantes. Las contribuciones de otros científicos se agradecen debidamente en los prefacios de cada volumen.

El esquema provisional y su espíritu asociado ejercieron una poderosa influencia sobre el material del curso finalmente conseguido. El esquema cubría con detalle los temas y modo de enfocarlos que creíamos debían y podían enseñarse a los alumnos principiantes de ciencias e ingeniería. Nunca fue nuestra intención desarrollar un curso limitado a estudiantes aventajados. Hemos pretendido presentar los principios de la física desde unos puntos de vista unificados y recientes, y ciertas partes del curso pueden, por tanto, parecer tan nuevas a los profesores ayudantes como a los alumnos.

Los cinco volúmenes en que se planteó dividir el curso abarcan:

I. Mecánica (Kittel, Knight, Ruderman)
II. Electricidad y magnetismo (Purcell)
III. Ondas y oscilaciones (Crawford)
IV. Física cuántica (Wichmann)
V. Física estadística (Reif)

Los autores de cada volumen han escogido libremente el estilo y método de presentación más apropiado a su tema.

La actividad inicial del curso condujo a Alan M. Portis a idear un nuevo laboratorio de física, conocido ahora como el Berkeley Physics Laboratory. Como el curso insiste en los principios de la física, muchos profesores pueden creer que no trata suficientemente de física experimental. El laboratorio está bien dotado de experimentos importantes y está proyectado para equilibrar el curso.

El apoyo económico para el desarrollo del curso fue proporcionado por la National Science Foundation, con un apoyo indirecto considerable de la Universidad de California. Los fondos fueron administrados por Educational Services Incorporated, una organización desinteresada establecida para administrar los programas de mejora de las disciplinas. Nos sentimos particularmente en deuda con Gilbert Oakley, James Aldrich y William Jones, todos de ESI, por su amable y entusiasta apoyo. ESI estableció en Berkeley una oficina bajo la muy competente dirección de Mrs. Mary R. Maloney para ayudar en el desarrollo del curso y del laboratorio. La Universidad de California no tenía conexión oficial con nuestro programa pero nos ha ayudado de diversas e importantes maneras. Agradecemos esta ayuda en particular a dos Presidentes sucesivos del Departamento de Física, August C. Helmholtz y Burton J. Moyer, al claustro de profesores y directivos del Departamento, a Donald Coney y muchos otros de la Universidad. Abraham Olshen nos prestó gran ayuda frente a los problemas iniciales de organización.

Cualquier sugerencia o corrección será agradecida.

Eugene D. Commins
Frank S. Crawford, Jr.
Walter D. Knight
Philip Morrison
Alan M. Portis
Edward M. Purcell
Frederick Reif
Malvin A. Ruderman
Eyvind H. Wichmann
Charles Kittel, Presidente

Berkeley, California

Notas didácticas

Este volumen está escrito deliberadamente para ser utilizado como texto. Su nivel corresponde al de aquellos alumnos que han estudiado conocimientos básicos de cálculo y que en el curso presente amplían estos conocimientos. En la Universidad de California, en Berkeley, los alumnos de ciencias físicas e ingeniería comienzan el cálculo en el primer cuatrimestre de su curso primero y lo amplían en el segundo cuatrimestre. Han estudiado el cálculo diferencial cuando comienzan el curso de física y estudian el cálculo integral por lo menos hacia la mitad del cuatrimestre. Este curriculum tan estricto requiere una cooperación grande con los profesores del curso de matemáticas. Naturalmente, los alumnos no conocen las ecuaciones diferenciales y, por ello, al final de los Caps. 3 y 7, en las Notas Matemáticas, se incluyen sugerencias relacionadas con la solución de tipos sencillos de estas ecuaciones. Realmente son pocos los tipos de ecuaciones a resolver en este curso de mecánica y esperamos que el alumno pueda aprender cada uno de ellos.

El profesor observará que las listas de películas han sido recopiladas todas al final del libro y no al final de cada capítulo. La llamada *Resource Letter* es una lista de películas muy completa. Se han señalado aquellas que parecen especialmente apropiadas para el tema de *mecánica.* En los últimos años se han preparado un gran número de películas tipo «loop».* Algunas son muy útiles como ilustraciones cortas de temas especiales; cada profesor descubrirá para su propio uso aquellas que se ajustan a su enseñanza.

Aunque los problemas que se han agregado en esta revisión son fundamentalmente más fáciles que los que se han reemplazado, no hemos incluido problemas muy simples ni problemas de aplicación directa de fórmulas. Algunos de ellos darán al alumno confianza en sí mismo. Sin embargo, creemos que cada profesor debe preparar sus problemas o, al menos, buscarlos en otros libros. No existen dos profesores que den un curso de mecánica de igual modo y el uso de problemas especiales les dará una buena oportunidad para diversificar. Existen ahora diversos libros de problemas útiles para este fin. Algunos títulos, así como otros libros de mecánica de este nivel, se relacionan en el Apéndice.

Existen, como es lógico, diversos métodos para utilizar este libro como texto. Uno de los métodos que rara vez se ha utilizado en la primera edición, pero que consideramos sería de gran utilidad siguiendo el texto completo, es como un curso de mecánica a continuación de un curso de un año sin cálculo, tal como se encuentra en instituciones reducidas, donde no se dispone de la posibilidad de un curso de cálculo y otro de introducción sin cálculo. En este curso, que podría darse a alumnos universitarios de

(*) Loop: filme corto continuo.

segundo o tercer año, sería posible dar todo el libro, ya que muchos de los temas vienen incluidos en forma menos avanzada en el primer curso.

Para la sección introductoria de un curso de física general este libro contiene demasiada materia y se aconseja que el profesor no pretenda explicar todo su contenido. Muchos cursos de introducción no incluyen la relatividad especial, de modo que los primeros nueve capítulos forman una introducción coherente a la mecánica clásica. Pero incluso este material excesivo, si se intenta abarcar totalmente, no puede explicarse en un curso trimestral de nueve o diez semanas o en la fracción de un semestre que se dedica normalmente a la mecánica. Por ello se exponen a continuación algunas sugerencias para cubrir un mínimo de capítulos. A veces no conviene incluir problemas eléctricos o magnéticos en el curso de iniciación. Creemos que el texto puede usarse de este modo, pero también es cierto que muchos alumnos encuentran muy interesantes los problemas eléctricos. Existen muchos profesores que encuentran muy difícil recortar las materias a tratar en el curso. Nuestra experiencia personal es que es preferible tratar bien ciertas materias que abarcar muchas deficientemente. Las secciones avanzadas y los Temas Avanzados darían a los alumnos inteligentes la oportunidad de demostrar su capacidad y, a aquellos que van a seguir estudios de física, les serviría de trabajo de referencia que puede utilizarse en conexión con estudios posteriores.

Con estos comentarios procedemos a los detalles de los diversos capítulos.

Capítulo 1. Como en la primera edición, este capítulo no es una parte esencial del estudio de la mecánica, pero su lectura puede ser interesante para aquellos alumnos con miras más amplias. Para los instructores que designen este capítulo a lectura, puede resultar apropiado esclarecer el concepto de *orden de magnitud.*

Capítulo 2. Los vectores introducen un lenguaje muy útil en física. Como se destaca en el texto, puede omitirse el producto vectorial junto con los ejemplos de fuerzas magnéticas, en donde $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$ no son perpendiculares. Se puede llegar hasta el Cap. 6 sin conocer el producto vectorial y estudiarlo en dicho momento. El producto escalar se utiliza a menudo para determinar magnitudes y en el Cap. 5, para el trabajo y la energía; por ello, es muy conveniente introducirlo aquí. Además, proporciona el sistema de resolver un gran número de problemas interesantes. También es útil la sección de derivadas vectoriales, pero pueden omitirse aquellas partes que tratan de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\theta}$ e introducirse mucho después.

Capítulo 3. Este es un largo capítulo con muchas aplicaciones. Las leyes de Newton se introducen en forma convencional y procedemos a efectuar aplicaciones de la segunda ley. En un curso más corto o en un curso que no incluya aplicaciones eléctricas y magnéticas esta sección puede omitirse enteramente, o bien el campo magnético tratarse sólo en el caso de velocidad y campo magnético perpendiculares. La conservación de la cantidad de movimiento se introduce entonces a través de la tercera ley de Newton. La energía cinética se refiere a problemas de colisión, aunque no se introduce hasta el Cap. 5. La mayor parte de los alumnos conocen este concepto

de cursos anteriores y no encontrarán dificultades en su estudio; pero puede omitirse si se desea.

Capítulo 4. Como se indicará en el texto, este capítulo no es de tipo convencional. Muchos físicos encuentran atractiva la introducción de las transformaciones de Galileo y para aquellos que desean avanzar en la relatividad especial supone una excelente introducción a la transformación de coordenadas. Sin embargo, puede omitirse entre los alumnos no físicos y para aquellos con tiempo limitado. Probablemente pueden incluirse algunas notas a sistemas de referencia acelerados y fuerzas ficticias, pero estos conocimientos pueden adquirirse en las primeras páginas.

Capítulo 5. Se introducen el trabajo y la energía cinética, primero en una dimensión y después en tres dimensiones. Aquí resulta realmente necesario el producto escalar, pero el uso de la integral lineal puede eludirse. La energía potencial se trata con detalle. En un curso más reducido puede omitirse la discusión de campos conservatorios, así como la discusión de potenciales eléctricos. Sin embargo, es éste un capítulo importante que no debería tratarse precipitadamente.

Capítulo 6. Este capítulo trata nuevamente de los choques e introduce el sistema de referencia de centro de masas. El centro de masas es un concepto importante en el estudio de los cuerpos rígidos y aunque el sistema C. de M. se utiliza ampliamente, en una versión corta de un curso de mecánica podría omitirse. La introducción del momento cinético y del par de fuerzas requiere el uso del producto vectorial. A estas alturas del curso, los alumnos tendrán un nivel suficiente para manejar el producto vectorial y, si fue omitido antes, ahora es el momento de estudiarlo. La conservación del momento cinético es un tema atractivo para muchos alumnos.

Capítulo 7. Aquí, si los alumnos tienen dificultades con las ecuaciones diferenciales deben estudiarse primeramente las Notas Matemáticas. La masa del muelle y del péndulo proporcionan ejemplos directos de este importante tema del movimiento oscilatorio. En una versión más corta las secciones que tratan de los valores medios de energía cinética y potencial, movimiento amortiguado y oscilaciones forzadas, pueden omitirse por completo. El laboratorio puede proporcionar excelentes ejemplos de este tipo de movimiento. Los Temas Avanzados sobre el oscilador anarmónico y el oscilador forzado pueden interesar a los mejores alumnos.

Capítulo 8. Los autores presentes consideran que es muy conveniente a todos los alumnos un tratado introductorio de los cuerpos rígidos. Las ideas del par y de la aceleración angular alrededor de un eje fijo no son difíciles y proporcionan al alumno conexiones con el mundo visible y real. El tratamiento simple del giróscopo es también valioso; sin embargo, la introducción de los ejes principales, productos de inercia y rotación de sistemas de coordenadas puede omitirse en la mayor parte de los cursos.

Capítulo 9. Los problemas sobre fuerzas centrales son muy importantes. Si se desea puede omitirse el cálculo del potencial dentro y fuera de las masas esféricas, en especial si se dispone de poco tiempo. Lo mismo puede

decirse del trabajo de integrar la ecuación r del movimiento, en cuyo caso puede omitirse. Probablemente interesará a los profesores el Tema Avanzado. Si es necesario, este capítulo se puede recortar mucho, pero el esfuerzo de seguirlo resulta recompensado. El problema de los dos cuerpos y el concepto de masa reducida son también útiles, pero también pueden omitirse en un curso limitado.

Capítulo 10. En este capítulo se revisa cierto número de métodos de determinación de la velocidad de la luz. Este material no es esencial en un curso de mecánica. No obstante, como los alumnos pueden estar interesados por su contenido cabe asignarse para su lectura en casa. A continuación se expone el experimento de Michelson-Morley que, en un curso como éste, es la evidencia más convincente de la necesidad de un cambio en las transformaciones de Galileo. El efecto Doppler se introduce por la evidencia que proporciona de este efecto de retroceso de las estrellas distantes que se desplazan a grandes velocidades; el capítulo termina con una sección sobre la velocidad de la luz máxima de los objetos materiales y el fracaso de la fórmula newtoniana de la energía cinética. Si el tiempo resulta limitado para el estudio de la relatividad especial, una lectura superficial del capítulo puede ser suficiente.

Capítulo 11. En este capítulo se deducen las ecuaciones de transformación de Lorentz y se aplican a las características más comunes de la relatividad especial, contracción de longitudes y dilatación del tiempo. Se introducen las transformaciones de velocidad y se muestran algunos ejemplos. Este capítulo es la base de los siguientes y, en consecuencia, debe darse amplio tiempo para su estudio.

Capítulo 12. Los resultados del Capítulo 11 se utilizan para demostrar la necesidad de un cambio en la definición de la cantidad de movimiento y de la energía relativista y, finalmente, para comprender el origen de $E = mc^2$. Es necesario destacar los experimentos con partículas de alta energía y las implicaciones de esta expresión con la física nuclear de alta energía. En esta etapa los alumnos conocen sólo vagamente la física nuclear, pero los ejemplos resultan hoy tan actuales que vale la pena explicarlos. Finalmente, el tema de las partículas con masa en reposo cero responderá a las preguntas de muchos alumnos avispados.

Capítulo 13. Aquí se trata un gran número de ejemplos de los temas desarrollados en los capítulos anteriores. Se destacan las ventajas del sistema centro de masas. En un curso más corto puede omitirse. No obstante, aquellos alumnos aventajados que lo deseen, pueden estudiarlo e igualmente puede darse como referencia en otros cursos de física que traten de la relatividad especial.

Capítulo 14. En los últimos años se ha hecho muy popular el estudio de la relatividad general y este capítulo puede ser un puente para su estudio. Naturalmente, su estudio no es fundamental en el tema de la relatividad especial en el sentido usual, pero muchos alumnos pueden estar interesados en la diferencia entre masa gravitatoria y masa inerte y casi todos tendrán noticia de los ensayos sobre relatividad general.

Nota para el alumno

El primer curso de física en la Universidad es, con mucho, el más difícil. En este primer año se desarrollan muchas más ideas, conceptos y métodos nuevos que en otros cursos superiores o más avanzados. Un alumno que entienda claramente la física básica desarrollada en este primer volumen, aunque no sea capaz todavía de aplicarla fácilmente a casos complejos, ha dejado atrás la mayoría de las dificultades reales que surgen en el aprendizaje de la física.

¿Qué deberá hacer un estudiante que tenga dificultad en resolver los problemas y en comprender algunas partes de este curso, aunque lea el texto dos veces? Primero deberá volver atrás y repasar las partes más importantes de su libro de física elemental y deberá leer a fondo la *Física* del texto PSSC.* El «Harvard Project Physics» es también muy útil. Debe consultar y estudiar uno de los muchos libros de física del nivel de introducción. Muchos de éstos son textos sin cálculo y así las dificultades introducidas por las matemáticas se verán minimizadas. Particularmente debe repasar los ejercicios resueltos que le resultarán muy útiles. Finalmente, cuando comprenda estos libros más elementales, podrá iniciar el estudio de otros libros de este nivel que se refieren en el Apéndice. Naturalmente, debe recordar que sus instructores son la mejor fuente para responder estas cuestiones y aclarar sus dudas.

Muchos alumnos tienen dificultad en las matemáticas. Además del libro de cálculo ordinario, hay muchos manuales que pueden ser útiles. Una excelente revisión de los elementos del cálculo diferencial e integral está disponible en un breve manual de enseñanza sin profesor: «Quick calculus», de Daniel Kleppner y Norman Ramsey (John Wiley and Sons, Nueva York, 1965).

(*) Ver lecturas complementarias al final del capítulo.

Notación

Unidades

Cada campo bien desarrollado de la ciencia e ingeniería tiene sus propias unidades especiales que aparecen con frecuencia. La *hectárea* es una unidad normal de superficie para un ingeniero agrónomo, un labrador o un agrimensor. El *MeV* o *millón de electrón-voltios* es una unidad normal de energía para un físico nuclear, la *kilocaloría* es la unidad de energía para los químicos y el *kilowat-hora* es la unidad de energía de los ingenieros. Los físicos teóricos dirán simplemente: Escoger las unidades de modo tal que la velocidad de la luz sea igual a la unidad. Un científico durante su trabajo no gasta mucho tiempo convirtiendo un sistema de unidades en otro: emplea mucho más tiempo siguiéndole la pista a algún factor 2 o al signo más o menos en sus cálculos. Ni empleará mucho tiempo discutiendo sobre unidades, porque de estas discusiones nunca ha surgido algo nuevo en Ciencia.

La física se elabora y publica principalmente según los sistemas de unidades cgs gaussiano y SI o mks. Todo científico o ingeniero que desee tener fácil acceso a la literatura sobre física necesitará estar familiarizado con estos sistemas.

El texto está escrito en el sistema cgs gaussiano; no obstante se efectúan cierto número de referencias a las unidades SI (Sistema Internacional) que hasta hace poco se llamaba sistema mks o mksa. La transformación de unidades cgs a SI es fácil en problemas mecánicos, como se explica en el texto. Sin embargo, cuando se llega a los problemas de electricidad y magnetismo esta transformación es difícil. En el texto se explican ambos sistemas y se resuelven ejemplos en ambos. No es seguro si el cambio al sistema internacional, que se inició hace ya más de veinte años, continuará. Es evidente para cualquiera que hojee una revista de física que la mayoría de sus artículos emplean el sistema cgs preferentemente a cualquier otro. En un curso como éste deseamos facilitar al máximo la lectura de revistas especializadas a los científicos e ingenieros.

Constantes físicas

En las partes internas de las cubiertas de este libro están impresos valores aproximados de constantes físicas y de magnitudes numéricas útiles. Valores más precisos están tabulados en E. K. Cohen and J. W. M. DuMond, *Rev. Mod. Phys.*, **37**, 537 (1965) and B. N. Taylor, W. H. Parker, and D. N. Langenberg, *Rev. Mod. Phys.*, **41**, 375 (1969).

Signos y símbolos

En general, hemos procurado utilizar los símbolos y abreviaturas para las unidades que se utilizan en las revistas de Física que están, en su mayor parte, de acuerdo con los convenios internacionales.

Resumimos aquí varios signos que se utilizan ampliamente durante todo el curso:

$=$ es igual a	$\approx$ es aproximadamente igual a
$\cong$ es casi igual a	$\sim$ es del orden de magnitud de
$\equiv$ es idéntico a	$\propto$ es proporcional a

El empleo de los signos $\approx$, $\sim$ y $\cong$ no está normalizado, pero las definiciones que hemos dado se utilizan ampliamente entre los físicos. El American Institute of Phisics recomienda el signo $\approx$ en donde otros pueden escribir $\simeq$ o $\cong$ (*Style Manual*, American Institute of Physics, ed. rev., noviembre, 1970).

El signo $\sum_{j=1}^{n}$ o $\sum_{j}^{n}$ designa la suma extendida para todos los valores referidos entre $j = 1$ y $j = N$. La notación $\sum_{i,j}$ quiere decir suma doble para los dos índices i y j. La notación $\sum_{i,j}'$ o $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}$ designa la suma para todos los valores de i y j, excepto $i = j$.

Orden de magnitud

Con esta frase queremos significar normalmente «la potencia de 10, más próxima». La estimación libre y resuelta del orden de magnitud de una cantidad caracteriza el trabajo de los físicos y su modo de hablar. Es un hábito profesional de gran valor aunque a menudo trastorna enormemente a los alumnos principiantes. Decimos, por ejemplo, que 10^4 es el orden de magnitud de números como 5 500 y 25 000. En unidades cgs el orden de magnitud de la masa del electrón es 10^{-27} g; su valor exacto es $(0{,}910954 \pm \pm 0{,}000005) \times 10^{-27}$ g.

Decimos a veces que una solución incluye (es exacta hasta) términos de orden x^2 o E, cualquiera que sea esta cantidad. Esto se escribe también en la forma $O(x^2)$ o $O(E)$. Este modo de expresarse implica que los términos de la solución exacta en los que aparecen potencias más elevadas (como x^3 o E^2) de la magnitud pueden despreciarse en ciertos casos en comparación con los términos que se conservan en la solución aproximada.

Prefijos

La tabla siguiente muestra las abreviaturas y los significados numéricos de algunos prefijos de empleo frecuente:

10^{12}	T	tera-	10^{-3}	m	mili-
10^{9}	G	giga-	10^{-6}	μ	micro-
10^{6}	M	mega-	10^{-9}	n	nano-
10^{3}	k	kilo-	10^{-12}	p	pico-

ALFABETO GRIEGO

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	teta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	o	omicron
Π	π	pi
P	ρ	ro
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ φ	fi
X	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Los caracteres que apenas se utilizan como símbolos se han sombreado; la mayor parte de éstos tienen la forma demasiado parecida a las letras ordinarias para que tengan valor como símbolos independientes.

Mecánica

Contenido

EL MUNDO NATURAL
EL PAPEL DE LA TEORÍA
GEOMETRÍA Y FÍSICA
Estimaciones de la curvatura del espacio
Geometría a escala menor
INVARIANCIA
Invariancia en la traslación
Invariancia en la rotación
Problemas
Lecturas suplementarias

1

Introducción

EL MUNDO NATURAL

Para todos los hombres el mundo resulta inmenso y complejo, el escenario de una gran diversidad de acontecimientos y fenómenos alarmantes. Esta impresión está basada en las estimaciones del orden de magnitud general de los valores de algunas magnitudes interesantes. En este momento no entraremos en detalle sobre los argumentos y medidas que conducen a los números que se citan. El hecho más notable de los mismos es que los conozcamos sin que tenga apenas importancia el que alguno de ellos se conozca sólo aproximadamente.

El universo es inmenso. A partir de observaciones astronómicas se sugiere el valor de 10^{28} cm ó 10^{10} años luz para una longitud característica que se denomina *radio* del universo en su más amplio sentido. El valor es dudoso quizás en un factor 3. Para comparar, indicaremos que la distancia de la Tierra al Sol es $1{,}5\times10^{13}$ cm y que el radio de la Tierra mide $6{,}4\times10^{8}$ centímetros.

El número de átomos en el universo es muy grande. El número total de protones y neutrones en el universo, con una incertidumbre quizás de un factor 100, se cree que es del orden de 10^{80}. En el Sol existen en número de 1×10^{57} y en la Tierra de 4×10^{51}. El total indicado en el universo podría constituir unas $10^{80}/10^{57}$ (o 10^{23}) estrellas de la misma masa que nuestro Sol. [Compárese con el número de átomos en un peso atómico (número de Avogrado) que vale 6×10^{23}]. La mayor parte de la masa del universo parece ser que pertenece a las estrellas y todas las estrellas conocidas tienen masas entre 0,01 y 100 veces la de nuestro Sol.

La vida es el fenómeno más complejo del universo. El hombre, una de las formas vitales más complicadas, está compuesto, aproximadamente, por unas 10^{16} células. Una célula es una unidad fisiológica natural que contiene de 10^{12} a 10^{14} átomos aproximadamente. Se cree que todas las células de cada variedad de materia viva contienen al menos una larga cadena molecular de ADN (ácido desoxirribonucleico) o de un pariente próximo RNA (ácido ribonucleico). Las cadenas de ADN en una célula contienen todas las instrucciones químicas o información genética necesaria para construir un hombre completo, un pájaro, una bacteria o un árbol. En una macromolécula de ADN, que está compuesta de 10^{8} a 10^{10} átomos, la distribución precisa de los mismos puede variar de un individuo a otro, pero siempre cambia de

una especie a otra.* Sobre nuestro planeta se han descrito y dado nombre a más de 10^6 especies.

La materia inanimada también aparece en múltiples formas diversas. Los protones, neutrones y electrones se combinan para formar alrededor de 100 elementos químicos diferentes y casi 10^3 isótopos identificados. Los elementos se han combinado en diversas proporciones para formar quizás 10^6 o más compuestos químicos diferenciados e identificados y a este número puede añadirse un amplio número de soluciones líquidas y sólidas y aleaciones de diversas composiciones que poseen propiedades físicas distintas.

Por medio de la ciencia experimental, hemos sido capaces de aprender todos estos hechos acerca del mundo natural, triunfando sobre la oscuridad y la ignorancia para clasificar las estrellas y valorar sus masas, composiciones, distancias y velocidades; para clasificar las especies vivas y para descifrar sus relaciones genéticas; para sintetizar cristales inorgánicos, sustancias bioquímicas y nuevos elementos químicos; para medir las líneas de los espectros de emisión de los átomos y moléculas en un intervalo de frecuencias de 100 a 10^{20} ciclos por segundo (c.p.s.)** y para crear nuevas partículas fundamentales en el laboratorio.

Estos grandes logros de la ciencia experimental los han obtenido hombres de muy diversos tipos: pacientes, persistentes, intuitivos, inventivos, enérgicos, perezosos, afortunados o habilidosos. Algunos preferían utilizar aparatos sencillos, otros inventaron o construyeron instrumentos de gran refinamiento o de tamaño grande o muy complicados. La mayoría de estos hombres tenían en común solamente una cosa: fueron honrados y realmente hicieron las observaciones que habían anotado y publicaron los resultados de su trabajo en una forma que permitió a otros repetir el experimento o la observación.

EL PAPEL DE LA TEORÍA

La descripción que hemos dado del mundo natural considerándolo como inmenso y complejo no es com-

(*) El término *especie* se define de un modo poco preciso indicando que dos poblaciones son de diferentes especies si pueden encontrarse entre ellas alguna(s) diferencia(s) fácilmente descriptible(s) y si no puede existir procreación mixta de un modo natural.

(**) La unidad que expresa los ciclos por segundo se denomina *hertz* (Hz) y, por tanto, esta frase podía haberse escrito «de 100 a 10^{20} Hz».

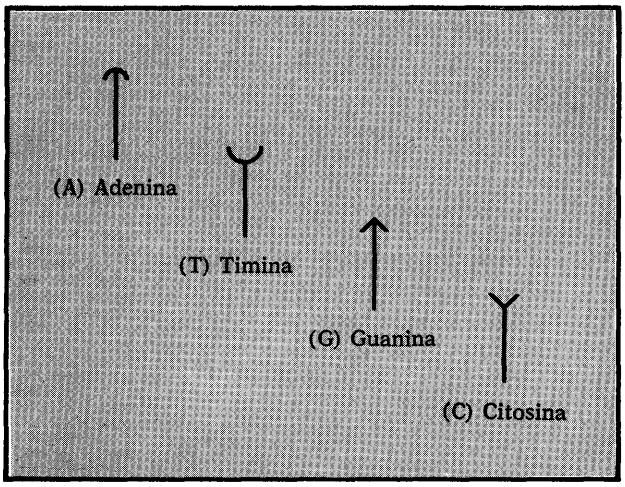
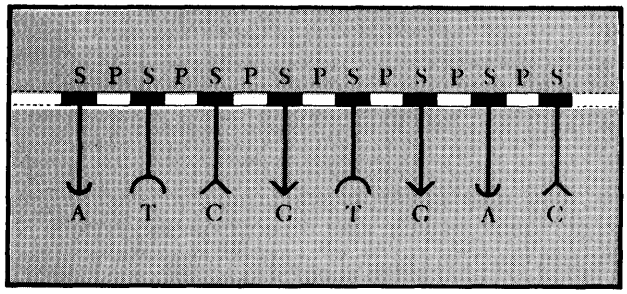
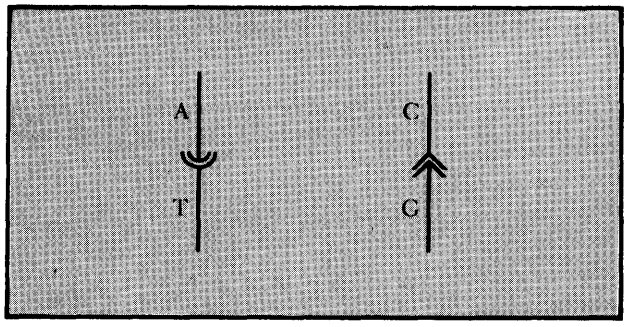


FIG. 1.1. *a*) Representación esquemática de las cuatro bases nucleótidas de las que se deriva la molécula de ADN.



b) Los nucleótidos están unidos a grupos azúcares S, los cuales, a su vez, están unidos a grupos fosfatos P para formar una cadena.



c) La molécula ADN está compuesta de una cadena doble en forma de hélice. Las dos hebras están unidas por enlaces hidrógeno entre los grupos adenina y timina o entre los grupos guanina y citosina.

pleta, puesto que la comprensión teórica hace que varias partes de esta imagen del mundo aparezcan mucho más sencillas. Se ha conseguido un notable entendimiento de algunos aspectos importantes y cruciales del mundo. Los campos que creemos comprender, resumidos a continuación, junto con la teoría de la relatividad y la mecánica estadística, son quizás los mayores logros intelectuales de la humanidad.

1. Las leyes de la mecánica clásica y de la gravitación (Vol. 1) que nos permiten predecir con notable exactitud los movimientos de las diversas partes del sistema solar (incluyendo cometas y asteroides) han conducido a la predicción y descubrimiento de nuevos planetas. Estas leyes sugieren posibles mecanismos para la formación de estrellas y galaxias y, junto con las leyes de la radiación, dan una explicación convincente de la conexión observada entre la masa y la luminosidad de las estrellas. Las aplicaciones astronómicas de las leyes de la mecánica clásica son las más bellas, pero no las únicas realizadas con éxito. Utilizamos constantemente estas leyes en nuestra vida cotidiana y en las distintas ramas de la ingeniería. Nuestras aventuras contemporáneas en el espacio y el uso de satélites están basadas en aplicaciones refinadas de las leyes de la mecánica clásica y la gravitación.

2. Las leyes de la mecánica cuántica (Vol. 4) dan una acertada explicación de los fenómenos atómicos. Se han hecho predicciones para los átomos simples, que han resultado acordes con las experiencias hasta 1 parte en 10^5 o incluso mejor. Cuando se aplican a los sucesos terrestres y celestes de mayor escala, las leyes de la mecánica cuántica son idénticas, dentro de una aproximación excelente, a las de la mecánica clásica. La mecánica cuántica proporciona, en principio, una base teórica precisa para la química y metalurgia en su totalidad y para gran parte de la física, pero con frecuencia no podemos tratar las ecuaciones con los computadores existentes o previsibles. En ciertos campos casi todos los problemas parecen demasiado difíciles para un enfoque teórico directo basado en los principios fundamentales.

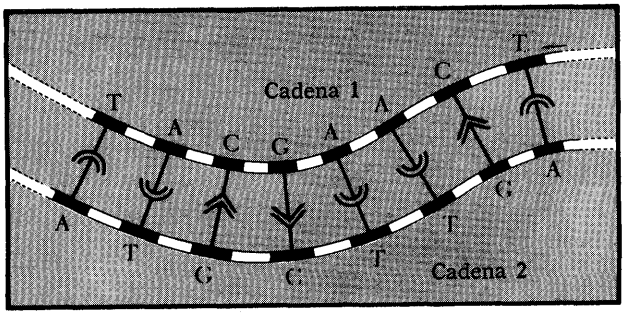
3. Las leyes de la electrodinámica clásica, que suministran una interpretación excelente de todos los efectos eléctricos y magnéticos, excepto a escala atómica, son la base de la ingeniería eléctrica y de la industria dedicada a las comunicaciones. Los efectos eléctricos y magnéticos a escala atómica se describen exactamente

mediante la teoría de la electrodinámica cuántica. La electrodinámica clásica es el tema de los Vols. 2 y 3; algunos aspectos de la electrodinámica cuántica se inician en el Vol. 4, pero la discusión completa de este campo deberá diferirse a un curso posterior.

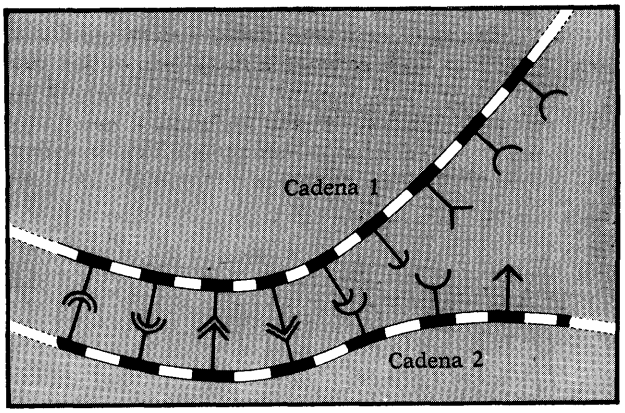
4. Como ejemplo más concreto y en otro nivel, parece alcanzarse la comprensión de los fenómenos genéticos, pudiéndose afirmar que el almacenamiento de información de la célula de un organismo sencillo supera al de las mejores calculadoras comerciales de hoy día. Estos temas son objeto de la biología molecular. Prácticamente en todos los seres vivos de nuestro planeta la codificación completa de la información genética en la molécula ADN está a cargo de una doble secuencia lineal (que posee de 10^6 a 10^9 unidades, según el organismo) de cuatro grupos moleculares con reglas específicas, pero simples, que gobiernan el apareamiento de miembros opuestos en la doble secuencia (véase Fig. 1.1). Estas materias forman parte de la biología molecular.

Las leyes físicas y la explicación teórica de los fenómenos descrita en estos ejemplos tienen un carácter completamente diferente de los resultados directos de las observaciones experimentales. Las leyes, que resumen las partes esenciales de un gran número de observaciones, nos permiten hacer con éxito cierto tipo de predicciones, limitadas en la práctica por la complejidad del sistema. Con frecuencia las leyes sugieren experimentos nuevos y poco corrientes. Aunque las leyes puedan establecerse normalmente de una forma concisa*, su aplicación puede exigir a veces cálculos y análisis matemáticos muy largos.

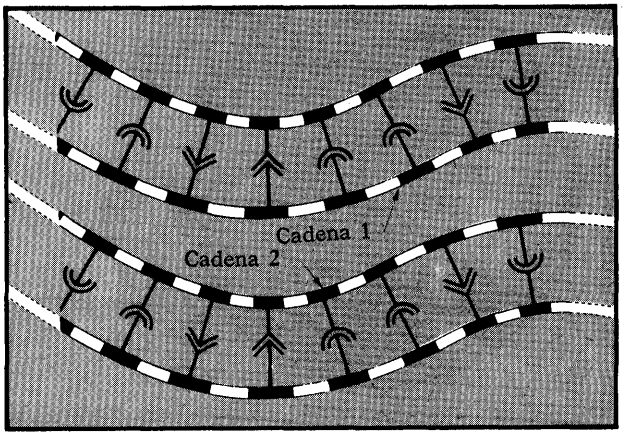
Existe otro aspecto de las leyes fundamentales de la física: aquellas que hemos llegado a comprender tienen una gran belleza y una atractiva sencillez.** Esto no significa que debamos interrumpir la experimentación; porque las leyes de la física se han descubierto por lo general únicamente después de penosos e ingeniosos ex-



d) Toda la información genética en la célula está contenida en el orden en que se encuentran los nucleótidos.



e) Cuando la célula se reproduce, cada molécula de ADN se divide en dos cadenas separadas.



f) Cada cadena libre forma, entonces, su complementaria a partir de la sustancia celular existente para producir dos nuevas moléculas de ADN *idénticas*.

(*) La primera frase de un pequeño libro de Feynman es «Estas conferencias abarcarán toda la física». R. Feynman, *Theory of fundamental processes* (W. A. Benjamin, New York, 1961).

(**) «Parece ser que, si se está trabajando con el fin de aumentar la belleza de una ecuación y se tiene realmente una perspicacia adecuada, se está progresando sobre una línea segura.» P. A. M. Dirac. *Scientific American* **208** (5), 45-53 (1963). Pero la mayoría de los físicos sienten que el mundo real es demasiado sutil para estos ataques tan intrépidos excepto para las inteligencias más grandes de la época, como Einstein o Dirac o una docena más. En manos de algunos millares de físicos, este modo de enfocar está limitado por la distribución desigual de «perspicacia adecuada» entre los hombres.

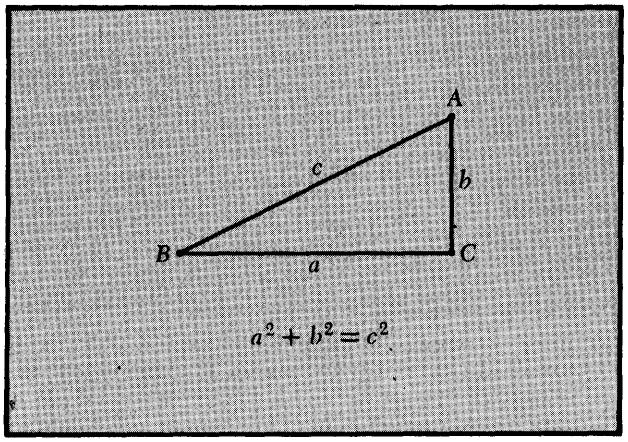


FIG. 1.2 ¿Queda exactamente descrito el mundo físico con los axiomas de la geometría euclidiana, de los que se deduce lógicamente el teorema de Pitágoras? Unicamente la experiencia puede decidirlo.

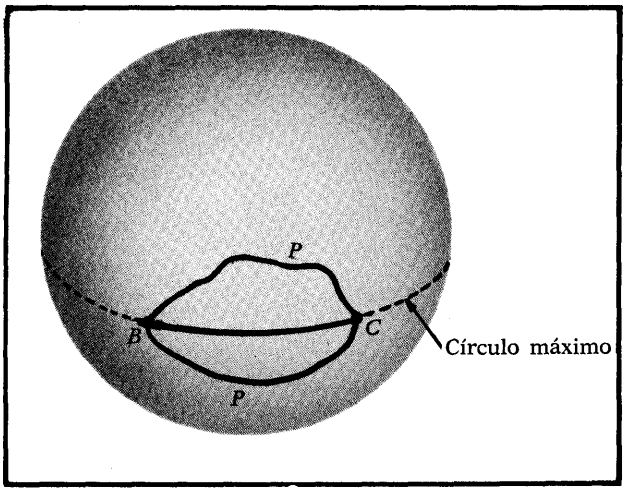


FIG. 1.3 La distancia «línea recta» más corta entre dos puntos *B* y *C* sobre una esfera es el arco de círculo máximo que pasa por dichos puntos, y cualquier otro camino *P* es más largo que éste.

perimentos. Lo dicho anteriormente significa que nos veríamos muy sorprendidos si los futuros enunciados de la teoría física contuviesen elementos poco elaborados y de desagradable presentación. La cualidad estética de las leyes físicas descubiertas ilumina nuestras esperanzas sobre las leyes aún sin conocer. Tendemos a llamar atractiva una hipótesis cuando su simplicidad y elegancia destaca entre el gran número de teorías concebibles.

En este curso nos esforzaremos en establecer algunas de las leyes físicas desde un punto de vista que resalte sus cualidades de sencillez y elegancia. Esto requiere el uso considerable de formulaciones matemáticas, aunque a nuestro nivel, no excederá los límites del cálculo básico. A lo largo del curso intentaremos también hacer sentir el sabor de la buena física experimental, aunque esto es muy difícil de conseguir en un libro de texto. El laboratorio de investigación es el campo natural de enseñanza de la física experimental.

GEOMETRÍA Y FÍSICA

Las matemáticas que permiten la atractiva sencillez y concisión de expresión que exige una discusión razonable de las leyes físicas y sus consecuencias, constituyen el lenguaje de la física. Un lenguaje con reglas especiales. Si se obedecen las reglas, únicamente pueden obtenerse consecuencias correctas: La raíz cuadrada de 2 es 1,414... o $\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$.

Debemos tener cuidado en no confundir dichas consecuencias lógicas con afirmaciones exactas que correspondan al mundo físico. Es una cuestión de experimentación, más bien que de contemplación, el ver si la relación medida entre la circunferencia y el diámetro de una circunferencia física es realmente 3,14159... La medición geométrica es básica para la física y deberemos decidir ciertas cuestiones antes de proceder a utilizar la geometría euclidiana o cualquier otra en la descripción de la naturaleza. Aquí tenemos ciertamente una pregunta que hacer sobre el universo: ¿Podemos suponer que para las mediciones físicas son ciertos los teoremas y los axiomas de Euclides?

Podemos decir sólo algunas cosas sencillas sobre las propiedades experimentales del espacio sin tener que recurrir a difíciles matemáticas. El teorema más famoso de todas las matemáticas es el atribuido a Pitágoras: *En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos* (figura 1.2). ¿Esta verdad matemática que supone la validez de

la geometría euclidiana es cierta también en el mundo físico? ¿Podría ocurrir de otro modo? El examen de esta pregunta no es suficiente y para poder responder debemos acudir a la experimentación. Utilizaremos razonamientos que son algo incompletos porque no podemos utilizar aquí las matemáticas de un espacio tridimensional con curvatura.

Consideremos primero el caso de seres bidimensionales que vivan en un universo que es la superficie de una esfera. Sus matemáticos les han descrito las propiedades de los espacios de tres o más dimensiones, pero tienen mucha dificultad en desarrollar una percepción intuitiva sobre tales materias, tal como las que encontramos nosotros al describir un espacio tetradimensional. ¿Cómo pueden determinar si viven sobre una superficie curva? Un procedimiento consiste en ensayar los axiomas de la geometría plana intentando confirmar experimentalmente alguno de los teoremas de Euclides. Construirán líneas rectas entendiendo por tales el camino más corto entre dos puntos cualesquiera B y C sobre la superficie de la esfera. Nosotros describiríamos dicho trayecto como un *círculo máximo* (figura 1.3).

Dichos seres podrían avanzar y construir triángulos y ensayar el teorema de Pitágoras. En un triángulo muy pequeño, cuyos lados sean pequeños en comparación con el radio de la esfera, el teorema se cumpliría con gran exactitud aunque no perfectamente; en un triángulo mayor se apreciarían las diferencias de modo notable. (Véanse Figs. 1.4 a 1.6.)

Si B y C son puntos sobre el ecuador de la esfera, la «línea recta» que los une es el segmento de ecuador de B a C. El camino más corto desde el punto C situado en el ecuador al polo norte A es el meridiano que corta al ecuador en ángulo recto. El camino más corto desde B a A es también una línea de longitud fija que corta asimismo en ángulo recto al ecuador BC. Tenemos, pues, un triángulo rectángulo con $b = c$. El teorema de Pitágoras evidentemente no es válido en la esfera porque c^2 no puede ser igual a $b^2 + a^2$; además la suma de los ángulos internos del triángulo ABC es siempre mayor que 180°. Las mediciones hechas sobre la superficie curva por sus habitantes bidimensionales les permitiría demostrar a sí mismos que la superficie es ciertamente curva.

Siempre es posible que los habitantes digan que las leyes de la geometría plana describen adecuadamente su mundo y que los problemas que surgen se deben a

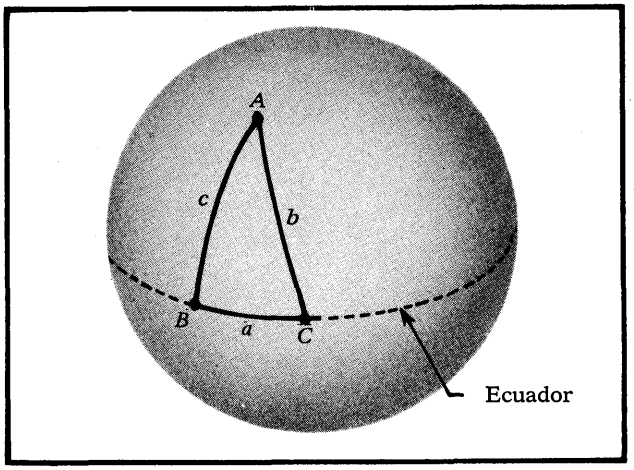


FIG. 1.4 Dados tres puntos ABC, los seres bidimensionales podrían construir triángulos con lados considerados como «líneas rectas». Encontrarían así que para triángulos rectángulos pequeños $a^2 + b^2 \approx c^2$ y la suma de los ángulos del triángulo ligeramente mayor de 180°.

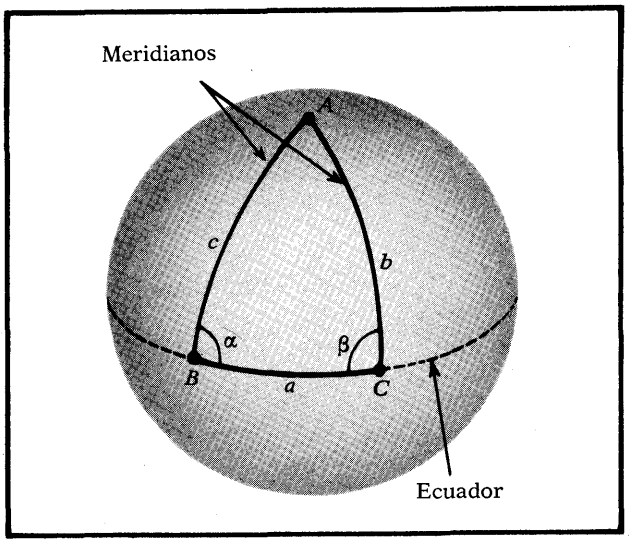


FIG. 1.5 Si utilizasen unos triángulos mayores, la suma de los ángulos sería cada vez mayor de 180°. En este caso, con B y C en el ecuador y A en el polo, α y β son *ambos* rectos. Evidentemente $a^2 + b^2 \neq c^2$, porque b es igual a c.

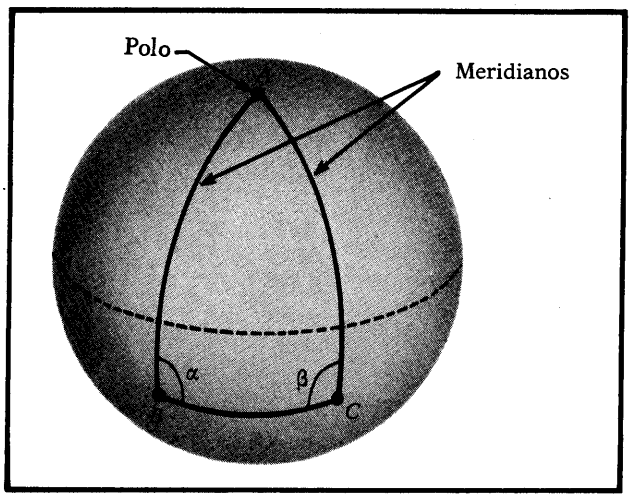


FIG. 1.6 En este triángulo, con *B* y *C* por debajo del ecuador, $\alpha + \beta > 180°$, lo cual es debido sólo a que el «espacio» bidimensional de la superficie esférica es curvo. Un argumento análogo puede utilizarse en tres dimensiones. El radio de curvatura de este espacio bidimensional es precisamente el radio de la esfera.

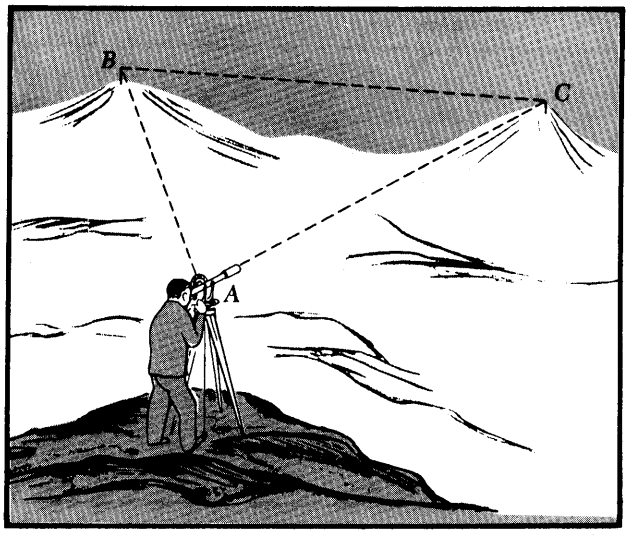


FIG. 1.7 Gauss midió los ángulos de un triángulo con vértices en las cimas de tres montañas y encontró que su suma no difería de 180° dentro de la exactitud de sus medidas.

las reglas empleadas para medir el camino más corto y definir así la línea recta. Pueden asegurar que la regla no tiene una longitud constante, sino que se acorta o alarga cuando se desplazan a diferentes lugares de la superficie. Unicamente cuando se determina, por mediciones continuadas de diversas maneras, que se obtiene siempre el mismo resultado, resultará evidente que la explicación más sencilla del fallo de la geometría euclidiana reposa en la curvatura de la superficie.

Los axiomas de la geometría plana no son verdades evidentes por sí mismas en este mundo bidimensional curvo; no son verdades en absoluto. Vemos que la geometría real del universo es una rama de la física que debe explorarse mediante experiencias. Normalmente no indagamos la validez de la geometría euclidiana para describir las mediciones hechas en nuestro propio mundo tridimensional porque dicha geometría es una aproximación tan buena a la geometría del universo que en las mediciones prácticas no se detecta ninguna desviación de la misma. Esto no significa que la aplicabilidad de la geometría euclidiana sea evidente por sí misma ni siquiera exacta. El gran matemático del siglo XIX Carl Friedrich Gauss sugirió que la planitud euclidiana del espacio de tres dimensiones debería comprobarse midiendo la suma de los ángulos interiores de un triángulo de grandes dimensiones; él indicaba que si el espacio tridimensional es curvo, la suma de los ángulos de un triángulo *bastante grande* podría tener una diferencia significativa respecto a 180°.

Gauss * utilizó un equipo de topografía para medir exactamente el triángulo que forman en Alemania los montes Brocken, Hohehagen e Inselberg (1821-1823) (Fig. 1.7). El lado mayor de este triángulo medía 100 km aproximadamente. Los ángulos internos medidos fueron

$$\begin{array}{r} 86°13'58{,}366'' \\ 53°\ 6'45{,}642'' \\ 40°39'30{,}165'' \\ \hline \text{Suma}\quad 180°00'14{,}173'' \end{array}$$

(No hemos encontrado ninguna indicación acerca de la exactitud estimada de estos resultados; es probable que las dos últimas cifras no resulten significativas.) Como los instrumentos topográficos se instalaron *local-*

(*) C. F. Gauss., *Werke*, vol. 9, B. G. Teubner, Leipzig, 1903, especialmente las págs. 299, 300, 314 y 319. La colección de trabajos de Gauss son un ejemplo notable de lo mucho que puede realizar durante su vida un hombre con talento.

mente en un plano horizontal en cada vértice, los tres planos horizontales no resultaron paralelos. Debe sustraerse, pues, de la suma de los ángulos una correción obtenida mediante el cálculo llamada *exceso esférico* (que vale 14,853 segundos de arco). La suma así corregida

$$179°59'59{,}320'',$$

difiere en 0,680 segundos de arco de 180°. Gauss opinó que esto caía dentro de los límites del error de observación y llegó a la conclusión de que el espacio era euclidiano dentro de la exactitud de estas observaciones.

Vimos en el ejemplo anterior que la geometría euclidiana describía adecuadamente un pequeño triángulo en la esfera bidimensional, pero las discrepancias se hacen cada vez más evidentes al aumentar la escala. Para ver si nuestro espacio es verdaderamente plano necesitaremos medir triángulos muy grandes cuyos vértices estén formados por la Tierra y las estrellas distantes o incluso galaxias. Pero entonces nos enfrentamos con el siguiente problema: Nuestra posición queda fijada, ya que estamos sobre la Tierra y no tenemos libertad (aún) para vagar por el espacio con nuestra regla y andar midiendo triángulos astronómicos. ¿Cómo podemos comprobar la validez de la geometría euclidiana para describir las medidas en el espacio?

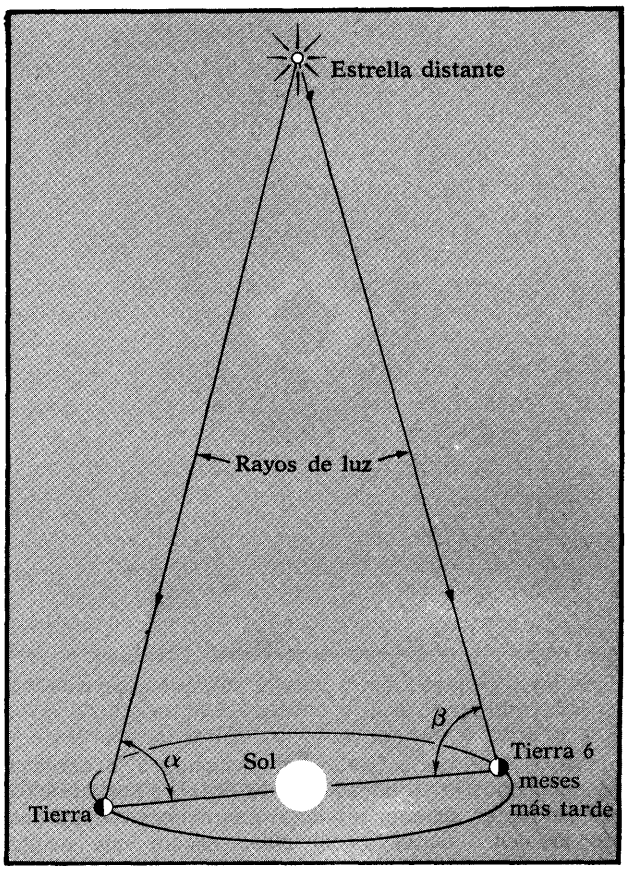


FIG. 1.8 Demostración de Schwarzschild de que en una superficie plana $\alpha + \beta < 180°$. El *paralaje* de una estrella se define por $\frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta)$.

Valores estimados de la curvatura del espacio.

Predicciones planetarias. Puede atribuirse un primer límite inferior de unos 5×10^{17} cm para el radio de curvatura de nuestro propio universo en virtud de la consistencia de las observaciones astronómicas dentro del sistema solar. Por ejemplo, las posiciones de los planetas Neptuno y Plutón fueron deducidas mediante el cálculo antes de su confirmación visual por observación telescópica. Pequeñas perturbaciones en las órbitas de los planetas conocidos condujeron al descubrimiento de Neptuno y Plutón muy cerca de las posiciones previstas por el cálculo. El planeta más exterior del sistema solar es Plutón. Podemos admitir fácilmente que un ligero error en las leyes de la geometría habría destruido esta coincidencia. El radio medio de la órbita de Plutón es 6×10^{14} cm; la casi total coincidencia entre las posiciones observadas y las predichas supone un radio de curvatura del espacio de al menos 5×10^{17} cm. Un radio de curvatura infinito (espacio plano) no es incompatible con los datos. Nos separaría demasiado de nuestro objeto presente el discutir los detalles numéricos que conducen a estimar el valor de 5×10^{17} cm o el definir con preci-

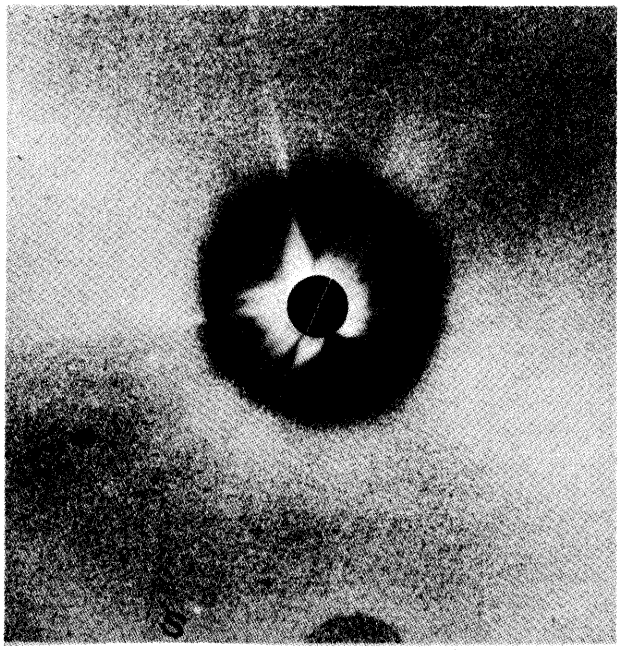


FIG. 1.9 Fotografía de la corona solar con luz próxima al infrarrojo en el eclipse solar de 7 de marzo de 1970, que registra la imagen de la estrella M de cuarta magnitud ϕ de Acuario (justo por encima y a la derecha de S), a unos 11 radios solares del Sol. Los semicírculos en las partes superior e inferior son marcas de la placa de presión. Inserta en el disco oscuro que oculta está la fotografía del eclipse de Gordon Newkirk, utilizada para orientar esta foto. *(Fotografía enviada por cortesía de Carl Lilliequist y Ed. Schmahl — experimento subvencionado parcialmente por el Departamento de Astrogeofísica. Universidad de Colorado.)*

sión lo que se entiende por radio de curvatura de un espacio tridimensional. La analogía bidimensional de la superficie de la esfera puede utilizarse en esta ocasión como un modelo útil.

Paralaje trigonométrica. Schwarzschild * sugirió otro tipo de razonamiento. En dos observaciones realizadas con un intervalo de seis meses, la posición de la Tierra respecto al Sol ha variado en 3×10^{13} cm, que es el diámetro de la órbita terrestre. Supongamos que en las mismas hemos observado una estrella y medido los ángulos α y β (fig. 1.8), en donde estas letras son los caracteres griegos alfa y beta. Si el espacio es plano, la suma de los ángulos $\alpha + \beta$ es siempre menor que 180° y la suma se acerca a este valor cuando la estrella está a una distancia infinita. La mitad de la diferencia entre 180° y $\alpha + \beta$ se denomina *paralaje.* Pero en un espacio curvo no es necesariamente cierto que $\alpha + \beta$ sea siempre menor que 180°. Un ejemplo se ve en la Fig. 1.6.

Volvamos a nuestros astrónomos bidimensionales viviendo sobre la superficie de la esfera para ver cómo descubrieron que su espacio es curvo a partir de las medidas de la suma $\alpha + \beta$. Según nuestra discusión previa del triángulo *ABC* observamos que, cuando la estrella está alejada un cuarto de circunferencia, $\alpha + \beta = 180°$. Cuando la estrella está más próxima $\alpha + \beta < 180°$, y cuando está más lejana, $\alpha + \beta > 180°$. El astrónomo necesitaría mirar simplemente a estrellas cada vez más distantes y medir $\alpha + \beta$ para ver cuándo la suma empieza a valer más de 180°. El mismo razonamiento es válido dentro de nuestro espacio tridimensional.

No existe ninguna prueba deducida por observaciones de que $\alpha + \beta$ sea nunca mayor de 180°, cuando los astrónomos hacen estas medidas después de hacer la corrección apropiada por el movimiento del Sol respecto al centro de nuestra galaxia. Valores de $\alpha + \beta$ menores de 180° se utilizan para determinar por triangulación las distancias de las estrellas próximas. Pueden observarse valores menores de 180° hasta unos 3×10^{20} cm**, que es el límite de los ángulos que pueden medirse con los telescopios actuales. No puede deducirse directamente a partir de este razonamiento que el radio de curvatura

(*) K. Schwarzschild, *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft* **35**, 337 (1900).

(**) Puede hacerse la objeción de que las mismas mediciones de las distancias suponen que es aplicable la geometría euclidiana. Se dispone, sin embargo, de otros métodos de apreciar distancias que se discuten en los textos modernos de astronomía.

del espacio deba ser mayor que 3×10^{20} cm; para ciertos tipos de espacios curvos se necesitan otros argumentos. La respuesta que puede darse finalmente es que el radio de curvatura (según se determina por triangulación) debe ser mayor que 6×10^{19} cm.

Al principio del Capítulo dijimos que se ha observado una longitud característica asociada con el universo, que tiene un valor del orden de 10^{28} cm o 10^{10} **años luz. Este número corresponde, por ejemplo, a la distancia recorrida por la luz en un tiempo igual a** la edad del universo *. La interpretación más sencilla de esta longitud es considerarla como el radio del universo. Otra posible interpretación la señala como el radio de curvatura del espacio. ¿Cuál de ellas es? Esta es una cuestión cosmológica; en el libro de Bondi, citado al final del capítulo, se da una excelente introducción a la ciencia especulativa de la cosmología. Resumamos nuestro conocimiento del radio de curvatura del espacio afirmando que no es menor de 10^{28} cm y que desconocemos si el espacio a escala mayor no será plano.

Las observaciones precedentes apuntaban hacia el radio medio de curvatura del espacio y no son suficientemente sensibles para detectar las protuberancias que se cree existen en la proximidad inmediata de las estrellas individuales, y que contribuyen a una rugosidad local del espacio, por lo demás plano o ligeramente curvado. Los datos experimentales que soportan este punto de vista son muy difíciles de conseguir, incluso en la vecindad de nuestro Sol. Mediante cuidadosas y arduas observaciones de las estrellas visibles cerca del borde del Sol durante un eclipse solar ha quedado establecido que los rayos de luz se curvan ligeramente cuando pasan cerca del borde del Sol y, como consecuencia, cerca de cualquier estrella semejante de gran masa (véase Figs. 1.9 y 1.10). Para un rayo rasante el ángulo de desviación es muy pequeño, con un valor de 1,75″ únicamente. Como el Sol se mueve a través del firmamento, las estrellas que están casi eclipsadas aparecerían desviadas ligeramente de sus posiciones normales, si pudiésemos verlas durante el día. Esta observación significa simplemente que la luz se mueve con una tratrayectoria curva cerca del Sol, pero en sí mismo no significa que la única interpretación sea que el espacio alrededor del Sol sea curvo. Sólo con mediciones exactas mediante reglas graduadas de diversos materiales

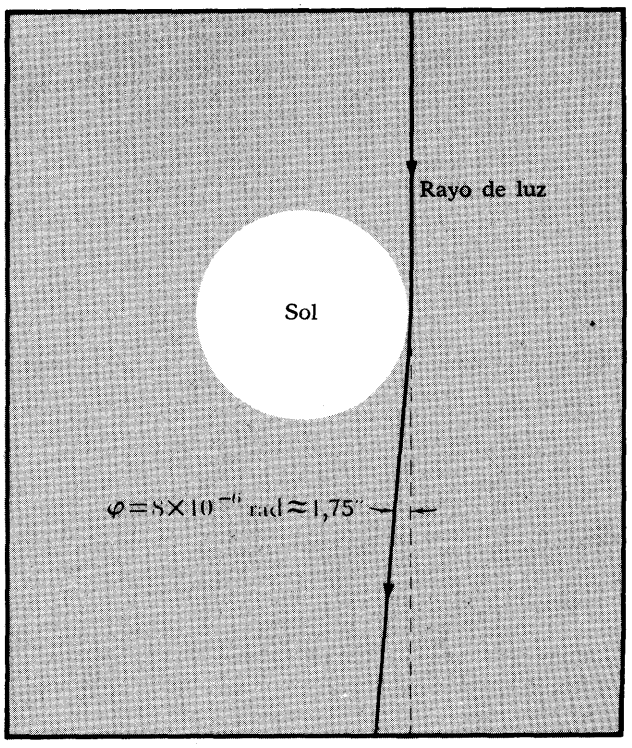


FIG. 1.10 La desviación de la luz por el Sol fue predicha por Einstein en 1915 y comprobada poco después mediante observaciones.

(*) Una evidencia de esto se menciona en el Cap. 10, en el ejemplo del Efecto Doppler.

cerca de la superficie del Sol podríamos establecer directamente que un espacio curvo es la descripción más natural. Otra clase de observaciones insiste también en la posibilidad de un espacio curvo. La órbita de Mercurio, el planeta más próximo al Sol, difiere ligeramente de la prevista por aplicación de las leyes de Newton de la gravitación universal y del movimiento, (ver fig. 14.9), incluso después de haber incorporado a la órbita calculada pequeñas correcciones de la teoría de la relatividad restringida. ¿Podría esto ser un efecto del espacio curvado cerca del Sol? Para responder a esta pregunta deberíamos saber cómo podría afectar una posible curvatura a las ecuaciones del movimiento de Mercurio, y esto implica algo más que simple geometría. Estos temas se discuten posteriormente (aunque de forma muy breve) en el Cap. 14.

En una notable y hermosa serie de trabajos, Einstein [A. Einstein, *Berl. Ber* . 778, 799, 844 (1915); *Ann. d. Phys* **49**, 769 (1916)] describió una teoría de la gravitación y de la geometría (la teoría general de la relatividad) que predecía, en acuerdo cuantitativo con las observaciones, precisamente los dos efectos descritos anteriormente. Hay todavía pocas confirmaciones cruciales de las predicciones geométricas de la teoría. A pesar de tan escasas pruebas, la esencial sencillez de la teoría general ha hecho que ésta sea ampliamente aceptada, aunque en los últimos años se han realizado considerables investigaciones en este campo (véase Cap. 14).

GEOMETRÍA A ESCALA MENOR

A partir de mediciones astronómicas, llegamos a la conclusión de que la geometría euclidiana proporciona una descripción extraordinariamente buena de las medidas de longitudes, áreas y ángulos, al menos hasta que alcancemos las enormes longitudes de 10^{28} cm. Pero hasta ahora no se ha dicho nada sobre el empleo de la geometría euclidiana para describir configuraciones muy pequeñas comparables en tamaño a los 10^{-8} cm de un átomo o los 10^{-12} cm de un núcleo. La cuestión de la validez de la geometría euclidiana finalmente debe ser expresada como sigue: ¿Podemos dar sentido al mundo subatómico y desarrollar con éxito una teoría física para describirlo, manteniendo la suposición de que la geometría euclidiana es válida? Si esto es posible no hay ninguna razón en el momento actual para poner objeciones a la geometría euclidiana como una satisfactoria aproximación. Veremos en el Vol. IV cómo

la teoría de los fenómenos atómicos y subatómicos no parece conducirnos a ninguna de las paradojas que han bloqueado su comprensión. Todavía quedan muchos hechos por entender pero ninguno parece encerrar contradicciones con la teoría. En este sentido la geometría euclidiana ha resistido el ensayo experimental hasta 10^{-13} cm por lo menos.

INVARIANCIA

Podemos resumir algunas de las consecuencias de la validez experimental de la geometría euclidiana para el espacio vacío. La *homogeneidad* e *isotropía* del espacio euclidiano puede expresarse por dos principios de invariancia, que, a su vez, implican dos principios fundamentales de conservación.

Invariancia en la traslación. Queremos indicar con esto que el espacio vacío es homogéneo, es decir, no difiere de un punto a otro. Si alguna figura se mueve sin rotación, no hay cambio en su tamaño o propiedades geométricas. También suponemos que las propiedades físicas de un objeto, como su inercia o las fuerzas que existen entre sus partículas constituyentes, no cambian al desplazar el objeto a otra región del espacio vacío. Por ejemplo, la frecuencia natural de un diapasón o las líneas del espectro característico de un átomo no se alteran en tal desplazamiento.

Invariancia en la rotación. Con la mayor precisión se sabe experimentalmente que el espacio es isótropo, de modo que todas las direcciones son equivalentes. Las propiedades geométricas y físicas quedan inalteradas ante la reorientación en dirección de un objeto en el espacio vacío.

Es posible imaginar un espacio plano que no sea isótropo. Por ejemplo, la velocidad de la luz en una determinada dirección puede ser mayor que la velocidad en otra dirección perpendicular a la anterior. Sin embargo, no existe ninguna prueba de que esto ocurra en el espacio exterior. Dentro de un cristal, no obstante, pueden aparecer muchos efectos de *anisotropia.* En las regiones del espacio próximas a las estrellas de gran masa y otras fuentes intensas de gravitación, pueden observarse efectos que pueden interpretarse como ligeras discrepancias de la homogeneidad e isotropía del espacio. (En la sección anterior hemos aludido a dos de estos efectos y hay otros.)

La propiedad de la invariancia en la traslación lleva a la *conservación de la cantidad de movimiento;* la inva-

riancia en la rotación comporta la *conservación del momento cinético.* Estos temas se desarrollan en los Capítulos 4 y 6. El concepto de invariancia se desarrolla en los Capítulos 2 y 4.

La larga discusión precedente sobre geometría y física es un ejemplo de los tipos de cuestiones que los físicos inquieren sobre el carácter básico de nuestro universo. No obstante, no trataremos tales materias más allá de este nivel de nuestro estudio.

PROBLEMAS

1. *El Universo conocido.* Utilizando la información dada en el texto, estimar las magnitudes siguientes:

(*a*) La masa total en el Universo conocido.

Sol. $\approx 10^{56}$ g.

(*b*) La densidad media de la materia en el Universo.

Sol. $\sim 10^{-29}$ g/cm^3, equivalente a 10 átomos de hidrógeno por metro cúbico.

(*c*) La relación entre el radio del Universo conocido y el del protón. (Tomar el radio del protón como 10^{-13} cm; masa del protón: $1{,}7 \times 10^{-24}$ g.)

2. *Señales que atraviesan un protón.* Estimar el tiempo que necesita una señal moviéndose con la velocidad de la luz para recorrer una distancia igual al diámetro de un protón. Considerar el diámetro del protón igual a 2×10^{-13} cm. (Este tiempo es un intervalo de referencia conveniente en la física de las partículas elementales y los núcleos.)

3. *Distancia a Sirio.* La paralaje de una estrella es la mitad del ángulo subtendido desde la estrella por las posiciones extremas de la Tierra en su órbita alrededor del Sol. La paralaje de Sirio es 0,371''. Encuéntrese su distancia a la Tierra en centímetros, años luz y parsecs. Un parsec es la distancia a una estrella cuya paralaje es 1 seg de arco. (Véase tabla de valores en las cubiertas del libro.)

Sol. $8{,}3 \times 10^{18}$ cm; 8,8 años luz; 2,7 parsecs.

4. *Tamaño de los átomos.* Utilizando el valor del número de Avogadro dado en la tabla y un valor aproximado de la densidad media de los sólidos comunes, estimar el diámetro de un átomo medio, es decir, la dimensión del espacio cúbico que llena un átomo.

5. *Angulo subtendido por la Luna.* Procurarse una regla dividida en milímetros y cuando las condiciones visuales sean favorables, inténtese la siguiente experiencia: Manténgase la regla con el brazo extendido y mídase el diámetro de la Luna. Mídase la distancia de la regla al ojo. (El radio de la órbita de la Luna es $3{,}8 \times 10^{10}$ cm y el de la Luna misma, $1{,}7 \times 10^{8}$ cm.)

(*a*) Si se pudo llevar a cabo la experiencia, ¿cuál fue el resultado?

(*b*) Si no se pudo hacer la medición, calcular el ángulo subtendido por la Luna desde la Tierra a partir de los datos anteriores. *Sol.* 9×10^{-3} radianes.

(*c*) ¿Cuál es el ángulo subtendido por la Tierra desde la Luna? (Véase pág. 55. Cap. 2.) *Sol.* $3{,}3 \times 10^{-2}$ radianes.

6. *Edad del Universo.* Admitiendo el radio del Universo dado al principio del capítulo, determinar la edad del Universo a partir de la hipótesis de una estrella que, situada sobre el radio, ha viajado alejándose de nosotros desde el principio de los tiempos a la velocidad de $0{,}6\ c = 1{,}8 \times \times 10^{10}$ cm/s (c = velocidad de la luz en el espacio libre).

Sol. $\approx 2 \times 10^{10}$ años.

7. *Angulos en un triángulo esférico.* Determinar el valor de la suma de los ángulos en el triángulo esférico indicado en la fig. 1.5, suponiendo que A está en el polo y a = radio de la esfera. A fin de determinar el ángulo de A, considerar cuál sería el valor de a para que el ángulo fuera 90°.

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

Estas dos primeras referencias son textos contemporáneos para centros de orientación universitaria. Son excelentes para la revisión y clarificación de conceptos. La segunda referencia contiene mucho material de historia y filosofía.

Physical Science Study Committee (PSSC), *Física,* Caps. 1-4 (Ed. Reverté).

F. J. Rutherford, G. Holton y F. J. Watson, *Project Physics Course,* Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970. Un producto del Harvard Project Physics (HPP).

O. Struve, B. Lynds y H. Pillans, *Elementary Astronomy* (Oxford University Press, Nueva York, 1959). Resalta las ideas principales de la física en relación al Universo; excelente.

Larousse Encyclopedia of Astronomy (Prometheus, Press, Nueva York, 1962). Es un libro bello e informativo.

H. Bondi, *Cosmology,* 2.ª ed. (Cambridge, University Press, Nueva York, 1960). Estudio breve, claro y autorizado, insistiendo en las pruebas obtenidas en las observaciones, aunque carece de trabajo reciente sustancial.

D. W. Sciama, *Modern Cosmology* (Cambridge, University Press, Nueva York, 1971). Incluye desarrollos recientes.

Robert H. Haynes y Philip C. Hanawalt, *The Molecular Basis of Life* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1968). Colección de artículos del *Scientific American* con algún texto adicional.

Gunther S. Stent, *Molecular Genetics*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1971. Curso introductorio.

Ann Roe, *The making of a scientist* (Dodd, Mead and Co., Nueva York, 1953; reimpresión Apollo, 1961). Es un excelente estudio sociológico de un grupo de científicos americanos de primera fila de la década 1940-1950. Probablemente existirán hoy algunos cambios de importancia en la población científica, puesto que el libro apareció en 1953.

Bernice T. Eiduson, *Scientists: Their Psychological World*, Basic Books, Inc., Publishers, Nueva York, 1962.

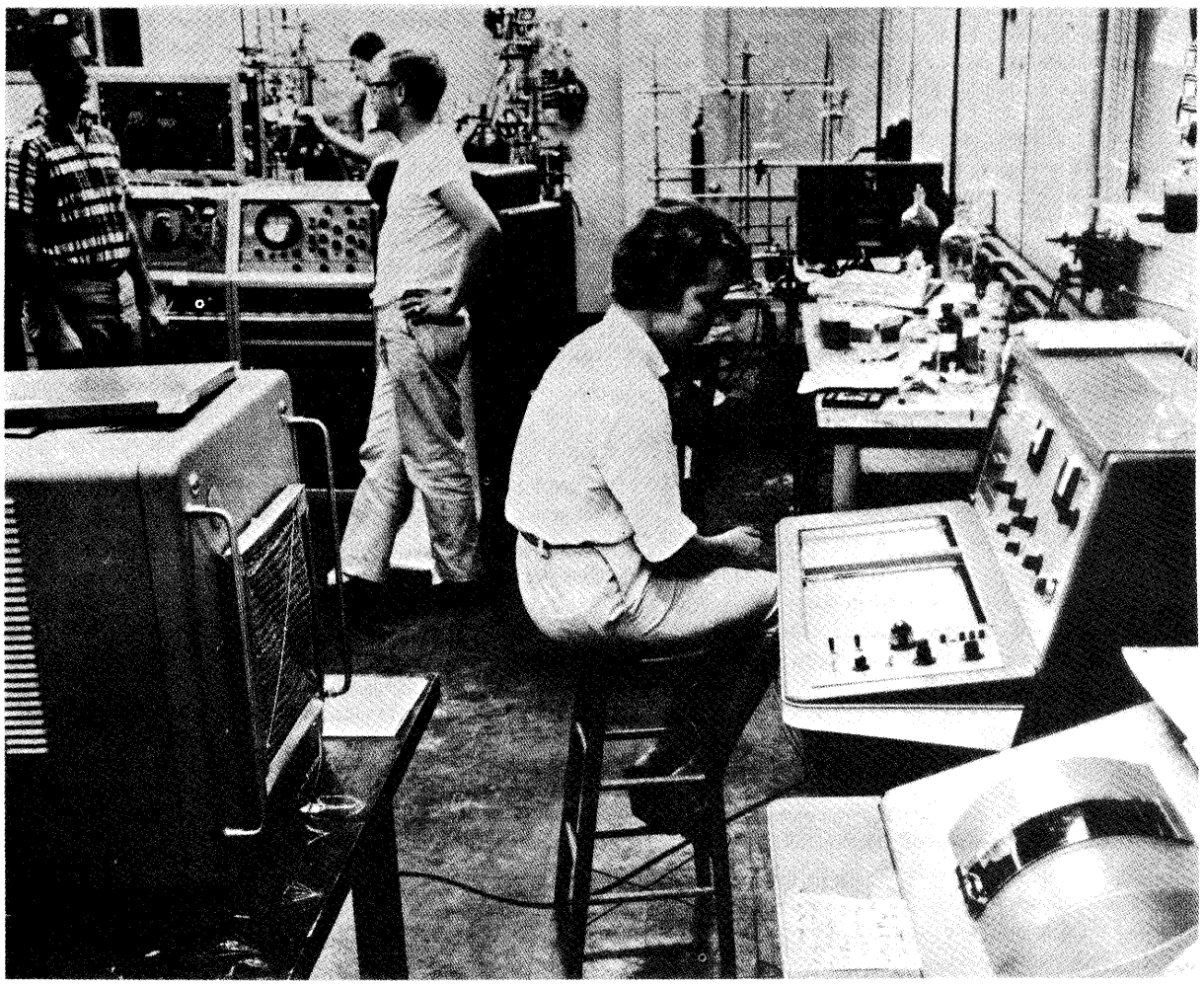
A. Einstein, «Notas autobiográficas», en *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, editado por P. A. Schilpp (Library of Living Philosophers, Evanston, 1949). Una breve y excelente autobiografía. Es una lástima que existan tan pocas biografías realmente buenas de científicos sobresalientes, como la de Freud debida a Ernest Jones. Existen pocas, además, comparables en profundidad y honradez a las grandes biografías literarias, como *James Joyce*, de Richard Ellman. La autobiografía de Charles Darwin es una notable excepción. Los autores que escriben sobre los científicos parecen haberse intimidado por la frase de Einstein: «La esencia de un hombre como yo mismo reside precisamente en *lo que* piensa y en *cómo* piensa, y no en lo que hace o padece.»

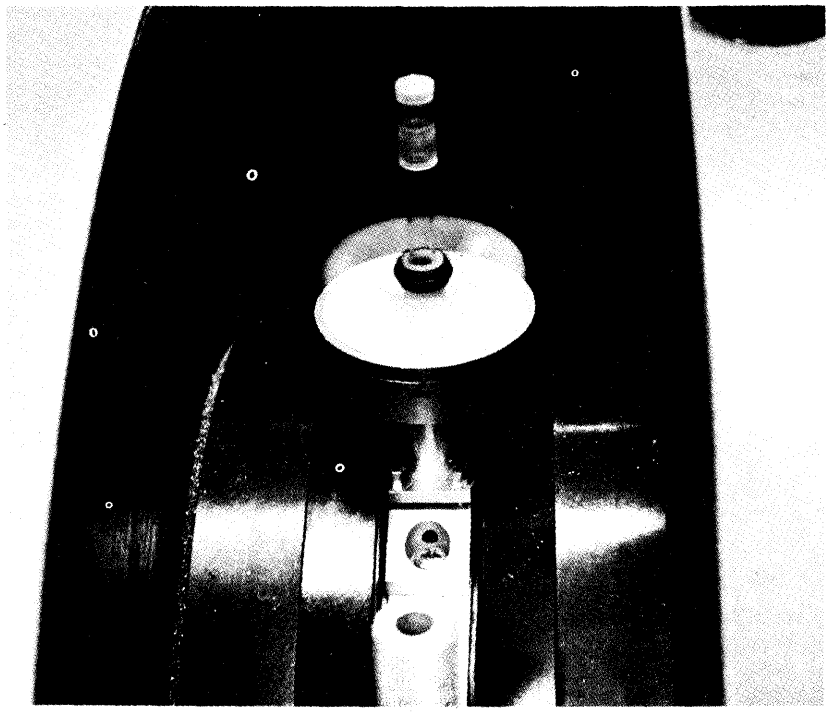
L. P. Wheeler, *Josiah Willard Gibbs; The History of a Great Mind*. Yale University Press. New Haven, Conn., 1962.

E. Segrè, *Enrico Fermi, Physicist*. The University of Chicago Press, Chicago, 1971.

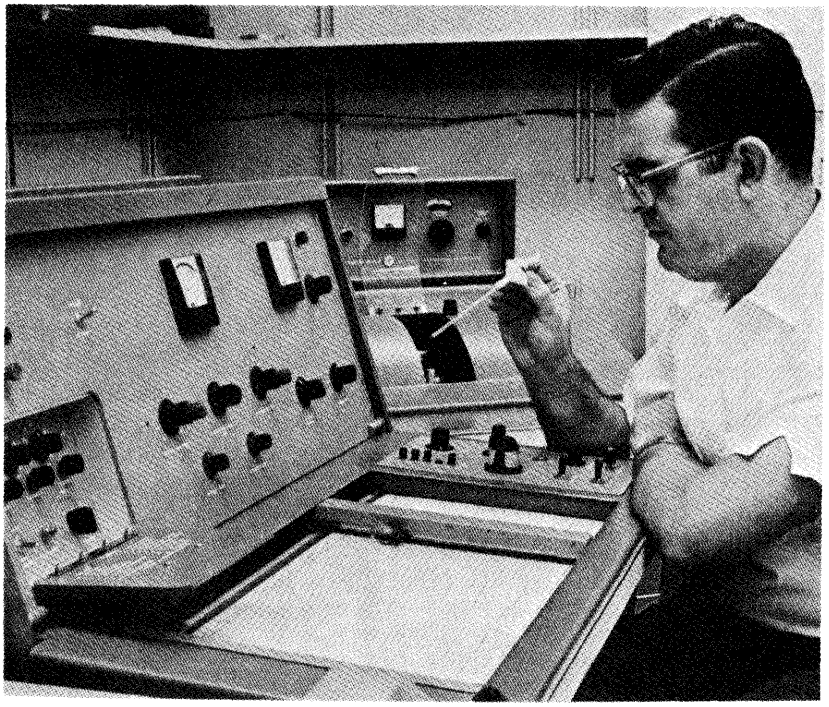
Aparatos experimentales de Física. Las fotografías de estas páginas muestran algunos de los instrumentos y máquinas que contribuyen activamente al avance de las ciencias físicas.

Laboratorio de resonancia magnética nuclear para estudios de las estructuras químicas. *(Fotografía ASUC.)*

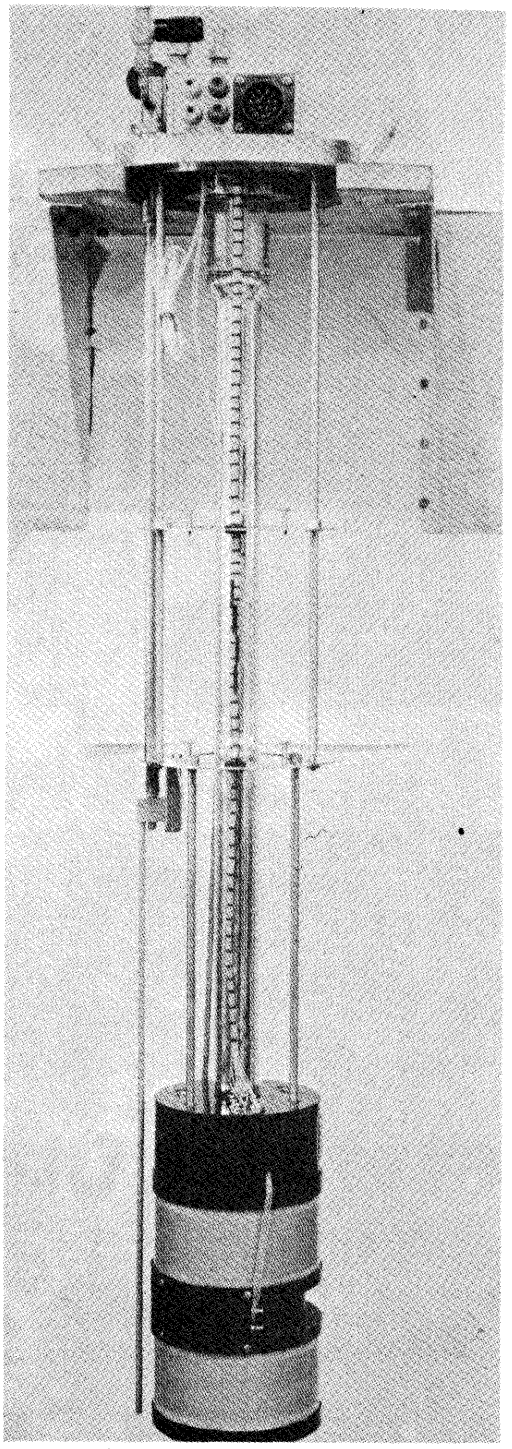




Estudio de espectros de resonancia magnética nuclear: puede verse una muestra girando rápidamente entre las piezas polares de un electroimán para promediar las variaciones del campo magnético. *(Esso Research.)*

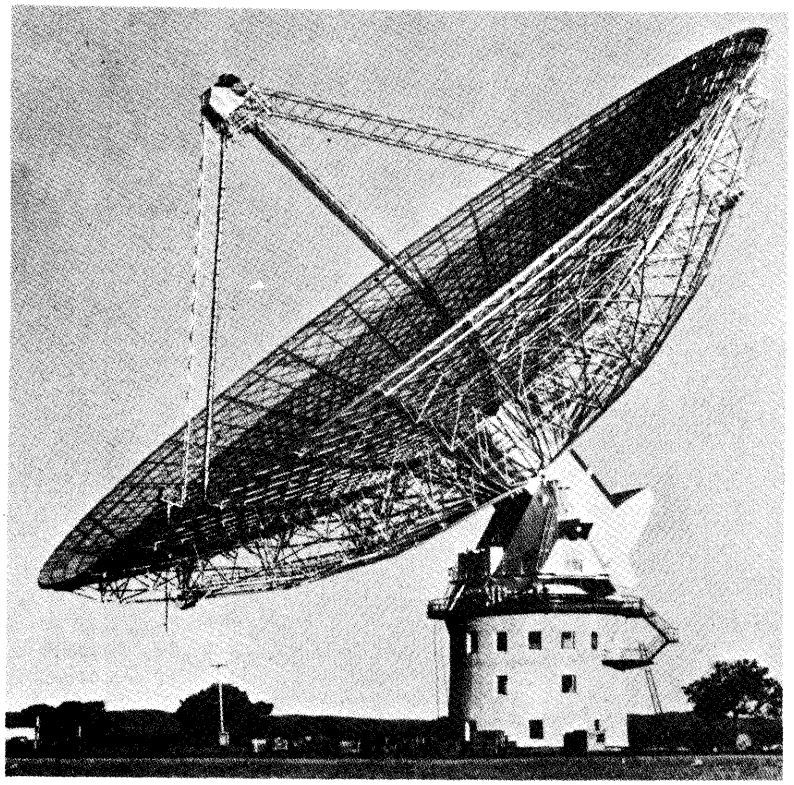


Operador en un laboratorio de resonancia magnética nuclear en el momento de colocar una muestra en la probeta en el aparato de control de temperatura en el que la muestra ha de estar girando. *(Esso Research.)*

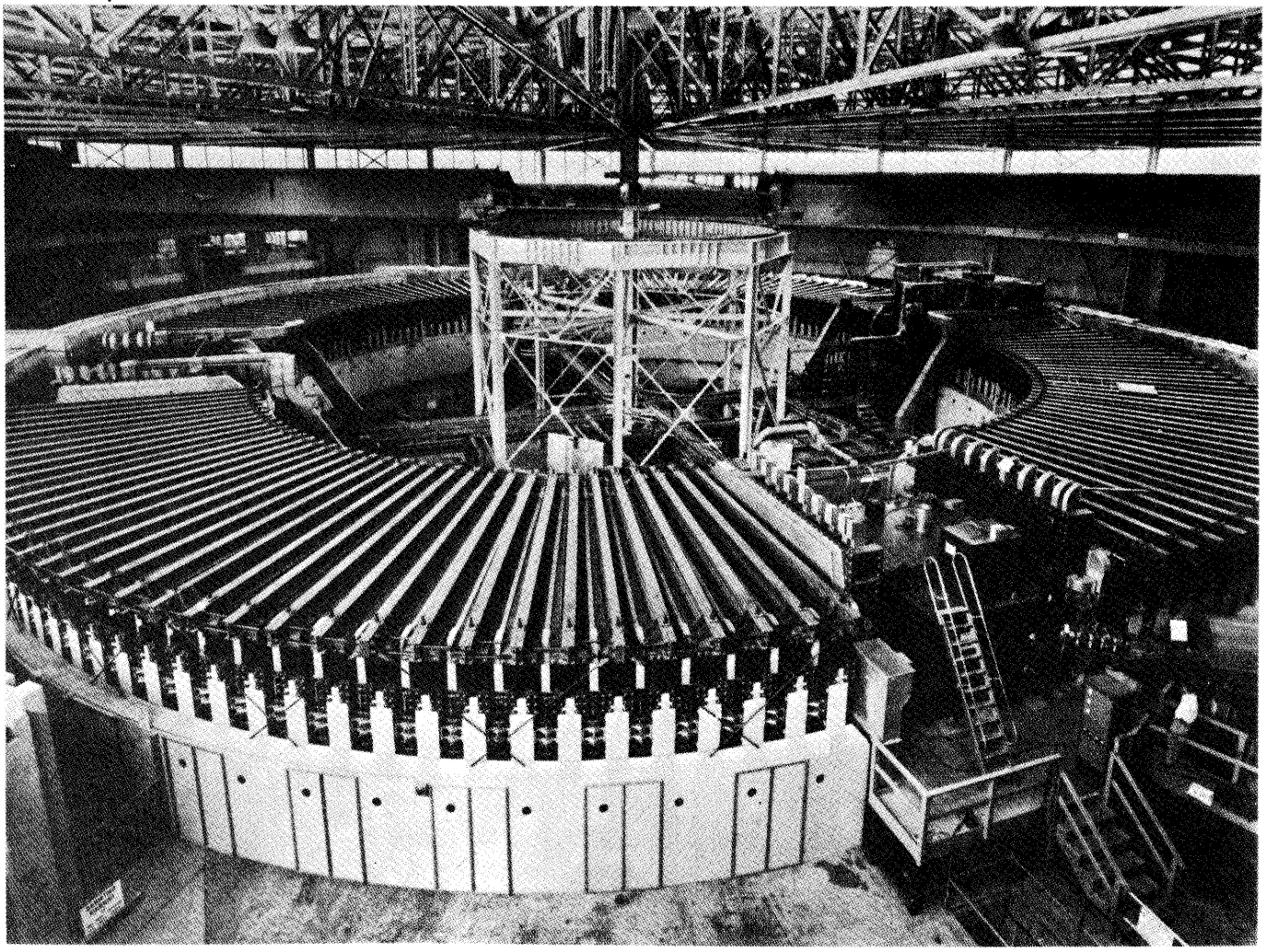


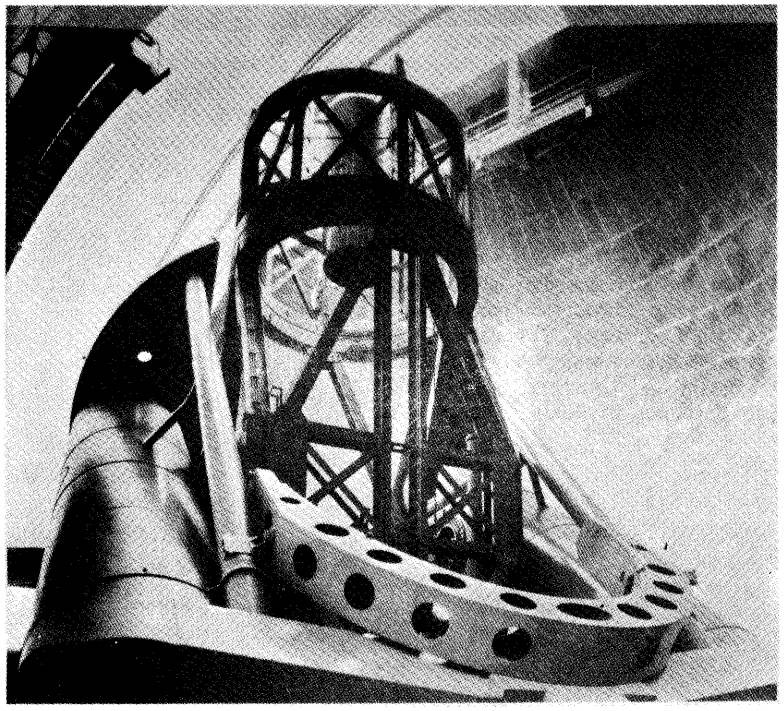
Electroimán construido de alambre superconductor para funcionar a bajas temperaturas. Las bobinas que se ven están calculadas para producir un flujo magnético de 54 000 gauss. Este aparato es el corazón de un laboratorio moderno de bajas temperaturas. *(Varian Associates.)*

El gran radiotelescopio de Australia. El gran casquete mide 63 m aproximadamente de diámetro. Está instalado en un valle tranquilo a 320 km al oeste de Sidney, New South Wales. En este **remoto lugar,** la interferencia eléctrica es mínima. *(Australian News and Information Bureau.)*

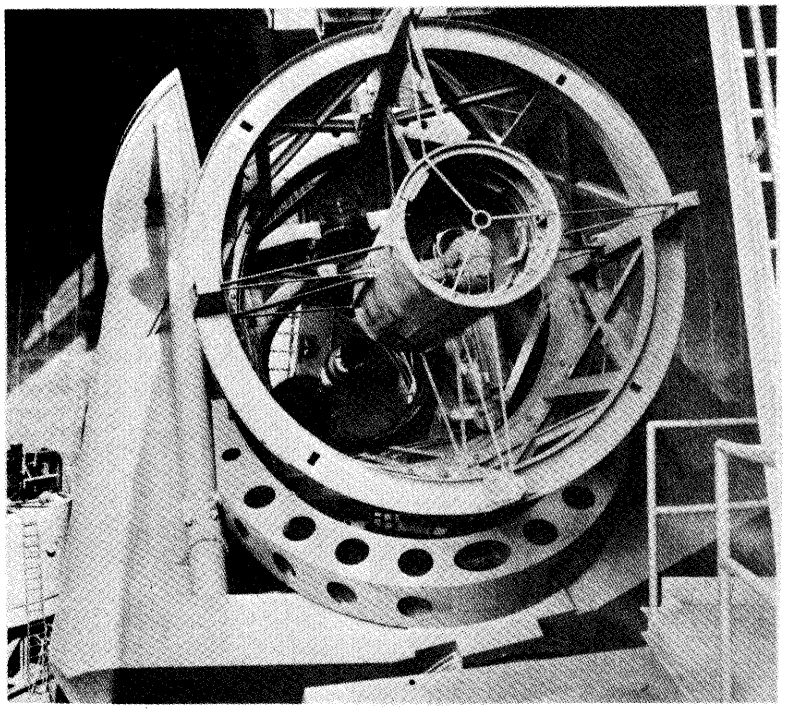


Acelerador de partículas de alta energía: el bevatrón de Berkeley. Los protones se introducen por la parte inferior derecha. *(Lawrence Berkeley Laboratory.)* Actualmente, aceleradores de mucha mayor energía están operando en el Brookhaven Lab., en Long Island, en el CERN de Ginebra, en Serpujov en Rusia y en el NAL, cerca de Chicago.



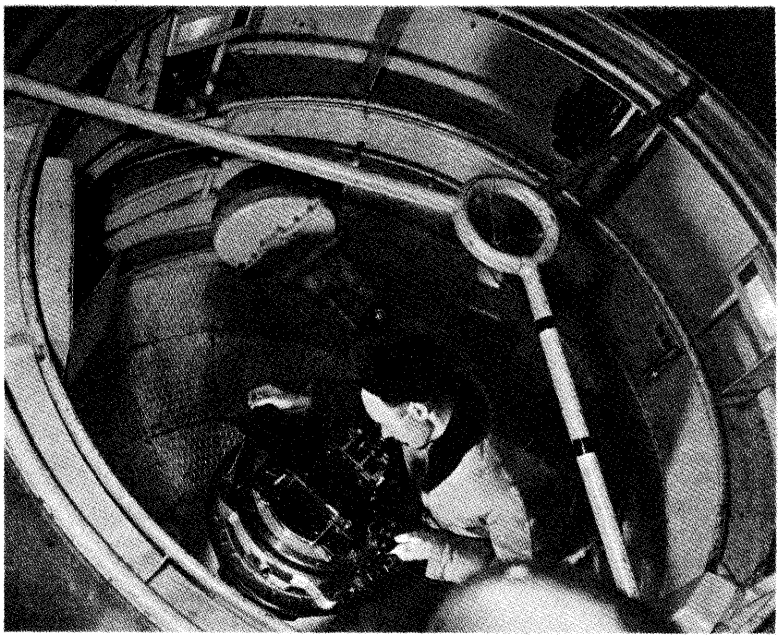


El telescopio Hale de 200 pulgadas apuntado al cenit, visto desde el sur. *(Observatorios de Hale.)*

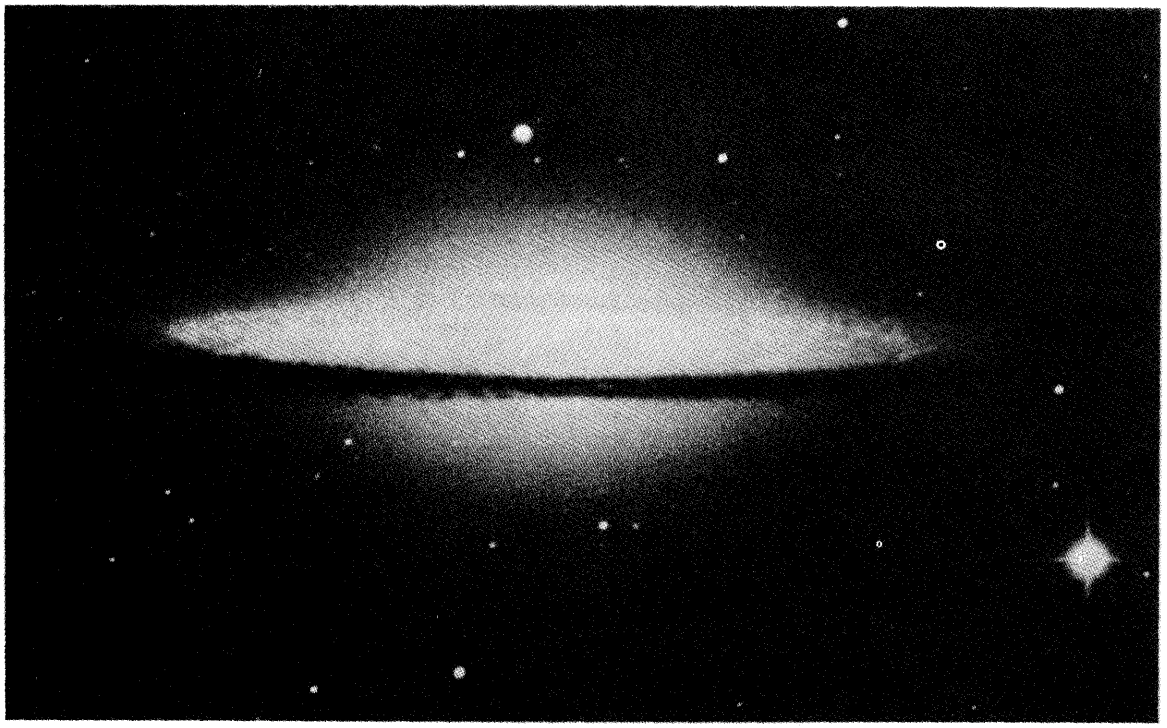


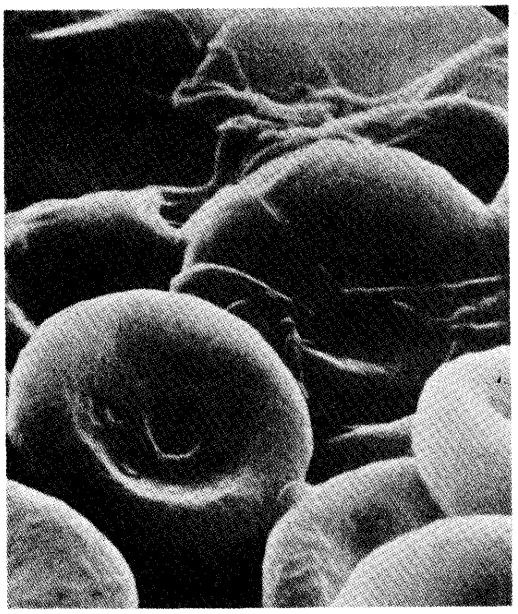
Superficie reflectante del espejo de 200 pulgadas del telescopio Hale y observador situado en la cabina del foco. *(Observatorios de Hale.)*

Observador en la cabina donde se encuentra el foco cambiando la película en el telescopio Hale. *(Observatorios de Hale.)*



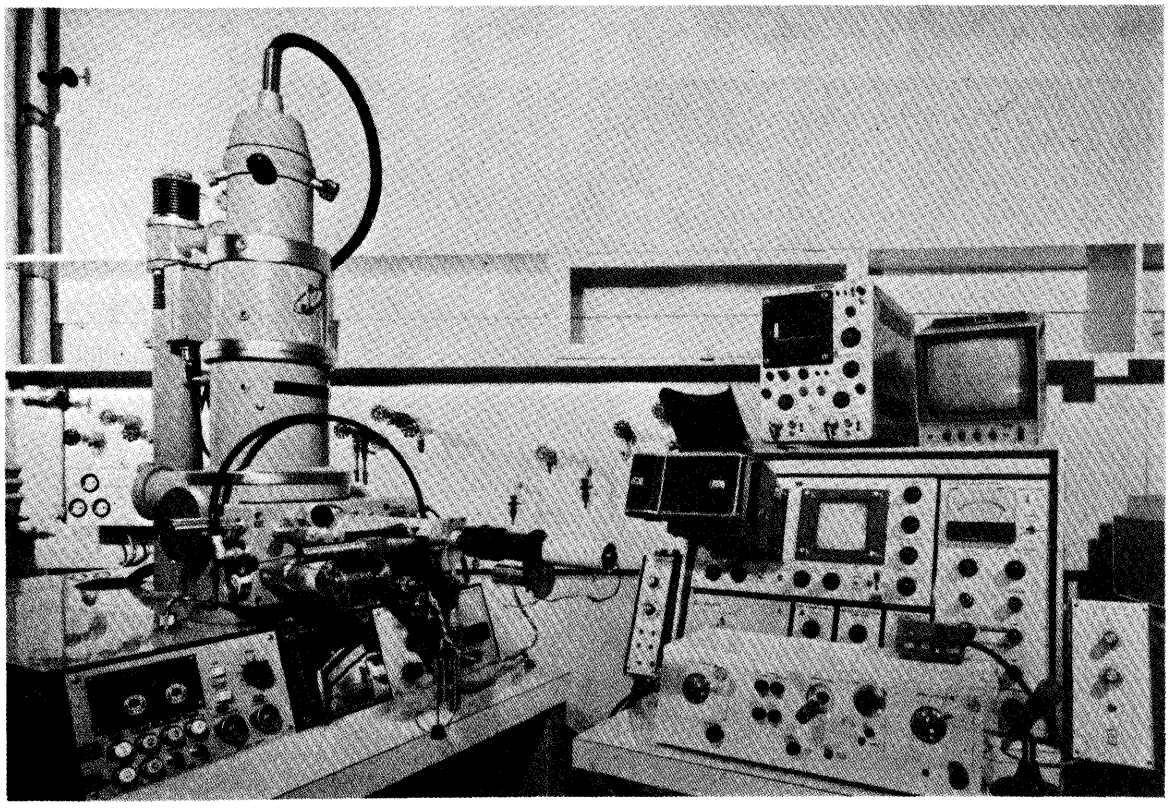
Galaxia espiral NGC 4594 en Virgo, vista de perfil; fotografiada con el telescopio de 200 pulgadas. *(Observatorios de Hale.)*

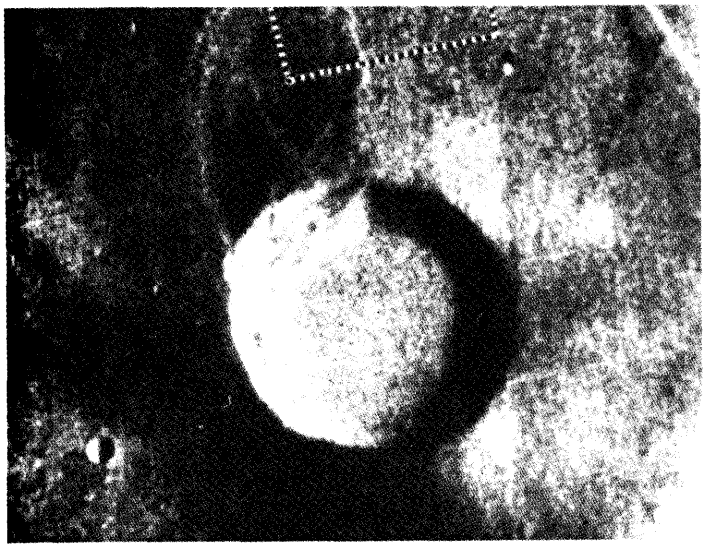




Glóbulos rojos del hombre vistos con un microscopio electrónico y aumentados 15 000 veces. Los objetos con forma de disco son los glóbulos rojos de la sangre conectados por una malla de fibrina. *(Fotografía por cortesía del Dr. Thomas L. Hayes, Donner Laboratory. Lawrence Berkeley Laboratory. Universidad de California, Berkeley.)*

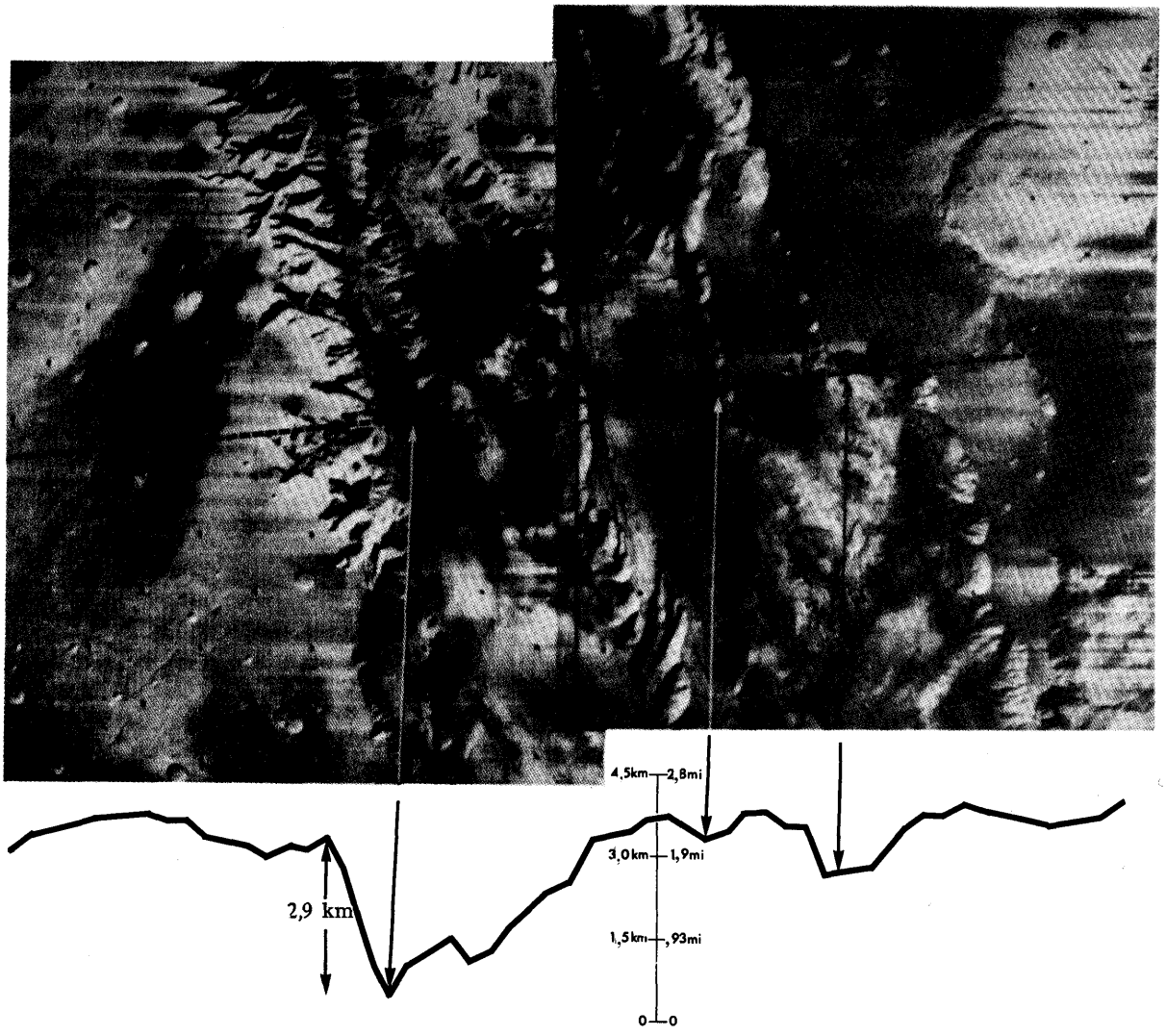
Microscopio electrónico de «scanning» mostrando a la izquierda la columna óptica electrónica que engendra el haz de electrones y, a la derecha, la consola de mandos que contiene el haz del tubo de rayos catódicos. El equipo auxiliar incluye un micromanipulador piezoeléctrico en la columna del instrumento, pantalla de TV, registrador vídeo, cámara polaroide y oscilógrafo monitor de señales. *(Fotografía por cortesía del Dr. Thomas, L. Hayes, Donner Laboratory, Lawrence Berkeley Laboratory. Universidad de California, Berkeley.)*







Cráter marciano de 69 km de ancho (parte superior) fotografiado por el Mariner 9 el 16 de diciembre de 1971. El Sol envía sus rayos por la derecha. El rectángulo de puntos blancos inscribe el área mostrada en la fotografía inferior tomada por la cámara de alta resolución del Mariner el 22 de diciembre. Los cerros, semejantes a los de cola de caballo de la Luna, parecen ocasionados por fallas en la corteza a lo largo de los cuales se ha producido una erupción de lava. Ambas fotografías han sido reforzadas por revelado automático. *(Fotografía por cortesía del Jet Propulsion Laboratory, Instituto de Tecnología de California, NASA.)*



Mosaico de dos fotografías de la región del Lago Tithonius, en Marte, tomada por la nave espacial Mariner 9, en donde se reveló un cañón dos veces más profundo que el Gran Cañón de Arizona, cuando las imágenes fueron comparadas con medidas de presión tomadas por el espectrómetro de violeta a bordo de la nave. Las flechas conectan las profundidades deducidas de las medidas de presión tomadas por el espectrómetro y las características correspondientes de la fotografía. La línea de puntos es la trayectoria observada por el espectrómetro. Las fotografías se tomaron desde una altura de 1722 km y cubrían un área de 644 km transversalmente. *(Fotografía por cortesía de Jet Propulsion Laboratory. Instituto de Tecnología de California, NASA.)*

Contenido

TERMINOLOGÍA Y CONCEPTOS
Notación vectorial
Igualdad de vectores
SUMA DE VECTORES
PRODUCTO DE VECTORES
Producto escalar
Producto vectorial
DERIVADAS VECTORIALES
Velocidad
Aceleración
Ejemplo. Movimiento circular
INVARIANTES
Ejemplos
Operaciones vectoriales elementales
Problemas
Notas matemáticas:
Derivadas respecto al tiempo, velocidad y aceleración
Angulos
La función e^{α}
Desarrollo en serie
Vectores y coordenadas polares esféricas
Fórmulas de geometría analítica
Identidades vectoriales útiles
Lecturas suplementarias



Vectores

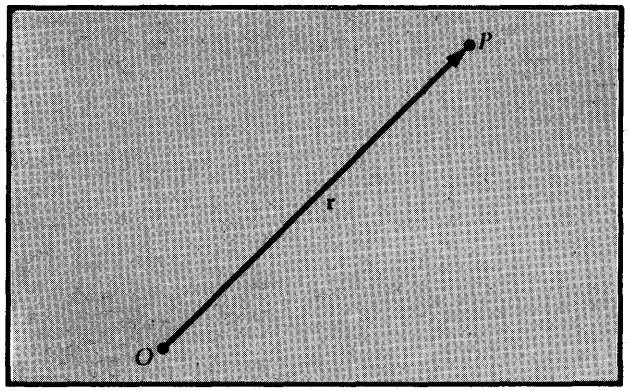


FIG. 2.1 El vector **r** representa la posición de un punto *P* respecto a otro *O* considerado como origen.

TERMINOLOGÍA Y CONCEPTOS

La terminología es un ingrediente esencial del pensamiento abstracto. Es difícil pensar fácil y claramente sobre conceptos abstractos y complejos en un lenguaje que no posee las palabras adecuadas para tales conceptos. Para expresar nuevos conceptos científicos se inventan nuevas palabras que se añaden a los idiomas; muchas de estas palabras proceden de raíces clásicas griegas o latinas. Si satisface las necesidades de la comunidad científica, una palabra nueva puede ser adoptada en muchos idiomas modernos. Así, por ejemplo, *vector* en español es *vector* en inglés, *vecteur* en francés, *Vektor* en alemán BEKTOP (pronúnciese «vector»), en ruso.

Un vector es una magnitud que tiene módulo, dirección y sentido y se combina con otros vectores de acuerdo con reglas específicas *. En el estudio de la mecánica (y otras ramas de la física) encontraremos magnitudes (velocidad, fuerza, campo eléctrico, momento dipolar magnético) que tienen magnitud, dirección y sentido y, en consecuencia, es importante desarrollar el lenguaje y las técnicas necesarias para el manejo de estas magnitudes. Aunque el análisis vectorial suele considerarse como una rama de las matemáticas, su valor en física es tan grande que merece la inclusión aquí de una introducción.

Notación vectorial. Como los símbolos forman el lenguaje de las matemáticas, una parte importante del arte del análisis matemático es la técnica de utilizar bien la notación. La notación vectorial tiene dos grandes propiedades:

1. La formulación de una ley física en función de los vectores es independiente de los ejes coordenados que se escojan. La notación vectorial ofrece una terminología en la que los enunciados tienen un significado físico sin introducir en ningún caso un sistema coordenado.

2. La notación vectorial es concisa. Muchas leyes físicas tienen formulaciones sencillas y diáfanas que se desfiguran cuando se escriben referidas a un sistema coordenado particular.

Aunque al resolver un problema físico puede convenir la utilización de sistemas coordenados especiales, deberemos establecer leyes de la física en forma vecto-

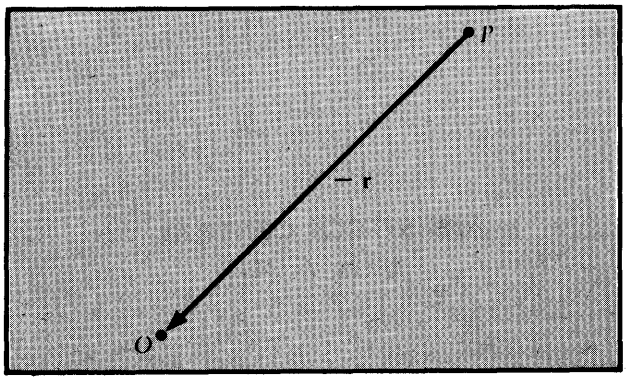


FIG. 2.2 El vector **—r** tiene el mismo módulo y dirección, pero sentido opuesto que **r**.

(*) Este significado de la palabra vector es una ampliación natural de su utilización inicial en astronomía, ahora en desuso: recta imaginaria que une a un planeta, moviéndose alrededor del foco de una elipse, con dicho punto. La regla específica se da en la página 35.

rial siempre que sea posible. Algunas de las leyes complicadas que no pueden expresarse en forma vectorial, pueden serlo en forma tensorial. Un *tensor* es una generalización de un vector, que incluye a la magnitud vectorial como caso especial. El análisis vectorial tal y como lo conocemos hoy es fundamentalmente el resultado del trabajo realizado hacia finales del siglo diecinueve por Josiah Willard Gibbs y Oliver Heaviside.

La notación vectorial que adoptamos aquí es la siguiente. En la pizarra, una magnitud vectorial se representa colocando una línea ondulada bajo la letra **A**, o poniéndole encima una flechita; los vectores en los libros impresos siempre aparecen en negritas. El módulo de un vector se imprime en cursiva; A es el módulo de **A**; también se escribe $|\mathbf{A}|$. Un vector unitario es un vector de longitud unidad; un vector unitario en la dirección de **A** se escribe con un signo circunflejo encima, tal como $\hat{\mathbf{A}}$. Resumiremos esta notación mediante la identidad

$$\mathbf{A} \equiv \hat{\mathbf{A}}A \equiv A\hat{\mathbf{A}}$$

En las figuras 2.1 a 2.4 se muestra un vector, el negativo del mismo vector, la multiplicación por un escalar y un vector unitario.

La utilidad y aplicación de los vectores a los problemas físicos está basada esencialmente en la geometría euclidiana. La enunciación de una ley en términos vectoriales normalmente lleva consigo la hipótesis de la validez de esta geometría. Si la geometría no es euclidiana, no es posible sumar dos vectores de un modo sencillo y sin ambigüedad. Para el espacio curvo existe una formulación mucho más general, la geometría métrica diferencial, que es el lenguaje de la relatividad generalizada, dominio de la física en el que la geometría euclidiana no es ya suficientemente precisa.

Hemos considerado que un vector es una magnitud que tiene dirección además de módulo. Esta propiedad no se refiere en absoluto a ningún sistema coordenado, aunque suponemos que puede definirse, por ejemplo, con referencia a la sala del laboratorio, estrellas fijas, etcétera. Veremos, sin embargo, que no todas las magnitudes que tienen módulo y dirección son necesariamente vectores, tales como las rotaciones finitas (véase más adelante en esta sección). Una magnitud que tiene módulo pero *no* dirección es un *escalar*. El módulo de un vector es un escalar. La temperatura y la masa

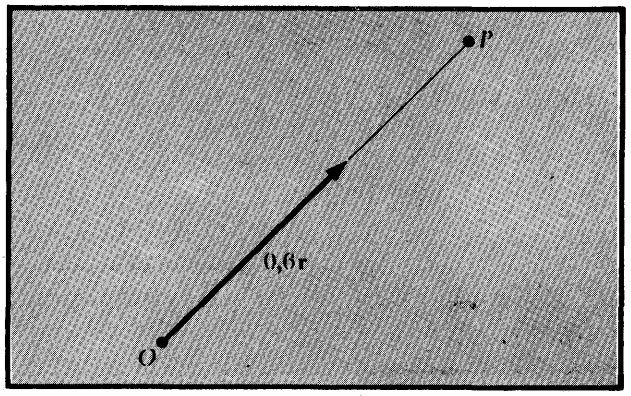


FIG. 2.3 El vector 0,6**r** tiene la misma dirección y sentido que **r**, pero su módulo es 0,6*r*.

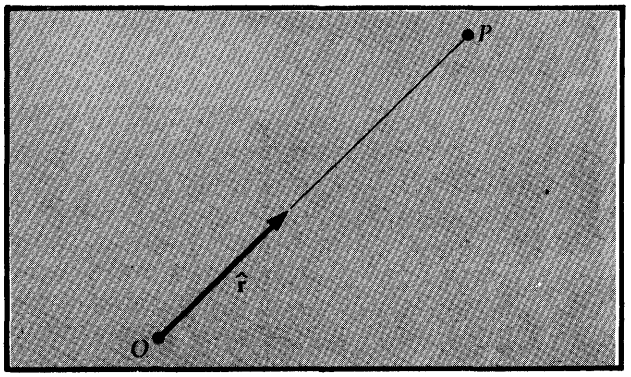


FIG. 2.4 El vector $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario en la dirección de **r**. Obsérvese que $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}r$.

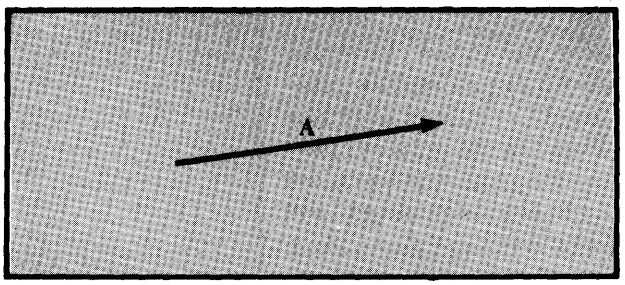
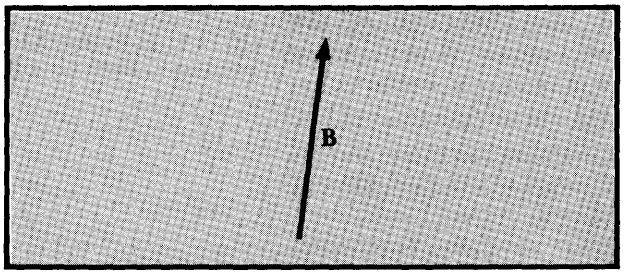
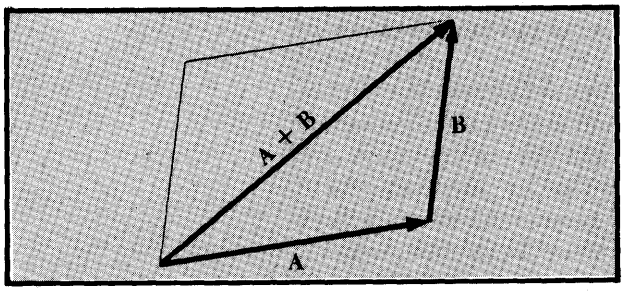


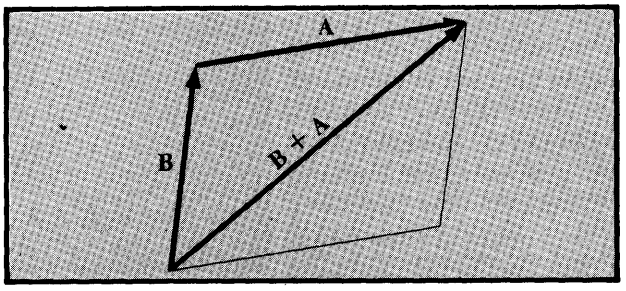
FIG. 2.5 *a*) Vector **A**.



b) Vector **B**.



c) Vector suma **A** + **B**.



d) El vector suma **B** + **A** es igual a **A** + **B**.

son escalares. En cambio, la velocidad **v** y la fuerza **F** son vectores.

Igualdad de vectores. Una vez desarrollada la notación procederemos a realizar algunas operaciones vectoriales: suma, resta y multiplicación. Dos vectores, **A** y **B** que representen magnitudes físicas similares (por ejemplo, fuerzas) se dice que son iguales cuando poseen el mismo módulo, dirección y sentido; se escribe así, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Un vector no tiene necesariamente que estar ligado a una posición determinada, aunque puede referirse a una magnitud definida en un punto particular. Dos vectores pueden compararse aunque midan magnitudes físicas definidas en distintos puntos del espacio y diferentes instantes. Si no tuviéramos confianza, basada en la experimentación, que podemos considerar plano el espacio, es decir, euclidiano —excepto quizás a distancias enormes— no podríamos entonces comparar sin ambigüedad dos vectores en puntos diferentes (véase la Nota Matemática 1 al final del Cap. 2).

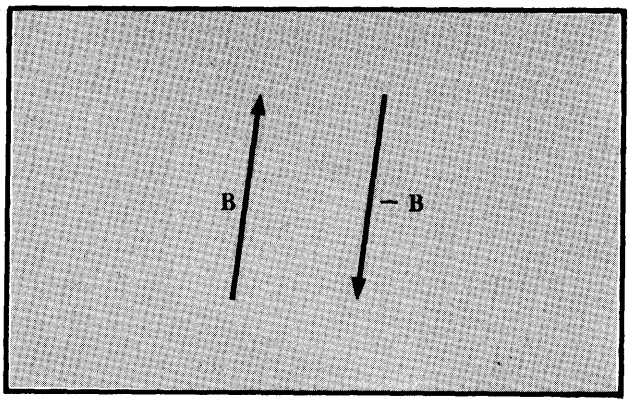
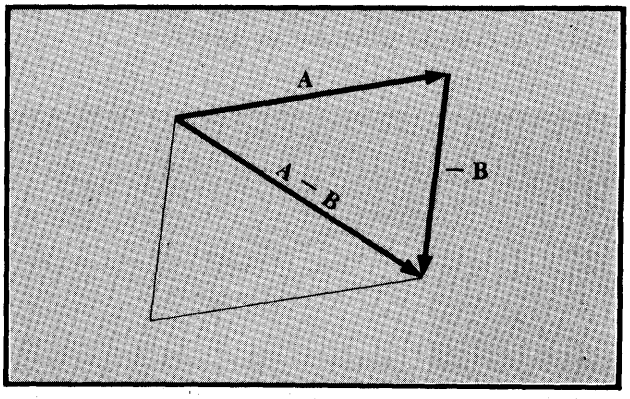


FIG. 2.6 *a*) Vectores **B** y $-\mathbf{B}$.

SUMA VECTORIAL

Un vector se representa geométricamente por un segmento lineal dirigido, o flecha, cuya longitud en unidades a una escala definida es igual a la magnitud del vector. La suma de dos vectores **A** y **B** se define por la construcción geométrica indicada en las figuras 2.5 *a* a *c*. Esta construcción se llama con frecuencia *ley del paralelogramo de la adición vectorial.* La suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ se define trasladando **B** paralelamente a sí mismo hasta que el origen de **B** coincida con el extremo de **A**. El vector dibujado desde el origen de **A** al extremo de **B** es la suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. De la figura se deduce que $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$, es decir, la suma vectorial tiene la propiedad conmutativa, como indica la fig. 2.5 *d*. La substracción de vectores se define mediante las figuras 2.6 *a* y *b* con $\mathbf{B}+(-\mathbf{B})= 0$, que define el vector negativo.



b) Obtención de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$; vector diferencia.

La suma vectorial satisface la relación $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$, es decir, satisface la propiedad asociativa (fig. 2.7). La suma de un número finito de vectores es independiente del orden en que se sumen. Si $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$, entonces sumando **B** en ambos miembros obtendremos $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$. Si k es un escalar

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \qquad (2.1)$$

de modo que la multiplicación de un vector por un escalar satisface la propiedad distributiva.

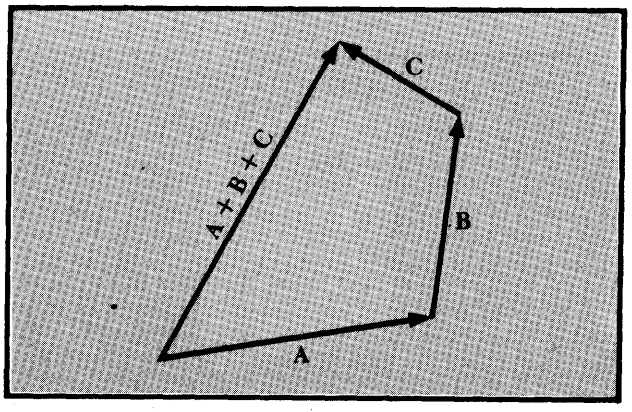


FIG. 2.7 Suma de tres vectores: $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$. Compruébese que esta suma es igual a $\mathbf{B} + \mathbf{A} + \mathbf{C}$.

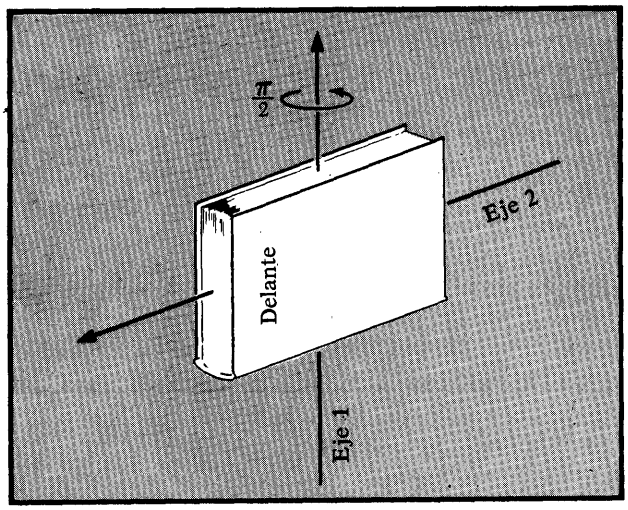
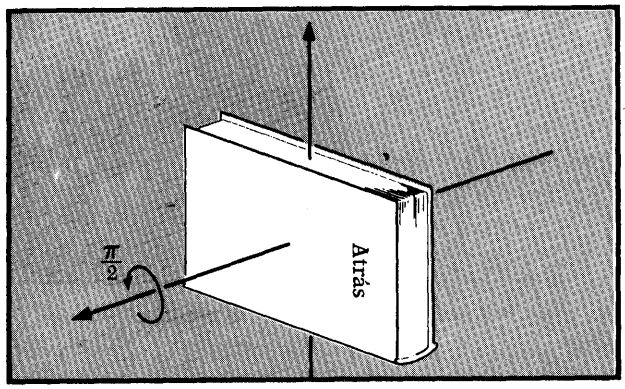
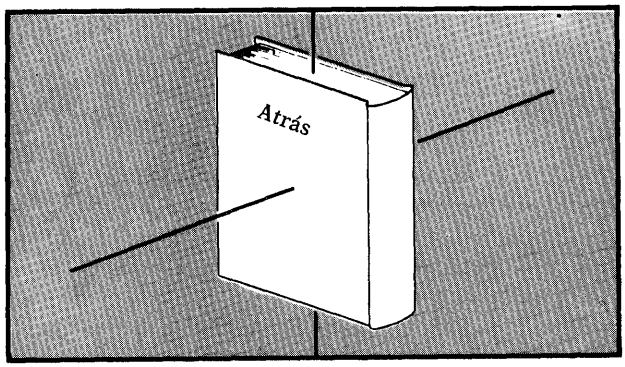


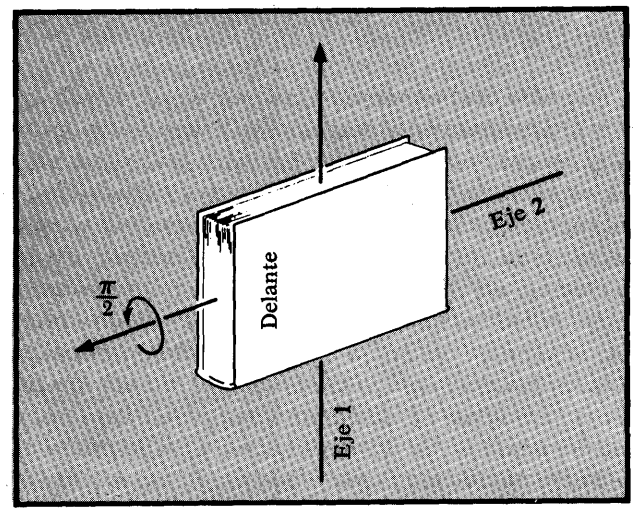
FIG. 2.8 *a*) Orientación original del libro. Se le hace girar $\pi/2$ radianes alrededor del eje 1.



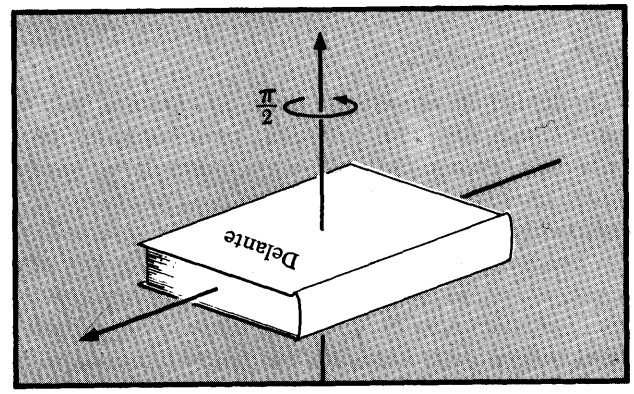
b) Orientación después de una rotación de $\pi/2$ radianes alrededor del eje 1.



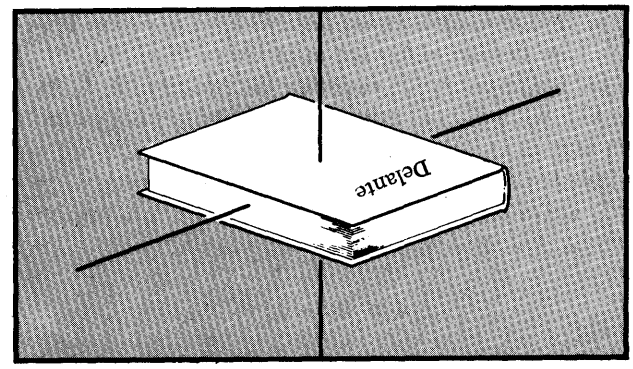
c) Orientación después de una rotación posterior de $\pi/2$ radianes alrededor del eje 2.



d) Orientación original del libro.



e) Orientación después de una rotación de $\pi/2$ radianes alrededor del eje 2.



f) Orientación después de una rotación posterior de $\pi/2$ radianes alrededor del eje 1.

¿Cuándo es representable una magnitud física por un vector? Un desplazamiento es un vector, ya que describe tanto la dirección de la línea desde la posición inicial a la final como la longitud de la línea; el ejemplo de adición dado anteriormente se reconoce fácilmente aplicándolo a los desplazamientos en el espacio euclidiano. Además de los desplazamientos existen otras magnitudes físicas que tienen las mismas leyes de combinación y las mismas propiedades de invariancia que los desplazamientos. Estas magnitudes pueden representarse también por vectores. Para que una magnitud sea vectorial debe satisfacer dos condiciones:

1. Debe cumplir la ley de adición del paralelogramo.
2. Debe tener un módulo y una dirección y sentido independientes de la elección del sistema de coordenadas.

Las rotaciones finitas no son vectores. No todas las magnitudes que tienen módulo y dirección son necesariamente vectores. Por ejemplo, la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje particular fijo en el espacio tiene módulo (el ángulo de rotación) y dirección (la dirección del eje). Pero dos rotaciones como éstas no se combinan de acuerdo con la ley vectorial de la adición, a no ser que los ángulos de rotación sean infinitamente pequeños *. Esto se comprueba fácilmente si los dos ejes son perpendiculares entre sí y las rotaciones son de $\pi/2$ radianes (90 grados). Considérese el objeto (un libro) de la fig. 2.8 *a*. La rotación (1) lo lleva a la posición de la fig. 2.8 *b* y otra rotación (2) a continuación sobre otro eje, deja el objeto como en la fig. 2.8 *c*. Pero si aplicamos al objeto, orientado como al principio (fig. 2.8 *d*), primero la rotación (2) (fig. 2.8 *e*) y luego la (1), el objeto termina como indica la fig. 2.8 *f*. La orientación en la sexta figura *no* es la misma que la existente en la tercera. Evidentemente, estas rotaciones no cumplen la propiedad conmutativa de la suma. A pesar del hecho de que tienen módulo y dirección, las rotaciones finitas no pueden representarse como vectores.

PRODUCTOS DE VECTORES

Aunque no existe razón para preguntarse si la suma de dos vectores es un escalar o un vector, tal cuestión tiene importancia en lo que se refiere al producto de dos vectores. Existen dos modos de definir el producto de

(*) Las velocidades angulares son vectores y, en cambio, las rotaciones angulares no lo son.

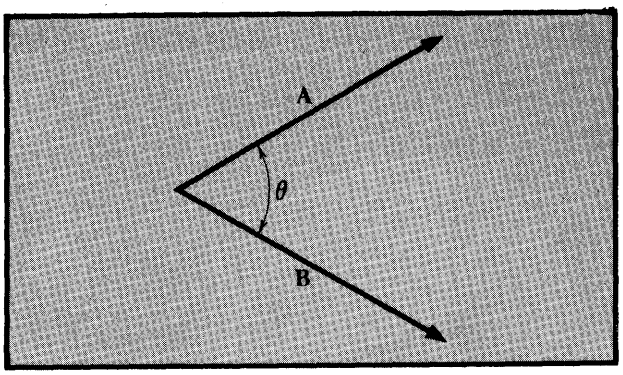
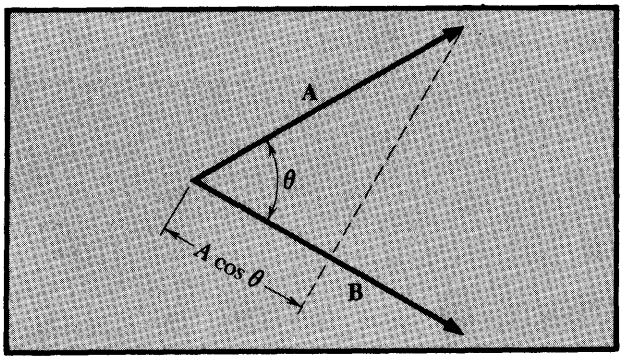
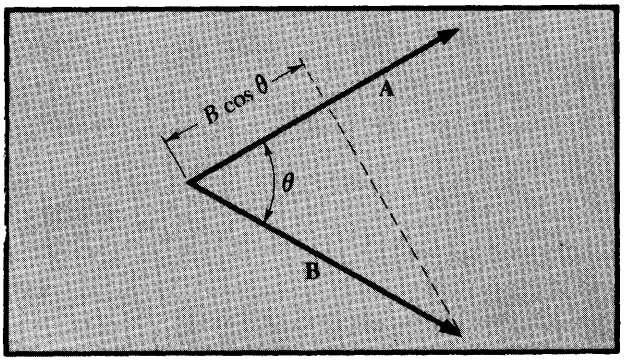


FIG. 2.9 *a*) Para obtener **A** · **B** llevar los vectores **A** y **B** hasta un origen común.



b) $B(A\cos\theta) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.



c) $A(B\cos\theta) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Aquí, la letra griega theta, θ, designa el ángulo comprendido entre **A** y **B**.

dos vectores, de gran utilidad ambos. Los dos tipos satisfacen la ley distributiva de la multiplicación: el producto de **A** por la suma de **B** + **C** es igual a la suma de los productos de **A** por **B** más **A** por **C**. Uno de los productos es un escalar y el otro se puede considerar un vector en la mayoría de las aplicaciones. Los dos son útiles en física. Otras posibles definiciones del producto de dos vectores no son de utilidad. ¿Por qué *AB* no es una definición útil del producto de dos vectores? Por *AB* queremos indicar el producto ordinario, $|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|$, de los módulos de **A** y **B**. Obsérvese que si $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, entonces en general $AD \neq AB + AC$. Esta carencia de la propiedad distributiva hace que *AB* sea inútil como definición de producto de **A** y **B**.

Producto escalar de dos vectores. Se define el producto escalar de **A** y **B** como el número que se obtiene multiplicando el módulo de **A** por el de **B** y por el coseno del ángulo que forman entre sí (figs. 2.9 *a* a *c*). El producto escalar es una magnitud escalar y se representa por el símbolo

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \equiv AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B})} \qquad (2.2)$$

Por cos (**A**,**B**) designamos el coseno del ángulo que forman **A** y **B**. Vemos que en esta definición del producto escalar no está implicado en absoluto ningún sistema coordenado. Observemos que cos (**A**,**B**) = cos (**B**,**A**) de modo que el producto escalar es conmutativo:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad (2.3)$$

que se lee «**A** multiplicado escalarmente por **B**».

Si el ángulo entre **A** y **B** está comprendido entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, entonces cos (**A**,**B**) y **A** · **B** serán números negativos. Si **A** = **B**, entonces cos (**A**,**B**) = 1 y

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A^2 = |\mathbf{A}|^2$$

Si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ y $A \neq 0$, $B \neq 0$, decimos que **A** es *ortogonal* a **B** o perpendicular a **B**. Obsérvese que cos (**A**,**B**) = $\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}$, de modo que el producto escalar de dos vectores unitarios es precisamente el coseno del ángulo que forman. El módulo de la proyección de **B** en la dirección de **A** es

$$B\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = B\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{A}}$$

siendo $\hat{\mathbf{A}}$ el vector unitario en la dirección de **A**. La proyección de **A** en la dirección de **B** es

$$A \cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{B}}$$

La multiplicación escalar no tiene inversa: si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = b$, no hay una solución única para **X**. Dividir por un vector es una operación sin definir, carente de significado.

Componentes, magnitudes y cosenos directores. Sean $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ tres vectores unitarios ortogonales * que definen un sistema cartesiano como en la fig. 2.10 *a*. Un vector arbitrario **A** puede escribirse como

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}, \tag{2.4}$$

en donde A_x, A_y y A_z se denominan *componentes* de **A**, como se ilustra en la fig. 2.10 *b*. Fácilmente se ve que $A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, ya que

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = A_x\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + A_z\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = A_x$$

y

$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$
$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 1$$

En función de estos componentes, A_x, A_y y A_z, la magnitud de **A** es

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{(A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})}$$
$$= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{2.5}$$

Si deseamos escribir una expresión para el vector unitario $\hat{\mathbf{A}}$ (también indicado en la fig. 2.10 *b*), vemos que

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}}{A} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{A}}{A} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{A}}{A}$$
$$= \hat{\mathbf{x}}\frac{A_x}{A} + \hat{\mathbf{y}}\frac{A_y}{A} + \hat{\mathbf{z}}\frac{A_z}{A} \tag{2.6}$$

es tal expresión. De la fig. 2.11 y la Ec. (2.6) deducimos que los ángulos que **A** forma con los ejes *x*, *y*, *z* tienen los cosenos A_x/A, A_y/A y A_z/A, o sea $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$. Se denominan *cosenos directores* y tienen la propiedad de que la suma de los cuadrados de los tres cosenos directores es igual a la unidad, como fácilmente puede verse con ayuda de la Ec. (2.5).

(*) La palabra *ortogonal* se utiliza aquí en el sentido de *mutuamente perpendicular*.

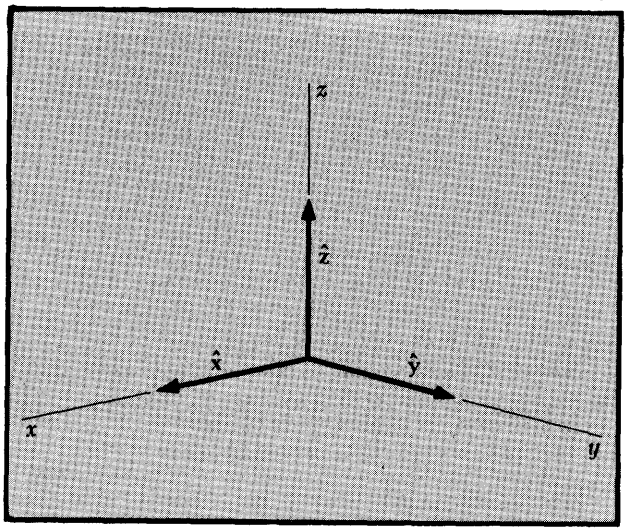
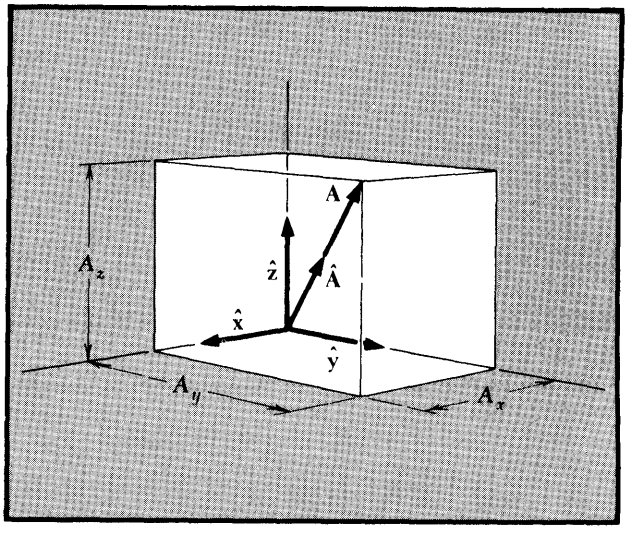


FIG. 2.10 *a*) Vectores unitarios ortogonales cartesianos $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$.



b) $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z$.

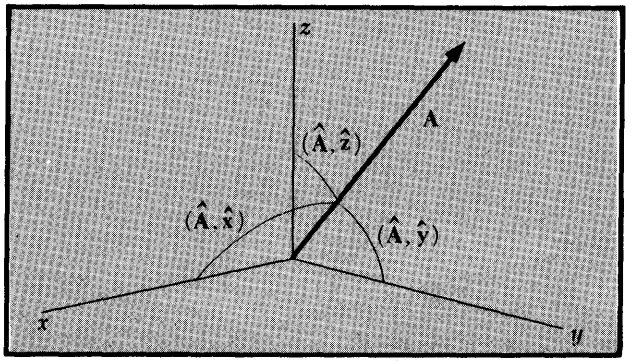


FIG. 2.11 Los cosenos directores se refieren a los ángulos indicados.

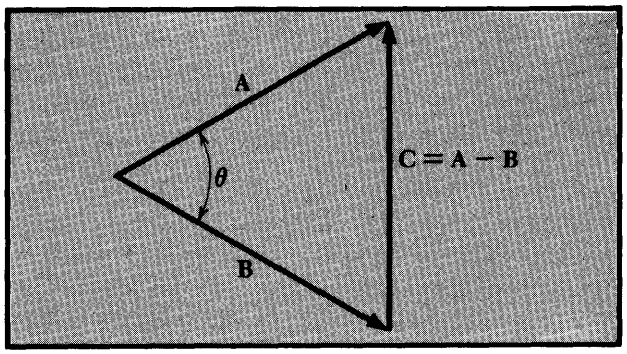
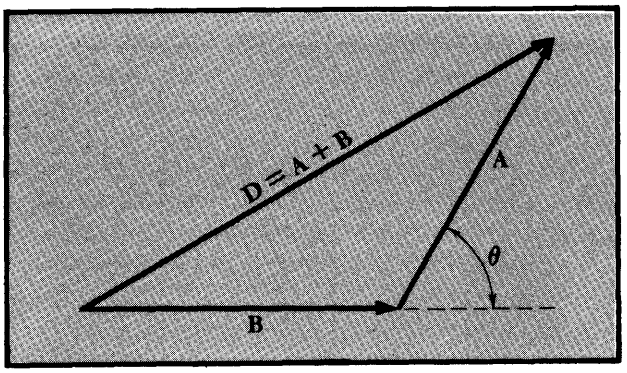


FIG. 2.12 *a)* $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = C^2 = (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})$
$= A^2 + B^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$
$= A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta.$



b) $\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} = D^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$
$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta.$

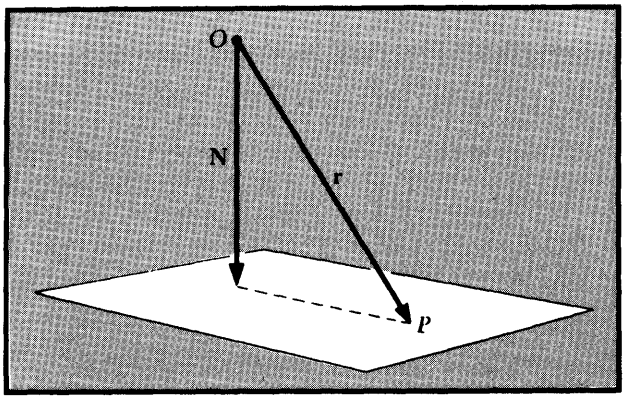


FIG. 2.13 Ecuación de un plano; **N** es la normal al plano desde el origen *O*. La ecuación del plano es $\mathbf{N}\cdot\mathbf{r} = N^2$.

El producto escalar de dos vectores **A** y **B** se recuerda fácilmente en función de los componentes

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} \qquad (2.7)$$

Aplicaciones del producto escalar. Veamos varias aplicaciones de los productos escalares:

1. *Ley de los cosenos.* Sea $\mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{C}$; realizando el producto escalar de cada miembro de esta expresión por sí mismo, tendremos

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}$$

o

$$A^2 + B^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = C^2$$

que es exactamente la conocida relación trigonométrica

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = C^2 \qquad (2.8)$$

El coseno del ángulo comprendido entre las direcciones de los dos vectores es

$$\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}$$

como se deduce de la Ec. (2.2) (véase figs. 2.12 *a* y *b*).

2. *Ecuación de un plano* (fig. 2.13). Sea **N** una normal al plano considerado que se dibuja desde un origen *O* que no pertenece al plano. Sea **r** un vector arbitrario que va del origen *O* a un punto cualquiera *P* del plano. La proyección de **r** sobre **N** debe ser igual en módulo a *N*. Así, pues, el plano se define por la ecuación

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{N} = N^2 \qquad (2.9)$$

Para comprobar la identidad de esta corta expresión con la expresión normal de la geometría analítica para la ecuación de un plano

$$ax + by + cz = 1$$

escribamos **N** y **r** en función de sus componentes N_x, N_y, N_z y x, y, z. Ahora la Ec. (2.9) adquiere la forma

$$(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})\cdot(N_x\hat{\mathbf{x}} + N_y\hat{\mathbf{y}} + N_z\hat{\mathbf{z}}) = N^2$$

que se reduce a

$$x\frac{N_x}{N^2} + y\frac{N_y}{N^2} + z\frac{N_z}{N^2} = 1$$

3. *Vectores eléctrico y magnético en una onda electromagnética.* Si $\hat{\mathbf{k}}$ es el vector unitario en la dirección de propagación de la onda electromagnética plana en el espacio libre (fig. 2.14), entonces (como veremos en los Vols. 2 y 3) los vectores campo eléctrico y de inducción **E** y **B**, deben estar en un plano normal a $\hat{\mathbf{k}}$ y deben ser perpendiculares entre sí. Podemos expresar la condición geométrica por las relaciones

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$$

4. *Trabajo realizado por unidad de tiempo.* En física elemental (véase también el Cap. 5) se vio que el trabajo realizado por una fuerza **F** por unidad de tiempo sobre una partícula que se mueve con velocidad **v** es igual a $Fv\cos(\mathbf{F},\mathbf{v})$. Se reconoce fácilmente que esta expresión es precisamente el producto escalar

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Si escribimos de un modo general la derivada dW/dt como un símbolo para el trabajo realizado por unidad de tiempo, resulta (fig. 2.15)

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{2.10}$$

5. *Variación de volumen por unidad de tiempo.* Sea **S** un vector normal a una área plana de valor S y designemos por **v** la velocidad con que se mueve dicha área. Es fácil darse cuenta de que el volumen barrido por el área S por unidad de tiempo es un cilindro cuya área de la base es S y cuya generatriz es v (fig. 2.16), o sea $\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$. La variación del volumen barrido por unidad de tiempo es, por tanto,

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \tag{2.11}$$

Producto vectorial *. Existe otro tipo de producto de dos vectores ampliamente utilizado en física. Este

(*) Esta sección puede omitirse en una primera lectura. El producto vectorial se utiliza en el Cap. 3, el cual también puede omitirse; sólo al comenzar el Cap. 6 resulta esencial.

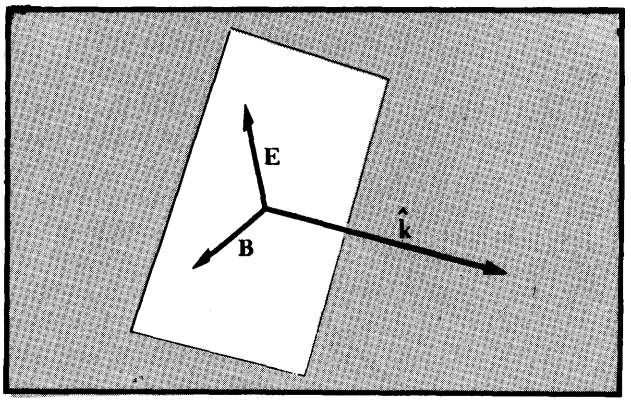


FIG. 2.14 Los campos eléctrico y magnético en una onda plana electromagnética en el espacio libre son perpendiculares a la dirección de propagación $\hat{\mathbf{k}}$. Así, pues, $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0$; $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$.

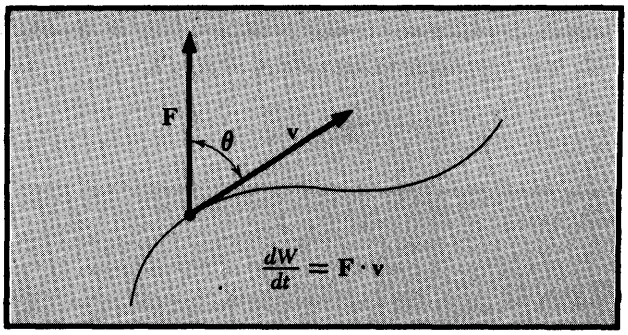


FIG. 2.15 Trabajo que por unidad de tiempo realiza una fuerza **F** sobre una partícula moviéndose con velocidad **v**.

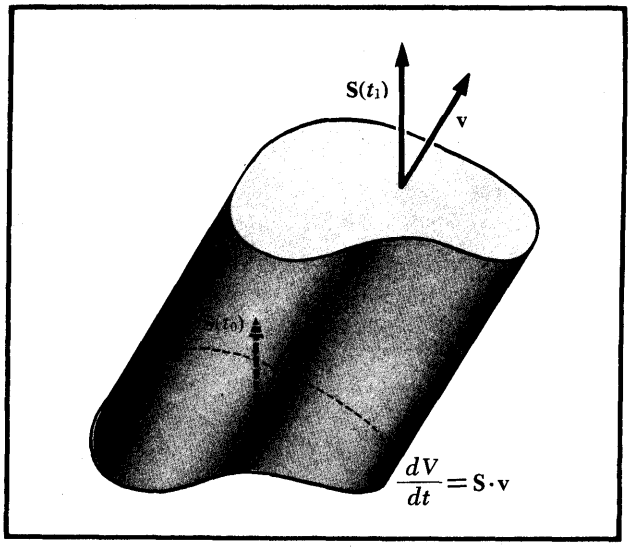


FIG. 2.16 Volumen que por unidad de tiempo dv/dt, barre el área **S** que se mueve con velocidad **v**.

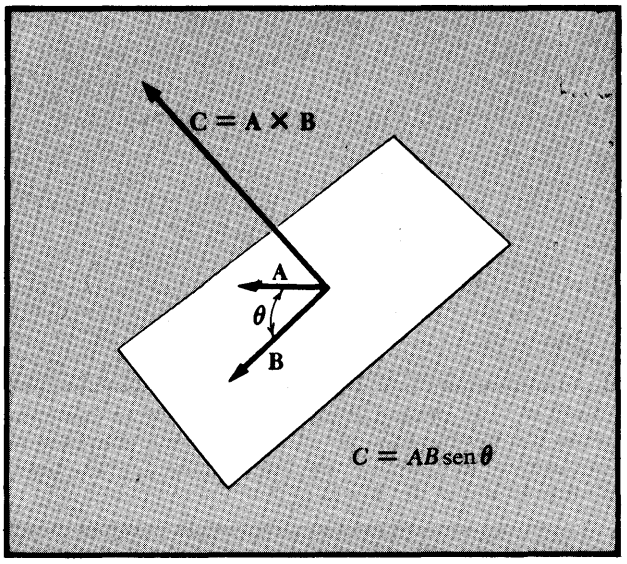


FIG. 2.17 *a*) Producto vectorial $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

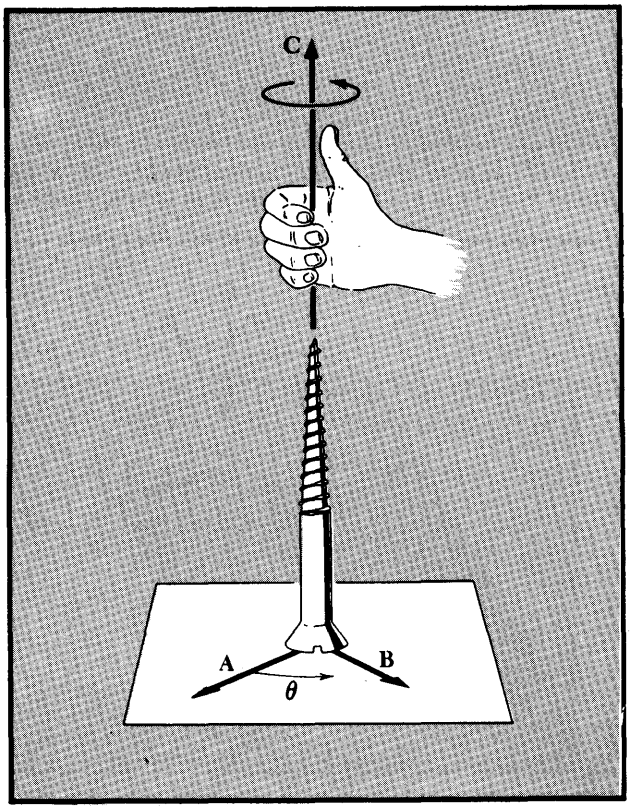
producto no es un escalar sino más bien un vector, pero un vector en cierto sentido restringido. El *producto vectorial* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se define como el vector normal al plano en el que están contenidos **A** y **B** y que tiene por módulo AB (sen **A**,**B**) (fig 2.17 *a*):

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}AB|\text{sen}(\mathbf{A},\mathbf{B})|} \qquad (2.12)$$

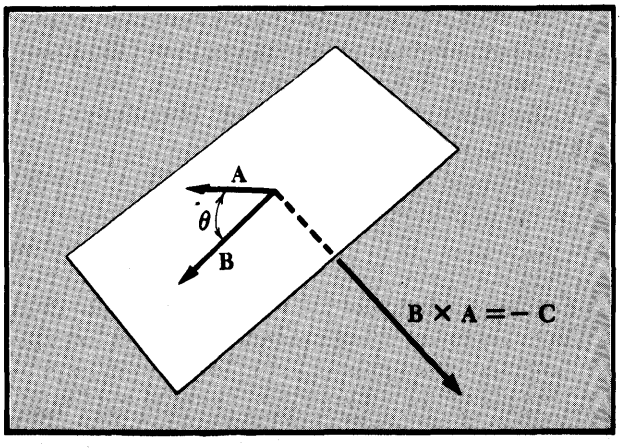
Y se lee «**A** multiplicado vectorialmente por **B**». Se determina el sentido de **C** mediante un convenio fijo indicado por la *regla del sacacorchos o del tornillo:* El vector **A**, que es el primer factor, se hace girar según el ángulo menor que forme con **B** hasta hacerle coincidir con la dirección de este último. El sentido de **C** coincidirá entonces con el avance de un sacacorchos o tornillo con rosca a derechas (rosca normal en la mayoría de los países) cuando se le hace girar del mismo modo que al vector **A**, como se ve en la fig. 2.17 *b*.

Enunciemos la regla para la dirección y el sentido de **C** de otro modo: Primero, coloquemos juntos los orígenes de los vectores **A** y **B** —así se define un plano. El vector **C** es perpendicular a este plano; esto es, el producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular tanto a **A** como a **B**. Gírese **A** hacia **B** recorriendo el menor de los dos ángulos posibles—, cúrvense los dedos de la mano derecha en el sentido en que gira **A** y el pulgar señalará la dirección y sentido de $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Obsérvese que, debido a este convenio de signos, $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ es un vector de signo opuesto a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (fig. 2.17 *c*):

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \qquad (2.13)$$



b) Regla del sacacorchos.



c) El producto vectorial $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ es opuesto a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Así, pues, el producto vectorial no es conmutativo. Se deduce de la Ec. (2.12) que $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$, de modo que el producto vectorial de un vector por sí mismo es cero. El producto vectorial obedece la ley distributiva

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

La demostración, que es algo fatigosa, puede encontrarse en cualquier texto de análisis vectorial *.

Producto vectorial en función de las coordenadas cartesianas. Del mismo modo que hemos encontrado en la Ec. (2.6) los cosenos directores del vector **A**, podríamos determinar los senos de los ángulos que **A** forma con los ejes cartesianos. Esto es poco conveniente, pues los senos se hallan más fácilmente a partir de los cosenos. Sin embargo, a veces es útil expresar el producto vectorial de dos vectores en función de sus componentes:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \times (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) \\ &= (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}})A_xB_y + (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}})A_xB_z + (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}})A_yB_z \\ &\quad + (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}})A_yB_x + (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}})A_zB_x + (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}})A_zB_y\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado el resultado $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = 0$. La cuestión que surge en seguida es: ¿Cuánto vale $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}$? ¿Es $\hat{\mathbf{z}}$ o $-\hat{\mathbf{z}}$? Al escoger el resultado $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ hacemos uso de un *sistema de coordenadas a derechas* **de un modo convencional en física, que utilizaremos en todo momento, como se indica en las figs. 2.10 *a* y *b*.

(*) Por ejemplo, véase C. E. Weatherburn, «Elementary Vector Analysis», p. 57, G. Bell & Sons, Ltd., London, 1928; J. G. Coffin, «Vector Analysis», p. 35, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1911.

(**) ¿Cómo podríamos comunicar nuestra definición de sistema «a derechas» á una criatura de otro sistema solar en nuestra galaxia? Podríamos utilizar ondas de radio polarizadas circularmente. La señal transporta un mensaje que indica al remoto observador en qué sentido definimos las ondas que han de polarizarse. El observador remoto construirá dos receptores, uno en el sentido correcto y otro en el incorrecto en función de la intensidad de la señal. Cualquier método requiere instrucciones muy claras. En el análisis original del efecto espectroscópico Zeeman, su descubridor asociaba incorrectamente una señal positiva a las cargas oscilantes de los átomos, porque confundía el sentido de una radiación polarizada circularmente (véase P. Zeeman, *Philosophical Magazine* (5), **43**: 55 y 226 (1897). De un modo semejante, la primera transmisión por Telstar, el 11 de julio de 1962, fue recibida con dificultades en Gran Bretaña debido a la «inversión de un pequeño componente en el conductor de alimentación de la antena, que surgió de una ambigüedad en la definición aceptada del sentido de rotación de las ondas de la radio». *Times* (Londres), 13 de julio de 1962, pág. 11.

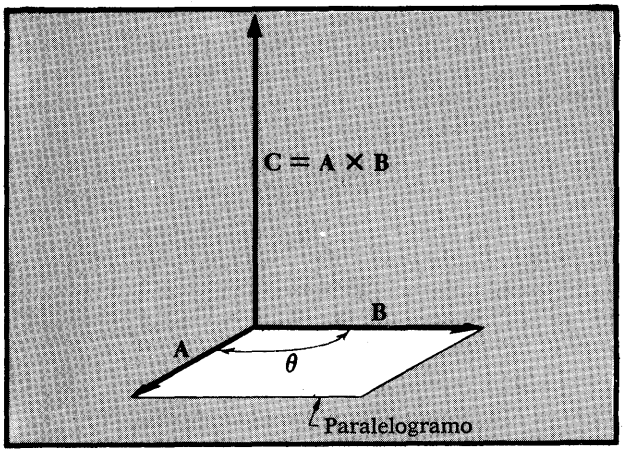
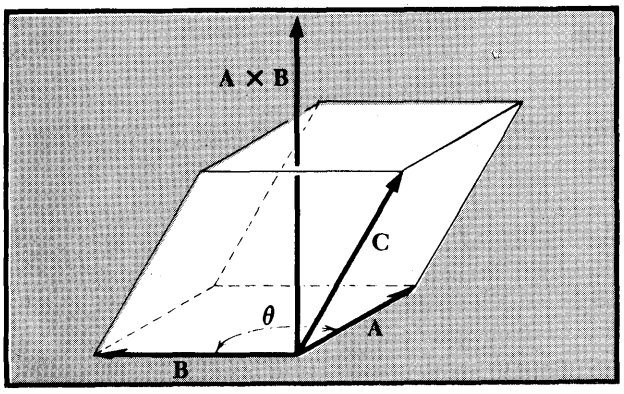
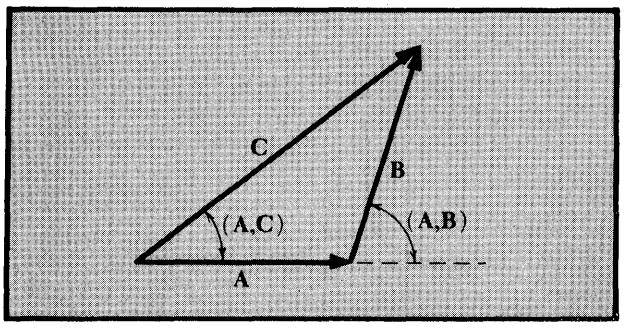


FIG. 2.18 *a*) El vector área de un paralelogramo es $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\,|\text{sen}\,\theta|\,\hat{\mathbf{C}}$



b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ = área de la base × altura = volumen del paralelepípedo.



c) Ley de los senos del triángulo.

Nota: sen **(A,B)** = sen $[\pi - \mathbf{(A,B)}]$.

Ahora $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$, etc., de modo que resulta

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\mathbf{y}}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{\mathbf{z}}(A_xB_y - A_yB_x) \quad (2.14)$$

Obsérvese que si los índices guardan el orden cíclico *xyz*, el término interviene en el producto vectorial con signo +; de otro modo el signo es negativo. Si se está familiarizado con el cálculo de determinantes se puede comprobar que la representación

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

es equivalente a la Ec. (2.14), pero más fácil de recordar.

Aplicaciones del producto vectorial. En los siguientes párrafos trataremos diversas aplicaciones del producto vectorial.

1. *Area de un paralelogramo.* El módulo

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB|\text{sen}\,(\mathbf{A},\mathbf{B})|$$

es el área del paralelogramo cuyos lados son **A** y **B** (o el doble del área del triángulo de lados **A** y **B**) (figura 2.18 *a*). La dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es normal al plano del paralelogramo; por consiguiente, podemos considerar a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ como el *vector área* del paralelogramo. Como hemos dado signos a los lados **A** y **B**, el vector área está dotado de dirección y sentido. Existen aplicaciones físicas en las que es conveniente poder asignar dirección a un área [Ec. (2.11)].

2. *Volumen de un paralelepípedo.* El escalar

$$|(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}| = V$$

es el volumen del paralelepípedo en el que $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es el área de la base y **C** es la tercera arista oblicua (figura 2.18 *b*). Si los tres vectores, **A**, **B** y **C** están contenidos en un mismo plano, el volumen será cero; por lo tanto, tres vectores serán coplanarios si $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = 0$ y únicamente en este caso.

Observemos en la figura que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

de modo que *los productos vectorial y escalar en el producto mixto pueden intercambiarse sin alterar el valor del producto.* Sin embargo,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$$

Un producto mixto no se altera permutando cíclicamente el orden de los vectores, pero se invierte de signo si se cambia el orden cíclico. (Ordenaciones cíclicas de *ABC* son *BCA* y *CAB* y las ordenaciones no cíclicas son *BAC*, *ACB* y *CBA*.)

3. *Ley de los senos.* Consideremos el triángulo definido por $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ (fig. 2.18 c) y multipliquemos vectorialmente ambos miembros de la ecuación por **A**:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Ahora bien, $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ y los módulos de ambos miembros deben ser iguales, de modo que

$$AC\,\text{sen}(\mathbf{A},\mathbf{C}) = AB\,\text{sen}(\mathbf{A},\mathbf{B})$$

o

$$\frac{\text{sen}(\mathbf{A},\mathbf{C})}{B} = \frac{\text{sen}(\mathbf{A},\mathbf{B})}{C} \qquad (2.16)$$

que es la *ley de los senos de un triángulo.*

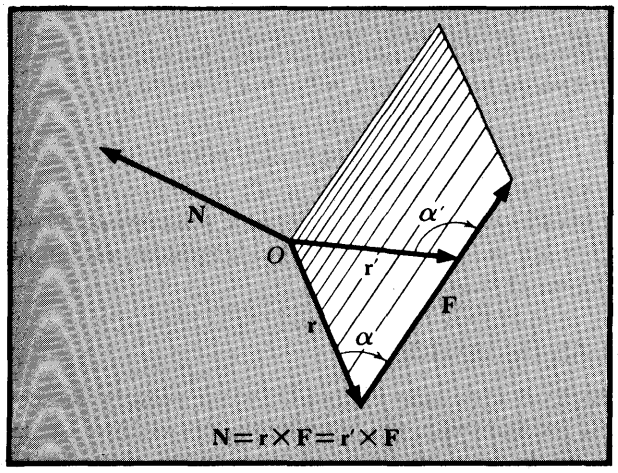
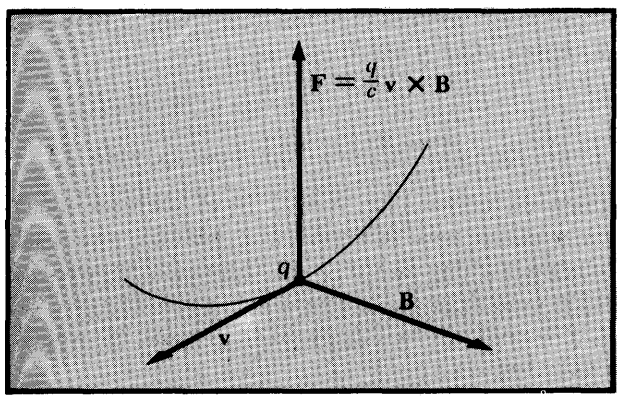


FIG. 2.18 *(continuación) d)* El par como producto vectorial.

4. *Par.* La idea del par es familiar desde los primeros cursos de introducción en la física. Tiene particular importancia en el movimiento de los cuerpos rígidos discutido en el Cap. 8. El par se refiere a un punto y tiene una expresión conveniente en función de los vectores:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \qquad (2.17)$$

en donde **r** es un vector dirigido desde el punto al vector **F**. En la fig. 2.18 *d* se ve que el par tiene una dirección perpendicular a **r** y a **F**. Obsérvese que la magnitud de **N** es $rF\,\text{sen}\,\alpha$ y $r\,\text{sen}\,\alpha$ es la longitud de la perpendicular trazada desde el punto (*O* en la figura) a **F**. En la figura $r\,\text{sen}\,\alpha = r'\,\text{sen}\,\alpha'$. Por tanto, el par, tanto en magnitud como en dirección y sentido, es independiente del punto de la dirección de **F**, al cual se traza **r**.



e) Fuerza ejercida sobre una carga positiva en un campo magnético.

5. *Fuerza sobre una partícula en un campo magnético.* La fuerza que actúa sobre una carga eléctrica puntual que se mueve con velocidad **v** en un campo magnético **B** es proporcional a *v* veces la componente normal de *B*, en función del producto vectorial (fig. 2.18 *e*).

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad \text{(unidades gaussianas)} \qquad (2.18)$$

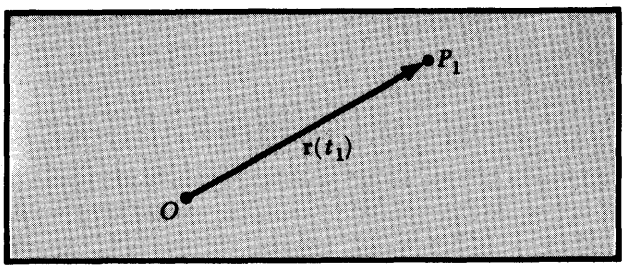
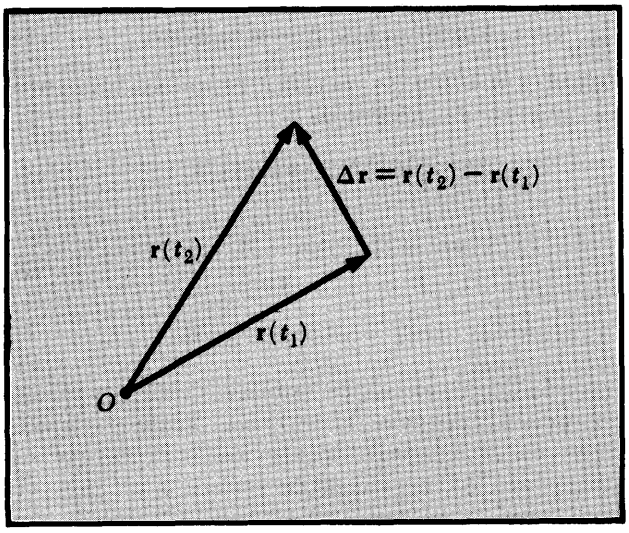
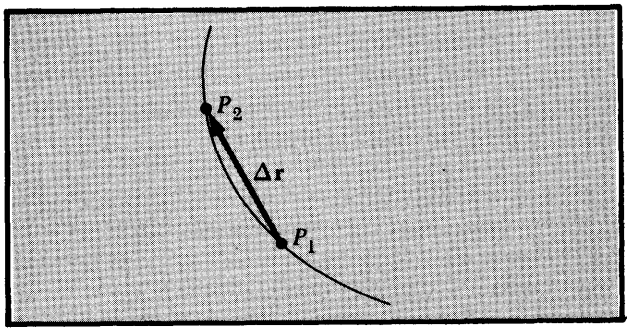


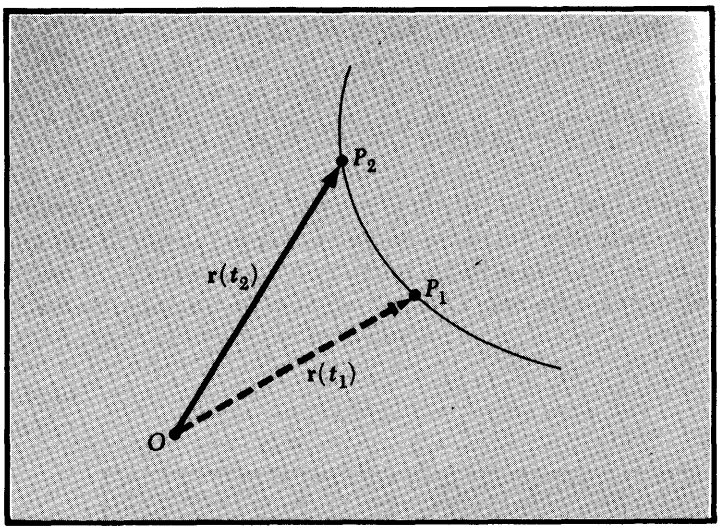
FIG. 2.19 *a*) La posición P_1 de una partícula en el instante t_1 se especifica mediante el vector $\mathbf{r}(t_1)$ relativo al origen fijo en el punto O.



c) El vector $\Delta\mathbf{r}$ es la diferencia entre $\mathbf{r}(t_2)$ y $\mathbf{r}(t_1)$.



d) $\Delta\mathbf{r}$ es la cuerda que une los puntos P_1 y P_2 situados sobre la trayectoria de la partícula.



b) La partícula se ha trasladado a P_2 en el instante t_2.

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{(unidades mks)} \tag{2.18}$$

en donde q es la carga de la partícula y c la velocidad de la luz. Esta ley se desarrollará con detalle en el Vol. 2 y se utiliza en el Cap. 3 (pág. 75).

DERIVADAS DE VECTORES

La velocidad **v** de una partícula es un vector; la aceleración **a** es también un vector. La *velocidad* es la variación de la posición de una partícula referida al tiempo. La posición de una partícula en cualquier instante t puede especificarse mediante el vector $\mathbf{r}(t)$ trazado desde un punto fijo O a la partícula (fig. 2.19 *a*). Cuando el tiempo progresa, la partícula se mueve y el vector de posición varía en dirección y módulo (fig. 2.19 *b*). La diferencia entre $\mathbf{r}(t_2)$ y $\mathbf{r}(t_1)$ es

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$$

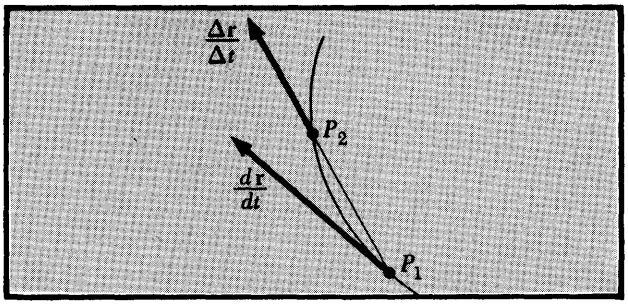
y es también un vector (fig. 2.19 *c*). Si el vector **r** puede considerarse como una función (una función vectorial) de la variable escalar única t, el valor de $\Delta\mathbf{r}$ quedará determinado completamente cuando se conozcan los dos valores t_1 y t_2. Así, en la figura 2.19 *d*, $\Delta\mathbf{r}$ es la cuerda P_1P_2. La relación

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

es un vector colineal con la cuerda P_1P_2 pero ampliado en la relación $1/\Delta t$. Cuando Δt tiende a cero, P_2 se aproxima a P_1 y la cuerda P_1P_2 se convierte en la tangente en P_1. Entonces el vector

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad \text{tiende a} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

que es un vector tangente a la curva en P_1 dirigido en el sentido en que la variable t aumenta a lo largo de la curva (fig. 2.19 *e*).



e) Cuando $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$, el vector $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ colineal con la cuerda tiende hacia el vector velocidad $d\mathbf{r}/dt$ colineal con la tangente a la trayectoria en el punto P_1.

Velocidad. El vector

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

se denomina *derivada respecto al tiempo de* **r**. Por definición, la velocidad es

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{2.19}$$

El módulo $v = |\mathbf{v}|$ de la velocidad se denomina *celeridad* de la partícula y es un escalar. En función de sus componentes resulta

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}} + z(t)\hat{\mathbf{z}} \tag{2.20}$$

y

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}}$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{2.21}$$

en donde hemos supuesto que los vectores unitarios no cambian con el tiempo, de modo que

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = 0 = \frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt}$$

En general, podemos escribir, sin expresar **r** en función de sus componentes, como en la Ec. (2.20),

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)$$

en donde el escalar $r(t)$ es la longitud del vector y $\hat{\mathbf{r}}(t)$ es el vector unitario en la dirección de **r**. La derivada de $\mathbf{r}(t)$ se define en la forma

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)\right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t + \Delta t)\hat{\mathbf{r}}(t + \Delta t) - r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} \tag{2.22}$$

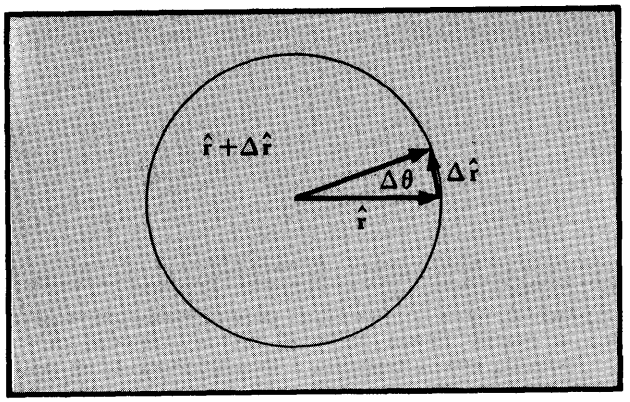
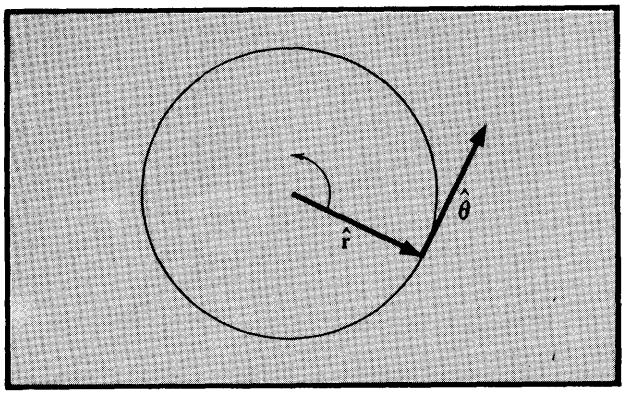
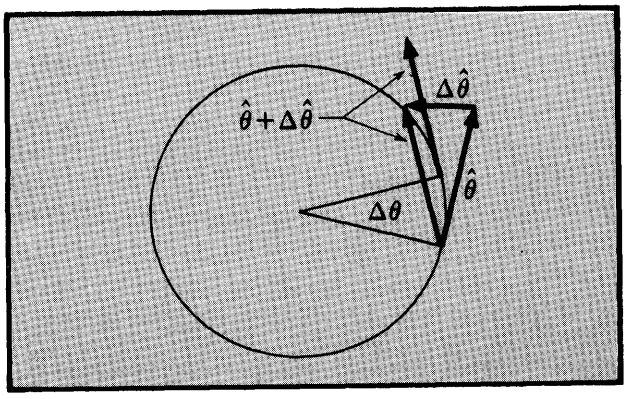


FIG. 2.20 *a*) $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ es la variación del vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$.



b) El vector unitario $\hat{\theta}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}$ y tiene la dirección indicada por el incremento de θ.



c) $\Delta\hat{\theta}$ es la variación del vector unitario $\hat{\theta}$.

Podemos volver a escribir el numerador *, reteniendo sólo los dos primeros términos del desarrollo en serie de $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ y $\hat{\mathbf{r}}(t+\Delta t)$:

$$\left[r(t)+\frac{dr}{dt}\Delta t\right]\left[\hat{\mathbf{r}}(t)+\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\Delta t\right]-r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)$$
$$=\Delta t\left(\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}}+r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right)+(\Delta t)^2\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right)$$

En el límite, cuando $\Delta t \to 0$, el último término del segundo miembro puede despreciarse y tendremos, sustituyendo en la Ec. (2.22)

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}}+r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \tag{2.23}$$

Aquí $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ representa la cantidad de variación en la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$.

Este caso es un ejemplo de la regla general para derivar el producto de un escalar $a(t)$ y un vector $\mathbf{b}(t)$

$$\frac{d}{dt}a\mathbf{b}=\frac{da}{dt}\mathbf{b}+a\frac{d\mathbf{b}}{dt} \tag{2.24}$$

Según vemos en la Ec. (2.23), a la velocidad contribuye por una parte la variación en la dirección $\hat{\mathbf{r}}$ y por otra el cambio en la longitud r.

Más adelante (particularmente en el Cap. 9 para el movimiento en un plano) utilizaremos una nueva forma de dr/dt, que desarrollaremos aquí utilizando el vector radial unitario $\hat{\mathbf{r}}$ y un vector perpendicular unitario que denominaremos $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

A fin de aclarar el significado de estos vectores unitarios y sus derivadas respecto al tiempo, consideremos el movimiento de un punto en una trayectoria circular; en este caso, el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ cambiará en un intervalo de tiempo Δt en un incremento vectorial $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ para convertirse en $\hat{\mathbf{r}}+\Delta\hat{\mathbf{r}}$, como indica la fig. 2.20 *a*. Si Δt es tan pequeño que se aproxima a cero, $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ toma la dirección del vector unitario transversal $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, indicado en la fig. 2.20 *b*.

Además, cuando Δt y en correspondencia $\Delta\theta$ se aproximan a cero, la magnitud de $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ se hace simplemente

$$|\Delta\hat{\mathbf{r}}|=|\hat{\mathbf{r}}|\Delta\theta=\Delta\theta$$

(ya que $|\hat{\mathbf{r}}|=1$) y, por tanto, el vector $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ y la relación $\Delta\hat{\mathbf{r}}/\Delta t$ se convierten en

$$\Delta\hat{\mathbf{r}}=\Delta\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \frac{\Delta\hat{\mathbf{r}}}{\Delta t}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

(*) Véase al final del capítulo, en las *Notas matemáticas*, el desarrollo en serie.

En el límite, cuando $\Delta t \to 0$, se obtiene para la derivada del vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ respecto al tiempo

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{2.25}$$

Con argumentos semejantes, utilizando la fig. 2.20 *c*, se demuestra fácilmente que la derivada respecto al tiempo de $\boldsymbol{\theta}$ es

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{r}} \tag{2.26}$$

Consideremos ahora un punto que se mueve en un plano según una trayectoria cualquiera; como sugiere la fig. 2.21, el vector velocidad $\mathbf{v}$ en cualquier instante está compuesto del vector componente radial $dr/dt\,\hat{\mathbf{r}}$ y del vector componente transversal $r\,d\hat{\mathbf{r}}/dt = r\,d\theta/dt\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. El último vector se expresa por la ecuación (2.25). Por tanto, el valor de $\mathbf{v}$ en la forma de la Ec. (2.23) es

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{2.27}$$

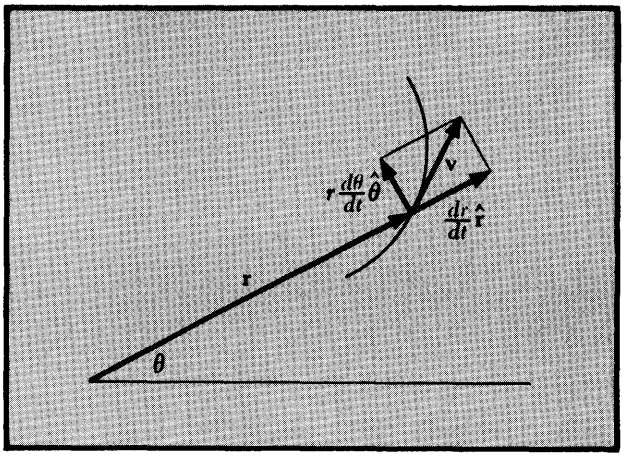


FIG. 2.21 Componentes del vector velocidad en función de $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Aceleración. La aceleración es también un vector; se relaciona con $\mathbf{v}$ del mismo modo que $\mathbf{v}$ se relaciona con $\mathbf{r}$. Su definición es

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{2.28}$$

Teniendo en cuenta (2.21) resulta en componentes cartesianas,

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{z}}} \tag{2.29}$$

Más adelante (Cap. 9) necesitaremos $\mathbf{a}$ en función de r y θ; según la Ec. (2.27)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (2.25) y (2.26) para $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ y $d\hat{\boldsymbol{\theta}}/dt$ la expresión se convierte en

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{\mathbf{r}}$$

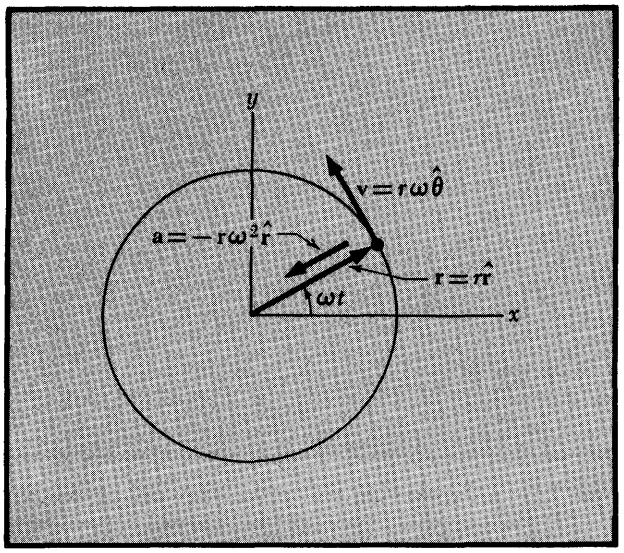


FIG. 2.22 Partícula moviéndose con velocidad constante en un círculo de radio r. La velocidad angular constante es ω. La velocidad y la aceleración de la partícula se deducen en las Ecs. (2.31) a (2.38).

Agrupando términos y reajustando resulta

$$\boxed{\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}} \qquad (2.30)$$

Esta expresión es útil en el ejemplo del movimiento circular (véase a continuación) y particularmente en el estudio del movimiento de una partícula alrededor de un centro de fuerza (expuesto en el Cap. 9).

EJEMPLO

Movimiento circular. Este ejemplo (mostrado en la fig. 2.22) es muy importante, debido a la frecuencia con que aparece en física y en astronomía. Se desea obtener explícitamente las expresiones que nos den la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve con una celeridad constante en una órbita circular de radio r. Este movimiento puede describirse mediante

$$\mathbf{r}(t) = r\hat{\mathbf{r}}(t) \qquad (2.31)$$

con tal que r sea constante y que el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ gire ángulos iguales en tiempos iguales.

Podemos tratar este problema de dos formas distintas: a partir de las expresiones en función de r y θ, ecuaciones (2.27) y (2.30) o utilizando los ejes $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ fijos en el espacio y las ecuaciones (2.21) y (2.29).

Método 1. Como r es constante, la ecuación (2.27) nos da simplemente $\mathbf{v} = r\,d\theta/dt\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Por costumbre se utiliza la letra griega ω para designar la velocidad angular $d\theta/dt$. Se mide en radianes * por segundo (rad/s) y en nuestra consideración actual es constante. Así $\mathbf{v} = r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y la velocidad constante de la partícula es

$$v = \omega r \qquad (2.32)$$

Para la aceleración utilizamos la ecuación (2.30), que para r constante y $d\theta/dt = \omega$ se convierte en

$$\boxed{\mathbf{a} = -r\omega^2\hat{\mathbf{r}}} \qquad (2.33)$$

Así la aceleración es constante en magnitud y dirigida hacia el centro de la trayectoria circular.

Método 2. En función de las componentes cartesianas escribiremos el vector posición de la partícula en cualquier momento t de su movimiento circular en la forma indicada por la ecuación (2.20):

$$\mathbf{r}(t) = r\cos\omega t\hat{\mathbf{x}} + r\,\mathrm{sen}\,\omega t\hat{\mathbf{y}} \qquad (2.34)$$

El vector velocidad, dado por la ecuación (2.21) es, por tanto, con r constante,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega r\,\mathrm{sen}\,\omega t\hat{\mathbf{x}} + \omega r\cos\omega t\hat{\mathbf{y}} \qquad (2.35)$$

(*) Véase al final del capítulo las *Notas matemáticas* para la explicación de los radianes.

La velocidad v es la magnitud de este vector velocidad

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \omega r \sqrt{\text{sen}^2\, \omega t + \cos^2 \omega t} = \omega r \tag{2.36}$$

de acuerdo con la ecuación (2.32). Puede mostrarse que el vector **v** es perpendicular a **r**, teniendo en cuenta que el producto escalar de estos vectores es cero.

Según la ecuación (2.29), el vector aceleración es la derivada respecto al tiempo de **v**. Diferenciando la ecuación (2.35) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\omega^2 r \cos \omega t \hat{\mathbf{x}} - \omega^2 r \,\text{sen}\, \omega t \hat{\mathbf{y}} \\ &= -\omega^2 (r \cos \omega t \hat{\mathbf{x}} + r \,\text{sen}\, \omega t \hat{\mathbf{y}}) \\ &= -\omega^2 \mathbf{r} = -\omega^2 r \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Este resultado es idéntico al obtenido por el método 1 en la ecuación (2.33). La aceleración tiene la magnitud constante $a = \omega^2 r$ y la dirección y sentido de la aceleración coincide con los de $-\hat{\mathbf{r}}$, es decir, hacia el centro de la circunferencia. A partir de (2.36) o (2.32) podemos poner $v = \omega r$ y entonces la magnitud de la aceleración se puede volver a escribir en la forma

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{2.38}$$

Esta aceleración se llama *centrípeta* (que busca el centro) y debe resultarnos familiar por los estudios de física previos.

La velocidad angular tiene una relación sencilla con la frecuencia ordinaria f. En la unidad de tiempo, el vector $\hat{\mathbf{r}}$ en la ecuación (2.34) describe ω radianes, de modo que ω designa el número de radianes barridos en la unidad de tiempo. En cambio, la frecuencia ordinaria f se define como el número de ciclos de movimiento que se verifican en la unidad de tiempo. Como hay 2π radianes en cada ciclo, debemos tener

$$2\pi f = \omega$$

Se define el *período* T del movimiento como el tiempo necesario para completar un ciclo. Vemos según la ecuación (2.34) que un ciclo se completa en el tiempo T tal que $\omega T = 2\pi$, o bien

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Para tener una orientación numérica, supongamos que la frecuencia f es de 60 ciclos por segundo, ó 60 cps. Entonces el período

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} \approx 0{,}017 \text{ s}$$

y la frecuencia angular es

$$\omega = 2\pi f \approx 377 \text{ rad/s}$$

Si el radio de una órbita circular es 10 cm, entonces la velocidad es

$$v = \omega r \approx (377)(10) \approx 3{,}8 \times 10^3 \text{ cm/s}$$

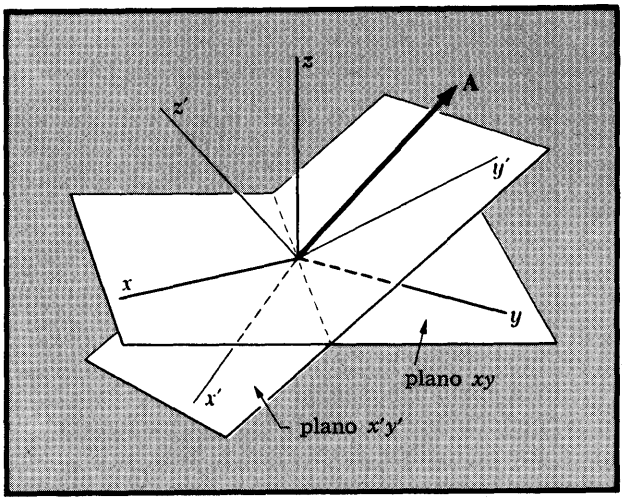


FIG. 2.23 El vector **A** puede describirse en coordenadas *xyz* o en coordenadas *x'y'z'* obtenidas a partir de las anteriores mediante una rotación arbitraria. Decimos que A^2 es una forma invariante respecto a la rotación, lo cual equivale a decir $A_x^2+A_y^2+A_z^2 = A'_{x'}{}^2+A'_{y'}{}^2+A'_{z'}{}^2$.

La aceleración en cualquier punto de la órbita es

$$a = \omega^2 r \approx (377)^2(10) \approx 1{,}42 \times 10^6 \text{ cm/s}^2$$

En el Cap. 4 se desarrolla un ejemplo numérico que muestra que la aceleración de un punto fijo sobre la superficie de la Tierra en el ecuador, debida a la rotación de la Tierra sobre su propio eje, es alrededor de 3,4 cm/s².

INVARIANTES

Hemos mencionado (pág. 30) que la independencia de la elección de los ejes coordenados es un aspecto importante de las leyes de la física y una razón importante para el uso de la notación vectorial. Consideremos el valor de la magnitud de un vector en dos sistemas de coordenadas diferentes que tengan un origen común, pero que giren uno respecto al otro, como indica la figura 2.23. En los dos sistemas coordenados

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$$

y

$$\mathbf{A} = A'_x\hat{\mathbf{x}}' + A'_y\hat{\mathbf{y}}' + A'_z\hat{\mathbf{z}}' \qquad \text{(fig. 2.23)}$$

Como **A** no ha cambiado, A^2 debe ser el mismo y, por tanto,

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A'_{x'}{}^2 + A'_{y'}{}^2 + A'_{z'}{}^2$$

En otras palabras, la magnitud de un vector es la misma en todos los sistemas de coordenadas cartesianos que difieren en una rotación rígida del eje coordenado; por ello, se denomina *forma invariante*. El problema 20 (al final del capítulo), proporciona un método de comprobar este invariante. De esta definición es evidente que el producto escalar dado por la Ec. (2.7) es una forma invariante y la magnitud del producto vectorial es también otra forma invariante. Suponemos que no hay cambio de escala; por ejemplo, la longitud que representa una unidad no cambia en la rotación.

A veces hablamos de una función escalar de la posición, tal como la temperatura $T(x, y, z)$ en el punto (x, y, z) como un *campo escalar*. De igual modo, para un vector cuyo valor es una función de la posición, tal como la velocidad $\mathbf{v}(x, y, z)$ de una partícula cuando está en el punto (x, y, z), se dice que existe un *campo vectorial*. Gran parte del análisis vectorial está relacionado con los campos escalar y vectorial y con operaciones diferenciales con vectores que se discuten ampliamente en el Vol. 2.

EJEMPLOS

Diversas operaciones vectoriales elementales. Consideremos el vector (fig. 2.24)

$$\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$$

(1) Determinar la longitud de **A**. Hallemos A^2:

$$A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14$$

de modo que $A = \sqrt{14}$ es la longitud de **A**.

(2) ¿Cuál es la longitud de la proyección de **A** sobre el plano *xy*? La proyección de **A** sobre el plano *xy* es el vector $3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$; el cuadrado de la longitud de este vector es $3^2 + 1^2 = 10$.

(3) Construir un vector en el plano *xy* que sea perpendicular a **A**. Se desea, pues, un vector de la forma

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}}$$

con la propiedad $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, o bien

$$(3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}) \cdot (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}}) = 0$$

Verificando el producto escalar encontramos

$$3B_x + B_y = 0$$

o

$$\frac{B_y}{B_x} = -3$$

La longitud del vector **B** no queda determinada por el enunciado del problema (fig. 2.25).

(4) Calcular el vector unitario $\hat{\mathbf{B}}$. Debemos tener

$$\hat{B}_x^2 + \hat{B}_y^2 = 1$$

o bien

$$\hat{B}_x^2(1^2 + 3^2) = 10\,\hat{B}_x^2 = 1$$

Así, pues,

$$\hat{\mathbf{B}} = \sqrt{\tfrac{1}{10}}\hat{\mathbf{x}} - \sqrt{\tfrac{9}{10}}\hat{\mathbf{y}} = \frac{\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{10}}$$

(5) Determinar el producto escalar de **A** con el vector $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}}$. Se ve directamente que es $2 \times 3 = 6$. (Véase fig. 2.26.)

(6) Determinar la expresión de los vectores **A** y **C** en un sistema de referencia obtenido a partir del otro sistema mediante una rotación de $\pi/2$ en el sentido de las agujas del reloj a lo largo del eje z positivo (fig. 2.27). Los nuevos vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$ están relacionados con los antiguos, $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$, por

$$\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{y}} \qquad \hat{\mathbf{y}}' = -\hat{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}}$$

Donde aparecía $\hat{\mathbf{x}}$, ahora tenemos $-\hat{\mathbf{y}}'$, donde aparecía $\hat{\mathbf{y}}$, ahora tenemos $\hat{\mathbf{x}}'$, de modo que

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}' - 3\hat{\mathbf{y}}' + 2\hat{\mathbf{z}}' \qquad \mathbf{C} = -2\hat{\mathbf{y}}'$$

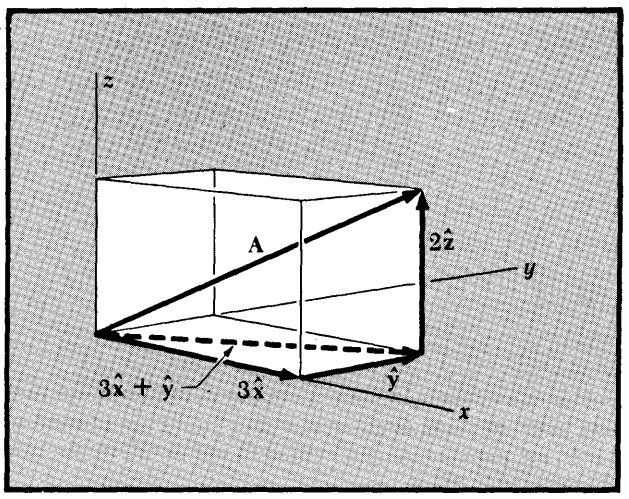


FIG. 2.24 El vector $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$ y sus proyecciones sobre el plano *xy*.

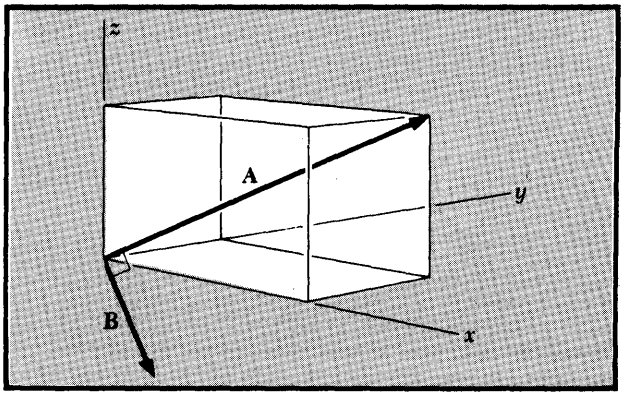


FIG. 2.25 El vector **B** está en el plano *xy* y es perpendicular a **A**.

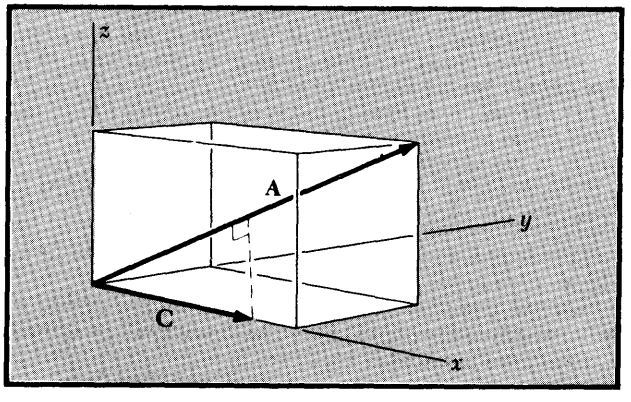


FIG. 2.26 Proyección del vector $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}}$. sobre **A**. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ = (proyección de **C** sobre **A**) A.

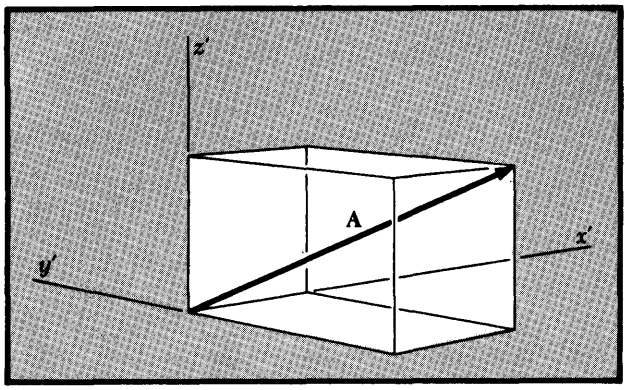


FIG. 2.27 El sistema de referencia x', y', z' se obtiene a partir del sistema x, y, z mediante una rotación de $\pi/2$ alrededor del eje z.

(7) Determinar el producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ en el sistema coordenado indicado con el simbolismo de las primas. Del resultado de (6) se obtiene $(-3)\ (-2) = 6$, exactamente igual que en el sistema primitivo.

(8) Calcular el producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$. En el sistema primitivo es

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}$$

Formando los productos escalares, se puede confirmar que este vector es perpendicular tanto a $\mathbf{A}$ como a $\mathbf{C}$.

(9) Formar el vector $\mathbf{A} - \mathbf{C}$. Tenemos (fig. 2.28)

$$\mathbf{A} - \mathbf{C} = (3 - 2)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$$

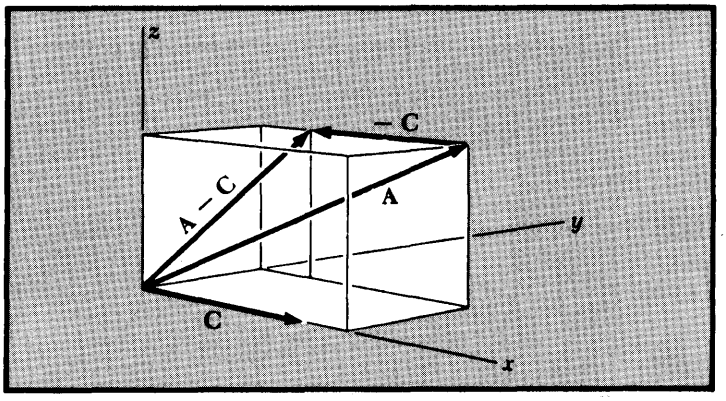


FIG. 2.28 Vector $\mathbf{A} - \mathbf{C}$.

PROBLEMAS

1. *Vectores de posición.* Utilizando el eje x como dirección este, el eje y como norte y el eje z hacia arriba, representar los siguientes puntos:

(*a*) 10 km al noreste y 2 km hacia arriba.

(*b*) 5 m al sureste y 5 m hacia abajo

(*c*) 1 cm al noroeste y 6 cm hacia arriba.

Determinar la magnitud o módulo de cada vector y la expresión del vector unitario en dicha dirección.

2. *Componentes vectoriales.* Utilizando los ejes del problema 1, determinar:

(*a*) Las componentes de un vector posición trazado desde el origen a un punto del plano horizontal en dirección sureste y de longitud 5 m.

(*b*) Las componentes de un vector posición trazado desde el origen a un punto situado a 15 m de tal modo que la componente horizontal está 60° al oeste del Norte y el vector forma un ángulo de 45° con la vertical.

3. *Suma de vectores.* Representar gráficamente el resultado de las siguientes sumas vectoriales:

(*a*) Sumar un vector de 2 cm hacia el este a uno de 3 cm hacia el noroeste.

(*b*) Sumar un vector de 8 cm hacia el este a uno de 12 cm hacia el noroeste.

(*c*) Comparar los resultados de las partes (*a*) y (*b*) y bosquejar un teorema acerca de la suma de dos vectores que son múltiplos de otros dos.

4. *Multiplicación por un escalar.* Sea $\mathbf{A} = 2{,}0$ cm a 70° al este del norte y $\mathbf{B} = 3{,}5$ cm a 130° al este del norte. Utilizar un transportador o un papel con un gráfico de coordenadas polares para hallar las soluciones.

(*a*) Dibujar los vectores descritos anteriormente y otros dos que sean 2,5 veces mayores.

(*b*) Multiplicar $\mathbf{A}$ por -2 y $\mathbf{B}$ por $+3$ y encontrar el vector suma. *Sol.* 9,2 cm a 152°.

(*c*) Colocar un punto 10 cm al norte del origen. Encontrar múltiplos de **A** y **B** cuyo vector suma es el vector que une el origen con este punto.

(*d*) Resolver analíticamente las partes (*b*) y (*c*).

5. *Productos escalar y vectorial de dos vectores.* Dados dos vectores $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} - 5\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{b} = -\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 6\hat{\mathbf{z}}$, calcular por métodos vectoriales:

(*a*) La longitud de cada uno de ellos. *Sol.* $a = \sqrt{50}$; $b = \sqrt{41}$

(*b*) El producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. *Sol.* -25.

(*c*) El ángulo formado entre ambos. *Sol.* 123,5°.

(*d*) Los cosenos directores de cada uno.

(*e*) El vector suma y diferencia $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
Sol. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{x}} + 6\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$.

(*f*) El vector producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Sol.* $34\hat{\mathbf{x}} - 13\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}}$.

6. *Algebra vectorial.* Dados dos vectores tales que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 11\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -5\hat{\mathbf{x}} + 11\hat{\mathbf{y}} + 9\hat{\mathbf{z}}$:

(*a*) Hallar **a** y **b**.

(*b*) Determinar el ángulo formado por **a** y $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ utilizando métodos vectoriales.

7. *Suma vectorial de velocidades.* En agua tranquila un hombre puede remar un bote a 5 km/h.

(*a*) Si intenta cruzar un río que fluye a 2 km/h, ¿cuál será la dirección de su trayectoria y su velocidad?

(*b*) ¿En qué dirección debe apuntar en su movimiento para cruzar perpendicularmente el río y cuál debería ser su velocidad?

8. *Composición de vectores.* El piloto de un aeroplano desea alcanzar un punto a 200 km al este de su posición presente. Sopla viento del noroeste a 30 km/h. Calcular su vector velocidad respecto a la masa de aire en movimiento, si su horario le exige que llegue a su destino en 40 minutos.
Sol. $\mathbf{v} = 279\hat{\mathbf{x}} + 21\hat{\mathbf{y}}$ km/h; $\hat{\mathbf{x}}$ = este; $\hat{\mathbf{y}}$ = norte.

9. *Operaciones con vectores; vector de posición relativa.* De una fuente común se emiten dos partículas y en un instante determinado tienen los siguientes desplazamientos:

$$\mathbf{r}_1 = 4\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 8\hat{\mathbf{z}}; \qquad \mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{x}} + 10\hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$$

(*a*) Indicar en un esquema las posiciones de las partículas y escribir la expresión que nos da el desplazamiento **r** de la partícula 2 respecto a 1.

(*b*) Utilizar el producto escalar para calcular el módulo de cada vector. *Sol.* $r_1 = 9{,}4$; $r_2 = 11{,}4$; $r = 7{,}9$.

(*c*) Calcular los ángulos entre las parejas posibles de estos tres vectores.

(*d*) Calcular la proyección de **r** sobre $\mathbf{r}_1$. *Sol.* $-1{,}2$.

(*e*) Calcular el vector producto $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$.
Sol. $-65\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}} + 34\hat{\mathbf{z}}$.

10. *Distancia mínima entre dos partículas.* Dos partículas 1 y 2 se mueven a lo largo de los ejes x e y con las velocidades $\mathbf{v}_1 = 2\hat{\mathbf{x}}$ cm/s y $\mathbf{v}_2 = 3\hat{\mathbf{y}}$ cm/s, respectivamente. Para $t = 0$ están en la posición

$$x_1 = -3 \text{ cm}, \; y_1 = 0; \qquad x_2 = 0, \; y_2 = -3 \text{ cm}.$$

(*a*) Encontrar el vector $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ que representa la posición de 2 respecto a 1 en función del tiempo.
Sol. $\mathbf{r} = (3 - 2t)\,\hat{\mathbf{x}} + (3t - 3)\,\hat{\mathbf{y}}$ cm.

(*b*) ¿Cuándo y dónde están más cerca entre sí las dos partículas? *Sol.* $t = 1{,}15$ s.

11. *Diagonales de un cubo.* ¿Cuál es el ángulo formado por dos diagonales interiores de un cubo? (Una *diagonal interior* une dos vértices y pasa por el interior de un cubo. Una *diagonal superficial* une dos vértices pertenecientes a la misma cara del cubo.) *Sol.* $\cos^{-1} \frac{1}{3}$.

12. *Condiciones para que* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Demostrar que **a** es perpendicular a **b** si $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$

13. *Vectores paralelos y perpendiculares.* Determinar x e y de tal modo que los vectores $\mathbf{B} = x\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}}$ y $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ sean cada uno de ellos perpendicular a $\mathbf{A} = 5\hat{\mathbf{x}} + 6\hat{\mathbf{y}}$. Demostrar ahora que **B** y **C** son paralelos. Si consideramos un espacio tridimensional, ¿también se cumple que dos vectores perpendiculares a un tercero son necesariamente paralelos?

14. *Volumen de un paralelepípedo.* Un paralelepípedo tiene sus aristas descritas por los vectores $\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}$, $4\hat{\mathbf{y}}$, e $\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ a partir del origen. Calcular su volumen. *Sol.* 12.

15. *Equilibrio de fuerzas.* Tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ actúan simultáneamente sobre una partícula puntual. La fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ es simplemente el vector suma de las fuerzas. La partícula se dice que está en equilibrio si $\mathbf{F}_R = 0$.

(*a*) Demostrar que si $\mathbf{F}_R = 0$, los vectores que representan las tres fuerzas forman un triángulo.

(*b*) Si $\mathbf{F}_R = 0$ como antes, ¿es posible que uno cualquiera de los vectores no esté contenido en el plano determinado por los otros dos?

(*c*) Una partícula sometida a una fuerza vertical hacia abajo de 10 newtons y suspendida de una cuerda (tensión 15 newtons), que forma un ángulo de 0,1 radian con la vertical, no puede estar en equilibrio. ¿Cuánto vale la tercera fuerza que se necesita para el equilibrio? ¿La solución es única?

16. *Trabajo realizado por las fuerzas.* Las fuerzas constantes $\mathbf{F}_1 = \hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ (dinas) y $\mathbf{F}_2 = 4\hat{\mathbf{x}} - 5\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}$ (dinas) actúan juntas sobre una partícula, durante un desplazamiento desde el punto A (20,15,0) cm hasta el punto B (0,0,7) centímetros.

(*a*) ¿Cuál es el trabajo realizado (en ergios) sobre la partícula? El trabajo realizado (Cap. 5) viene dado por $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$, siendo **F** la fuerza resultante (en este caso $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$) y **r** el desplazamiento.
Sol. -48 ergios.

(*b*) Calcular separadamente el trabajo realizado por $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.

(*c*) Supóngase que actúan las mismas fuerzas, pero el movimiento es de **B** a **A**. ¿Cuál es el trabajo realizado sobre la partícula en este caso?

17. *Momento de una fuerza respecto a un punto.* El momento **N** de una fuerza respecto de un punto determinado viene dado por $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, en donde **r** es el vector que une el punto dado con el punto de aplicación de **F**. Considérese una fuerza $\mathbf{F} = -3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$ (dinas) actuando en el punto $7\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ (cm). Recuérdese que $\mathbf{F} \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

(*a*) ¿Cuál es el momento en dinas-cm respecto al origen? (Dar el resultado para **N** como combinación lineal de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$.) *Sol.* $14\hat{\mathbf{x}} - 38\hat{\mathbf{y}} + 16\hat{\mathbf{z}}$.

(*b*) ¿Cuál es el momento respecto al punto (0,10,0)? *Sol.* $-36\,\hat{\mathbf{x}} - 38\hat{\mathbf{y}} - 14\hat{\mathbf{z}}$.

18. *Velocidad y aceleración: diferenciación de vectores.* Determinar la velocidad y la aceleración del punto descrito por los siguientes vectores de posición (t = tiempo).

(*a*) $\mathbf{r} = 16t\hat{\mathbf{x}} + 25t^2\hat{\mathbf{y}} + 33\hat{\mathbf{z}}$.

(*b*) $\mathbf{r} = 10 \text{ sen } 15t\hat{\mathbf{x}} + 35t\hat{\mathbf{y}} + e^{6t}\hat{\mathbf{z}}$.

(Para la derivación, consúltese las Notas Matemáticas al final del capítulo.)

19. *Desplazamientos aleatorios.* Una partícula sigue una trayectoria en el espacio que se compone de N pasos iguales, cada uno de los cuales tiene una longitud s. La dirección en el espacio de cada paso es completamente al azar, sin relación ni correlación entre dos cualesquiera de ellos. El desplazamiento total es

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{s}_i$$

Demostrar que el desplazamiento cuadrático medio entre las posiciones inicial y final es $\langle S^2 \rangle = Ns^2$, donde $\langle\ \rangle$ designa el valor medio. (*Indicación:* la hipótesis de que la dirección de cada paso es independiente de la dirección de cualquier otro significa que $\langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle = 0$ para todo valor i y j, excepto para $i = j$.)

20. *Invariancia.* Consideremos un vector **A** en un sistema de coordenadas cartesianas con los vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$. Este sistema gira ahora un ángulo θ alrededor del eje $\hat{\mathbf{z}}$.

(*a*) Expresar los nuevos vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$ en función de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$,y θ; $\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}}$.

(*b*) Expresar **A** en función de $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$ y $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$; transformar en $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ y determinar las relaciones entre $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$ y A_x, A_y, A_z.

(*c*) Demostrar que $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A'^2_{x'} + A'^2_{y'} + A'^2_{z'}$.

(Este problema con una rotación arbitraria en tres dimensiones es complicado. Un método es usar 9 cosenos directores entre los cuales hay 6 relaciones, tres procedentes de la ortogonalidad de $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$ y tres del hecho de que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1.)

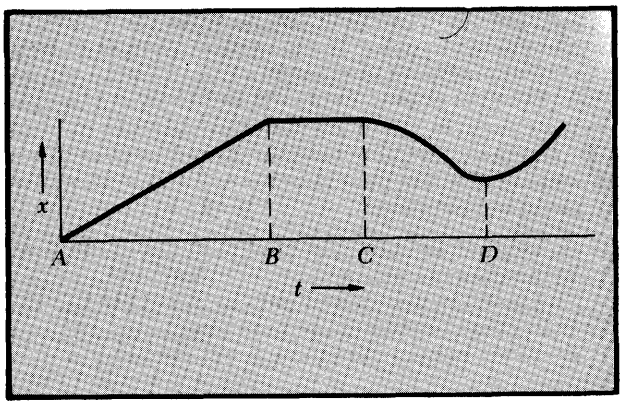


FIG. 2.29 Gráfica de x respecto a t.

NOTAS MATEMÁTICAS

Derivadas respecto al tiempo, velocidad y aceleración. La dinámica incluye el movimiento de las partículas y los objetos y, en consecuencia, la evolución con el tiempo; es decir, algunas magnitudes que describen las partículas u objetos son variables con el tiempo. Frecuentemente utilizaremos las coordenadas x, y, z en nuestra descripción del sistema físico. Al final de esta sección se introducen otros tipos importantes de sistemas coordenados: el polar esférico y el cilíndrico.

Una descripción dinámica ofrecerá las coordenadas x, y, z en función del tiempo. La fig. 2.29 representa tal descripción con la magnitud x en función del tiempo t. Para comprender cómo varía x, la característica fundamental es la pendiente de la curva. Entre A y B, x crece uniformemente y la pendiente, que es la tangente del ángulo que forma con el eje t, es constante. Entre B y C la curva es paralela al eje t y la pendiente es cero. Observemos que x no cambia y, por tanto, la pendiente es una reflexión de la componente x de la velocidad. Entre C y D la pendiente se hace negativa, la tangente del ángulo es también negativa y x decrece. En D la pendiente se anula y después se incrementa. A partir de la Ec. (2.21) se define dx/dt como la velocidad en la dirección x y ésta es, naturalmente, la definición de la pendiente. Es importante recordar que la velocidad en cualquier dirección particular tiene una magnitud que puede ser positiva o negativa.

Sería una pérdida de tiempo inútil si hiciéramos un gráfico cada vez que queremos describir un movimiento. En su lugar, daremos una relación funcional entre las coordenadas x, y o z y el tiempo t. Tal relación es $x = vt$. Como $dx/dt = v$, resulta que la velocidad es una constante v. Otro ejemplo es $x = \frac{1}{2}at^2$, en cuyo caso $dx/dt = at = v$. Podemos ahora representar v en función de t. ¿Cuál es la pendiente dc esta curva? Ya lo hemos discutido [Ec. (2.28)] y sabemos que esta pendiente es la aceleración en la dirección x; así, $d^2x/dt^2 = dv/dt = a$. En los capítulos siguientes haremos referencia y utilizaremos la aceleración con mucha frecuencia.

Observemos que las dimensiones de la velocidad son *longitud* dividida por *tiempo*. Naturalmente, existen mu-

chas unidades de longitud y muchas unidades de tiempo. Como mencionamos en el Cap. 1, usaremos comúnmente cm para medir la distancia y segundos para el tiempo; de modo que nuestra unidad de velocidad es el cm/s. Sin embargo, son también unidades de velocidad las millas/hora, pulgadas/siglo, kilómetros/μs, etc. [En unidades S.I. (sistema mks) la unidad de velocidad es el m/s].

Al derivar es importante recordar lo que se denomina *regla de la cadena,* regla para derivar un producto de variables. La derivada de un producto es igual a la derivada del primer factor por los demás factores, más la derivada del segundo factor por los demás factores, etc.

Determinar la velocidad y aceleración en la dirección x, y o z, si:

$x = 35t$	$x = 5\cos 8t$	$x = t^2 \operatorname{sen} 6t$
$y = \frac{1}{2}At^2$	$y^2 = 25t$	$y = t^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} 5t$
$z = \frac{1}{2}Ct^4 + \frac{1}{4}Dt^3$	$z = 7e^{-t}$	$z = A \ln t$

Si el lector no está familiarizado con la derivación del seno o coseno, téngase en cuenta que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\operatorname{sen} t &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t+\Delta t) - \operatorname{sen} t}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t\cos\Delta t + \cos t\operatorname{sen}\Delta t - \operatorname{sen} t}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t + \cos t\,\Delta t - \operatorname{sen} t}{\Delta t}\\ &= \cos t \qquad (2.39)\end{aligned}$$

Véanse las Ecs. (2.44) y (2.45) para sen Δt y cos Δt. Igualmente

$$\frac{d}{dt}\cos t = -\operatorname{sen} t \qquad (2.40)$$

Si queremos derivar sen ωt, sea $\omega t = z$. Por tanto

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sen}\omega t = \frac{d}{dz}\operatorname{sen} z\frac{dz}{dt} = \omega\cos z = \omega\cos\omega t \qquad (2.41)$$

Igualmente se obtiene

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tg} t = \frac{d}{dt}\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{\cos t}{\cos t} + \frac{\operatorname{sen} t\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$$

Angulos. Al describir la posición de una partícula, como en el caso del movimiento circular, se utilizan muy a menudo los ángulos como un elemento de la descripción. La velocidad angular es la derivada del ángulo respecto al tiempo con su dirección vectorial paralela al eje de rotación. Existe una unidad natural para medir los ángulos, muy utilizada en toda la física: es el *radian* (rad). Un radian es el ángulo subtendido por un arco de un círculo cuya longitud sea igual al radio. Como la circunferencia es igual a 2π veces el radio, el ángulo de un círculo completo (360°) será 2π radianes. Dividiendo 360 por 2π obtenemos 57,3°, medida de 1 rad en grados. La velocidad angular se mide en rad/s. Conocida la velocidad angular, si el radio es constante, para obtener la velocidad lineal basta multiplicar por el radio [Ec. (2.32)]. Obsérvese que el radian no tiene dimensiones, por tratarse del cociente entre dos longitudes (arco dividido por radio).

A continuación se indican algunos problemas sobre medidas angulares:

1. Determinar cuántos radianes son 90°, 240° y 315°.

2. Si $\theta = {}^1/_5 t$, ¿cuánto vale la velocidad angular? Suponiendo que θ se exprese en radianes, determinar la velocidad angular en grados por segundo (°/s).

3. Una partícula se mueve en un círculo de radio 15 cm con una velocidad de 5 cm/s. Determinar la velocidad angular.

La función e^x. Una cuestión interesante desde el punto de vista matemático es la siguiente: ¿Qué función tiene una derivada igual a la propia función? Esta función, representada por una serie de infinitos términos, tiene la forma

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\cdots\frac{x^n}{n!}\cdots$$

En efecto, si la derivamos respecto a x, el primer término es 0, el segundo es 1, el tercero x, el siguiente $x^2/2!$, y así sucesivamente; es decir, vuelve a reaparecer la serie primitiva, que es e^x. ¿Qué es e? Haciendo $x = 1$, tenemos $e^x = e$, es decir, $e = 1 + 1 + 1/2 + 1/3! + 1/4! + 1/5! + \ldots = 2{,}7183\ldots$ También puede comprobarse que $e^{x+y} = e^x e^y$. Podemos preguntarnos por qué 10^x no es una función como e^x. En otros términos, ¿de dónde surge este número? Supongamos que queremos calcular $d(10^x)/dx$:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10^{x+\Delta x} - 10^x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{10^x 10^{\Delta x} - 10^x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{10^x(10^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}\\ &= 10^x \times 2{,}30\ldots = 2{,}30\ldots \times 10^x\ *\end{aligned}$$

Desde este punto de vista vemos que e es justamente una magnitud tal que

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \qquad (2.42)$$

(*) El factor 2,30... es el logaritmo neperiano de 10. Hagamos $10^{\Delta x} = 1 + \alpha + \ldots$ donde tanto Δx como α son magnitudes pequeñas:

$$\log_e 10^{\Delta x} = 2{,}30\ldots \log_{10} 10^{x\Delta} = 2{,}30\ldots\,\Delta x$$
$$\log_e(1+\alpha) = \alpha$$

Por tanto, $\alpha = 2{,}30\ldots\Delta x$. Este resultado puede comprobarse mediante el uso de una tabla de logaritmos.

Una de las razones de la importancia de esta magnitud en física es que muy a menudo nos encontramos con ecuaciones del tipo $dy/dx = ky$, en las que la derivada de y es igual a una constante multiplicada por y. Esto puede escribirse en la forma $dy/k\,dx = y$, y si hacemos kx igual a la variable independiente z, resulta $dy/dz = y$. Teniendo en cuenta la Ec. (2.42), vemos que $y = e^z = e^{kx}$ es una función que satisface la ecuación. Por tanto, hemos «encontrado una solución» a la ecuación $dy/dx = ky$.

Algunas propiedades de e^x son: $e^0 = 1$, $e^{-\infty} = 0$, $e^1 = e$ y $e^\alpha \approx 1 + \alpha$, siempre que α sea muy pequeño. Obsérvese que la serie que define e^x recuerda un poco la serie del seno y del coseno, excepto que en estas últimas se alterna el signo y sólo tienen potencias impares y pares de x, respectivamente. Recordando que $\sqrt{-1} = i$ alterna el signo al aumentar en una unidad su potencia, resulta

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!}$$
$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} \cdots \tag{2.43}$$

que es justamente $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. La relación

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

se denomina *teorema de Moivre* y tendremos ocasión de utilizarlo en el Cap. 7 (en las Notas matemáticas).

Al derivar la ecuación 2.39 observamos que $\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) = \operatorname{sen}\theta \cos\Delta\theta + \cos\theta \operatorname{sen}\Delta\theta \approx \operatorname{sen}\theta + \cos\theta\,\Delta\theta$, en donde $\Delta\theta$ es una magnitud pequeña. En resumen, $\operatorname{sen}\Delta\theta \approx \Delta\theta$ y $\cos\Delta\theta \approx 1$, en donde $\Delta\theta$ es un ángulo pequeño. Recuérdese que el ángulo se mide en radianes. El lector puede tomar unas tablas de senos y cosenos y comprobar esto por sí mismo. A continuación se exponen los primeros términos de las siguientes series que definen el seno y el coseno:

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \cdots \tag{2.44}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \cdots \tag{2.45}$$

Obsérvese que si θ es pequeño, por ejemplo 0,10, el segundo término de la serie para el seno es $\theta^3/6 = \dfrac{1}{6000}$, o sea, 600 veces más pequeño que el primero. Por tanto, se comete sólo un pequeño error omitiendo el segundo término y en el límite cuando θ tiende a cero, la aproxinación es estrictamente exacta.

Desarrollo en serie. A menudo es importante en física calcular el valor de una función en un punto cuando se conoce en otro próximo. A este fin es muy útil el *Desarrollo de Taylor*. En la proximidad de un punto x_0 el valor de una función $f(x)$ viene dado por

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0} + \cdots \tag{2.46}$$

La relación entre el tercer término y el segundo es

$$\frac{\frac{1}{2}(x - x_0)^2\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0}}{(x - x_0)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}} \approx (x - x_0)$$

Por tanto, si $x - x_0$ es pequeño en comparación con la unidad, podemos con un pequeño error (que puede calcularse) aproximar $f(x)$ usando la fórmula

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \tag{2.47}$$

Por ejemplo, supongamos que $y = Ax^5$ y que sabemos que $y_0 = Ax_0^5$ y deseamos calcular y para $x = x_0 + \Delta x$. Entonces

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = 5Ax_0^4 \qquad (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} = \Delta x\, 5Ax_0^4$$

y por tanto,

$$y = Ax_0^5 + 5Ax_0^4\,\Delta x \cdots \tag{2.48}$$

Con expresiones que incluyan potencias puede escribirse la siguiente ecuación

$$(a + bx)^n = a^n\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n$$

y utilizar la fórmula del binomio, con la que resulta

$$a^n\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n = a^n\left[1 + n\left(\frac{bx}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{bx}{a}\right)^3 \cdots\right] \tag{2.49}$$

Si bx/a es pequeño frente a 1, podemos realizar una buena aproximación despreciando todos los términos que siguen a $n(bx/a)$. Aplicando esto a nuestro problema resulta

$$y = A(x_0 + \Delta x)^5 = Ax_0^5\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^5 = Ax_0^5\left(1 + 5\frac{\Delta x}{x_0} \cdots\right)$$
$$= Ax_0^5 + 5Ax_0^4\,\Delta x \cdots$$

de acuerdo con la ecuación (2.48).

Comprobar las siguientes aproximaciones para valores de x pequeños frente a la unidad:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \tfrac{1}{2}x \cdots \qquad \sqrt[3]{1+x} = 1 + \tfrac{1}{3}x \cdots$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x \cdots \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \tfrac{1}{3}x \cdots$$
$$\sqrt{1-x} = 1 - \tfrac{1}{2}x \cdots$$

Vectores y coordenadas polares esféricas. La posición de una partícula se expresa en coordenadas polares esféricas mediante los valores de r, θ y φ, donde r es el módulo del vector $\mathbf{r}$ desde el origen a la partícula; θ, el ángulo comprendido entre $\mathbf{r}$ y el eje polar z; y φ es el ángulo formado por el eje x y la proyección de r sobre el plano ecuatorial xy. Se toma $0 \leqq \theta \leqq \pi$. La proyección de $\mathbf{r}$ sobre el plano xy tiene el valor r sen θ. Obsérvese que la posición en coordenadas cartesianas viene dada por

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi; \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi; \quad z = r\cos\theta. \quad (2.50)$$

como se ve en la figura 2.30.

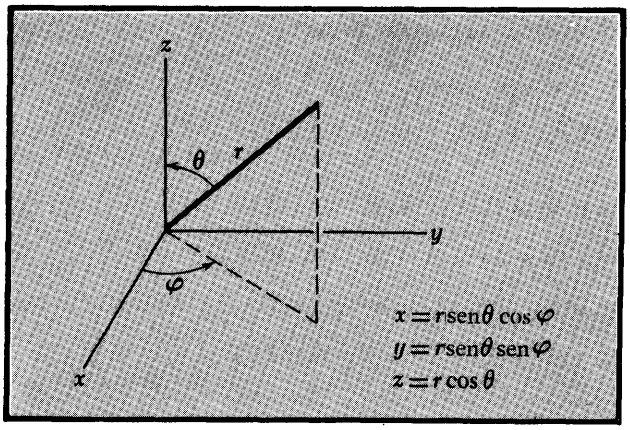


FIG. 2.30 Coordenadas polares esféricas.

1. Sea una primera partícula situada en $\mathbf{r}_1 \equiv (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ y una segunda en $\mathbf{r}_2 \equiv (r_2, \theta_2, \varphi_2)$. Llamemos θ_{12} al ángulo entre $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Expresando el producto escalar $\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2 = r_1 r_2 \cos\theta_{12}$ en función de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ se demuestra que

$$\cos\theta_{12} = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2, \quad (2.51)$$

en donde hemos utilizado la identidad trigonométrica

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2. \quad (2.52)$$

Este es un buen ejemplo del poder de los métodos vectoriales. [¡Inténtese encontrar el resultado (2.51) de otra manera!]

2. De modo semejante, formando el producto vectorial $\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2$, deducir una relación para sen θ_{12}.

Las coordenadas cilíndricas polares ρ, φ, z, son un conjunto de coordenadas ortogonales definidas por $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho$ sen φ; $z = z$,(fig. 2.31). Cuando se utiliza en dos dimensiones, las coordenadas se reducen a ρ y φ únicamente. Sin embargo, con frecuencia utilizaremos r y θ en lugar de ρ y φ. (Véase, por ejemplo, las fórmulas que siguen.)

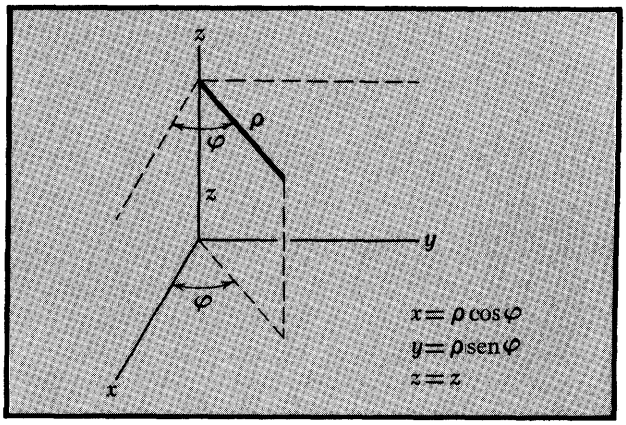


FIG. 2.31 Coordenadas polares cilíndricas.

Fórmulas de geometría analítica

	Coordenadas cartesianas	*Coordenadas polares*
Línea en el plano xy	$ax + by = 1$	
Línea en el plano xy que pasa por el origen	$y = ax$	
Plano	$ax + by + cz = 1$	
Plano que pasa por el origen	$ax + by + cz = 0$	
Círculo, centro en el origen	$x^2 + y^2 = r_0^2$	$r = r_0$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{1}{r} = \frac{1 - e\cos\theta}{a}$
	centro en el origen	$e < 1$; origen en el foco
Parábola	$y^2 = mx$	$\frac{1}{r} = \frac{1 - \cos\theta}{a}$
	vértice en el origen	origen en el foco
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{1}{r} = \frac{1 - e\cos\theta}{a}$
	centro en el origen	$e > 1$; origen en el foco

Identidades vectoriales útiles

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{2.53}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\mathbf{y}}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{\mathbf{z}}(A_xB_y - A_yB_x) \tag{2.54}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A} \tag{2.55}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \tag{2.56}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \tag{2.57}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})]\mathbf{C} - [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\mathbf{D} \tag{2.58}$$

$$\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})] = (\mathbf{A}\times\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\times\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \tag{2.59}$$

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

PSSC, *Física*, Cap. 6. Ed. Reverté.

Banesh Hoffman, *About Vectors*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966. No es un libro de texto, pero es útil para aquellos alumnos que tengan algún conocimiento sobre vectores.

G. E. Hay, *Vector and Tensor Analysis*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1953.

D. E. Rutherford, *Vector Methods*, Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh, or Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1949.

H. B. Phillips, *Vector Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1933. Libro antiguo, muy usado por una generación de estudiantes.

Contenido

LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON
Movimiento para $\mathbf{F} = 0$
FUERZAS Y ECUACIONES DEL MOVIMIENTO
Unidades
Dimensiones
MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO GRAVITATORIO UNIFORME
Ejemplo. Alcance máximo
LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL
Ejemplo. Satélite en una órbita circular
FUERZAS ELÉCTRICAS Y MAGNÉTICAS SOBRE UNA PARTÍCULA CARGADA; UNIDADES
El campo eléctrico
El campo magnético y la fuerza de Lorentz
Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme y constante
Ejemplo. Aceleración longitudinal de un protón
Ejemplo. Aceleración longitudinal de un electrón
Ejemplo. Aceleración transversal de un electrón
Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético constante uniforme
Ejemplo. Frecuencia ciclotrónica
Ejemplo. Radio de giro del ciclotrón
CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO
Deducción a partir de la tercera ley de Newton
Ejemplo. Colisión elástica de dos partículas de igual masa con una de ellas inicialmente en reposo
FUERZAS DE CONTACTO; ROZAMIENTO
Ejemplo. Medida de μ
Ejemplo. Deslizamiento con fuerza tangencial variable en dirección
Ejemplo. Movimiento horizontal con fuerza de rozamiento constante
Problemas
Tema avanzado. Partícula cargada en un campo eléctrico uniforme alterno
Nota matemática. Ecuaciones diferenciales
Nota histórica. La invención del ciclotrón
Lecturas suplementarias

3

Leyes del movimiento de Newton

LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

Este capítulo está relacionado principalmente con las leyes del movimiento de Newton. En primer lugar establecemos las leyes en sus formas convencionales y después exponemos algunas aplicaciones que ayuden al alumno a ganar confianza en su uso. En el Cap. 4 trataremos algunos de los problemas relacionados con la elección de los sistemas de referencia y con las transformaciones de Galileo. Aunque la materia incluida en el Cap. 4 podía considerarse antes del presente capítulo, algunas experiencias con aplicaciones directas de las leyes fortalecerán la apreciación de los aspectos más sutiles presentados en el Cap. 4.

Primera ley de Newton: Un cuerpo permanece en estado de reposo o velocidad constante (aceleración cero) cuando ninguna fuerza externa actúa sobre él. Esto es

$$\mathbf{a} = 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{F} = 0.$$

(Las cuestiones filosóficas de cuál es el contenido de la primera ley, por ejemplo, si está contenida completamente en la segunda ley, no se tratan aquí *.)

Segunda ley de Newton: La variación respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de un cuerpo es proporcional a la fuerza que actúa sobre el mismo. La cantidad de movimiento se define como $M\mathbf{v}$, en donde M es la masa y $\mathbf{v}$ el vector velocidad, de modo que

$$\mathbf{F} = K\frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) = KM\frac{d\mathbf{v}}{dt} = KM\mathbf{a}$$

en donde hemos supuesto en el tercer y cuarto término que M es constante. Las unidades se eligen de modo que $K = 1$ cuando M se mide en gramos (g), $\mathbf{a}$ en centímetros por segundo cada segundo (cm/s^2); entonces $\mathbf{F}$ se mide en *dinas* (din): la dina es, por tanto, una fuerza que, aplicada a la masa de un gramo, le produce la aceleración de 1 cm/s^2. En el Sistema Internacional de Unidades, S.I., M se mide en kilogramos (kg) y $\mathbf{a}$ en m/s^2, resultando $\mathbf{F}$ en

(*) Véase, por ejemplo, E. Mach, «The Science of Mechanics», 6.ª ed., p. 302 y sig. The Open Court Publishing Company, La Salle, Ill., 1960.

newtons (N). Un newton es, por tanto, la fuerza que, aplicada a la masa de 1 kg, le produce la aceleración de 1 m/s²:

$$1\,\mathrm{N} = 10^3\,\mathrm{g} \times 100\,\mathrm{cm/s^2} = 10^5\,\mathrm{din}$$

Por tanto, podemos escribir

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d}{dt}M\mathbf{v}} \tag{3.1}$$

y si $dM/dt = 0$

$$\boxed{\mathbf{F} = M\mathbf{a}} \tag{3.2}$$

La hipótesis de que M es constante nos restringe automáticamente a los problemas no relativistas con $v \ll c$. Trataremos la relatividad especial en los capítulos 10 a 14 y la variación de la masa con v en el Cap. 12. También nos restringe la consideración de algunos problemas interesantes, tales como los cohetes y las cadenas que caen. (Trataremos algunos de estos temas en el Cap. 6.) Sin embargo, pueden plantearse una abundante variedad de problemas con M constante.

Tercera ley de Newton: Siempre que dos cuerpos interaccionan, la fuerza $\mathbf{F}_{21}$ * que el primer cuerpo (1) ejerce sobre el segundo (2) es igual y opuesta a la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ que el segundo (2) ejerce sobre el primero (1).

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}} \tag{3.3}$$

Veremos que esta ley es la base para la conservación de la cantidad de movimiento. La velocidad finita de propagación de las fuerzas (relatividad especial) introduce dificultades en la aplicación de esta ley, que serán mencionadas en el Cap. 4.

Hemos de destacar aquí que estas dos fuerzas $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21}$ actúan sobre cuerpos diferentes y en la aplicación de la segunda ley de Newton a un cuerpo particular es sólo la fuerza sobre este cuerpo la que debe considerarse. La fuerza igual y opuesta influye sólo sobre el

(*) Adoptamos el convenio de que F_{ij} es la fuerza sobre el cuerpo i debida al cuerpo j.

movimiento del otro cuerpo (véase Prob. 1 al final del capítulo).

A continuación presentamos cierto número de ejemplos de aplicación de las leyes de Newton. Aquellos alumnos que no estén familiarizados con la solución de ecuaciones diferenciales deberán consultar las Notas matemáticas que existen al final del capítulo, en conexión con la materia que se expone a continuación.

Movimiento para $\mathbf{F} = 0$. Este caso simple corresponde a la primera ley de Newton. Escribiendo

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = 0 \tag{3.4}$$

lo cual exige que $\mathbf{v}$ sea constante. Aquí es importante el carácter vectorial de $\mathbf{v}$, ya que tanto la dirección como la magnitud de $\mathbf{v}$ son constantes. Por ejemplo, una masa que se mueve con velocidad constante en un círculo tiene una velocidad cuya dirección cambia constantemente y, por tanto, no puede moverse en tal trayectoria si $\mathbf{F} = 0$.

Si la velocidad constante $\mathbf{v}$ es cero, la masa M permanece en reposo. Si no es cero, pero

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0 \tag{3.5}$$

podemos integrar esta ecuación para obtener

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \tag{3.6}$$

en donde $\mathbf{r}_0$ es el valor de $\mathbf{r}$ para $t = 0$. Naturalmente, estas ecuaciones pueden expresarse en coordenadas cartesianas.

FUERZAS Y ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Sin embargo, mucho más importantes son los casos en que $\mathbf{F}$ no es igual a cero. Bajo la influencia de una fuerza neta $\mathbf{F}$, una partícula de masa constante experimenta una aceleración, según la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} = M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{3.7}$$

Esta expresión matemática es una *ecuación del movimiento*. Con esto significamos que por integración sucesiva de esta ecuación diferencial se obtienen expresiones para la velocidad y la posición de la partícula en fun-

ción del tiempo. Claramente, la resolución de una ecuación del movimiento puede ser un problema difícil si la fuerza posee una dependencia compleja con estas variables; pero, afortunadamente, existen muchos casos importantes e instructivos que incluyen fuerzas constantes en el tiempo e independientes de la velocidad.

Existe un cierto número de tipos importantes de fuerzas conocidas en física: la fuerza gravitatoria, la fuerza electrostática, la fuerza magnética y, entre otras, diversas fuerzas nucleares intensas pero de corto alcance. Mediante estas fuerzas, las partículas pueden interactuar entre sí aun cuando estén separadas en el espacio vacío. Si la partícula experimenta una fuerza resultante debida a la interacción gravitatoria con otras partículas o cuerpos diremos que se trata de un *campo gravitatorio* producido por aquellos cuerpos. Cuando una partícula eléctricamente cargada experimenta una fuerza resultante debida a la distribución de cargas eléctricas en otras partículas o cuerpos en las proximidades, consideraremos que se trata de un *campo eléctrico.*

En muchos problemas de mecánica aplicada hablaremos de *fuerzas de contacto,* tales como la tensión de la cuerda que soporta la lenteja de un péndulo o la presión de un plano contra un objeto que descansa sobre él. Con frecuencia, ambas fuerzas (de campo y de contacto) están presentes, como ocurre en la oscilación dentro de un campo magnético de una masa pendular soportada por la tensión de una cuerda. En realidad, todas las fuerzas de contacto son fuerzas de campo, ya que ellas surgen de las interacciones electromagnéticas entre partículas atómicas. Sin embargo, para nuestro objetivo actual es, con frecuencia, más conveniente considerar simplemente la fuerza o fuerzas de contacto. Al tratar la mecánica de partículas atómicas, evidentemente nos referimos sólo a las fuerzas de campo; el *contacto* no puede considerarse en su significado simple usual en el dominio atómico.

Unidades. En esta sección trataremos brevemente del tema de las leyes de Newton para discutir la cuestión de unidades. Posteriormente, en el capítulo en que introducimos las fuerzas eléctricas y magnéticas, discutiremos las unidades que han de utilizarse para la carga eléctrica y los campos eléctricos y magnéticos. Aquí nos referiremos sólo a las unidades mecánicas.

Para comunicar informaciones sobre los movimientos se necesitan forzosamente patrones de longitud y de tiempo. Afortunadamente existe un consenso general

sobre un patrón del tiempo: el segundo (s). Originalmente se definió como una parte determinada de un año, el cual se definía por consideraciones astronómicas. Sin embargo, existen dificultades prácticas en utilizar esta definición y, por ello, el segundo se define en función del número de oscilaciones características de un sistema atómico, el elemento cesio. La definición exacta es que un segundo es el tiempo durante el cual ocurren 9 192 631 770 oscilaciones del átomo de cesio. Dejando aparte los procedimientos experimentales es exactamente igual utilizar un reloj antiguo de pared y decir que un segundo es el tiempo que corresponde a tantas oscilaciones completas del péndulo.

Respecto a la unidad de longitud no existe un acuerdo universal, pues los países de habla inglesa utilizan un sistema y el resto del mundo, otro. Los científicos han encontrado más simple el sistema de unidades utilizado por el resto del mundo que el utilizado por los británicos y, en consecuencia, lo han adoptado; es de esperar que los países de habla inglesa pronto lo adopten. Posee un patrón, el centímetro o el metro, con subpatrones derivados que son exactamente múltiplos de 10 del patrón. Originalmente el patrón era la distancia entre dos líneas finísimas marcadas en una barra conservada en París, que se definía exactamente como 100 cm o 1 m. Esta longitud presenta dificultades como, por ejemplo, la anchura de las líneas. Por ello ahora se utiliza un patrón mejor, la longitud de onda de la luz roja del Kr^{86}; un centímetro (cm) es igual a 16 507,6373 longitudes de onda. La cuestión de si el metro o el centímetro es la longitud fundamental es puramente académica, pues el factor de conversión es exactamente 100. En este libro utilizaremos el centímetro, aunque haremos referencias al uso del metro y muchos libros utilizan el metro como unidad de longitud. Las dificultades del sistema inglés vienen del hecho de que las diferentes unidades de longitud no están simplemente relacionadas unas con otras; por ejemplo, el pie tiene 12 pulgadas; la yarda tiene 3 pies y la milla, 1760 yardas.

La segunda ley de Newton incluye dos magnitudes más: la masa y la fuerza. ¿Necesitamos patrones para ambas magnitudes? La respuesta es negativa. Basta establecer un patrón para una de ellas y utilizar la segunda ley de Newton como definición de la otra. Históricamente se definió la unidad de masa y se derivó de ella la unidad de fuerza. La unidad de masa es el gramo o el kilogramo, que es exactamente 1000 gramos. El kilogramo masa se conserva también en París. La comparación de

masas es un proceso fácil, de modo que no se ha considerado necesaria la adopción de la masa de un cierto tipo de átomo.

En este aspecto también el sistema inglés es complicado, pues la onza, la libra y la tonelada inglesa no están relacionadas de un modo simple. Por tanto, adoptaremos el centímetro, el gramo y el segundo como unidades fundamentales de longitud, masa y tiempo, respectivamente, y usaremos unidades derivadas de éstas para la fuerza, cantidad de movimiento, energía, potencia, etcétera. Este sistema se denomina *cgs* o *cegesimal.* También se emplea comúnmente el sistema SI, que usa el metro y el kilogramo en lugar del centímetro y el gramo. La introducción de la electricidad y del magnetismo plantea nuevas cuestiones sobre las unidades que se discutirán en el Vol. 2 y se define la velocidad de la luz que aparece en la sección de campos magnéticos en este capítulo.

Dimensiones. Cuando se desarrolla un cálculo complicado es muy importante asegurarse de que las unidades de los dos miembros de la ecuación resultante son las mismas. Por ejemplo, al calcular la distancia recorrida por un objeto, podemos asegurar que se ha cometido algún error si la respuesta se expresa en gramos. Un análisis de este tipo se denomina usualmente *análisis dimensional.* No es necesario especificar las unidades que se utilizan, sino sólo las dimensiones de masa, longitud y tiempo del modo siguiente.

¿Cuáles son las dimensiones de la fuerza? Utilizaremos la Ec. (3.7) para ver que la fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración; que la aceleración es igual a la velocidad dividida por el tiempo y que la velocidad es el cociente del espacio por el tiempo; por tanto, llamando M, L y T, respectivamente, a las dimensiones de masa, longitud y tiempo, resulta

$$\text{Fuerza} = [M][\text{acel}] = [M][L][T]^{-2}$$

$$\text{Aceleración} = \frac{[L]}{[T][T]} = [L][T]^{-2}$$

$$\text{Velocidad} = \frac{[L]}{[T]} = [L][T]^{-1}$$

Como ejemplo del uso del análisis dimensional supongamos que se obtiene la ecuación fuerza $= 3/5\rho v^2$, en donde ρ es la masa por unidad de volumen o densidad y v la velocidad. El análisis dimensional nunca nos descubrirá si el factor 3/5 es correcto, por no tener dimen-

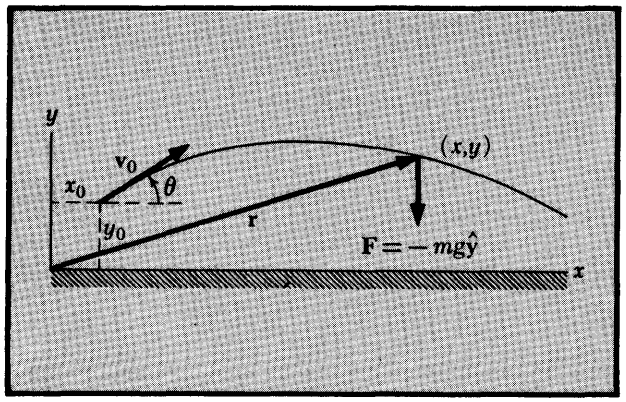


FIG. 3.1 Movimiento de una partícula libre proyectada inicialmente en (x_0, y_0) con velocidad v_0 bajo un ángulo θ en un campo gravitatorio uniforme. El vector posición en el instante representado es $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y$. El vector aceleración es $d^2\mathbf{r}/dt^2 = (d^2x/dt^2)\hat{\mathbf{x}} + (d^2y/dt^2)\hat{\mathbf{y}} = -g\hat{\mathbf{y}}$.

siones, es decir, tratarse de un número puro. Sin embargo, las dimensiones de ρ y v^2 son

$$\rho = [M][L]^{-3} \qquad v^2 = [L]^2[T]^{-2}$$

Por tanto, $\rho v^2 = [M]\,[L]^{-3}\,[L]^2[T]^{-2} = [M]\,[L]^{-1}\,[T]^{-2}$, mientras que la fuerza, como hemos visto antes, tiene las dimensiones $[M]\,[L]\,[T]^{-2}$. Debe haberse cometido algún error al obtener la ecuación original. Aquellos alumnos familiarizados con el concepto de *presión*, o fuerza por unidad de área, verán que ρv^2 tiene las dimensiones de esta magnitud.

MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO GRAVITATORIO UNIFORME

Veamos a continuación algunas aplicaciones de la segunda ley de Newton. Si restringimos nuestra consideración a una región del laboratorio muy pequeña comparada con el tamaño de la Tierra, podremos en buena aproximación considerar que en cualquier punto la fuerza gravitatoria que actúa sobre una partícula es constante y dirigida *hacia abajo*. La aceleración debida a esta fuerza viene dada por el valor local de la aceleración gravitatoria * g, y así la magnitud de la fuerza que actúa sobre una partícula es mg. En forma vectorial esta fuerza puede escribirse en la forma $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{y}}$, en donde se eligen los ejes x, y, como indica la fig. 3.1.

Prescindiendo de otras fuerzas como la fricción, la ecuación del movimiento, según la segunda ley de Newton [Ec. (3.7)], es

$$m\left[\hat{\mathbf{x}}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{\mathbf{y}}\frac{d^2y}{dt^2}\right] = -mg\hat{\mathbf{y}}$$

Como las direcciones de las componentes son ortogonales podemos separarlas en dos ecuaciones componentes y, por tanto, no es necesario retener los factores vectoriales unitarios. Así

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{3.8}$$

La integración de estas ecuaciones para obtener x e y en función de t puede verse en las Notas matemáticas

(*) Usualmente se toma $g = 980$ cm/s^2 = 9,80 m/s^2. En la tabla 4.1 se dan una serie de valores de esta magnitud en la superficie de la Tierra.

al final del capítulo. Con las condiciones iniciales indicadas en la fig. 3.1, las componentes de la velocidad son $v_0 \cos\theta$ y $v_0 \operatorname{sen}\theta$ para las direcciones x e y, respectivamente, y las soluciones son

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (v_0 \cos\theta)t \\ y &= y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Eligiendo las condiciones iniciales de posición y velocidad pueden analizarse diversos casos especiales, tales como la caída de una partícula desde el reposo a una altura inicial h, encontrándose resultados ya familiares. En los problemas 2 a 4 se indican algunos casos.

Si el alumno ha estudiado geometría analítica reconocerá la Ec. (3.9) como una forma paramétrica de la parábola con el parámetro t. Esto puede aclararse eliminando t entre las dos ecuaciones, con lo que se obtiene

$$y - \left(y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}\right) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\left[x - \left(x_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}\right)\right]^2$$

Esta es una forma típica de una parábola de vértice en

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g} \\ y_1 &= y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} \end{aligned}$$

abierta hacia abajo con un eje vertical de simetría. Si la resistencia del aire es despreciable, este análisis describe correctamente el movimiento de un proyectil. En realidad, es una buena aproximación para objetos de masa considerable que se mueven en trayectorias de extensión limitada con pequeñas velocidades (véase Prob. 20).

La representación parabólica con vértice en (x_1, y_1) dada anteriormente, revela que la máxima altura alcanzada por encima de la posición de lanzamiento es

$$h = y_1 - y_0 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

El alcance horizontal, es decir, la distancia a la cual el proyectil vuelve a la altura del lanzamiento viene dada por

$$R = 2(x_1 - x_0) = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \tag{3.10}$$

EJEMPLO

Alcance máximo. ¿Qué ángulo debe formar un proyectil con la horizontal para que R sea máximo? Antes de hacer el cálculo es fácil ver que $R(\theta)$ pasa por un máximo, pues si θ es demasiado pequeño, el proyectil no permanecerá en vuelo bastante tiempo para ir lejos, mientras que si θ es demasiado grande el proyectil se limita a subir y bajar y no avanza horizontalmente. Para resolver el problema analíticamente podemos simplemente usar el hecho de que para el máximo de R, $dR/d\theta = 0$. Mediante la ecuación (3.10) resulta,

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$$

LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

En la ecuación precedente hemos tratado el caso de un campo gravitatorio constante. ¿Qué sucede si la distancia entre los objetos en interacción gravitatoria es grande en comparación con su tamaño? La ley de la gravitación establece:

Una partícula de masa M_1 atrae a cualquier otra M_2 en el Universo con una fuerza

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}} \qquad (3.11)$$

en donde $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector dirigido de M_1 a M_2 y G es una constante que tiene el valor experimental $6{,}67 \times 10^{-8}$ dina-cm^2/g^2 ó $6{,}67 \times 10^{-11}$ newton-m^2/kg^2.

Obsérvese que ésta es la fuerza que actúa sobre M_2. El signo menos indica que la fuerza es atractiva; decrece con r.

La fuerza gravitatoria es una fuerza central dirigida a lo largo de la línea que une las dos masas puntuales. La determinación del valor de G se considera normalmente en textos de nivel medio. La experiencia clásica es la de Cavendish. Posteriormente veremos que, como la fuerza depende en razón inversa del cuadrado de la distancia (Cap. 9), un objeto de simetría esférica experimentará interacciones de igual forma que si fuera una partícula de igual masa que el objeto y situada en el centro.

El propio Newton no conocía el valor de G. Sin embargo, él conocía —en realidad, descubrió— que la ley de fuerzas es una ley «inversa del cuadrado» y que en la superficie de la Tierra (puesto que la Tierra es esencialmente esférica)

$$mg = \frac{GmM_T}{R_T^2} \tag{3.12}$$

en donde M_T es la masa de la Tierra y R_T su radio. Por tanto, pudo determinar GM_T, y con ello, la fuerza a cualquier distancia r mediante

$$F = \frac{GmM_T}{r^2} = \frac{GmM_T R_T^2}{R_T^2 \quad r^2} = mg\left(\frac{R_T}{r}\right)^2$$

También se sabía experimentalmente con un alto grado de exactitud que las masas gravitatoria e inerte de un cuerpo eran iguales. (Esto se discute en el Cap. 14.) Es decir, el valor de la masa utilizada en la ecuación gravitatoria anterior es igual al valor de la masa m del mismo cuerpo utilizada en la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La primera masa se denomina *masa gravitatoria* y la segunda *masa inerte*. Los experimentos clásicos sobre la igualdad de las dos masas fueron realizados por Eötvös; experimentos recientes y más exactos vienen descritos por R. H. Dicke * y P. G. Roll, R. Krotkov y R. H. Dicke **. El experimento de Eötvös se describe en el Cap. 14. Hemos supuesto la igualdad en la Ec. (3.12).

EJEMPLO

Satélite en una órbita circular. Consideremos un satélite en una órbita circular concéntrica y coplanaria con el ecuador terrestre. ¿Para qué radio r de la órbita parecerá que el satélite permanece estacionario observado desde la Tierra? Supóngase que el sentido de rotación de la órbita es el mismo que el de la Tierra.

En una órbita circular la atracción gravitatoria es igual y opuesta al producto de la masa por la aceleración centrípeta:

$$\frac{GM_T M_s}{r^2} = M_s\omega^2 r \tag{3.13}$$

en donde M_T es la masa de la Tierra y M_s la del satélite. De esta ecuación se obtiene

$$r^3 = \frac{GM_T}{\omega^2} = \frac{GM_T T^2}{(2\pi)^2} \tag{3.14}$$

(*) *Scientific American*, **205**: 84 (1961).
(**) *Ann. Phys.* (N.Y.), **26**: 442 (1964).

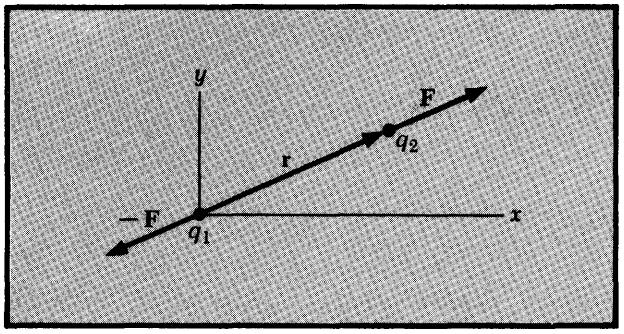


FIG. 3.2 Ilustración de la ley de Coulomb. $\mathbf{F} = (q_1q_2/r^2)\hat{\mathbf{r}} = (q_1q_2/r^3)\mathbf{r}$.

siendo T el período. La condición fundamental de este problema es que el valor de ω para la órbita del satélite sea igual a la velocidad angular ω_T de la Tierra alrededor de su eje. Esta última vale

$$\omega_e = \frac{2\pi}{1 \text{ día}} = \frac{2\pi}{8{,}64 \times 10^4} = 7{,}3 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$$

por consiguiente, si hacemos $\omega = \omega_T$, la ecuación (3.14) se transforma en

$$r^3 \approx \frac{(6{,}67 \times 10^{-8})(5{,}98 \times 10^{27})}{(7{,}3 \times 10^{-5})^2} \approx 75 \times 10^{27}$$

o

$$r \approx 4{,}2 \times 10^9 \text{ cm}$$

El radio de la Tierra es $6{,}38 \times 10^8$ cm. La distancia es aproximadamente la décima parte de la distancia a la Luna y unas 6,6 veces el radio de la Tierra.

FUERZAS ELÉCTRICAS Y MAGNÉTICAS SOBRE UNA PARTÍCULA CARGADA; UNIDADES

En esta sección consideraremos algunos problemas que incluyen fuerzas eléctricas y magnéticas que actúan sobre partículas cargadas. En el trabajo de laboratorio la mayor parte de los alumnos observarán y medirán los efectos de tales fuerzas sobre los movimientos de las partículas y el tema se tratará con detalle en el Vol. 2. De momento introduciremos brevemente las definiciones de las unidades de magnitudes eléctricas y magnéticas, a fin de poder tratar con las fuerzas que tienen lugar en esta importante rama de la mecánica.

Recordemos que cargas eléctricas del mismo signo se repelen entre sí con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y cuya dirección coincide con la línea que une las cargas. Esta es la ley de Coulomb, expresada en la forma:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{q_1q_2}{r^3}\mathbf{r} = \frac{q_1q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}} \qquad (3.15)$$

en donde $\mathbf{r}$ es el vector que separa la carga puntual q_2 (que experimenta la fuerza $\mathbf{F}$) de la carga puntual q_1 supuesta en el origen. El vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ es, naturalmente, igual a $\mathbf{r}/r$. La fig. 3.2 ilustra la situación y nos recuerda que si $\mathbf{F}$ actúa sobre q_2, $-\mathbf{F}$ actúa sobre q_1.

La ecuación (3.15) establece la ley de Coulomb en el sistema gaussiano de unidades. En este sistema se define una unidad de carga del modo siguiente: Dos cargas puntuales iguales poseen una unidad gaussiana de carga

cuando separadas 1 cm se repelen con la fuerza de 1 dina. La cantidad de electricidad que posee cada una es 1 unidad electrostática de carga (ues) o 1 *statculombio*. Las dimensiones de la carga eléctrica se deducen de la Ec. (3.15)

$$[q] = [\text{fuerza}]^{1/2}\,[\text{distancia}] = \\ = [\text{masa}]^{1/2}\,[\text{longitud}]^{3/2}\,[\text{tiempo}]^{-1}$$

Así, en unidades cgs, la carga en el sistema electrostático gaussiano es

$$[q] = g^{\frac{1}{2}}\,\text{cm}^{\frac{3}{2}}\,\text{s}^{-1}$$

Evidentemente es más fácil utilizar el nombre *ues* o *statculombio* que escribir esta combinación de símbolos.

Como hemos mencionado, el Sistema Internacional de Unidades (SI) utiliza el metro para medir distancias y el newton para medir fuerzas. En lugar de la definición de la carga unitaria, a partir de la ley de Coulomb, se utiliza una unidad en función de la corriente eléctrica es decir, en función del amperio (A). La cantidad de carga es 1 culombio (C) = 1 amperio-segundo (A-s). La ley de Coulomb debe entonces escribirse en la forma

$$\boxed{F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}} \qquad (3.15a)$$

en donde k tiene las dimensiones

$$[\text{Fuerza}]\,[\text{longitud}]^2\,[\text{carga}]^{-2}$$

y ϵ_0 las dimensiones inversas a éstas. En electrostática existen muchas operaciones que introducen el factor 4π y por ello se ha introducido 4π en el denominador de la Ec. (3.15*a*) a fin de que ambos se cancelen en tales operaciones. El valor de k es

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}988 \times 10^9\ \text{N-m}^2/\text{C}^2$$

La carga q_p transportada por el protón es la *carga elemental* y casi universalmente se designa por el símbolo e. Su valor en unidades cgs gaussianas es

$$e = +4{,}8022 \times 10^{-10}\ \text{ues}$$

y en unidades SI

$$e = +1{,}60210 \times 10^{-19}\ \text{C}$$
$$1\ \text{C} = 2{,}9979 \times 10^9\ \text{ues}$$

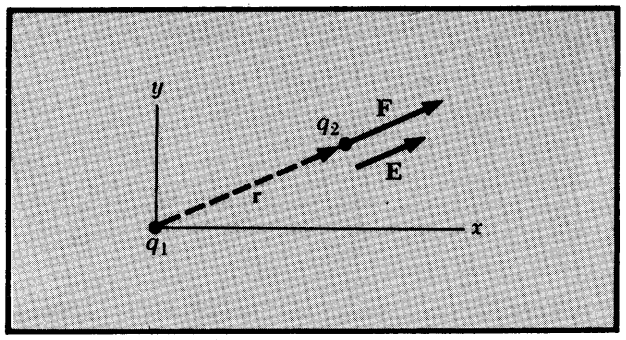


FIG. 3.3 Ilustración del concepto de intensidad de campo eléctrico **E**. $\mathbf{E} = (q_1/r^2)\hat{\mathbf{r}}$. $\mathbf{F} = q_2\mathbf{E} = (q_1q_2/r^2)\,\mathbf{r}$.

La carga de un electrón es igual a $-e$. La magnitud de la fuerza repulsiva entre dos protones a una separación de 10^{-12} cm es

$$F = \frac{e^2}{r^2} \approx \frac{(4{,}8 \times 10^{-10})(4{,}8 \times 10^{-10})}{10^{-12} \times 10^{-12}} \approx 2{,}3 \times 10^5 \text{ din}$$

En unidades SI es

$$F = k\frac{e^2}{r^2} \approx 9{,}0 \times 10^9 \frac{(1{,}6 \times 10^{-19})^2}{(10^{-14})^2} \approx 2{,}3 \text{ N}$$

La fuerza entre un protón y un electrón es atractiva por tratarse de cargas de signo opuesto.

El campo eléctrico. Cuando una partícula está situada de modo que sobre ella actúa una fuerza eléctrica decimos que existe un *campo eléctrico*. Tanto el campo como la fuerza mencionada son debidos a otra carga o a una distribución de cargas en las proximidades. La intensidad del campo **E** viene definida por la relación

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \tag{3.16}$$

en donde q es la magnitud de la «carga de prueba» sobre la cual observamos la fuerza **F**. El vector intensidad de campo **E** es, por tanto, el vector fuerza por carga unitaria positiva en la posición de la partícula en estudio.

En la fig. 3.3 representamos la misma situación de la fig. 3.2, pero aquí adoptamos el punto de vista de que la fuerza **F** sobre q_2 es debida a la intensidad de campo **E** producida por la carga q_1 localizada en el origen. El vector **E** viene en este caso dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{E} = \frac{q_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{3.17}$$

y la fuerza $\mathbf{F} = q_2\mathbf{E}$ es, por tanto, la misma que la expresada por la Ec. (3.15). La importancia del punto de vista del campo surgirá al estudiar la electricidad. Es particularmente útil al estudiar la fuerza eléctrica que actúa sobre una partícula cargada, originada por distribuciones de cargas eléctricas, tales como esferas o planos cargados, y como se explica en el Vol. 2, por campos magnéticos variables con el tiempo.

Las dimensiones de la intensidad de campo son las de una fuerza por unidad de carga; así, su unidad puede expresarse como 1 din/ues. Por razones que veremos más adelante, la intensidad de campo también se expresa en

statvoltios por centímetro (statvoltios/cm). Los dos modos de expresión indican lo mismo:

$$1 \text{ din/ues} = 1 \text{ statvoltio/cm}$$

destacando la última el *trabajo* correspondiente al desplazamiento de una carga unitaria por unidad de longitud en el campo y la primera la *fuerza* que actúa por unidad de carga.

En el sistema internacional, la Ec. (3.16) define también el campo eléctrico **E** y E se mide en newtons por culombio (N/C). En lugar de la Ec. (3.17), para el campo eléctrico debido a una carga q_1 tenemos

$$\mathbf{E} = k\frac{q_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (3.17a)$$

Lo mismo que en el sistema cgs, E puede expresarse también en voltios por metro (V/m)

$$1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$$

El factor de conversión de statvoltios por centímetro a voltios por metro es

$$2{,}9979 \times 10^4 \text{ V/m} = 1 \text{ statvoltio/cm}$$

$$1 \text{ V/m} = \frac{1}{2{,}9979 \times 10^4} \text{ statvoltio/cm}$$

$$\approx \frac{1}{3 \times 10^4} \text{ statvoltio/cm}$$

El campo magnético y la fuerza de Lorentz. Hasta aquí hemos considerado sólo la situación *estática*, en que las partículas cargadas no se mueven unas respecto a otras o respecto al observador, y la fuerza electrostática que actúa sobre una partícula de carga q como $\mathbf{F}_{el} = q\mathbf{E}$. Pero si q se mueve respecto al observador, es un hecho experimental la presencia de una fuerza adicional en dirección perpendicular a su velocidad; esta es la *fuerza magnética*. Una región en la que existe esta fuerza dependiente de la velocidad se dice que posee un *campo magnético*; experimentalmente sabemos que el *vector intensidad de campo magnético* **B** está relacionado con la fuerza magnética por la formulación *

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{mag}} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \qquad (3.18)$$

(*) Si se ha omitido el producto vectorial en el Cap. 2, esta sección puede reducirse al caso en que **v** y **B** son perpendiculares.

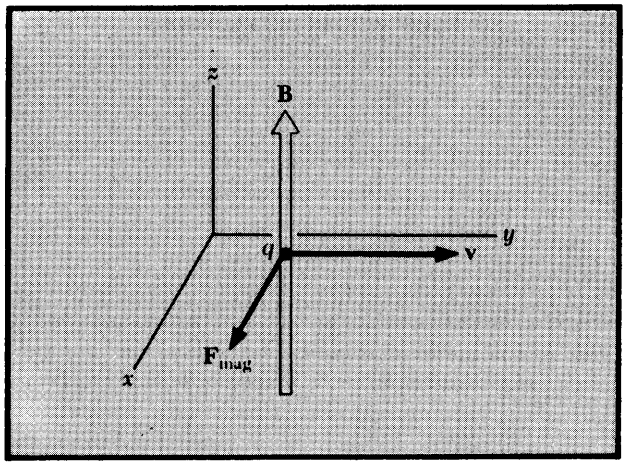


FIG. 3.4 La fuerza magnética $\mathbf{F}_{mag} = (q/c)\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

en donde c es la velocidad de la luz en el vacío y $\mathbf{v}$ la velocidad de la partícula cargada, todo ello en el sistema cgs gaussiano de unidades. El producto vectorial da $\mathbf{F}_{mag}$ perpendicular a $\mathbf{v}$ como se requiere experimentalmente y define el vector campo magnético $\mathbf{B}$ perpendicular a $\mathbf{F}_{mag}$. La figura 3.4 ilustra estas relaciones para el caso en que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$ están separados 90°. Si un alambre transporta una corriente a lo largo de la dirección de $\mathbf{v}$, la dirección de la fuerza que actúa sobre el alambre es la misma que se indica en la fig. 3.4.

Las dimensiones de B definido aquí son las mismas que las de E, ya que la relación v/c es adimensional. La unidad es el *gauss* (G), con F en dinas y q en unidades electrostáticas. Así, si un electrón se mueve con una velocidad décima parte de la velocidad de la luz en dirección perpendicular a un campo magnético de intensidad 10 000 G, la intensidad de la fuerza magnética será

$$F = (4{,}8 \times 10^{-10}\,\text{ues})\tfrac{1}{10}(10^4\,\text{G}) = 4{,}8 \times 10^{-7}\,\text{din}$$

En unidades SI

$$\boxed{\mathbf{F}_{mag} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \qquad (3.18a)$$

en donde q se expresa en culombios, v en m/s y F en newtons. La ecuación define a $\mathbf{B}$ con dimensiones $[\text{N}][\text{s}][\text{C}]^{-1}[\text{m}]^{-1}$. En los últimos años se ha dado un nombre especial, el *tesla* (T), a esta unidad, llamada anteriormente weber por metro cuadrado (Wb/m^2) *. Afortunadamente,

$$1\,\text{T} = 10^4\,\text{G}$$

aunque debe recordarse que el gauss y el tesla no tienen las mismas dimensiones; con mayor propiedad deberíamos decir que 1 T corresponde a 10^4 G.

En unidades SI el problema precedente tiene $B = 1$ T, $v = 3 \times 10^7$ m/s, $q = e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ y

$$F = (1{,}6 \times 10^{-19})(3 \times 10^7)(1{,}0) = 4{,}8 \times 10^{-12}\,\text{N}$$

La fuerza total ejercida sobre una partícula de carga q que se mueve uniformemente es la suma de las fuerzas electrostáticas y magnéticas. Recibe el nombre de *fuerza*

(*) W. E. Weber (1807-1891) fue un físico alemán y N. Tesla (1856-1943), un invertor americano.

de Lorentz. (A veces se aplica a la fuerza magnética sola.) De (3.16) y (3.18) resulta:

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \qquad (3.19)$$

en el sistema gaussiano y

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \qquad (3.19a)$$

en el sistema SI. Una gran parte de la física procede de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ utilizada conjuntamente con (3.19) y, naturalmente, una importante parte de la historia de la física consistió en establecer estas ecuaciones. [El que escribamos (3.19) como un hecho experimental no nos librará de la necesidad de discutir esta ecuación más a fondo en el Vol. 2.]

Necesitaremos en este capítulo los siguientes valores numéricos:

Velocidad de la luz:

$$c = 2{,}9979 \times 10^{10}\ \text{cm/s} = 2{,}9979 \times 10^{8}\ \text{m/s}$$

Masa m del electrón:

$$m = 0{,}9108 \times 10^{-27}\ \text{g} = 0{,}9108 \times 10^{-30}\ \text{kg}$$

Masa M_p del protón:

$$M_p = 1{,}6724 \times 10^{-24}\ \text{g} = 1{,}6724 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

Para trabajar con la fuerza de Lorentz [Ec. (3.19)] en el sistema de unidades cgs gaussiano, expresaremos F en dinas; E en statvoltios/cm; v en cm/s; B en gauss, y q en unidades electrostáticas. En el sistema SI, usando la Ec. (3.19a), expresamos F en newtons, E en V/m, v en m/s, B en teslas y q en culombios. Los factores de conversión mencionados anteriormente (y deducidos en el Vol. 2) se recopilan aquí:

1 m/s = 100 cm/s
1 statvoltio/cm = $3{,}0 \times 10^{4}$ V/m *
1 C = $3{,}0 \times 10^{9}$ statculombios o ues
1 T $\longleftrightarrow$ 1×10^{4} G

Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico constante y uniforme. La ecuación que nos da

(*) Los valores exactos de las relaciones segunda y tercera vienen dados en las páginas 73 y 75; estos valores son suficientemente exactos para nuestros problemas.

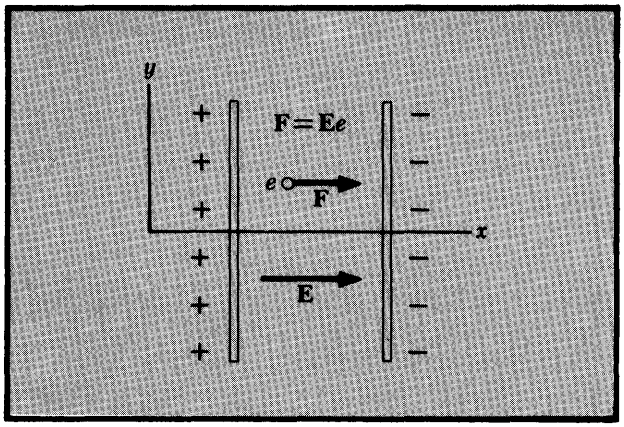


FIG. 3.5 Aceleración longitudinal de un protón en el campo eléctrico entre placas cargadas.

la fuerza sobre una carga q de masa M en un campo eléctrico $\mathbf{E}$ uniforme en el espacio y constante en el tiempo es [Ec. (3.16)]

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} = q\mathbf{E} \tag{3.20}$$

A partir de (3.20) tendremos

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{M}\mathbf{E}$$

ecuación que nos da la aceleración de la carga. Este resultado es muy semejante al obtenido para el movimiento de una partícula en un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{F} = -Mg\hat{\mathbf{y}}$ en la superficie de la Tierra, en donde $\hat{\mathbf{y}}$ es un vector unitario que se aleja del centro de la Tierra. Para el problema gravitatorio, la ecuación del movimiento es $M\mathbf{a} = -Mg\hat{\mathbf{y}}$ o $\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{y}}$.

Puede comprobarse que la ecuación (3.20) tiene por integración directa la solución

$$\mathbf{r}(t) = \frac{q\mathbf{E}}{2M}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \tag{3.21}$$

en donde $\mathbf{r}_0$ es el vector posición de la partícula para $t = 0$ y $\mathbf{v}_0$ es el vector velocidad en el mismo tiempo.

Derivando la Ec. (3.21) se obtiene la expresión de la velocidad en cualquier momento, o sea,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{q\mathbf{E}}{M}t + \mathbf{v}_0 \tag{3.22}$$

a partir de la cual vemos fácilmente que la velocidad inicial (para $t = 0$) es ciertamente $\mathbf{v}_0$.

EJEMPLO

Aceleración longitudinal de un protón. Partiendo del reposo se acelera un protón durante un nanosegundo ($= 10^{-9}$ s) mediante un campo eléctrico $E_x = 1$ statvolt/cm. ¿Cuál es su velocidad final? (Ver fig. 3.5.)

La velocidad viene dada según (3.22) por:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{e}{M}\mathbf{E}t + \mathbf{v}_0$$

para nuestro problema se reduce * a

$$v_x(t) = \frac{e}{M}E_x t \qquad v_y = v_z = 0$$

(*) La ecuación (19) es vectorial; con $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ y $\mathbf{v}_0 = 0$ se reduce a las ecuaciones según las tres componentes

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{M}E_x t \qquad \frac{dy}{dt} = 0 \qquad \frac{dz}{dt} = 0$$

porque hemos especificado que $\mathbf{v} = 0$ para $t = 0$. Así, pues, la velocidad final al cabo de $t = 1 \times 10^{-9}$ s es en números redondos

$$v_x \approx \frac{(4{,}8 \times 10^{-10}\ \text{ues})(1\ \text{statvolt/cm})(1 \times 10^{-9}\ \text{s})}{(2 \times 10^{-24}\ \text{g})}$$
$$\approx 2{,}4 \times 10^{5}\ \text{cm/s}$$

Obsérvese que (1 ues) $\times$ (1 statvolt/cm) $\equiv$ 1 dina $\equiv$ 1 g-cm/s^2. Hemos utilizado 2×10^{-24} g para el orden de magnitud de la masa del protón.

En unidades SI

$$E_x = 3{,}0 \times 10^{4}\ \text{V/m}$$
$$v_x = \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(3{,}0 \times 10^{4}\ \text{V/m})(1 \times 10^{-9}\ \text{s})}{2 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$
$$\approx 2{,}4 \times 10^{3}\ \text{m/s}$$

EJEMPLO

Aceleración longitudinal de un electrón. Un electrón inicialmente en reposo se acelera a lo largo de 1 cm mediante un campo eléctrico de 1 statvolt/cm en sentido negativo según el eje de las x. ¿Cuál es su celeridad final?

A partir de (3.22), con el valor de $-e$ para la carga y m para la masa del electrón, resulta

$$v_x(t) = -\frac{e}{m}E_x t \qquad x(t) = -\frac{e}{2m}E_x t^2$$

Deseamos eliminar t y despejar v_x en función de x. Es conveniente obtener v_x^2 y luego ordenar los términos:

$$v_x^2 = \left(\frac{e}{m}E_x t\right)^2 = \left(\frac{2e}{m}E_x\right)\left(\frac{e}{2m}E_x t^2\right) = -\frac{2e}{m}E_x x$$
$$\approx \frac{-2 \times 5 \times 10^{-10}}{10^{-27}}(-1) \times 1 \approx 10^{-9} \times 10^{27}$$
$$\approx 10^{18}\ \text{cm}^2/\text{s}^2$$

Así, pues, la celeridad final es

$$|v_x| \approx 10^{9}\ \text{cm/s}$$

Esto supone 1/30 de la velocidad de la luz, suficientemente pequeño para que no consideremos efectos relativistas (0,1 por ciento de exactitud).

EJEMPLO

Aceleración transversal de un electrón. Después de abandonar el campo acelerador E_x del ejemplo precedente, el haz electrónico entra en una región de longitud $L = 1$ cm en la que existe un campo deflector transversal $E_y = -0{,}1$ statvolt/cm como en la figura 3.6. ¿Qué ángulo formará con el eje x el haz al abandonar la región deflectora? Obsérvese que esto es semejante al lanzamiento horizontal de un cuerpo en el campo gravitatorio terrestre.

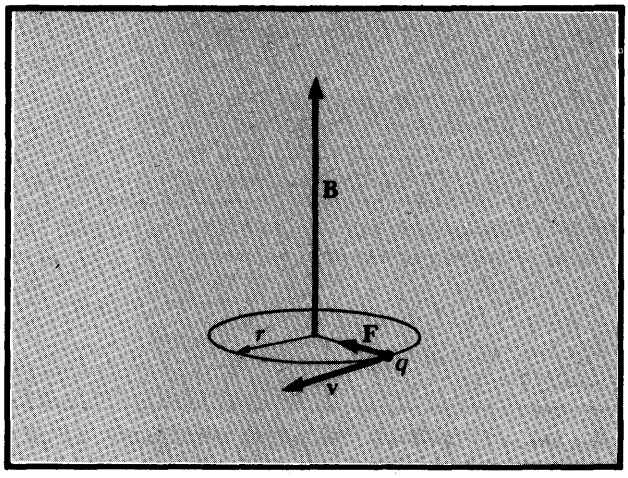


FIG. 3.7 Una carga positiva q, con velocidad inicial $\mathbf{v} \perp$ al campo uniforme **B**, describe una circunferencia con velocidad de módulo constante v_1 y radio $r = cMv_1/qB$.

de modo que la Ec. (3.24) se transforma en

$$\omega v_1 \cos \omega t = \frac{qB}{Mc} v_1 \cos \omega t \qquad -\omega v_1 \operatorname{sen} \omega t = -\frac{qB}{Mc} v_1 \operatorname{sen} \omega t$$

Se satisfacen estas ecuaciones si

$$\omega = \frac{qB}{Mc} \equiv \omega_c \tag{3.27}$$

Esta relación define la *frecuencia ciclotrón* (o *frecuencia de resonancia ciclotrónica*) ω_c como la velocidad angular del movimiento circular de la partícula en el campo magnético. Cualquier valor de v_1 satisfará las ecuaciones, pero como veremos v_1 determina el radio de la trayectoria circular.

La frecuencia ciclotrón puede deducirse también mediante un razonamiento elemental. La fuerza magnética qBv_1/c proporciona la aceleración centrípeta (hacia dentro) que aparece en el movimiento circular de la partícula. El módulo de dicha aceleración es v_1^2/r o $\omega_c^2 r$, porque $\omega_c r = v_1$. Así, pues,

$$\frac{qBv_1}{c} = M\omega_c^2 r = M\omega_c v_1$$

en donde $\omega_c = qB/Mc$ y el radio del círculo es $r = Mcv_1/qB$ (véase fig. 3.7).

¿Cuál es la trayectoria completa? Hemos visto que es circular respecto al movimiento x e y; respecto a z simplemente progresa con velocidad constante v_z (la cual, naturalmente, puede ser cero), ya que no existe ninguna componente z. Integrando las Ecs. (3.26) con ω igual a ω_c resulta la trayectoria

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_1}{\omega_c} - \frac{v_1}{\omega_c} \cos \omega_c t \\ y &= y_0 + \frac{v_1}{\omega_c} \operatorname{sen} \omega_c t \\ z &= z_0 + v_z t \end{aligned} \tag{3.28}$$

en donde las constantes de integración en las respectivas ecuaciones son $x_0 + v_1/\omega_c$, y_0 y z_0.

La ecuación (3.28) describe la posición x, y de una partícula que se mueve en un círculo de radio

$$r_c = \frac{v_1}{\omega_c} = \frac{Mcv_1}{qB} \tag{3.29}$$

alrededor del centro localizado en $(x_0 + v_1/\omega_c, y_0)$, y superpuesto a este movimiento circular uniforme hay un

Supongamos que el campo magnético está dirigido a lo largo del eje z:

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}B$$

Por consiguiente, según las reglas del producto vectorial,

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_x = v_y B \qquad [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_y = -v_x B \qquad [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_z = 0$$

Por lo tanto, la Ec. (3.23) * se transforma en

$$\dot{v}_x = \frac{q}{Mc} v_y B \qquad \dot{v}_y = -\frac{q}{Mc} v_x B \qquad \dot{v}_z = 0 \quad (3.24)$$

Vemos que la componente de la velocidad a lo largo del eje del campo magnético, eje z, es constante.

Podemos ver directamente otra característica del movimiento: la energía cinética

$$K = \tfrac{1}{2}Mv^2 = \tfrac{1}{2}M\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

es constante, porque

$$\frac{dK}{dt} = \tfrac{1}{2}M(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = M\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} \cdot \left(\frac{q}{Mc}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \equiv 0 \quad (3.25)$$

ya que $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$. Así, pues, *un campo magnético no varía la energía cinética de una partícula cargada.*

Intentemos soluciones** de la ecuación del movimiento que sean de la forma

$$v_x(t) = v_1 \operatorname{sen} \omega t \qquad v_y(t) = v_1 \cos \omega t \qquad v_z = \text{const} \quad (3.26)$$

Este movimiento es circular en su proyección sobre el plano xy, con un radio que calculamos más adelante. Diferenciando v_x y v_y en la Ec. (3.26),

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_1 \cos \omega t \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_1 \operatorname{sen} \omega t$$

(*) Aquí hemos adoptado un convenio muy utilizado en física: El punto sobre la letra significa la derivada respecto al tiempo. Así: $\dot{r} = dr/dt$. $\dot{\mathbf{A}} = d\mathbf{A}/dt$. Igualmente $\ddot{r} = d^2r/dt^2$. $\ddot{\mathbf{A}} = d^2\mathbf{A}/dt^2$.

(**) La ecuación (3.25) nos dice que K es una constante; por tanto $|\mathbf{v}|$ es también constante. Este resultado sugiere una solución que represente un movimiento circular uniforme, en el que las componentes x e y de la velocidad son sinusoidales con una diferencia de fase de $\pi/2$. Es conveniente representar qB/Mc como una constante que tenga las dimensiones del inverso de un tiempo; las dimensiones se obtienen fácilmente a partir de la Ec. (3.24). Debemos esperar una solución que implique una rotación para la que esta constante esté relacionada con la frecuencia angular ω.

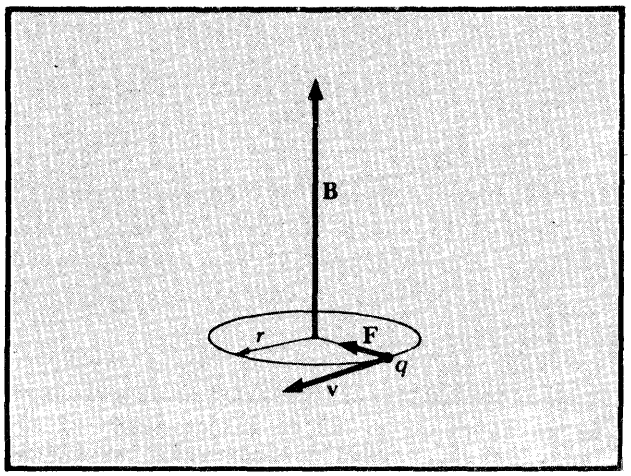


FIG. 3.7 Una carga positiva q, con velocidad inicial $\mathbf{v} \perp$ al campo uniforme **B**, describe una circunferencia con velocidad de módulo constante v_1 y radio $r = cMv_1/qB$.

de modo que la Ec. (3.24) se transforma en

$$\omega v_1 \cos \omega t = \frac{qB}{Mc} v_1 \cos \omega t \qquad -\omega v_1 \operatorname{sen} \omega t = -\frac{qB}{Mc} v_1 \operatorname{sen} \omega t$$

Se satisfacen estas ecuaciones si

$$\omega = \frac{qB}{Mc} \equiv \omega_c \tag{3.27}$$

Esta relación define la *frecuencia ciclotrón* (o *frecuencia de resonancia ciclotrónica)* ω_c como la velocidad angular del movimiento circular de la partícula en el campo magnético. Cualquier valor de v_1 satisfará las ecuaciones, pero como veremos v_1 determina el radio de la trayectoria circular.

La frecuencia ciclotrón puede deducirse también mediante un razonamiento elemental. La fuerza magnética qBv_1/c proporciona la aceleración centrípeta (hacia dentro) que aparece en el movimiento circular de la partícula. El módulo de dicha aceleración es v_1^2/r o $\omega_c^2 r$, porque $\omega_c r = v_1$. Así, pues,

$$\frac{qBv_1}{c} = M\omega_c^2 r = M\omega_c v_1$$

en donde $\omega_c = qB/Mc$ y el radio del círculo es $r = Mcv_1/qB$ (véase fig. 3.7).

¿Cuál es la trayectoria completa? Hemos visto que es circular respecto al movimiento x e y; respecto a z simplemente progresa con velocidad constante v_z (la cual, naturalmente, puede ser cero), ya que no existe ninguna componente z. Integrando las Ecs. (3.26) con ω igual a ω_c resulta la trayectoria

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_1}{\omega_c} - \frac{v_1}{\omega_c} \cos \omega_c t \\ y &= y_0 + \frac{v_1}{\omega_c} \operatorname{sen} \omega_c t \\ z &= z_0 + v_z t \end{aligned} \tag{3.28}$$

en donde las constantes de integración en las respectivas ecuaciones son $x_0 + v_1/\omega_c$, y_0 y z_0.

La ecuación (3.28) describe la posición x, y de una partícula que se mueve en un círculo de radio

$$r_c = \frac{v_1}{\omega_c} = \frac{Mcv_1}{qB} \tag{3.29}$$

alrededor del centro localizado en $(x_0 + v_1/\omega_c, y_0)$, y superpuesto a este movimiento circular uniforme hay un

desplazamiento uniforme según la dirección z de velocidad v_z que comienza en $z = z_0$, para $t = 0$. El movimiento completo es una hélice cuyo eje es paralelo al vector campo magnético **B**, es decir, a lo largo del eje z en este caso. Viene ilustrado en la fig. 3.8. El radio r_c se denomina frecuentemente *radio de giro* o *radio ciclotrónico.*

Consideremos el producto de la intensidad de campo magnético y el radio de la trayectoria

$$Br_c = \frac{Mv_1c}{q} \tag{3.30}$$

Esta relación es importante; veremos en un capítulo posterior que es válida en el campo relativista si se escribe la cantidad de movimiento relativista p en lugar de Mv_1. Esta relación puede emplearse, por consiguiente, para determinar la cantidad de movimiento de partículas cargadas, a altas o bajas velocidades (véase fig. 3.9).

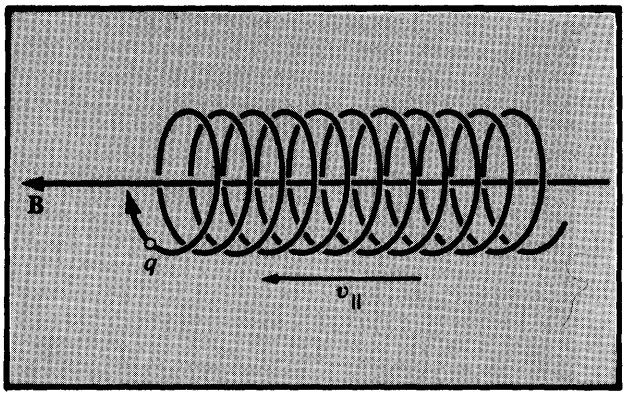


FIG. 3.8 Una carga positiva q describe una hélice de paso constante en un campo magnético uniforme **B**. La componente de la velocidad $v_{\parallel}$ paralela a **B** es una constante. Si $\mathbf{B} = B_z\hat{\mathbf{z}}$, $v_{\parallel} = v_z$.

Comprobación de dimensiones. Siempre es una buena práctica comprobar que las dimensiones de ambos miembros de una ecuación final son idénticos. Constituye una forma práctica de captar errores graves. En el segundo miembro de (3.30) tenemos

$$\left[\frac{cMv_1}{q}\right] = \left[\frac{L}{T}\right]\left[M\right]\left[\frac{L}{T}\right]\left[\frac{1}{q}\right] = \left[\frac{ML^2}{qT^2}\right] \tag{3.31}$$

en donde hemos utilizado la notación expuesta en las páginas 67 y 68, pero manteniendo las dimensiones de q como carga. En el primer miembro de la ecuación (3.30) tenemos

$$[Br_c] = \left[\frac{F}{q}\right]\left[L\right] = \left[\frac{ML^2}{qT^2}\right] \tag{3.32}$$

porque, de acuerdo con la ecuación (3.18) de la fuerza de Lorentz, las dimensiones de B, en el sistema gaussiano de unidades son las de una fuerza dividida por una carga. Vemos que las dimensiones de (3.31) son las mismas que las de (3.32).

En unidades SI, donde la fuerza es $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ en lugar de $(q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, tenemos

$$\omega = \frac{qB}{M} = \omega_c \tag{3.27a}$$

$$r_c = \frac{v_1}{\omega_c} = \frac{Mv_1}{qB} \tag{3.29a}$$

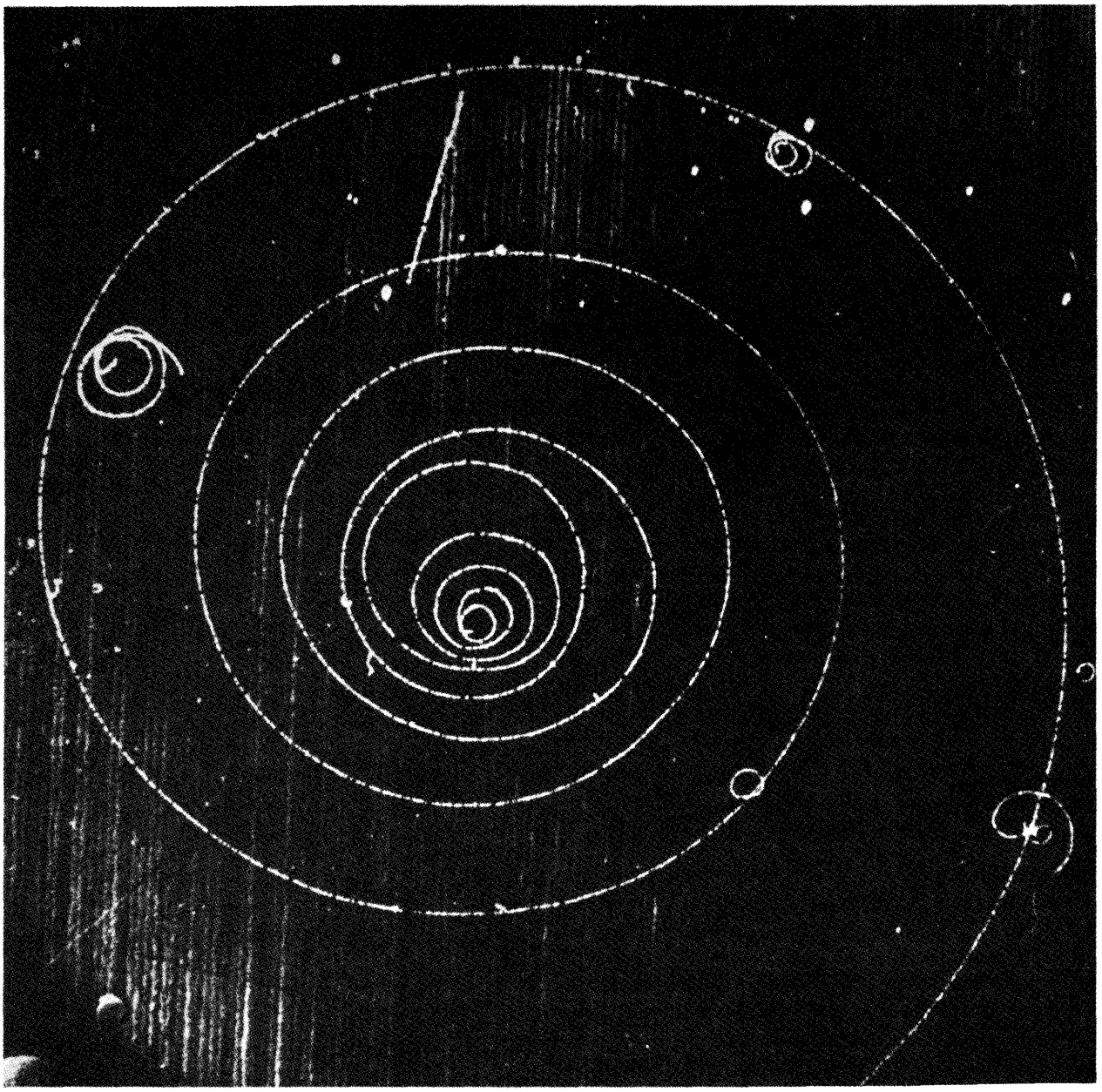


FIG. 3.9 Fotografía de la trayectoria de un electrón rápido en un campo magnético obtenida en una cámara de burbujas de hidrógeno. El electrón entra por la parte inferior izquierda y se va frenando al perder energía por ionización de las moléculas de hidrógeno. Al disminuir el electrón su velocidad, decrece su radio de curvatura en el campo magnético y de aquí que la órbita sea una espiral. *(Lawrence Radiation Laboratory.)*

y $$Br_c = \frac{Mv_1}{q}$$

La comprobación de estas dimensiones nos da

$$[Br_c] = [M][L][T]^{-2}[q]^{-1}[L]^{-1}[T][L] = [M][L][T]^{-1}[q]^{-1}$$

y

$$\left[\frac{Mv_1}{q}\right] = [M][L][T]^{-1}[q]^{-1}$$

EJEMPLO

Frecuencia ciclotrónica. ¿Cuál es la frecuencia del movimiento de un electrón en un campo magnético de 10 kilogauss o 1×10^4 gauss? (Un campo de 10 a 15 kilogauss es típico de los electroimanes ordinarios de laboratorio con núcleo de hierro.)

Tendremos según (3.27),

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} \approx \frac{(4{,}8 \times 10^{-10})(1 \times 10^4)}{(10^{-27})(3 \times 10^{10})} \approx 1{,}6 \times 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1}$$

o en unidades SI,

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \approx \frac{(1{,}6 \times 10^{-19})(1{,}0)}{10^{-30}} \approx 1{,}6 \times 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1}$$

La frecuencia correspondiente, que designaremos por ν_c, es

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \approx 3 \times 10^{10}\ \mathrm{cps}$$

que es equivalente a la frecuencia de una longitud de onda electromagnética en el espacio libre

$$\lambda_c = \frac{c}{\nu_c} \approx \frac{3 \times 10^{10}}{3 \times 10^{10}} \approx 1\ \mathrm{cm}$$

La frecuencia ciclotrónica $\omega_c(p)$ de un protón es menor que la de un electrón en el mismo campo magnético en la razón 1/1836 de la masa del electrón a la del protón. Para un protón en un campo de 10 kilogauss:

$$\omega_c(p) = \frac{m}{M_p}\omega_c(e) \approx \frac{1{,}6 \times 10^{11}}{1{,}8 \times 10^3} \approx 10^8\ \mathrm{s}^{-1}$$

El sentido de rotación para el electrón es opuesto al del protón porque sus cargas tienen signos opuestos.

EJEMPLO

Radio de giro. ¿Cuál es el radio de la órbita ciclotrónica en un campo de 10 kilogauss para un electrón de velocidad 10^8 cm/s normal a **B**?

Para el radio de giro tendremos, según (3.29),

$$r_c = \frac{v_1}{\omega_c} \approx \frac{10^8}{1{,}6 \times 10^{11}} \approx 6 \times 10^{-4}\ \mathrm{cm}$$

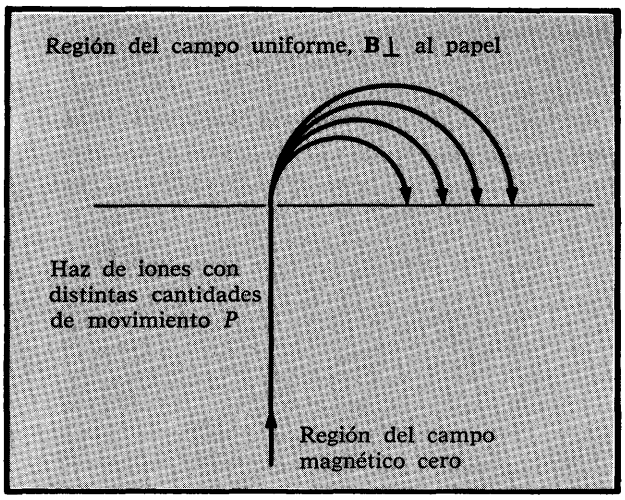


FIG. 3.10 Campo magnético utilizado como selector de cantidad de movimiento.

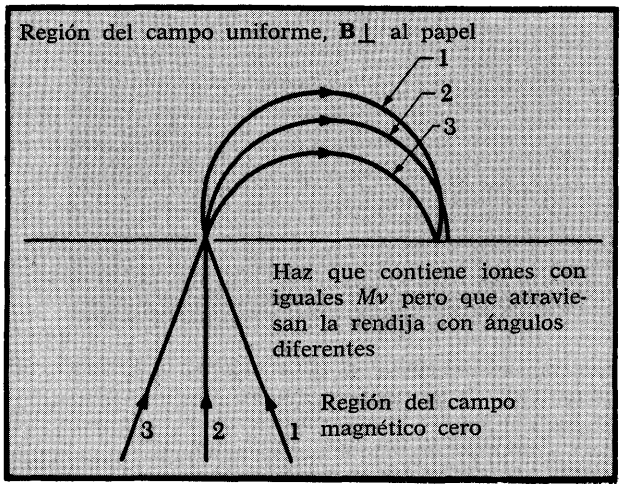


FIG. 3.11 *a*) Enfoque en 180° en un campo magnético. Iones que tienen igual cantidad de movimiento pero direcciones diferentes se enfocan sobre una zona muy pequeña.

El radio correspondiente para un protón de la misma velocidad es mayor en la relación M/m:

$$r_c \approx (6 \times 10^{-4})(1{,}8 \times 10^3) \approx 1 \text{ cm}$$

Enfoque magnético a 180°. Supongamos que un haz de partículas cargadas de distintas masas y velocidades entra en una región en la que existe un campo magnético uniforme **B** perpendicular al haz. Las partículas se desviarán con un radio de curvatura dado por la relación $B\rho = (c/q)\,Mv_t$, siendo v_t la componente de la velocidad en el plano normal a **B**. Si examinamos el haz en un punto determinado, por ejemplo a 180° del inicio del movimiento dentro del campo, veremos que dicho haz se dispersa en el plano del movimiento porque las diversas partículas con distintas masas y velocidades tienen diferentes radios de curvatura, como indica la fig. 3.10. Mediante una ranura de escape estrecha, el dispositivo se utiliza como *selector de cantidad de movimiento*, o aparato dispuesto para obtener un haz de partículas que tengan muy aproximadamente las mismas cantidades de movimiento, si todas ellas tienen la misma carga q. Una ventaja de utilizar la desviación a 180° es que las partículas de iguales cantidades de movimiento, pero que entran a través de una rendija con ángulos ligeramente diferentes, se reunirán en un foco aproximadamente común después de los 180° de desviación.

La exactitud del enfoque es puramente un problema de geometría, como se ve en las figuras 3.11 *a* y 3.11 *b*. Consideremos una trayectoria que forma un ángulo θ con la trayectoria ideal. La distancia entre la rendija de entrada y la zona en que incide en el área del blanco viene dada por la cuerda C de la circunferencia de radio ρ. La diferencia en longitud entre el diámetro y la cuerda es

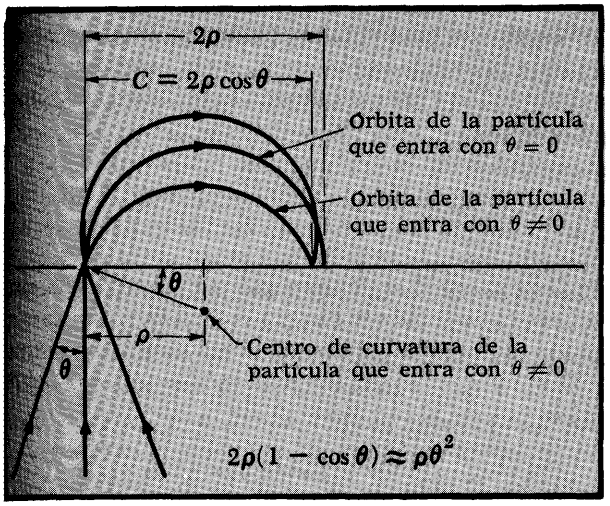
$$2\rho - C = 2\rho(1 - \cos\theta) \approx \rho\theta^2$$

en donde hemos utilizado para ángulos θ pequeños los dos primeros términos del desarrollo en serie de potencias del coseno:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

según puede verse en tablas adecuadas (Dwight 415.02). Si tomamos como medida del poder de enfoque angular

$$\frac{2\rho - C}{2\rho} \approx \frac{1}{2}\theta^2$$



b) Diagrama que muestra los detalles del selector de velocidades con enfoque en 180°.

tendremos, para $\theta = 0{,}1$ rad el valor

$$\frac{2\rho - C}{2\rho} \approx 5 \times 10^{-3}$$

que hace resaltar la acción del enfoque.

Principio de aceleración del ciclotrón. Las partículas cargadas de un ciclotrón normal se mueven en unas órbitas aproximadamente espirales cuando están sometidas a un campo magnético constante, como se describe en la nota histórica al final del capítulo y como se indica en la fig. 3.12. Las partículas son aceleradas cada medio ciclo (π radianes) por un campo eléctrico oscilante. El requisito que se precisa para una aceleración periódica es que la frecuencia del campo eléctrico sea igual a la frecuencia ciclotrónica de las partículas.

La frecuencia ciclotrónica para protones en un campo magnético de 10 kilogauss es $1 \times 10^8\ s^{-1}$ o $\nu_c = \omega_c/2\pi \approx$ $\approx 10^7$ cps $\approx$ 10 Mc/s. La frecuencia es independiente de la energía de las partículas en tanto la velocidad no sea relativista, es decir, pequeña en comparación con la velocidad de la luz. En la fig. 3.13 se presenta un gráfico de la longitud de onda (c/ν) en función de B.

FIG. 3.13 Condición de resonancia en el primer ciclotrón (11 pulgadas de diámetro). En la escala vertical se representa la longitud de onda en el espacio libre de la energía de radiofrecuencia suministrada a los electrones aceleradores («des»). Las curvas son las relaciones teóricas para iones H^+ y H_2^+; los pequeños círculos son las observaciones experimentales. [Lawrence and Livingston, *Phys. Rev.*, **40**, 19 (1932).]

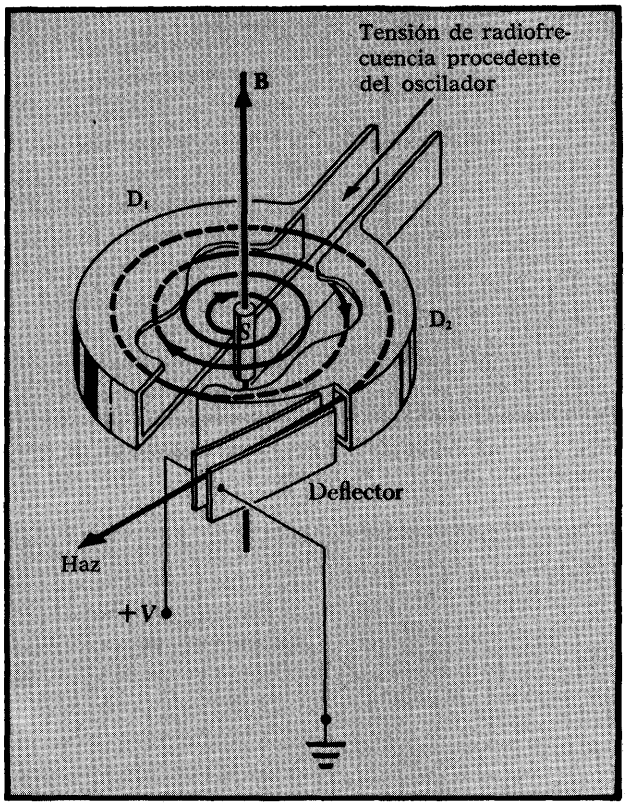
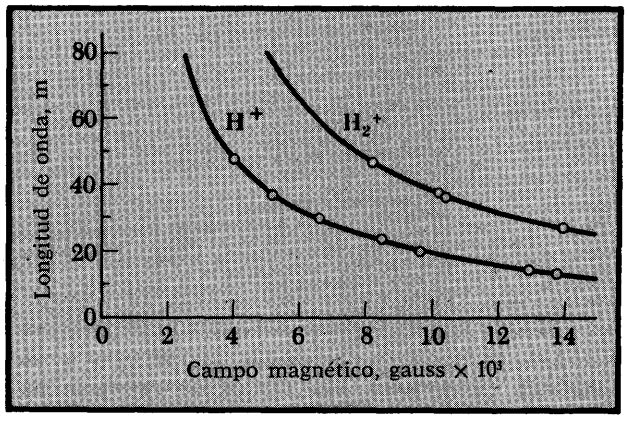


FIG. 3.12 Esquema transversal de un ciclotrón convencional de baja energía, compuesto de una fuente de iones *S*, electrodos de aceleración huecos (D_1, D_2) y deflector. El aparato entero está sumergido en un campo magnético vertical homogéneo **B** (que apunta hacia arriba). El plano de la órbita de la partícula es horizontal y es también el plano medio de las «des». El campo acelerador eléctrico de r.f. está confinado en el hueco entre las «des».



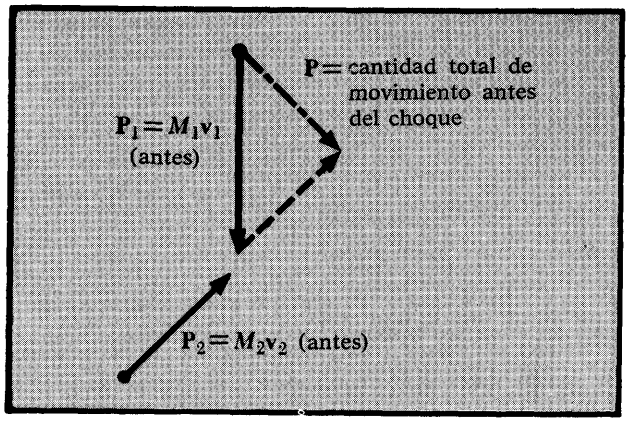


FIG. 3.14 *a*) Antes del choque las cantidades de movimiento $\mathbf{P}_1$ (antes) y $\mathbf{P}_2$ (antes) se suman para dar **P**.

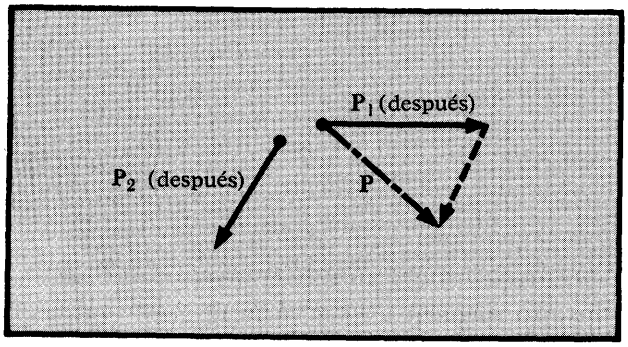


FIG. 3.14 *(continuación) b*) Después del choque las cantidades de movimiento $\mathbf{P}_1$ (después) y $\mathbf{P}_2$ (después) se suman para dar el mismo valor de **P**.

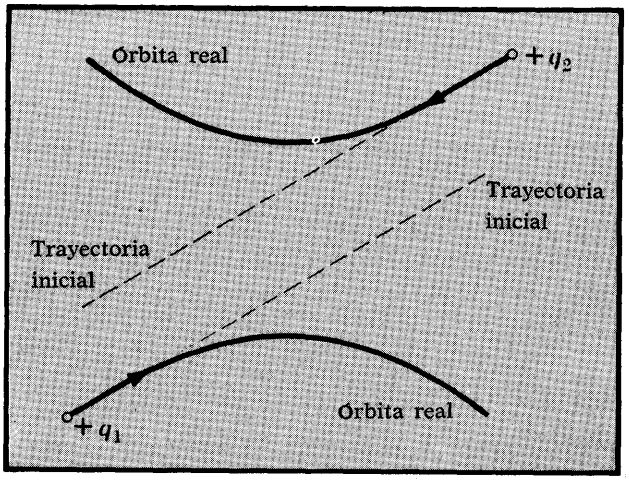


FIG. 3.15 Si dos cargas puntuales móviles q_1 y q_2 se aproximan mutuamente, sus órbitas se desviarán de sus trayectorias rectas iniciales.

En cada ciclo de operación la partícula absorbe energía del campo eléctrico oscilante. El radio efectivo de la órbita aumenta si la energía cinética crece, porque, como se ha demostrado,

$$r_c = \frac{v}{\omega_c} = \frac{\sqrt{2E/M_p}}{\omega_c}$$

en donde llamamos E a la energía. La energía de un protón no relativista en un campo magnético constante está limitada por el radio exterior del ciclotrón: para $\omega_c = 1 \times 10^8\ \mathrm{s}^{-1}$ y $r_c = 50$ cm, tendremos $v = \omega_c r_c \approx 5 \times 10^9$ cm/s, o bien

$$E = \tfrac{1}{2}M_p v^2 \approx 10^{-24}(5 \times 10^9)^2 \approx 25 \times 10^{-6}\ \mathrm{erg}$$

Esta velocidad es, en la práctica, suficientemente no relativista para el funcionamiento de un ciclotrón convencional.

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La ley de conservación de la cantidad de movimiento es, probablemente, familiar al alumno por sus estudios anteriores. Debe destacarse su importancia en el estudio de los problemas de choques. Aquí presentamos su deducción basada en la tercera ley de Newton y reservamos para el Cap. 4 la discusión de una deducción distinta. La ley establece que:

> En un sistema aislado sometido únicamente a fuerzas internas (fuerzas entre miembros del sistema) la cantidad de movimiento total lineal del sistema es una constante; no cambia con el tiempo.

De un modo más íntimo se aplica en colisiones de dos partículas del modo siguiente: La suma de las cantidades de movimiento después del choque es igual a la suma de las cantidades de movimientos antes del mismo.

$$\mathbf{p}_1(\text{antes}) + \mathbf{p}_2(\text{antes}) = \mathbf{p}'_1(\text{después}) + \mathbf{p}'_2(\text{después}) \quad (3.33)$$

en donde la cantidad de movimiento **p** se define por

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} \quad (3.34)$$

y se supone que la colisión tiene lugar en una región del espacio en la que no existen fuerzas exteriores; las primas (**p**′) indican valores después del choque. Véase la fig. 3.14 para una descripción de los vectores cantidad de movimiento y la fig. 3.15 para las órbitas. El choque

puede ser elástico o inelástico. En el primer caso toda la energía cinética de las partículas incidentes reaparece después del choque en forma de energía cinética de las mismas partículas repartida generalmente de forma desigual entre ellas. En el choque inelástico normal, parte de la energía cinética de las partículas incidentes aparece después del mismo como alguna forma de energía de excitación *interna* (como el calor) de una o varias de las partículas. Es importante tener presente que se puede aplicar la conservación de la cantidad de movimiento *incluso* en una colisión *inelástica,* aun cuando la energía cinética no se conserve.

Deducción a partir de la tercera ley de Newton. Supongamos que los cuerpos obedecen la tercera ley de Newton [Ec. (3.3)]. Para el cuerpo 1 tenemos

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(M_1\mathbf{v}_1) \tag{3.35}$$

y para el cuerpo 2

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(M_2\mathbf{v}_2) \tag{3.36}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$$

$$= \frac{d}{dt}(M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2)$$

Por tanto,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2 = \text{const} = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = M_1\mathbf{v}_1' + M_2\mathbf{v}_2' \tag{3.37}$$

en donde de nuevo las primas indican los valores después del choque. Si hay más de dos cuerpos, el mismo procedimiento puede utilizarse con el mismo resultado aplicable a cualquier número de cuerpos de un sistema aislado.

En los siguientes ejemplos discutimos cierto número de casos relacionados con esta ley. Deben destacarse los dos puntos siguientes:

1. Se trata de una ley vectorial y, por ello, en el choque de dos partículas cuyas cantidades de movimiento vectoriales se suman para definir una línea, las dos cantidades de movimiento resultantes se suman para definir la misma línea.

2. La sola aplicación de este principio no nos permite resolver en forma completa un problema de choque.

Como ejemplo del punto 2 consideremos el problema de colisión de masas iguales, una de ellas inicialmente en reposo. Sólo una información suplementaria nos permite obtener respuestas únicas, como se ilustra en los dos casos siguientes..

(*a*) Suponer que después del choque las dos partículas de masas iguales quedan adheridas entre sí. ¿Cuál es su velocidad? Supongamos que la velocidad original del cuerpo móvil tiene lugar a lo largo del eje x. Por tanto,

$$\mathbf{p}_1 = M_1 v_1 \hat{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{p}_2 = 0$$
$$(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2') = (M_1 + M_2)\mathbf{v}' = 2M_1\mathbf{v}' = \mathbf{p}_1 = M_1 v_1 \hat{\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{v}' = \frac{v_1}{2}\hat{\mathbf{x}}$$

(*b*) Supongamos que en el choque, la primera partícula queda en reposo. ¿Cuál es la velocidad de la segunda?

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0 + M_2\mathbf{v}_2' = M_1 v_1 \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{v}_2' = v_1 \hat{\mathbf{x}}$$

Para resolver totalmente un problema de colisión necesitamos información adicional a la ley de conservación de la cantidad de movimiento semejante a la proporcionada en una u otra de las hipótesis establecidas en (*a*) o (*b*). Esta información adicional puede establecerse en función de la elasticidad o de la conservación de la energía.

EJEMPLO

Colisión elástica de dos partículas de masas iguales con una de ellas inicialmente en reposo. Vamos a probar que en este caso el ángulo que forman las dos cantidades de movimiento y los vectores velocidad después del choque es igual a 90°.

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = M_1\mathbf{v}_1 + 0 = M_1\mathbf{v}_1' + M_2\mathbf{v}_2'$$

Como $M_2 = M_1$ y M_2 está inicialmente en reposo,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2'$$

El objetivo *elástico* aplicado al choque significa que la energía cinética $\frac{1}{2}Mv^2$ se conserva. Por tanto,

$$\tfrac{1}{2}M_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2}M_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2}M_2 v_2'^2$$

de donde resulta

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \tag{3.38}$$

La ecuación (3.38) nos recuerda el teorema de Pitágoras y la figura 3.16 nos dice que $\mathbf{v}_1$ debe ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Por tanto, el ángulo entre $\mathbf{v}'_1$ y $\mathbf{v}'_2$ debe ser 90°.

Otros ejemplos se dan en los Probs. 16 a 18. Con mayor detalle discutiremos los choques en el Cap. 6.

Máquina de Atwood. En la familiar *máquina de Atwood* se aplican la segunda y la tercera ley de Newton (fig. 3.17). Dos masas distintas están suspendidas de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento y masa despreciable. Sea m_2 mayor que m_1; la aceleración tendrá la dirección indicada para cada masa y su valor será el mismo en ambas debido a la continuidad de la cuerda y su longitud constante. Hallemos en primer lugar la aceleración.

Cada masa está sometida a dos fuerzas, que son la tensión de la cuerda y la fuerza gravitatoria. La tercera ley de Newton nos dice que la tensión tiene el mismo valor en cada cuerpo. La segunda ley de Newton nos permite escribir

$$\begin{aligned} &\text{Para el movimiento de } m_1 \quad T - m_1 g = m_1 a \\ &\text{Para el movimiento de } m_2 \quad m_2 g - T = m_2 a \end{aligned} \tag{3.39}$$

La suma de ambas ecuaciones nos da

$$(m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a \qquad \text{o} \qquad a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \tag{3.40}$$

Ahora podemos deducir el valor de la tensión T empleando esta expresión de a en una u otra de las Ecs. (3.39). Así resulta

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

¿Cuál debe ser la resistencia de la cuerda? No debe romperse bajo esta tensión, lo que significa que en reposo debe soportar una masa para la cual $mg = T$. Debe ser, por tanto, suficientemente resistente para soportar la masa

$$m = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

la cual es mayor que m_1, aunque menor que m_2.

Resulta instructivo tener en cuenta que la expresión de la aceleración [Ec. (3.40)] puede entenderse en fun-

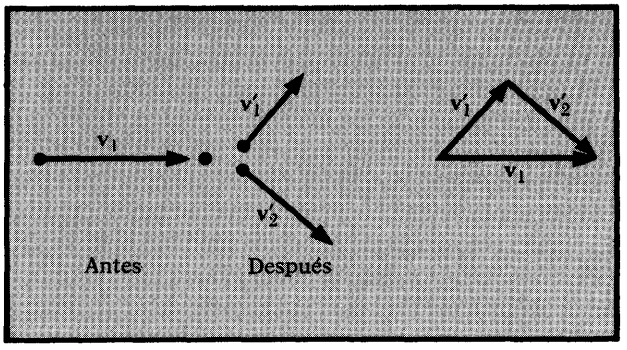


FIG. 3.16 Choque elástico entre masas iguales.

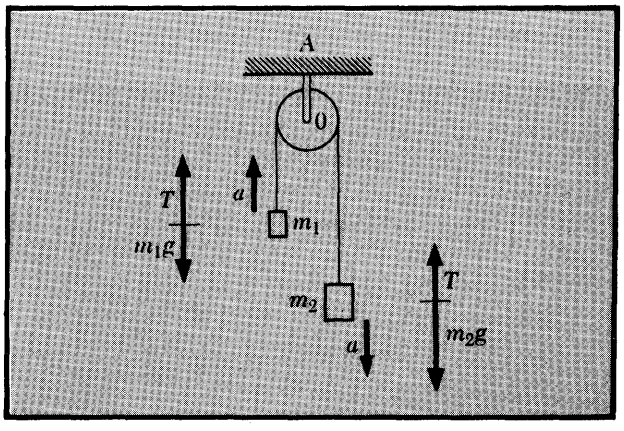


FIG. 3.17 Máquina de Atwood.

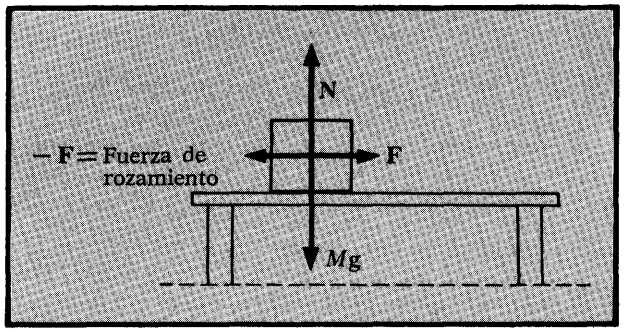


FIG. 3.18 Sobre el cuerpo situado en un plano horizontal actúan la fuerza de la gravedad *Mg*, una fuerza normal **N**, una fuerza horizontal externa **F** y una fuerza de rozamiento **—F**.

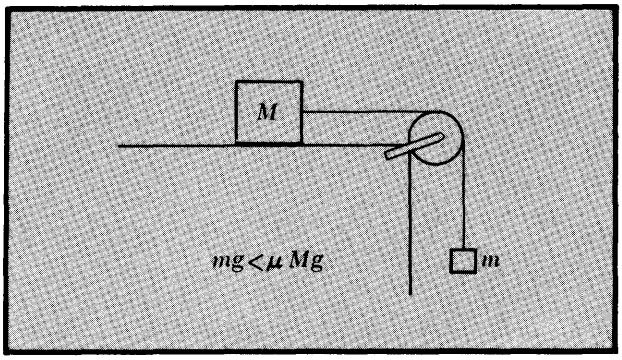
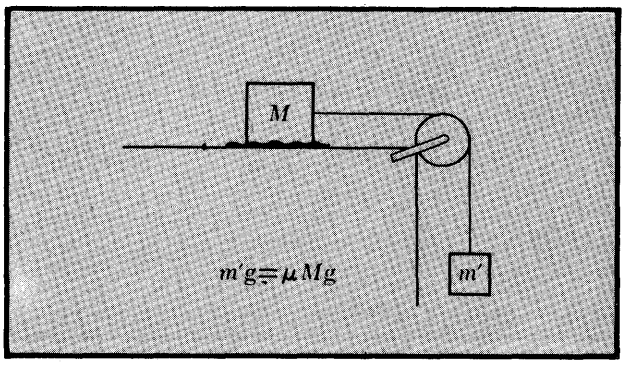


FIG. 3.19 *a*) *M* no desliza.



b) *M* comienza a deslizar.

ción de $F = Ma$ para un objeto simple, teniendo en cuenta que la masa total que se mueve es $m_1 + m_2$, mientras que la fuerza neta es $(m_2 - m_1)g$. Así, pues, como antes

$$a = \frac{F}{M} = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_2 + m_1}$$

ROZAMIENTO: FUERZAS DE CONTACTO

En nuestra experiencia familiar con objetos ponderables nos encontramos frecuentemente con fuerzas que se comunican a un cuerpo por medio de presiones o tensiones que actúan en las superficies de contacto con otro cuerpo. En la sección anterior se exhiben fuerzas de este tipo en la tensión de la cuerda y en nuestra anterior discusión de choques de esferas o bolas de billar, se supone que las presiones de contacto actuaban brevemente en el momento del choque. Otra fuerza de contacto prácticamente muy importante es el *rozamiento o fricción* (véase, por ejemplo, el amortiguamiento de un oscilador, en el Cap. 7). La fuerza de fricción puede depender en forma muy compleja de la velocidad de un objeto, pero aquí trataremos del caso más simple de una fuerza constante si el cuerpo se mueve o el caso de una fuerza justamente suficiente para asegurar el equilibrio si el cuerpo está en reposo.

La fuerza de fricción es paralela a la superficie de contacto de dos objetos o de un objeto y una superficie. Depende de otra fuerza de contacto, la fuerza normal que una superficie sólida ejerce sobre un cuerpo que descansa sobre ella. La fig. 3.18 nos muestra un objeto sobre una superficie plana horizontal. Naturalmente, la fuerza de la gravedad *Mg* actúa verticalmente hacia abajo. Como el cuerpo está en reposo, la primera ley de Newton nos dice que debe existir una fuerza hacia arriba igual a *Mg*. Tal fuerza, que es normal a la superficie y que evita que el cuerpo *caiga* a través de la superficie se designa usualmente por *N*, como indica la fig. 3.18. La fuerza que tiende a empujar el cuerpo contra la superficie puede ser la gravedad, una componente de la fuerza gravitatoria o alguna otra fuerza que dependerá de las circunstancias de cada caso.

Supongamos ahora que se ejerce una fuerza **F** paralela a la superficie (por ejemplo, atando una cuerda al cuerpo y colgando de aquélla un peso, como se indica en la fig. 3.19), pero insuficiente para que el cuerpo se deslice. Aplicando de nuevo la primera ley de Newton, la superficie ejercerá una fuerza igual y opuesta **—F**

sobre el objeto. Esta fuerza $-\mathbf{F}$ se denomina *fuerza de rozamiento.* Es cero mientras la fuerza **F** no intenta mover el cuerpo.

¿Qué valor tiene la fuerza de rozamiento? Siempre es posible (excepto en el caso de un objeto «inamovible») ejercer una fuerza suficientemente grande **F** para que un cuerpo deslice. Es un hecho experimental que

$$F_{\max} = \mu N \tag{3.41}$$

en donde μ es una constante llamada *coeficiente de rozamiento estático* característico de las superficies de contacto. En la Tabla 3.1 se dan algunos valores característicos. Recuérdese que la fuerza de rozamiento estática puede tener cualquier valor hasta μN, dependiendo su valor de la fuerza externa aplicada; esto puede verse en la fig. 3.19.

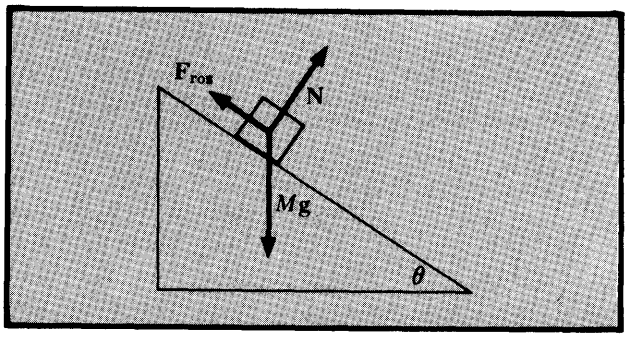


FIG. 3.20 El cuerpo desliza por un plano inclinado hacia abajo.

TABLA 3.1 Coeficientes de rozamiento estático, $\mu = F/N$

Material	μ
Vidrio sobre vidrio	0,9-1,0
Vidrio sobre metal	0,5-0,7
Grafito sobre grafito	0,1
Caucho sobre sólidos	1-4
Material de freno sobre hierro fundido	0,4
Hielo sobre hielo	0,05-0,15
Cera de esquí sobre nieve seca	0,04
Cobre sobre cobre	1,6
Acero sobre acero	0,58

EJEMPLO

Medida de μ. El valor de μ puede determinarse a partir del ángulo θ que forma con la horizontal un plano inclinado en el cual un cuerpo justamente comienza a deslizar. Con referencia a la fig. 3.20 y suponiendo que el cuerpo inicia el deslizamiento, puede verse que la suma de las tres fuerzas Mg, **N** y $\mathbf{F}_{roz}$ deben ser igual a cero. Tomando componentes paralelas y perpendiculares a la superficie resulta

$$N = Mg\cos\theta \qquad F_{roz} = Mg\,\mathrm{sen}\theta \tag{3.42}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $F_{roz} = \mu N$, resulta

$$\mu = \frac{F_{roz}}{N} = \frac{Mg\,\mathrm{sen}\theta}{Mg\cos\theta} = \mathrm{tg}\ \theta \tag{3.43}$$

EJEMPLO

Deslizamiento con fuerza tangencial variable en dirección. Un cuerpo de masa M reposa sobre un plano inclinado con coeficiente de rozamiento $\mu > \mathrm{tg}\,\theta$. Determinar la magnitud de la fuerza paralela al plano necesaria para que el cuerpo deslice, en función del ángulo que forma con la dirección hacia arriba del plano.

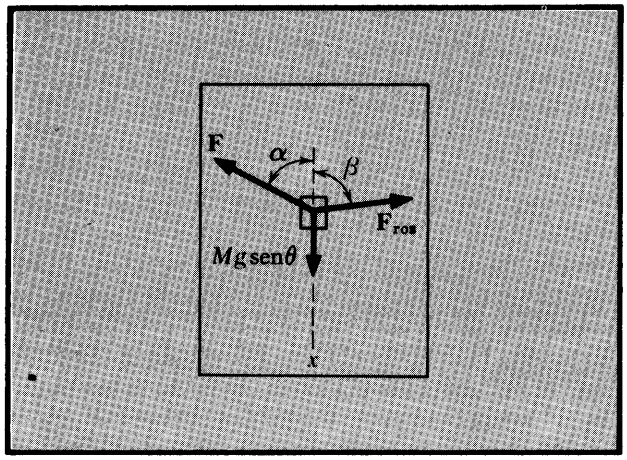


FIG. 3.21 El cuerpo se desliza por un plano inclinado rugoso por la acción de una fuerza **F**

Una variante del problema es la siguiente: Si una fuerza paralela al plano, pero no necesariamente hacia arriba o hacia abajo, hace que el objeto deslice, determinar la dirección en que comenzará a moverse en función de la dirección de la fuerza.

La figura 3.21 nos muestra las fuerzas paralelas al plano responsables del equilibrio. Según la fig. 3.21 vemos que $\mathbf{F}_{roz}$, Mg sen $\theta\hat{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{F}$ (fuerza externa) deben sumarse para dar una resultante nula. Cuando el cuerpo inicia el deslizamiento tenemos, según el ejemplo anterior,

$$F_{roz} = \mu Mg \cos\theta$$

Tomando componentes hacia arriba y hacia abajo del plano

$$F\cos\alpha + F_{roz}\cos\beta - Mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

o sea,

$$F\cos\alpha + \mu Mg\cos\theta\cos\beta = Mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y perpendicularmente a esta dirección

$$F_{roz}\,\mathrm{sen}\beta - F\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \qquad F\,\mathrm{sen}\alpha = \mu Mg\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta$$

Eliminando β de estas ecuaciones resulta

$$\frac{F}{Mg} = \cos\alpha\,\mathrm{sen}\theta \pm \sqrt{\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\theta + \mu^2\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta} \quad (3.44)$$

¿Cuál es el significado del signo negativo de la ecuación (3.44)? Observemos que $\mu^2\cos^2\theta > \mathrm{sen}^2\theta$, ya que hemos supuesto que $\mu > \mathrm{tg}\,\theta$. Por tanto, el término de la raíz cuadrada es mayor que $\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta$. Si utilizamos el signo negativo, F será una magnitud negativa. Pero esta solución es claramente inaceptable, ya que hemos supuesto un valor positivo de F. Por tanto, debemos utilizar el signo positivo. Obsérvese que

$$\begin{aligned} F = {} & Mg\,\mathrm{sen}\theta + \mu Mg\cos\theta \quad \text{cuando } \alpha = 0 \\ = {} & -Mg\,\mathrm{sen}\theta + \mu Mg\cos\theta \quad \text{cuando } \alpha = \pi \end{aligned}$$

que son de solución directa. También puede comprobarse que si $\mu = \mathrm{tg}\,\theta$ y $\alpha = \pi$, $F = 0$.

Cuando F es justamente mayor que el valor dado en la ecuación (3.44) el cuerpo desliza y la dirección será justamente la opuesta a $\mathbf{F}_{roz}$. Según las ecuaciones anteriores, el valor de β puede calcularse con el resultado

$$\mathrm{sen}\,\beta = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mu}(\cos\alpha\ \ \mathrm{tg}\,\theta + \sqrt{\mu^2 - \ \mathrm{tg}^2\ \theta\,\mathrm{sen}^2\alpha}\,)$$

Una comprobación de esta ecuación puede hacerse con la hipótesis $\beta = \pi/2$, en cuyo caso las tres fuerzas $\mathbf{F}$, Mg sen $\theta\hat{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{F}_{roz}$ forman un ángulo recto.

EJEMPLO

Movimiento horizontal con fuerza de rozamiento constante. Supongamos que el coeficiente de rozamiento entre una superficie horizontal y un cuerpo móvil es μ. ¿Con qué velocidad debe proyectarse el cuerpo paralelamente a la superficie para que recorra

una distancia D antes de detenerse? Se trata de un problema unidimensional con una fuerza constante

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu Mg \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu g$$

Hemos ya obtenido una solución de una ecuación semejante en la sección correspondiente a la gravedad. Véanse las ecuaciones (3.8) y (3.9). Tenemos

$$v_x = -\mu gt + v_0 \qquad \text{y} \qquad x = -\tfrac{1}{2}\mu gt^2 + v_0 t$$

en donde hemos hecho x_0 (el valor de x para $t = 0$) igual a 0. La velocidad deseada es v_0. Cuando el cuerpo se detiene, $v_x = 0$ y $t = v_0/\mu g$. Sustituyendo este valor en la ecuación en lugar de x, obtenemos, haciendo x igual a D,

$$D = -\tfrac{1}{2}\mu g\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{\mu g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g}$$

o sea

$$v_0 = \sqrt{2D\mu g}$$

PROBLEMAS

(Nota: Hay que dar las respuestas numéricas siempre con sus unidades. Sin éstas, la respuesta numérica no tiene significado.)

1. *Tercera ley de Newton.* Un alumno de física elemental se encuentra en el centro de una pista de patinaje de hielo con un pequeño coeficiente de rozamiento entre sus pies y el hielo. Ha estudiado la tercera ley de Newton. Como la ley dice que a toda acción se opone una reacción, igual y de sentido contrario, la suma de ambas debe ser nula. Por tanto, supone que no hay fuerza posible para acelerarle hacia el borde de la pista y debe permanecer en el centro.

(*a*) ¿Qué consejo se le podría dar para que alcanzase el borde?

(*b*) Una vez en el borde, ¿qué le podríamos decir respecto a la segunda y tercera ley de Newton?

2. *El mono y el cazador.* Una demostración familiar en física elemental viene ilustrada en la fig. 3.22. Un proyectil disparado por una escopeta en 0 apunta hacia un blanco localizado en P. El blanco se deja caer en el mismo instante que se dispara el proyectil. Este, como se ve, choca contra el proyectil. Probar que este choque en «vuelo» es independiente de la velocidad inicial del proyectil.

3. *Altura del techo para un juego de pelota.* Dos muchachos juegan a lanzarse y coger la pelota en un largo corredor. La altura del techo es H y la pelota se lanza y se recoge a la altura del hombro de cada muchacho, que llamaremos h. Si los muchachos son capaces de lanzar la pelota con velocidad v_0, ¿cuál será la máxima separación a que podrán jugar?

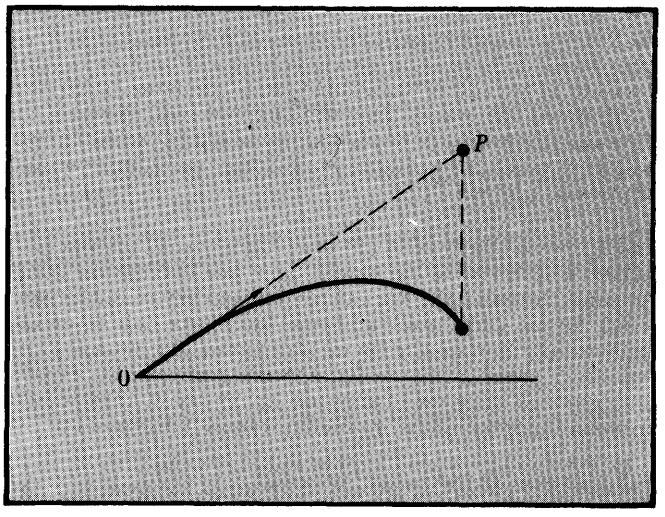


FIG. 3.22

Sol. $R = 4\sqrt{(H-h)[v_0^2/2g - (H-h)]}$.

Demostrar que si $H - h > v_0^2/4g$, $R = v_0^2/g$. Explicar el significado físico de la condición $H - h > v_0^2/4g$.

4. *Tiro hacia arriba.* La velocidad inicial de disparo de un arma es $3{,}0 \times 10^3$ cm/s. Un hombre dispara un tiro cada segundo hacia arriba en el aire considerado sin rozamiento.

(*a*) ¿Cuántos proyectiles existirán en el aire en cualquier momento?

(*b*) ¿A qué alturas sobre el suelo se cruzarán?

5. *Rozamiento sobre dos planos inclinados.* **Los planos 1 y 2 de la fig. 3.23 son ambos rugosos, de coeficientes de rozamiento μ_1 y μ_2. Determinar la relación entre M_1, M_2, θ_1, θ_2, μ_1 y μ_2, de tal forma que**

(*a*) M_1 deslice justamente en el plano 1.

(*b*) M_2 deslice justamente en el plano 2.

6. *Rozamiento distinto a μMg.* La fig. 3.24 muestra una fuerza **F** que actúa sobre un bloque de masa M que descansa sobre una superficie rugosa horizontal de coeficiente de rozamiento μ.

(*a*) Admitiendo que $F \gg Mg$, determinar el ángulo máximo θ para el cual F no puede hacer que deslice el bloque, cualquiera que sea su magnitud.

(*b*) Determinar la relación F/Mg en función de θ y μ **tal que el bloque comience a deslizar. Demostrar que la** respuesta se reduce a la de (*a*) en el límite $F \gg Mg$.

7. *Máquina de Atwood.* En la máquina de Atwood indicada en la fig. 3.17, determinar la tensión de la cuerda $0A$ que soporta la polea. Demostrar que la suma vectorial de las tres fuerzas —esta tensión, m_1g y m_2g— es igual a la variación respecto al tiempo de la cantidad de movimiento vertical.

8. *El satélite y la Luna.* ¿Cuál se propaga más rápidamente, la Luna o un satélite alrededor de la Tierra con un radio justamente un poco mayor que el radio de la Tierra? ¿Cuál es la relación de las velocidades en función del cociente de los radios? ¿Cuál es la relación de los períodos?

Teniendo en cuenta que la Luna tiene un período de 27 días aproximadamente y un radio de órbita de 386 000 km y que el radio de la Tierra es 6436 km, determinar el período del satélite.

9. *Fuerza electrostática.* Dos esferas conductoras pequeñas e idénticas se suspenden de P por cuerdas de igual longitud. Inicialmente las esferas cuelgan en contacto con $\theta \approx 0$. Se las carga eléctricamente, de modo que la carga se distribuye por igual y las esferas toman una situación de equilibrio como indica la fig. 3.25. Determinar una expresión que nos dé q en función de m, g, l y θ. (Tratar las pequeñas esferas como si fueran cargas puntuales.)

10. *Protón en un campo eléctrico.*

(*a*) ¿Qué fuerza (en dinas) actúa sobre un protón en un campo eléctrico de 100 statvoltios/cm?

(*b*) Si un protón se deja en reposo en un campo uniforme de esta intensidad, ¿cuál sería su velocidad al cabo de 10^{-8} s?

(*c*) ¿A qué distancia de su punto original se encontraría al cabo de este tiempo?

11. *Protón en un campo magnético.* Un protón ($e = 4{,}80 \times 10^{-10}$ ues) se proyecta con una velocidad vectorial $\mathbf{v} = 2 \times 10^8 \hat{\mathbf{x}}$ cm/s en una región donde existe un campo magnético uniforme descrito por $\mathbf{B} = 1000\hat{\mathbf{z}}$ G.

(*a*) Evaluar la fuerza (en magnitud y dirección) que actúa sobre el protón inmediatamente después de su proyección.

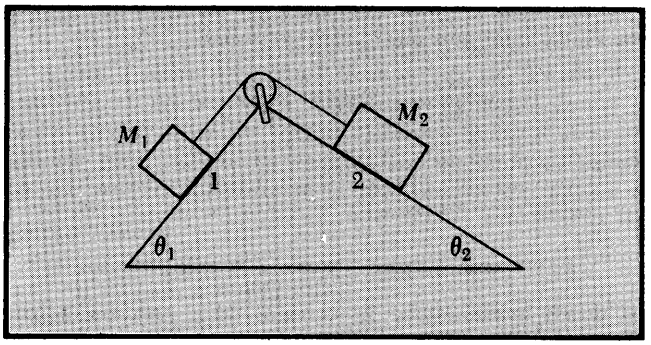


FIG. 3.23

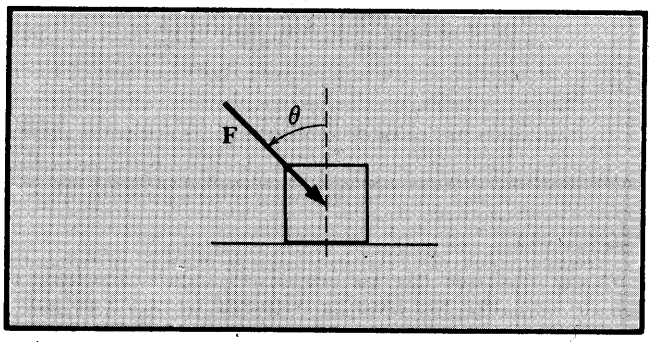


FIG. 3.24

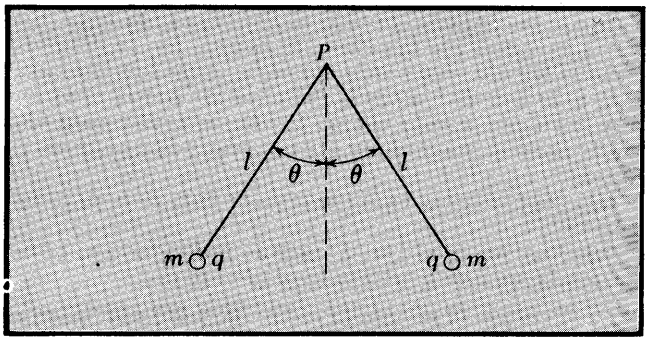


FIG. 3.25

(*b*) ¿Cuál es el radio de curvatura de su trayectoria subsiguiente?

(*c*) Localizar la posición del centro de su trayectoria circular si el punto de proyección es el origen.

12. *Relación entre las fuerzas eléctricas y gravitatorias existentes entre dos electrones.* El módulo de la fuerza electrostática entre dos electrones es e^2/r^2; el módulo de la fuerza gravitatoria es Gm^2/r^2, siendo $G = 6{,}67 \times 10^{-8}$ dinas-cm^2/g^2. ¿Cuál es el orden de magnitud de la relación existente entre las fuerzas electrostáticas y gravitatorias entre ambos electrones? *Sol.* 10^{42}.

13. *Campos eléctricos y magnéticos perpendiculares.* Una partícula cargada se mueve en la dirección x a través de una región en la que existe un campo eléctrico E_y y otro magnético B_z perpendicular al anterior. ¿Cuál es la condición necesaria para asegurar que la fuerza resultante sobre la partícula es cero? Dibujar en un diagrama los vectores **v**, **E**, **B**. ¿Cuánto debe valer v_z en este caso, si $E_y = 10$ statvolt/cm y $B_z = 300$ gauss?

Sol. $v_x = 1 \times 10^9$ cm/s.

14. *Desviación entre las placas de un condensador.* Una partícula de carga q y masa M con una velocidad inicial $v_0\hat{\mathbf{x}}$ penetra en un campo eléctrico $-E\hat{\mathbf{y}}$ (véase fig. 3.26). Supongamos que **E** es uniforme, es decir de valor constante en todos los puntos dentro de la región comprendida entre las placas de longitud L (excepto en las proximidades de los bordes, donde habrá variaciones pequeñas que pueden despreciarse).

(*a*) ¿Qué fuerzas actúan en las direcciones x e y, respectivamente? *Sol.* $F_x = 0$, $F_y = -qE\hat{\mathbf{y}}$.

(*b*) ¿Influirá sobre la componente x de la velocidad una fuerza en la dirección y?

(*c*) Obtener v_x y v_y en función del tiempo y escribir la ecuación vectorial completa que nos da $\mathbf{v}(t)$.

Sol. $v_0\hat{\mathbf{x}} - \dfrac{qE}{M}t\hat{\mathbf{y}}$.

(*d*) Escoger el punto de entrada como origen y escribir la ecuación vectorial completa para la posición de la partícula en función del tiempo mientras la partícula está entre las placas.

15. *Continuación del problema anterior.* Si la partícula del problema 10 es un electrón de energía inicial 10^{-10} ergs (energía cinética = $1/2\ mv^2$; 1 ergio es la energía cinética de una masa de 2 g que se mueve a velocidad de 1 cm/s), la intensidad del campo eléctrico es 0,01 statvolt/cm, y $L = 2$ cm, calcular:

(*a*) El vector velocidad del electrón al abandonar la región entre las placas.

(*b*) El ángulo $(\mathbf{v},\hat{\mathbf{x}})$ que forma la velocidad con la dirección x cuando abandona las placas. *Sol.* 2,7°.

(*c*) El punto de intersección entre el eje x y la dirección del movimiento de la partícula al abandonar el campo. *Sol.* 1,0 cm.

16. *Trayectorias que conducen a una colisión.* Dos partículas están inicialmente en las posiciones $x_1 = 5$ cm; $y_1 = 0$, y $x_2 = 0$, $y_2 = 10$ cm, con $\mathbf{v}_1 = -4 \times 10^4\,\hat{\mathbf{x}}$ cm/s y $\mathbf{v}_2$ está dirigido sobre $-\hat{\mathbf{y}}$ como indica la figura 3.27.

(*a*) ¿Cuál debe ser la velocidad de $\mathbf{v}_2$ para que se verifique el choque? *Sol.* $-8 \times 10^4\,\hat{\mathbf{y}}$ cm/s.

(*b*) ¿Cuál es la velocidad relativa, $\mathbf{v}_r$?

Sol. $4 \times 10^4\,(2\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}})$ cm/s.

(*c*) Establecer un criterio general para poder reconocer si la ruta que siguen dos objetos es la necesaria para que se produzca el choque, en función de sus posiciones $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y sus velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

17. *Cinemática del choque.* Dos masas obligadas a moverse en un plano horizontal, chocan entre sí. Datos iniciales $M_1 = 85$ g. $M_2 = 200$ g, $\mathbf{v}_1 = 6{,}4\,\hat{\mathbf{x}}$ cm/s, $\mathbf{v}_2 = 6{,}7\,\hat{\mathbf{x}} - 2{,}0\,\hat{\mathbf{y}}$ cm/s.

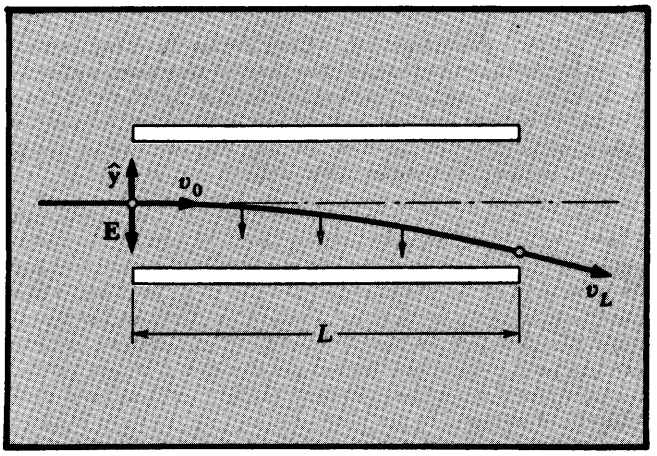


FIG. 3.26

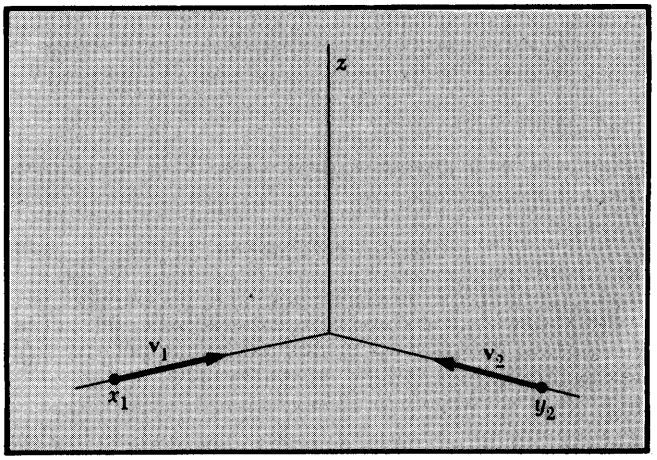


FIG. 3.27

(*a*) Determinar la cantidad de movimiento total lineal. *Sol.* $-796\hat{\mathbf{x}} - 400\hat{\mathbf{y}}$ g-cm/s.

(*b*) Si después del choque $|\mathbf{w}_1| = 9{,}2$ cm/s y $\mathbf{w}_2 = -4{,}4\hat{\mathbf{x}} + 1{,}9\hat{\mathbf{y}}$ cm/s, ¿cuál es la dirección de $\mathbf{w}_1$? (Para las velocidades después del choque usamos el símbolo **w**.)

Sol. $-84°$ respecto al eje x.

(*c*) ¿Cuál es la velocidad relativa, $\mathbf{w}_r = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$?

Sol. $5{,}4\hat{\mathbf{x}} - 11\hat{\mathbf{y}}$ cm/s.

(*d*) ¿Cuáles son las energías cinéticas totales inicial y final? ¿Es la colisión elástica o inelástica?

18. *Choque inelástico.* Dos objetos ($M_1 = 2$ g, $M_2 = 5$ g) poseen velocidades de $\mathbf{v}_1 = 10\hat{\mathbf{x}}$ cm/s y $\mathbf{v}_2 = 3\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}}$ cm/s, justamente antes de producirse un choque durante el cual ambos se adhieren permanentemente el uno al otro.

(*a*) ¿Cuál es su velocidad final?

(*b*) ¿Qué fracción de la energía cinética total inicial está asociada con el movimiento después del choque?

19. *Orbita de un satélite.* Considérese la órbita circular de un satélite que rodea el ecuador de un planeta esférico homogéneo de densidad ρ, prácticamente en contacto con el mismo. Demostrar que el período T de dicha órbita depende únicamente de la densidad del planeta. Dar la ecuación para T. (Contiene también G.)

20. *Alcance de los obuses de mortero.* Los siguientes datos son valores experimentales sobre el alcance y la velocidad inicial de los obuses de mortero, disparados todos ellos formando un ángulo de 45° con la horizontal. También se incluye el tiempo de vuelo. Comparar estos alcances y tiempos con la simple teoría. ¿Se encuentra alguna regularidad? (Datos del Departamento del Ejército, U. S., Tablas de tiro, FT4.2-F-1, diciembre 1954. Utilizar para g el valor 9,754 m/s².)

Velocidad de salida m/s	*Alcance (metros)*	*Tiempo (segundos)*
101,8	972	14,4
112,2	1159	15,7
121,9	1349	17,0
131,4	1530	18,2

TEMA AVANZADO

Movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme alterno. Sea

$$\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} = E_x{}^0 \operatorname{sen}\omega t\hat{\mathbf{x}}$$

siendo $\omega = 2\pi f$ la frecuencia angular y $E_x{}^0$ la amplitud del vector campo eléctrico. Con frecuencia se omite el supraíndice cero (°) en la E si no hay peligro de ambigüedad. La ecuación del movimiento es, según (3.20),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{M}E_x = \frac{q}{M}E_x{}^0 \operatorname{sen}\omega t \tag{3.45}$$

Para resolver las ecuaciones diferenciales utilizaremos con frecuencia el excelente método de los tanteos, guiados por una perspicacia física. Examinemos una solución de la forma *

$$x(t) = x_1 \operatorname{sen}\omega t + v_0 t + x_0 \tag{3.46}$$

Derivando dos veces (3.46) encontramos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_1 \operatorname{sen}\omega t$$

Las derivadas del seno y coseno vienen dadas por

$$\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\cos\theta = -\cos\theta$$

Así, pues, (3.46) es una solución de la ecuación del movimiento (3.45) con tal que

$$-\omega^2 x_1 \operatorname{sen}\omega t = \frac{q}{M}E_x{}^0 \operatorname{sen}\omega t \tag{3.47}$$

o

$$x_1 = -\frac{qE_x{}^0}{M\omega^2} \tag{3.48}$$

Sustituyendo (3.46) en la ecuación (3.48) obtendremos el resultado

$$x(t) = -\frac{qE_x{}^0}{M\omega^2}\operatorname{sen}\omega t + v_0 t + x_0$$

La velocidad es

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{qE_x{}^0}{M\omega}\cos\omega t + v_0$$

así, pues, para $t = 0$

$$v_x(0) = -\frac{qE_x{}^0}{M\omega} + v_0$$

No confundamos $v_x(0)$, que es la velocidad para $t = 0$, con v_0, que es una constante que ha de seleccionarse para hacer que $v_x(0)$ tenga el valor asignado. Si escogemos para la velocidad inicial el valor cero debemos tener

$$v_0 = \frac{qE_x{}^0}{M\omega}$$

(*) En este caso participamos en una de las ocupaciones comunes de los físicos: encontrar la solución de una ecuación diferencial sometida a unas condiciones iniciales predeterminadas. Este es un arte en el que la intuición juega un importante papel. Con frecuencia existen procedimientos matemáticos estrictamente prescritos; corrientemente el físico se pregunta a sí mismo: «¿Qué puede suceder?»; o «¿Qué más debe esperarse?». En último extremo la comprobación consiste en sustituir la solución prevista en la ecuación original para ver si es correcta. Si la previsión es incorrecta, debe intentarse de nuevo otra vez. Una conjetura inteligente ahorra tiempo, pero con frecuencia incluso las conjeturas equivocadas iluminan el problema.

La ecuación (3.45) establece que la aceleración de una partícula cargada es una función sinusoidal del tiempo si la fuerza aplicada es sinusoidal. Como la aceleración es oscilatoria, el desplazamiento debe ser oscilatorio al menos en parte. Por esta razón incluimos en (3.46) un término como sen ωt o cos ωt. Escogemos sen ωt porque dos derivadas sucesivas de la función seno dan de nuevo la misma función. El término x_0 debe incluirse como desplazamiento inicial. Como debemos tener en cuenta también una velocidad inicial añadiremos un término $v_0 t$ que tendrá en cuenta cualquier velocidad inicial, incluida la velocidad nula. La influencia del término $v_0 t$ persistirá en tiempos posteriores, como una velocidad constante añadida a la oscilatoria. La forma $v_0 t$ es la única posibilidad; una potencia de t mayor no se ajusta a la ecuación (3.45).

Sustituyendo este resultado en la fórmula para $x(t)$ anterior, tendremos

$$x(t) = -\frac{qE_x^0}{M\omega^2}\operatorname{sen}\omega t + \frac{qE_x^0}{M\omega}t + x_0$$

Este es un resultado un tanto inesperado: con la condición inicial $v_z = 0$ para $t = 0$ el movimiento se compone de una oscilación superpuesta a una velocidad constante de valor $qE_z^0/M\omega$. Esto es debido a que la partícula nunca invierte su velocidad en este problema especial. La partícula se mueve continuamente por el mismo lado. Obsérvese que v_0 *no* es igual a $v_z\,(t = 0)$ en este problema, pero x_0 es igual a $x\,(t = 0)$.

La aceleración, la velocidad y la distancia se muestran como funciones del tiempo en la fig. 3.28.

NOTA MATEMÁTICA

Ecuaciones diferenciales. Hemos visto que la aceleración en coordenadas cartesianas es

$$\frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{z}}$$

En otras coordenadas se incluirían derivadas segundas y posiblemente derivadas primeras respecto al tiempo. La segunda ley de Newton se reduce a una dimensión dada por

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \tag{3.49}$$

Nuestro propósito al escribir esta ecuación es determinar x en función de t, es decir, resolverla para x. La solución de esta ecuación, llamada *ecuación diferencial*, será $x(t)$. ¿Cómo puede obtenerse esta solución? Los matemáticos tienen procedimientos regulares para esto, pero los físicos, con frecuencia proponen una solución y comprueban si la proposición satisface la ecuación (3.49). Existe cierto número de tipos de ecuaciones diferenciales que ocurren con tal frecuencia en la física que es útil recordar las soluciones. Discutiremos a continuación dos de ellas y otras al final de los últimos capítulos.

El caso más simple será para $F = 0$. Ya conocemos la respuesta de la primera ley de Newton, pero veamos cómo surge desde el punto de vista de una solución de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 = \frac{dv_x}{dt} \tag{3.50}$$

Sabemos que la derivada de una constante es 0 y, por tanto,

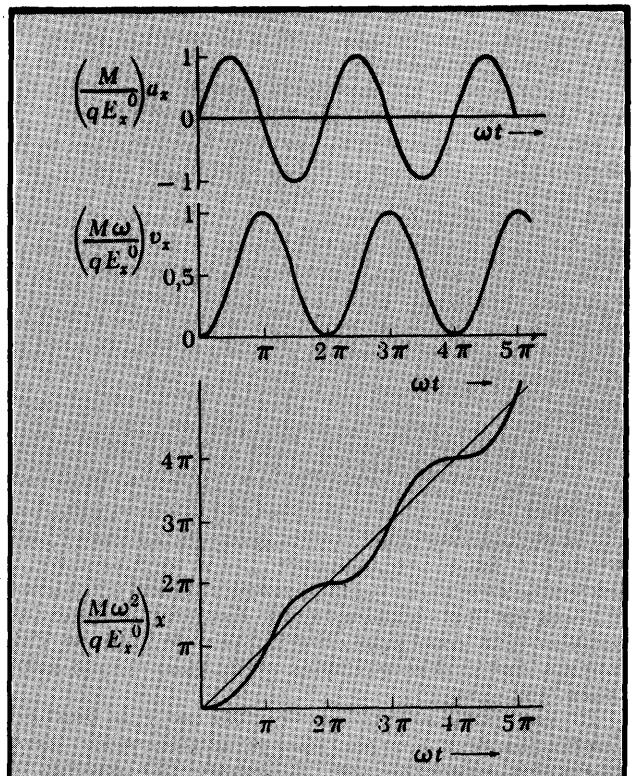
$$v_x = \text{const} = v_0$$

debe ser una solución. Esto significa que

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \tag{3.51}$$

Ensayemos como solución

$$x = v_0t + x_0 \tag{3.52}$$



Para una carga q en un campo $\mathbf{E} = \hat{\imath}E_x^0\operatorname{sen}\omega t$, tendremos

$$a_x = \frac{q}{M}E_x^0\operatorname{sen}\omega t$$

y

$$v_x(t) = \int a_x\,dt = -\frac{qE_x^0}{M\omega}\cos\omega t + v_0.$$

Si $v_x(0) = 0$, entonces

$$v_0 = \frac{qE_x^0}{M\omega}.$$

o

$$v_x(t) = \frac{qE_x^0}{M\omega}(1 - \cos\omega t).$$

Ahora $x(t) = \int v_x(t)\,dt$

$$= \frac{qE_x^0}{M\omega}\int(1 - \cos\omega t)\,dt + x(0).$$

Si $x(0) = 0$, entonces

$$x(t) = -\frac{qE_x^0}{M\omega^2}\operatorname{sen}\omega t + \frac{q}{M\omega}E_x^0t.$$

FIG. 3.28 Aceleración, velocidad y desplazamiento en función de ωt.

Derivando una vez resulta la ecuación (3.51); derivando por segunda vez resulta la ecuación (3.50). Por tanto, diremos que la ecuación está resuelta y podemos probar que ésta es la única solución.

¿Qué son v_0 y x_0? Evidentemente son constantes, pero, ¿de dónde proceden? Surgen del problema particular que consideramos. Supongamos, por ejemplo, que tenemos una partícula en reposo en $x = 0$ y que sobre ella no actúa ninguna fuerza. Entonces $v_0 = 0$, $x_0 = 0$ y $x = 0$ es nuestra solución. Dicho de otro modo, la partícula permanece siempre en $x = 0$, en tanto ninguna fuerza actúe sobre ella. Supongamos, sin embargo, que consideramos una partícula sobre la que no actúa fuerza alguna, que para $t = 0$ se encuentra en $x = +50$ y que se mueve en la dirección negativa de x con velocidad 25. Entonces $x_0 = +50$, $v_0 = -25$, de modo que

$$x = -25t + 50$$

y conocemos x para cualquier valor de $t > 0$. Si sabemos que para $t < 0$ no hay fuerzas aplicadas, entonces este resultado nos da el valor de x para todos los valores negativos de t. Estas dos constantes x_0 y v_0 se denominan con frecuencia *constantes de integración* y deben determinarse a partir de las condiciones del problema o *condiciones iniciales*. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden siempre tienen *dos* constantes arbitrarias; las de primer orden, sólo una.

El caso más simple que le sigue es $F_x = \text{const} = F_0$. Cambiemos de x a y para que el alumno pueda correlacionar las soluciones con el ejemplo al comienzo del capítulo.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_0}{M} = a \tag{3.53}$$

en donde a es la aceleración constante. Ensayemos la solución

$$y = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0 \tag{3.54}$$

Derivando dos veces resulta la ecuación (3.53) y, por tanto, tenemos una solución; v_0 y y_0 son de nuevo las constantes arbitrarias o constantes de integración y deben ser determinadas para el problema en consideración. El alumno reconocerá en (3.54) la ecuación obtenida en otros cursos para una partícula bajo la acción de la gravedad. Si y es positiva hacia arriba, $a = -g$, en donde g es la aceleración de la gravedad, 980 cm/s². A continuación se exponen algunos ejemplos:

1. Para un cuerpo que se deja caer desde el reposo a $y = 10\,000$ cm

$$v_0 = 0 \qquad y_0 = 10\,000$$

y, por tanto,

$$y = -\tfrac{1}{2}980t^2 + 10\,000 \quad \text{en cm} \tag{3.55}$$

2. Para un cuerpo que se lanza hacia arriba desde el origen con $v_0 = 980$ cm/s,

$$y_0 = 0 \qquad v_0 = 980$$
$$y = -\tfrac{1}{2}980t^2 + 980t \quad \text{en cm} \tag{3.56}$$

De estas ecuaciones pueden deducirse fácilmente los valores de y para cualquier valor de t. Por ejemplo, si se quiere determinar la altura máxima alcanzada, de la ecuación (3.56) resulta

$$\frac{dy}{dt} = 0 = -980t + 980$$
$$t = 1 \text{ s}$$
$$y = -\tfrac{1}{2}980 \times 1^2 + 980 \times 1 = 490 \text{ cm}$$

Obsérvese que $dy/dt = 0$ significa que $v_y = 0$, que es la situación que corresponde cuando el cuerpo alcanza la altura máxima.

Desde el punto de vista matemático las condiciones iniciales pueden entenderse como los valores de y y dy/dt en cierto punto, que en los casos anteriores corresponde a $t = 0$. La ecuación diferencial de segundo orden nos da la curvatura de y en función de t, pero no su valor y su pendiente. Por tanto, para determinar la curva de un modo definido es necesario especificar tanto la pendiente como el valor de algún punto. El alumno debe comparar los gráficos de las ecuaciones (3.55) y (3.56).

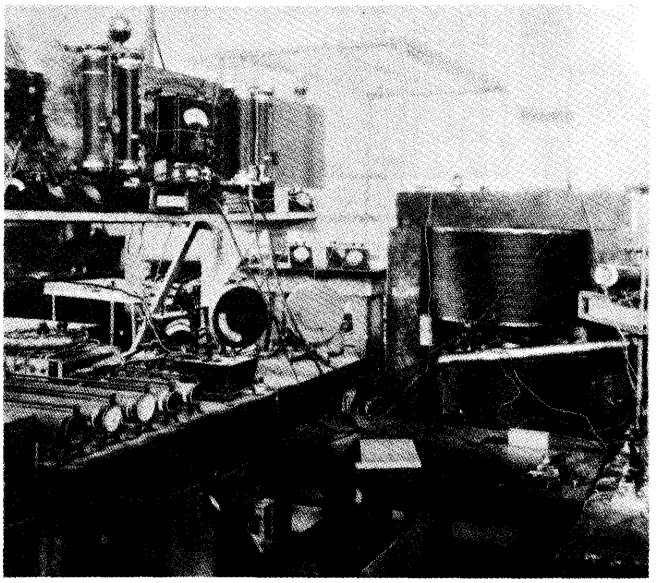
NOTA HISTORICA

Invento del ciclotrón. La mayoría de los actuales aceleradores de partículas de alta energía descienden del primer ciclotrón de protones de 1-MeV construido por E. O. Lawrence y M. S. Livingston en LeConte Hall en Berkeley. El ciclotrón fue ideado por Lawrence; la idea se hizo pública primeramente por Lawrence y Edlefsen en una conferencia cuyo extracto se publicó en *Science*, **72**, 376, 377 (1930). En 1932 se publicaron los primeros resultados en un atrayente artículo de *Physical Review*, principal revista de física de la American Physical Society. Aunque esta revista exige que todos los artículos sean acompañados por resúmenes informativos, pocos de éstos son tan claros como el que reproducimos a continuación del clásico trabajo de Lawrence y Livingston. También se reproducen las dos figuras del artículo original. El profesor Livingston pertenece actualmente al M. I. T.; el profesor Lawrence murió en 1958.

El imán original de 11 pulgadas fue casi inmediatamente sobrepasado en aplicaciones de los aceleradores; ha sido reconstruido y todavía se utiliza para una diversidad de proyectos de investigación en la LeConte Hall. Los primeros experimentos que tuvieron éxito sobre resonancia ciclotrónica de portadores de carga en los cristales se llevaron a cabo con este imán.

Para leer una interesante relación de la historia inicial del ciclotrón, véase E. O. Lawrence «The Evolution of Ciclotron», *Les Prix Nobel en 1951*, pp. 127-140. (Imprimerie Royale, Estocolmo, 1952.) A continuación, véase una ima-

gen del primer ciclotrón y una reproducción del artículo del *Phys. Rev.*



Un ciclotrón primitivo.

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

PSSC, *Física,* Caps. 19-21, 28 (secs. 1, 4, 6), 30 (secs. 6, 8), Ed. Reverté.

HPP, *Project Physics Course,* Caps. 2-4, 9 (secs. 2, 7), 14 (secs. 3, 4, 8, 13), Holt, Rinehart and Winston, Inc., Nueva York, 1970.

A. French, *Newtonian Mechanics,* W. W. Norton & Comp., Nueva York, 1971. Texto completo de este nivel; forma parte de la serie MIT.

Ernst Mach, *The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of Its Development,* 6th ed., chaps., 2 and 3, The Open Court Publishing Company, La Salle, Ill., 1960. Relación clásica del concepto de mecánica y su desarrollo, 6.ª ed.

Herbert Butterfield, *The Origins of Modern Science, 1300-1800,* Free Press, The Macmillan Company, Nueva York, 1965. El Cap. 1 presenta un punto de vista histórico de la importancia de un entendimiento correcto del movimiento y la inercia.

L. Hopf, *Introduction to the Differential Equations of Physics,* traducido por W. Nef, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1948. Una introducción compacta y agradable de las ecuaciones diferenciales que requiere poca preparación matemática y dispuesta para un estudio independiente.

1 ABRIL 1932 PHYSICAL REVIEW VOLUMEN 40

PRODUCCIÓN DE IONES LIGEROS DE ALTA VELOCIDAD SIN EL EMPLEO DE GRANDES VOLTAJES

POR ERNEST O. LAWRENCE Y M. STANLEY LIVINGSTON
UNIVERSIDAD DE CALIFORNIA

(Recibido el 20 de febrero de 1932)

RESUMEN

El estudio del núcleo podría facilitarse en grado sumo mediante el desarrollo de fuentes de iones de alta velocidad, particularmente protones y iones de helio que tuviesen energías cinéticas superiores al millón de electrón-volt, ya que, según parece, estas rápidas partículas son las más adecuadas para conseguir la excitación nuclear. El método directo de acelerar iones utilizando la diferencia de potencial precisa presenta grandes dificultades experimentales asociadas con los campos eléctricos intensos que necesariamente aparecen. El trabajo presente describe el desarrollo de un método que evita estas dificultades por medio de la aceleración múltiple de los iones hasta elevadas velocidades sin el empleo de altos voltajes. El método es el siguiente: dos placas semicirculares huecas, no muy diferentes de las hojas de un electrómetro, se montan con sus bordes diametrales adyacentes dentro de un campo magnético uniforme que es normal al plano de las placas y se hace el vacío. A dichas placas o electrodos se les aplican oscilaciones de alta frecuencia que producen un campo eléctrico oscilante en la región diametral entre ambas. Como consecuencia, durante un semiciclo el campo eléctrico acelera los iones, formados en la región diametral, hacia el interior de uno de los electrodos, donde se les obliga a recorrer una trayectoria circular mediante el campo magnético y finalmente aparecerán de nuevo en la región intermedia de los electrodos. El campo magnético se ajusta de modo que el tiempo que se necesita para recorrer la trayectoria semicircular dentro del electrodo sea igual al semiperíodo de las oscilaciones. En consecuencia, cuando los iones vuelven a la región intermedia, el campo eléctrico habrá invertido su sentido y los iones recibirán entonces un segundo aumento de velocidad al pasar hacia el interior del otro electrodo. Como los radios de las trayectorias dentro de los electrodos son proporcionales a las velocidades de los iones, el tiempo que se necesita para el recorrido de una trayectoria semicircular es independiente de sus velocidades. Por consiguiente, si los iones emplean exactamente medio ciclo en su primera semirrevolución, se comportarán de modo análogo en todas las sucesivas y, por lo tanto, se moverán en espiral y en resonancia con el campo oscilante hasta que alcancen la periferia del aparato. Su energía cinética final será tantas veces mayor que la correspondiente al voltaje aplicado a los electrodos como el número de veces que han cruzado de un electrodo al otro. Este método se ha proyectado principalmente para la aceleración de iones ligeros y en los experimentos actuales se ha prestado particular atención a la producción de protones de alta velocidad debido a la utilidad especial que se presume poseen para la investigación del núcleo atómico. Empleando un imán con caras polares de 11 pulgadas de diámetro, se ha producido una corriente de 10^{-9} ampère de 1 220 000 protón-volt en un tubo en el que el voltaje máximo aplicado fue de 4 000 volt únicamente. El método experimental desarrollado posee dos características que han contribuido muchísimo a su éxito. La primera es la acción de enfoque de los campos eléctrico y magnético que evita pérdidas importantes de iones durante su aceleración. En consecuencia, los valores obtenidos para las corrientes de iones de alta velocidad por este método indirecto son comparables con los que

E. O. LAWRENCE Y M. S. LIVINGSTON

puedan dar los métodos directos de voltajes elevados. Además, la acción de enfoque produce unos haces de iones muy estrechos —con un diámetro de su sección recta inferior a 1 mm— que son ideales para estudios experimentales de los procesos de colisión. No es de menor importancia la segunda característica del método que consiste en el procedimiento tan sencillo y eficaz de corrección del campo magnético a lo largo de la trayectoría de los iones. Esto hace posible y muy fácil que funcione el tubo eficazmente con un factor de amplificación (relación entre el voltaje final equivalente de los iones acelerados y la tensión aplicada) muy elevado. En consecuencia, este método en su etapa presente de desarrollo constituye una fuente de iones de alta velocidad experimentalmente adecuada y muy conveniente que se puede montar con un equipo de laboratorio relativamente modesto. Más aún, las experiencias presentes indican que este método indirecto de aceleración múltiple hace posible ahora la producción en el laboratorio de protones con energías cinéticas superiores a los 10 000 000 de electrón-volt. Pensando en ello, se está instalando en nuestro laboratorio un imán cuyas caras polares tienen un diámetro de 114 cm.

INTRODUCCIÓN

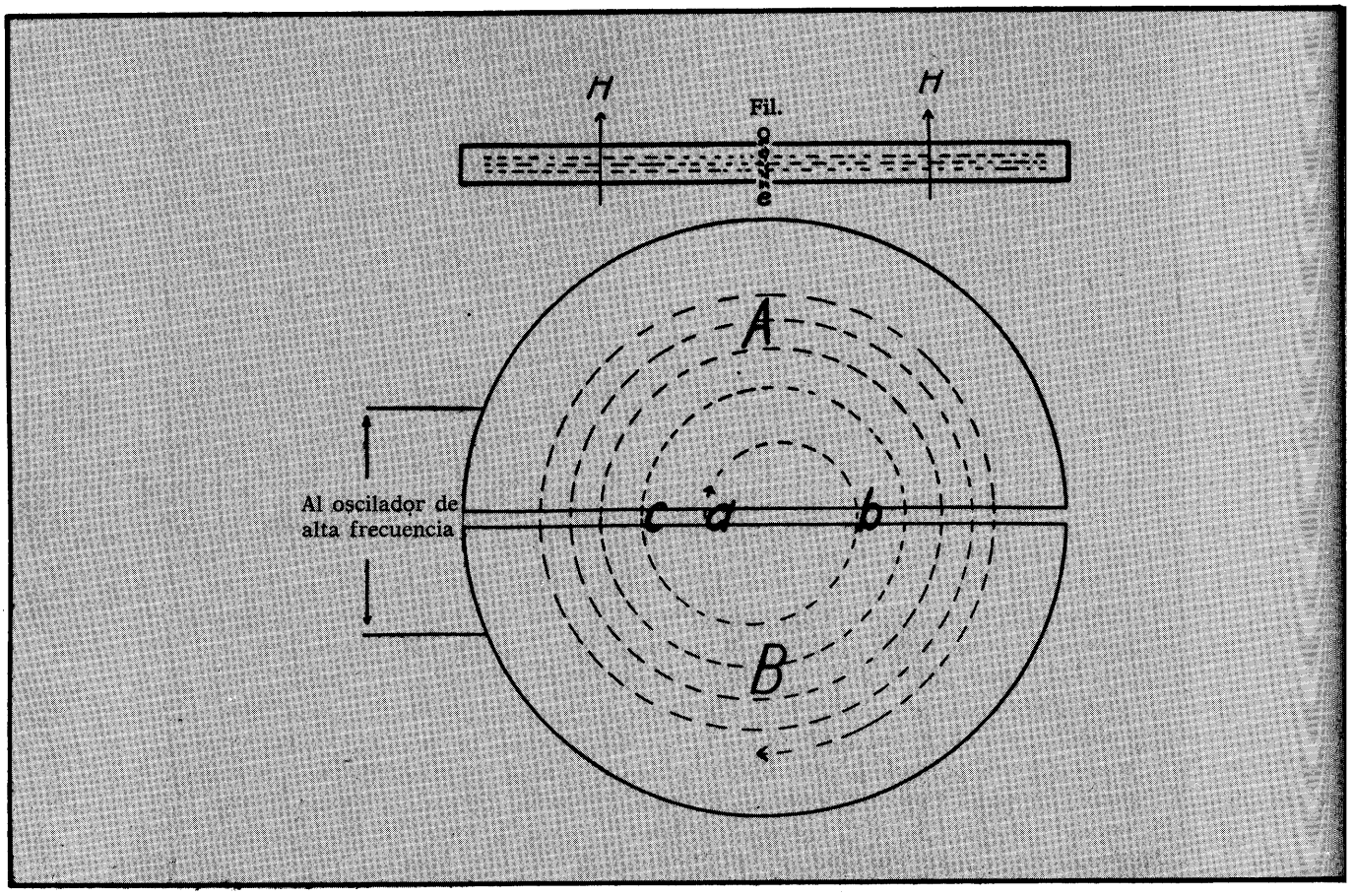
Los experimentos clásicos de Rutherford y sus asociados [1], los de Pose [2] sobre la desintegración artificial y los de Bothe y Becker [3] sobre la excitación de la radiación nuclear, confirman que el núcleo es susceptible de los mismos métodos de investigación que han tenido tanto éxito revelando la propiedad extra-nuclear del átomo. Especialmente los resultados de estos trabajos han sido fructíferos para el estudio de las transiciones nucleares por excitación artificial verificada en el laboratorio. El desarrollo de los métodos de excitación nuclear en una escala extensiva, es un problema de gran interés y su solución es probablemente la clave de un nuevo mundo de fenómenos: el mundo del núcleo.

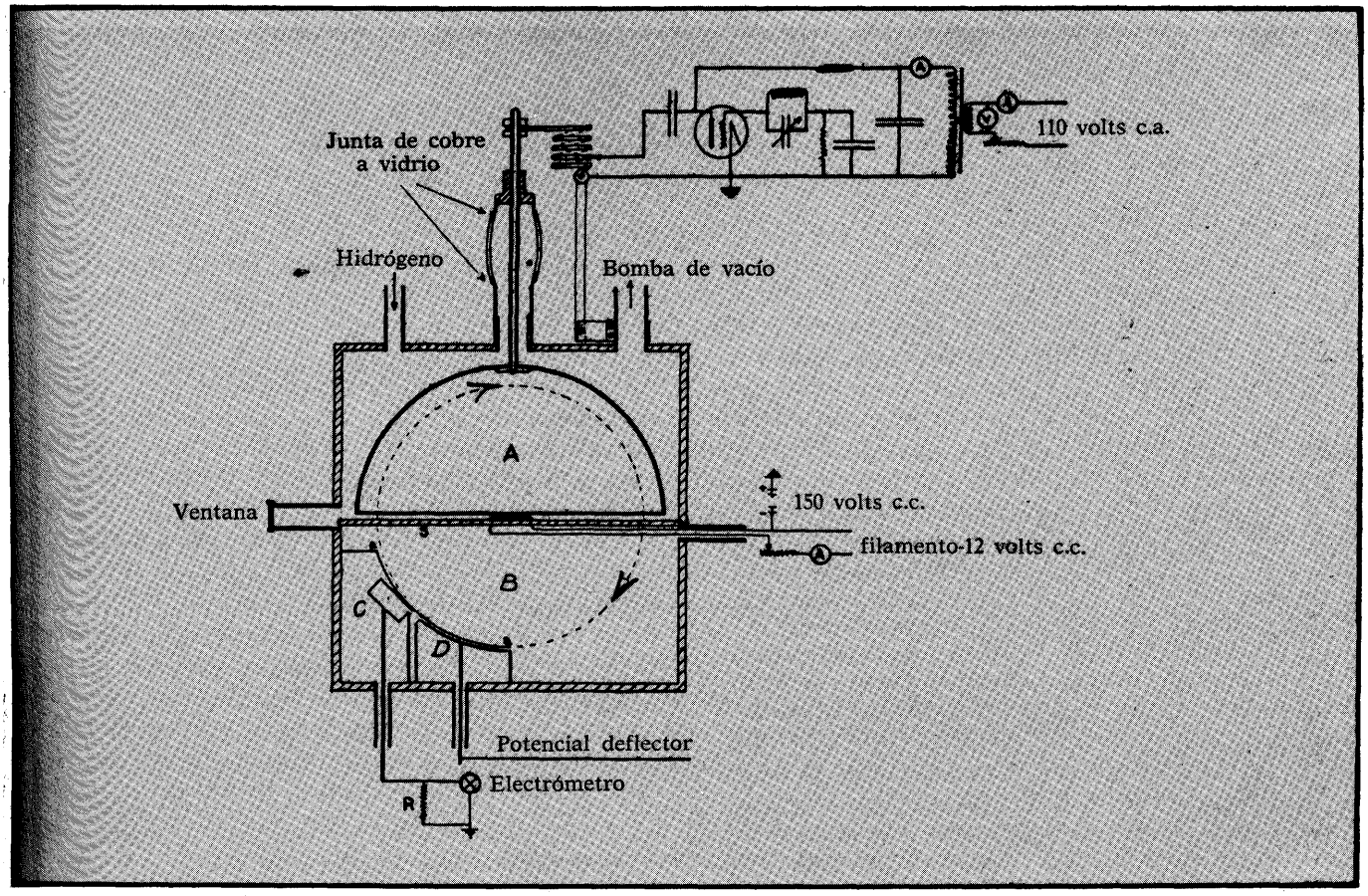
Estos experimentos son tan interesantes como difíciles de desarrollar. El núcleo resiste como un muro formidable de altas energías combinadas. Los niveles de energía nuclear están muy distanciados y, en consecuencia el proceso de la excitación nuclear encierra enormes cantidades de energía —millones de electrón-volts.

Sin embargo, es interesante inquirir cuáles métodos son los más prometedores para excitar los núcleos. Dos son los métodos que se emplearon: excitación por absorción en radiación (radiación gama) y excitación por el enfoque de partículas que se mueven a altas velocidades.

Del primero puede decirse que recientes estudios experimentales [4,5] de la absorción de radiaciones gama...

1 Véase Capítulo 10 de *Radiations from Radioactive Substances* by Rutherford, Chadwick y Ellis.
2 H. Pose, Zeits. f. *Physik* **64**, 1 (1930).
3 W. Bothe and H. Becker, Zeits. f. *Physik* **66**, 1289 (1930).
4 G. Beck, *Naturwiss.* **18**, 896 (1930).
5 C. Y. Chao, *Phys. Rev.* **36**, 1519 (1930).


H
Fil.
H
A
Al oscilador de
alta frecuencia
c
d
b
B


Junta de cobre
a vidrio
Hidrógeno
Bomba de vacío
110 volts c.a.
A
Ventana
150 volts c.c.
filamento-12 volts c.c.
B
C
D
Potencial deflector
Electrómetro
R

Contenido

SISTEMAS DE REFERENCIA
INERCIALES Y ACELERADOS
Ejemplo. Ultracentrifugadora
La Tierra como sistema de referencia
Estrellas fijas: Un sistema de referencia inercial
Las fuerzas en los sistemas de referencia inerciales
ACELERACIÓN ABSOLUTA Y RELATIVA
Fuerzas ficticias
Ejemplo. Acelerómetro
Ejemplo. Fuerza centrífuga y aceleración centrípeta en un sistema de rotación uniforme
Ejemplo. Experimento en un ascensor en caída libre
Ejemplo. Péndulo de Foucault
VELOCIDAD ABSOLUTA Y RELATIVA
TRANSFORMACIONES DE GALILEO
Conservación de la cantidad de movimiento
Ejemplo. Choque inelástico de masas iguales
Ejemplo. Reacciones químicas
Ejemplo. Choque de una partícula pesada contra otra ligera
Problemas
TEMAS AVANZADOS:
Velocidad y aceleración en sistemas coordenados en rotación
Movimiento de un protón en campos eléctricos y magnéticos perpendiculares entre sí
Nota matemática. Derivada de producto de vectores
Lecturas suplementarias

4

Sistemas de referencia; transformaciones de Galileo

En este capítulo investigaremos algunos de los aspectos más sutiles de las leyes segunda y tercera de Newton. La cuestión de los sistemas de referencia fue completamente omitida del Cap. 3, pero se trata aquí con detalle. Otros temas importantes son la invarianza de Galileo y una nueva deducción de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. En cierto sentido, este capítulo no es esencial para los capítulos que siguen, pero es importante para un entendimiento más completo del tema de la mecánica.

SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES Y ACELERADOS

Las dos primeras leyes de Newton se cumplen sólo cuando las observaciones se realizan desde sistemas de referencia sin aceleración. Esto resulta evidente a partir de nuestra experiencia cotidiana. Si nuestro sistema de referencia está inmóvil sobre un tiovivo en movimiento, no tendremos aceleración cero en este sistema en ausencia de fuerzas aplicadas. Unicamente podremos permanecer quietos sobre el tiovivo si ejercemos sobre nuestro mismo cuerpo, de acuerdo con la tercera ley de Newton, una fuerza de valor $M\omega^2 r$ dirigida hacia el eje, apoyándonos o sujetándonos en el tiovivo, siendo M nuestra masa, ω la velocidad angular y r la distancia que nos separa del eje de rotación. O supongamos que nuestro sistema de referencia está en reposo en un avión que acelera fuertemente al despegar. Entonces nos sentimos comprimidos contra el asiento por la aceleración y nos mantenemos en reposo relativo respecto al avión por la fuerza que ejerce sobre nosotros el respaldo del asiento.

Si tuviéramos que permanecer en reposo o con movimiento uniforme relativos a un sistema de referencia sin aceleración, no se necesitaría ninguna fuerza. Pero si se tiene que estar en reposo en un sistema de referencia acelerado, hay que experimentar una fuerza como la de sujeción en el tiovivo o el respaldo del asiento. Estas fuerzas, que aparecen automáticamente en los sistemas de referencia acelerados, son importantes en física. Sobre todo, para comprender las fuerzas que actúan en un sistema de referencia con movimiento circular. Es buena idea repasar ahora este tema que se estudió en cursos anteriores. [La excelente película (PSSC MLA 0307) del PSSC, Sistemas de referencia, aclara magníficamente parte de la materia de este Capítulo. Véase la lista de películas para el Cap. 4 al final de la obra.]

EJEMPLO

Ultracentrifugadora. ¡Los efectos de *no* estar en un sistema de referencia inercial pueden ser enormes! Y de gran importancia práctica. Consideremos una molécula suspendida en un líquido, en la cámara de ensayo de una centrifugadora, distante 10 cm del eje de rotación y que aquélla gira a 1000 revoluciones por segundo (60 000 rpm). Entonces, la velocidad angular es

$$\omega = (2\pi)(1 \times 10^3) \approx 6 \times 10^3 \text{ radianes/s}$$

y la velocidad lineal es

$$v = \omega r \approx (6 \times 10^3)(10) \approx 6 \times 10^4 \text{ cm/s}$$

El módulo de la aceleración asociada al movimiento circular es igual a $\omega^2 r$ (ver Cap. 2):

$$a = \omega^2 r \approx (6 \times 10^3)^2(10) \approx 4 \times 10^8 \text{ cm/s}^2$$

Pero la aceleración g debida a la gravedad es únicamente 980 cm/s² en la superficie de la Tierra; por tanto la relación de la aceleración rotacional a la gravitatoria es

$$\frac{a}{g} \approx \frac{4 \times 10^8}{10^3} \approx 4 \times 10^5$$

Así, pues, la aceleración en la ultracentrifugadora es 400 000 veces mayor que la de la gravedad. (Estos datos son característicos de la ultracentrifugadora que se ve en la fig. 4.1.) Las moléculas en suspensión, *cuya densidad (masa/volumen) es diferente* de la del líquido que la rodea, experimentarán en la cámara de la ultracentrifugadora una fuerza muy intensa que tenderá a separarlas del fluido. Si su densidad es la misma que la del líquido, no hay efecto de separación. Si su densidad es menor que la del líquido, la fuerza diferencial es hacia adentro. Por ejemplo, un globo lleno de helio flotando en un coche, al tomar una curva se mueve hacia el interior de la curva.

De acuerdo con la primera ley de Newton, la molécula suspendida tiende a permanecer en reposo (o moviéndose en línea recta con velocidad constante) cuando se la observa desde el laboratorio. (El laboratorio es una aproximación suficientemente buena de un sistema de referencia sin aceleración.) La molécula se opone a girar locamente con esta velocidad angular tan elevada en la ultracentrifugadora. Para un observador en reposo en la misma, lo molécula se comportará como si se ejerciese sobre ella una fuerza $M\omega^2 r$ tendiendo a alejarla del eje de rotación hacia el exterior de la cámara de prueba en el rotor centrífugo. (Esto supone que la molécula tiene mayor densidad que el líquido.) ¿Cuál es la magnitud de esta fuerza? Supongamos que el peso molecular de la molécula es 100 000, lo que significa aproximadamente que la masa M de la molécula es 10^5 veces la masa de un protón

$$M \approx (10^5)(1{,}7 \times 10^{-24}) \approx 2 \times 10^{-19} \text{ g}$$

(La masa de un protón es aproximadamente igual a una unidad de masa atómica, como puede verse en la tabla de valores del

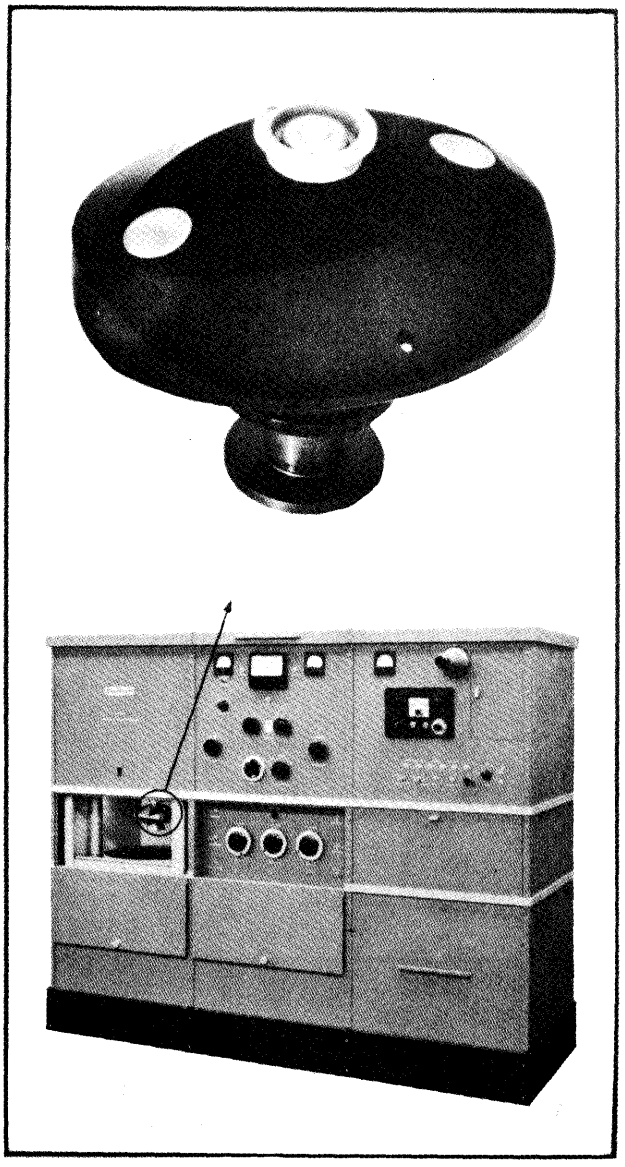


FIG. 4.1 Rotor de una ultracentrifugadora que funciona a 60 000 rpm y proporciona una aceleración centrífuga que alcanza un valor aproximado de 400 000 veces el valor de la gravedad. *(Beckmann Spinco Division.)*

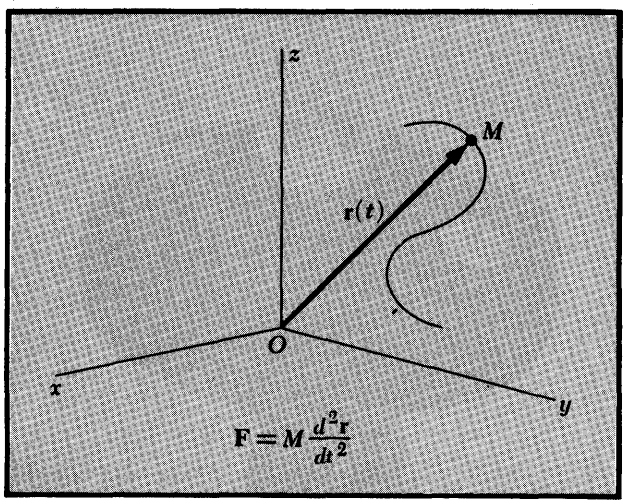


FIG. 4.2 La segunda ley de Newton dice: Fuerza = = masa × aceleración. Pero, ¿a qué sistema está referida la aceleración?

interior de la cubierta del libro.) La fuerza asociada con la aceleración de rotación es

$$Ma = M\omega^2 r \approx (2 \times 10^{-19})(4 \times 10^{8}) \approx 8 \times 10^{-11} \text{ dinas}$$

si utilizamos el valor de la aceleración dado en el párrafo anterior *.

Esta fuerza que tiende a empujar la molécula hacia el exterior de la cámara de prueba se denomina *fuerza centrífuga* (que huye del centro). Al movimiento hacia el exterior se opone el empuje del líquido que rodea la molécula. Como diferentes clases de moléculas sufrirán la acción de fuerzas centrífugas y empujes de distintos valores, se moverán hacia el exterior de la cámara de prueba con diferentes velocidades. En el sistema de referencia de la ultracentrifugadora esta fuerza centrífuga es como una gravedad artificial dirigida hacia fuera y con intensidad creciente con la distancia desde el eje. Las diversas especies de moléculas se disponen finalmente en este *campo gravitatorio*, poco usual, en una sucesión de capas gradualmente según su densidad. La ultracentrifugadora proporciona así un método excelente para la separación de diversas clases de moléculas. El método funciona mejor con moléculas grandes, que precisamente son las de mayor interés biológico y de este modo el que una molécula esté en reposo en un sistema de referencia acelerado o no acelerado resulta ser un problema de importancia para la investigación biológica y médica.

Volvamos ahora a nuestra discusión de los sistemas de referencia inerciales y acelerados. La ley fundamental de la mecánica clásica o segunda ley de Newton establece que

$$\text{Fuerza} = \frac{d}{dt}(\text{cantidad de movimiento}) \qquad \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}) \tag{4.1}$$

o en el caso de masa constante

$$\mathbf{F} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = M\mathbf{a} \tag{4.2}$$

¿Pero, respecto a qué tipo de sistema de referencia se mide la coordenada **r**, la velocidad **v** o la aceleración **a**? Los ejemplos anteriores indican claramente que la aceleración del sistema de referencia es muy importante y las figs. 4.2 a 4.6 ilustran la pregunta.

La Ec. (4.1) o la (4.2) definen de un modo consistente la *fuerza real* **F** que actúa sobre una partícula o cuerpo si estamos seguros de que la aceleración **a** se mide respecto a un sistema de referencia no acelerado. Al revés, si conocemos la fuerza real **F** y podemos encontrar un sistema de referencia en el cual la aceleración observada de la partícula o cuerpo satisface la Ec. (4.2), entonces,

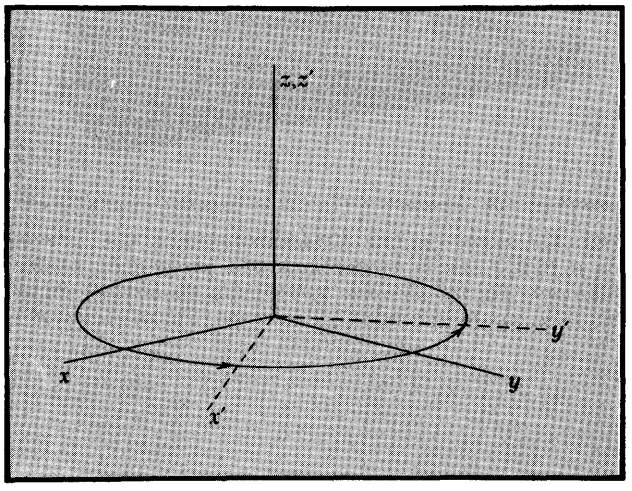


FIG. 4.3 Por ejemplo, el sistema $S'(x', y', z')$ gira respecto al sistema $S(x, y, z)$. La aceleración de M en cada uno de estos sistemas es diferente.

(*) En unidades SI, $M \approx 2 \times 10^{-22}$ kg, $\omega \approx 6 \times 10^{3}$ rad/s, $r = 0{,}10$ m y $F \approx (2 \times 10^{-22})(4 \times 10^{6}) \approx 8 \times 10^{-16}$ N.

dicho sistema de referencia es un *sistema inercial*, es decir, sin aceleración o rotación.

Nuestra posibilidad de decidir si un sistema de referencia determinado es o no un sistema inercial dependerá en sentido estricto de la precisión con que se aprecien los efectos de una pequeña aceleración del sistema. En un sentido práctico, un sistema de referencia en el que una partícula libre de fuerzas y ligaduras no experimenta aceleración alguna, se considera un sistema inercial.

La Tierra como sistema de referencia. ¿Proporciona un laboratorio fijo sobre la superficie de la Tierra un buen sistema de referencia inercial? Si no es así, ¿cómo corregiremos la ecuación $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ para tener en cuenta la aceleración del laboratorio?

En la mayoría de los casos la Tierra es una aproximación suficientemente buena de un sistema inercial. A causa de la rotación diaria de la Tierra sobre su eje se produce una aceleración del laboratorio que es pequeña, pero no totalmente despreciable en todos los casos. Un punto en reposo sobre la superficie de la Tierra en el ecuador debe experimentar una aceleración centrípeta dada por

$$a = \frac{v^2}{R_E} = \omega^2 R_E \tag{4.3}$$

referida al centro de la Tierra. Aquí, $\omega = 2\pi f$ es la velocidad angular de la Tierra y R_T el radio de la Tierra. En el Cap. 3 (pág. 72) vimos, en el ejemplo del satélite en órbita circular, que $\omega \approx 0{,}73 \times 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$. Con $R_T \approx 6{,}4 \times 10^8$ cm la aceleración es

$$a \approx (0{,}73 \times 10^{-4})^2(6{,}4 \times 10^8) \approx 3{,}4\ \mathrm{cm/s^2} \approx 0{,}034\ \mathrm{m/s^2}$$

La fuerza de la gravedad debe suministrar esta aceleración de una masa en el ecuador. Por tanto, la fuerza necesaria para mantener la masa en equilibrio en contra de la fuerza de gravedad es menor que la fuerza total de la gravedad en $3{,}4\,m$ dinas, en donde m es la masa; o también, la aceleración de la gravedad observada es menor que en el Polo Norte [donde a es cero en la ecuación (4.3)] siendo la diferencia 3,4 cm/s². El resto de la variación de la gravedad a gran escala en la superficie de la Tierra es debido a la forma elipsoidal de ésta. La variación total entre el Polo Norte (o Polo Sur) y el ecuador, es aproximadamente 5,2 cm/s². Hasta que se dispuso de satélites, el mejor modo de determinar el achatamiento de la Tierra en los polos se basaba en las medi-

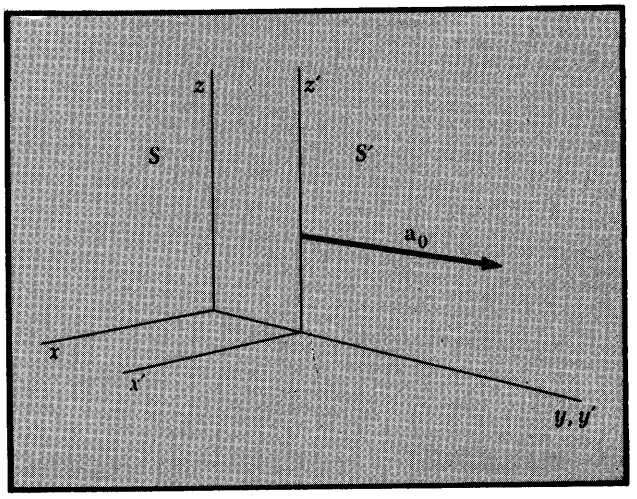


FIG. 4.4 Por ejemplo, el sistema S' tiene la aceleración $\mathbf{a}_0$ respecto a S. La aceleración de M en cada uno de estos sistemas es diferente.

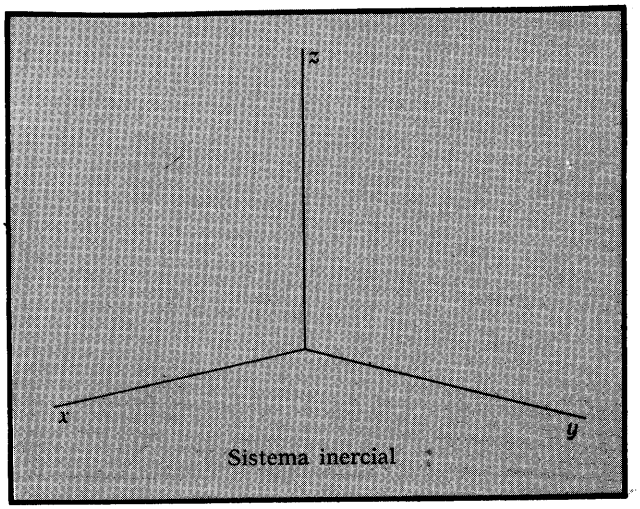


FIG. 4.5 ¿Existen *sistemas inerciales* en los que podamos calcular **a** en la ecuación $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$?

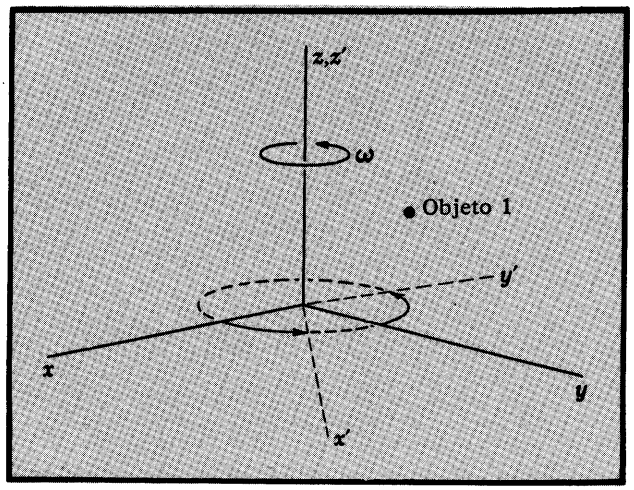
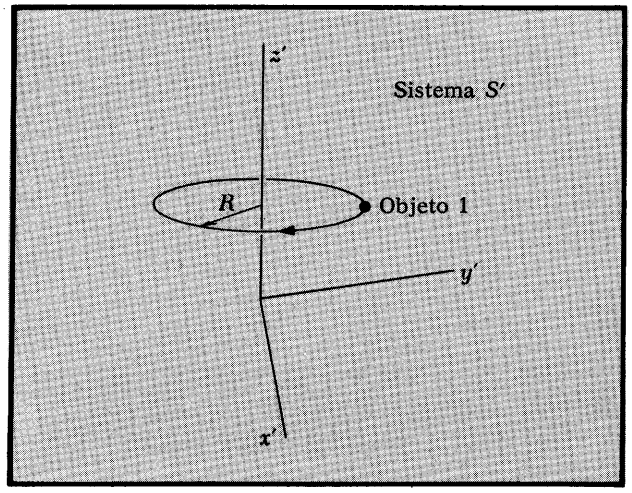


FIG. 4.6 *a*) Si $S(x, y, z)$ es uno de estos sistemas inerciales, entonces $S'(x', y', z')$ que gira alrededor del eje z de S, *no puede* ser inercial.



b) En el sistema S' el objeto 1, aunque muy alejado de todos los demás objetos, experimenta una aceleración. (Parece girar.)

ciones de la variación de la gravedad sobre la Tierra. La Tabla 4.1 nos da los valores de g a diversas latitudes.

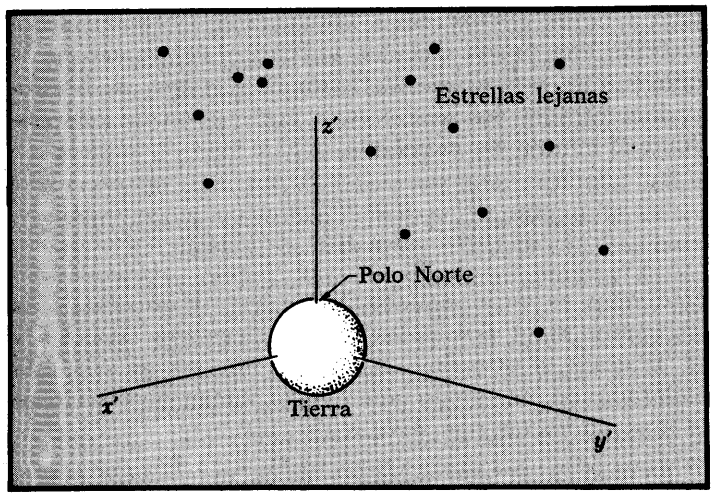
TABLA 4.1 Valores de g a diversas latitudes

Estación	*Latitud*	g, cm/s² (*)
Polo Norte	90° N	983,245
Glaciar Karajak, Groenlandia	70° N	982,53
Reykjavik, Islandia	64° N	982,27
Leningrado	60° N	981,93
París	49° N	980,94
Nueva York	41° N	980,27
San Francisco	38° N	979,96
Honolulú	21° N	978,95
Monrovia, Liberia	6° N	978,16
Batavia, Java	6° S	978,18
Melbourne, Australia	38° S	979,99

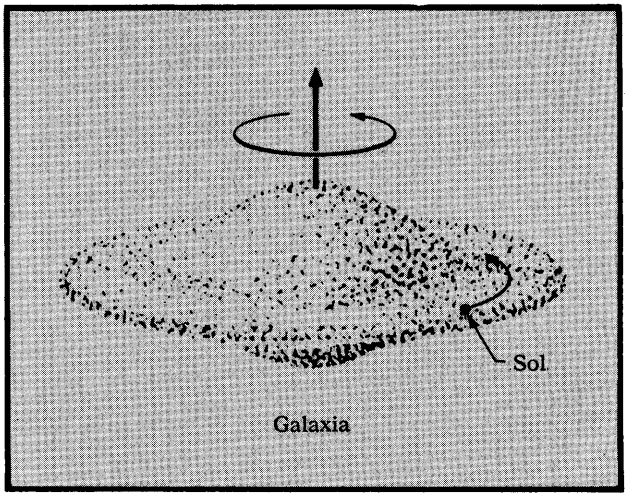
(*) Para obtener g en m/s² basta dividir por 100; g vale aproximadamente 9,8 m/s².

Posteriormente, en el Tema Avanzado (al final de este capítulo) elaboraremos una forma más complicada de la segunda ley de Newton que es aplicable en un sistema coordenado con ejes fijos sobre la superficie de la Tierra. Pero para obtener una ley válida en la forma sencilla dada en la Ec. (4.1) o (4.2), *debemos referir la aceleración a un sistema de referencia que no sea acelerado* y que se denomina *inercial* o de Galileo. En un sistema de referencia acelerado (no inercial) **F** no es igual a $M\mathbf{a}$, si **a** es la aceleración que se observa desde el sistema no inercial.

Estrellas fijas: Un sistema de referencia inercial. Es un convenio establecido el considerar las estrellas llamadas «fijas» como un sistema de referencia no acelerado patrón. Este modo de hablar es algo metafísico, puesto que la afirmación de que las estrellas fijas no están aceleradas rebasa nuestro conocimiento experimental presente. Es improbable que nuestros instrumentos pudiesen detectar una aceleración de una estrella lejana, o grupo de estrellas, menor que 10^{-4} cm/s², aunque se hiciesen observaciones cuidadosas durante un centenar de años. Con fines prácticos es conveniente referir las direcciones en el espacio a las estrellas, pero también con igual fin podemos preparar experimentalmente un sistema de referencia satisfactorio no acelerado. Incluso en el caso de que la Tierra estuviese rodeada continuamente por una niebla densa, podríamos establecer un sistema inercial de referencia sin ninguna dificultad especial.



c) Por ejemplo, desde el sistema S' (x', y', z') fijo sobre la Tierra, las estrellas lejanas que equivalen al objeto 1, giran. Un sistema fijo sobre la Tierra no es inercial porque la Tierra gira sobre su eje y da vueltas alrededor del Sol.



d) ¿Es inercial un sistema fijo en el Sol? Incluso el Sol gira alrededor de la galaxia, pero esta aceleración parece ser lo bastante pequeña como para poder despreciarla.

La aceleración de la Tierra en su órbita alrededor del Sol es un orden de magnitud menor que la aceleración en el ecuador debida a la rotación de la Tierra. Como 1 año $\cong \pi \times 10^7$ s, la velocidad angular de la Tierra alrededor del Sol es

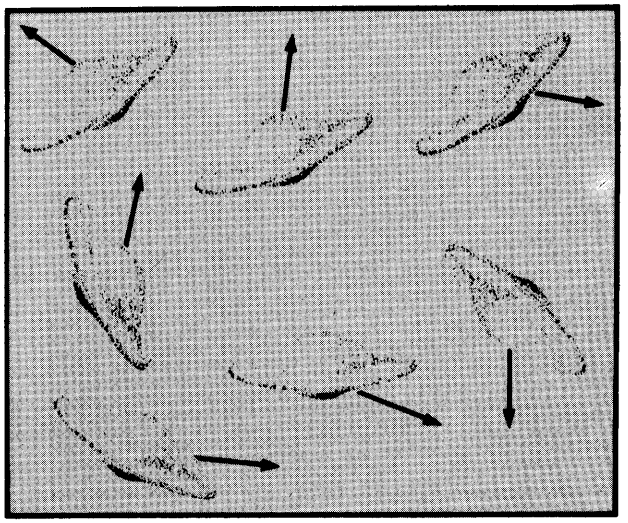
$$\omega \approx \frac{2\pi}{\pi \times 10^7} \approx 2 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Poniendo $R \cong 1{,}5 \times 10^{13}$ cm, tendremos para la aceleración centrípeta

$$a = \omega^2 R \approx (4 \times 10^{-14})(1{,}5 \times 10^{13}) \approx 0{,}6\ \mathrm{cm/s^2} \quad (4.4)$$

que es la aceleración de la Tierra en su órbita alrededor del Sol.

La aceleración del Sol hacia el centro de nuestra galaxia * no se conoce experimentalmente. Pero a partir de los estudios realizados sobre los corrimientos por efecto Doppler de las líneas espectrales (Cap. 10) se cree que la velocidad del Sol respecto al centro de la



e) Aparentemente podemos despreciar también la aceleración de nuestra galaxia respecto a las demás.

(*) Las estrellas no están esparcidas al azar por todo el espacio sino que están reunidas en grandes sistemas muy separados unos de otros. Cada sistema contiene del orden de 10^{10} estrellas y recibe el nombre de *galaxia*, aunque la que contiene nuestro Sol se cita como la Galaxia. La Vía Láctea forma parte de nuestra galaxia. Incluso las mismas galaxias no están distribuidas enteramente al azar, porque existe una marcada tendencia a formar racimos. Nuestra galaxia pertenece a un grupo de 19 miembros conocido como el *Grupo Local* que forma un sistema físico ligado por la atracción gravitatoria.

galaxia es de 3×10^7 cm/s aproximadamente. Si el Sol describe una órbita circular alrededor del centro de la galaxia, que está a una distancia de 3×10^{22} cm aproximadamente del Sol, entonces la aceleración de éste respecto al centro de la galaxia es

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \approx \frac{9 \times 10^{14}}{3 \times 10^{22}} \approx 3 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$$

Este valor es muy pequeño. Por nuestras observaciones ignoramos si el Sol posee una aceleración superior y no sabemos si el propio centro de nuestra galaxia está acelerado de un modo apreciable. Estas aceleraciones se ilustran en las figs. 4.6 *a* a *e*.

Lo que de verdad sabemos en la práctica es que el conjunto de hipótesis en que se centra la mecánica clásica da un resultado extraordinariamente bueno. Estas hipótesis son:

1. El espacio es euclideano.
2. El espacio es isótropo, de modo que las propiedades físicas son las mismas en todas las direcciones del espacio. Así, pues, la masa M en $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ no depende de la dirección de $\mathbf{a}$.
3. Las leyes de Newton del movimiento se cumplen en un sistema inercial determinado, por un observador en reposo sobre la Tierra, teniendo en cuenta únicamente la aceleración de la Tierra debida a su rotación sobre su eje y la originada por su traslación alrededor del Sol.
4. Es válida la ley de la gravitación universal de Newton. Una breve discusión de esta ley se da en el Cap. 3 (págs. 70-72) y una discusión más detallada, en el Cap. 9.

Estas hipótesis son difíciles de comprobar individualmente con gran precisión. Los ensayos más precisos relacionados con los movimientos de los planetas en el sistema solar comprenden en general el conjunto completo de las cuatro hipótesis enunciadas anteriormente. En las notas históricas al final del Cap. 5 se discutirán varias pruebas muy precisas del conjunto clásico de la hipótesis.

Fuerzas en los sistemas inerciales de referencia. Galileo afirmó que *un cuerpo no sometido a ninguna fuerza* tiene una velocidad constante *. Hemos visto que este

(*) Con frecuencia recibe este enunciado el nombre de *primera ley del movimiento de Newton.*

enunciado es únicamente cierto en un sistema que se define como un sistema inercial.

Este enunciado puede parecer ambiguo: ¿cómo sabemos en todo caso que sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza? Las fuerzas pueden actuar sobre un cuerpo, no sólo por contacto directo, sino que también pueden ejercerse sobre el cuerpo, cuando éste está aislado. Las fuerzas gravitatorias o eléctricas pueden ser importantes incluso sin la presencia próxima de otros cuerpos. No podemos estar seguros de que no actúe ninguna fuerza sólo porque ningún otro cuerpo toque o esté muy cerca de un cuerpo determinado. Pero si no podemos decidir *a priori* si el cuerpo de referencia está o no sometido a una fuerza, tendremos dificultades para establecer las leyes del movimiento que relacionen fuerzas y aceleraciones. Necesitaremos tener un sistema de referencia no acelerado con respecto al cual podamos medir las aceleraciones; el procedimiento de Galileo para determinar un sistema de éstos supone la posibilidad de saber independientemente si existe en el mismo alguna fuerza. Pero realmente esto no lo sabemos, pues el criterio para afirmar que no existe una fuerza está basado en la ausencia de aceleración, lo que exige alguna referencia para medir la aceleración y así estamos en un círculo vicioso.

La situación no carece de esperanza porque sabemos que las fuerzas ejercidas entre dos cuerpos decrecen muy rápidamente cuando aumenta la distancia entre ambos, como indica la fig. 4.7. Si las fuerzas no decreciesen rápidamente, nunca podríamos aislar las interacciones entre dos cuerpos de las debidas a todos los demás cuerpos del universo. Todas las fuerzas conocidas entre partículas decrecen con la distancia al menos de manera inversamente proporcional al cuadrado de la misma. Nosotros y cualquier otro cuerpo situado sobre la Tierra estamos atraídos principalmente hacia el centro de la Tierra y no hacia alguna parte alejada del universo. Si no estuviéramos sostenidos por el suelo nos moveríamos hacia el centro de la Tierra con una aceleración de 980 cm/s^2. La atracción solar es muy inferior: la aceleración correspondiente según la Ec. (4.4) sólo es de 0,6 cm/s^2. En una descripción razonable un cuerpo muy alejado de cualquier otro no está prácticamente sometido a ninguna fuerza, y, por tanto, no presenta aceleración. (Ver figs. 4.8 a 4.10.) Una estrella típica está separada por unos 10^{18} cm de su vecina más próxima * lo cual supone únicamente

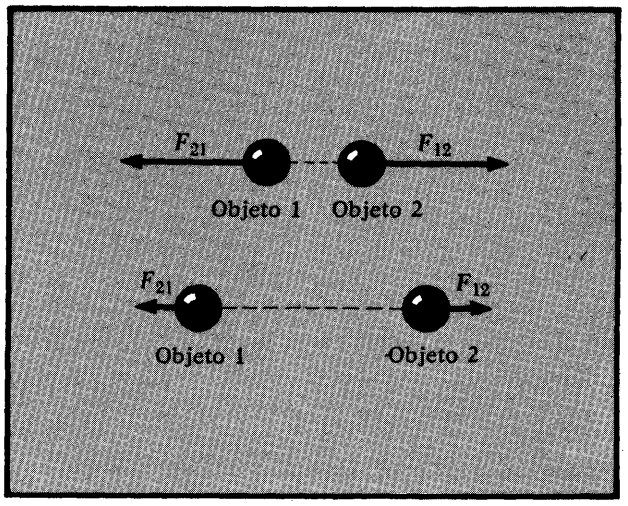


FIG. 4.7 Experimentalmente se comprueba que la fuerza que un objeto ejerce sobre otro siempre disminuye rápidamente con la distancia que les separa.

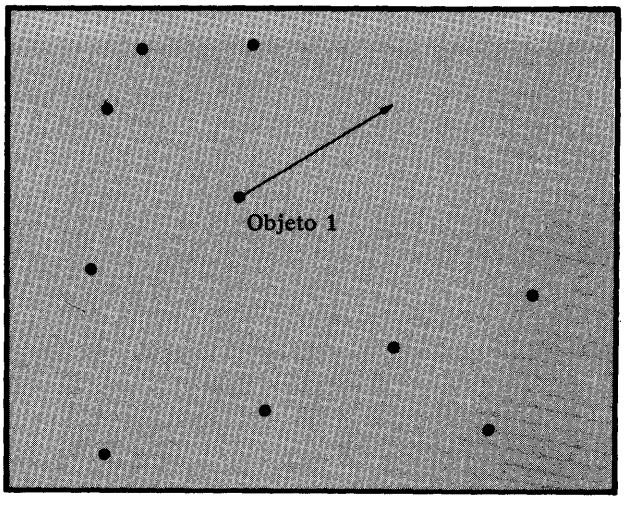


FIG. 4.8 Si el objeto 1 está lo suficientemente alejado de todos los demás objetos, no estará sometido a ninguna fuerza.

(*) Las estrellas dobles (binarias) son un caso especial, pues tienen separaciones típicas del orden de 10^{15} cm.

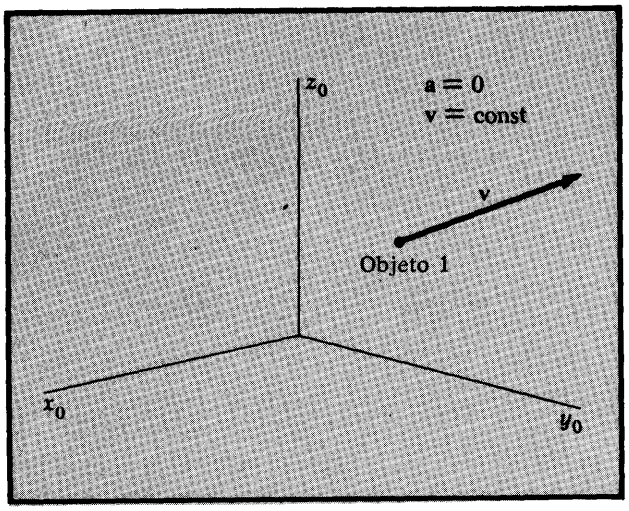


FIG. 4.9 Un *sistema inercial* es aquel en el que la aceleración de un objeto tal como 1 es cero.

una pequeña aceleración. Por consiguiente, podemos esperar que las estrellas fijas definan un sistema coordenado no acelerado conveniente dentro de una buena aproximación.

Una buena discusión sobre el modo de establecer un sistema de referencia no acelerado la presenta P. W. Bridgman, *Am. J. Phys.*, **29**, 32 (1961). A continuación se indican algunas ideas esenciales:

> «Un sistema de tres ejes ortogonales rígidos determinan un sistema de referencia de Galileo si tres partículas con masa y no sometidas a ninguna fuerza que se lanzan a lo largo de los tres ejes con velocidades arbitrarias, continúan moviéndose a lo largo de los mismos con las velocidades iniciales. Nuestros laboratorios terrestres no pueden considerarse sistemas de referencia de este tipo, pero podemos construir uno de éstos en nuestro laboratorio midiendo cuánto se desvían del comportamiento requerido tres masas que se lanzan de un modo arbitrario... e incorporando estas desviaciones en forma de correcciones negativas en nuestras especificaciones del sistema galileano. No se necesita ninguna referencia a las estrellas, puesto que el comportamiento de los cuerpos puede describirse claramente en función de ciertos fenómenos fácilmente observables como la rotación del plano del péndulo de Foucault respecto a la Tierra o la desviación de la perpendicular de un cuerpo que cae. Aunque el operador que dirige un cohete en un intento de colocar un satélite en órbita encuentre conveniente hacer algunas de sus indicaciones en función de observaciones realizadas sobre la estrella polar, es evidente que la posición del aparato deberá finalmente describirse en términos terrestres... En un sistema galileano, un cuerpo giratorio, después de haber sido puesto en rotación y eliminadas las fuerzas, mantiene la orientación de su plano de rotación en el sistema y, por consiguiente, mantiene la dirección de su eje de rotación.»

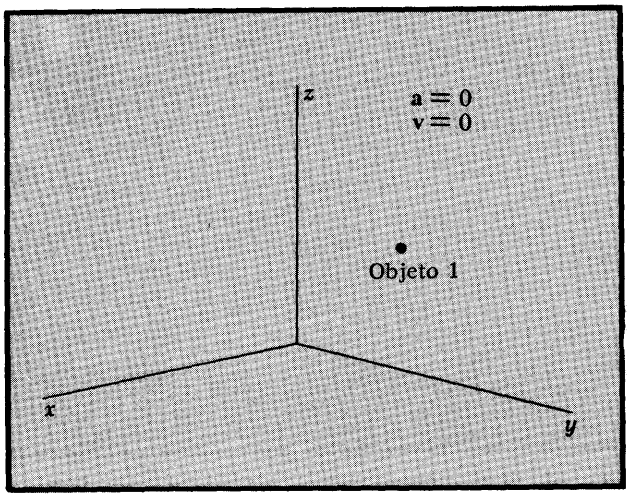


FIG. 4.10 En particular existen sistemas inerciales en los que el objeto 1 está y permanece en reposo.

ACELERACIÓN ABSOLUTA Y RELATIVA

Puede encontrarse un sistema inercial de referencia en el que **F** iguale a *M***a** con un alto grado de exactitud, lo cual tiene una sólida base experimental. Llegamos así a la conclusión de que en un sistema inercial de referencia las fuerzas que se han postulado para explicar el movimiento de las galaxias, estrellas, átomos, electrones, etc., tienen la propiedad común de que la fuerza ejercida sobre un cuerpo disminuye ciertamente cuando éste se aleja más y más de sus vecinos. Veremos que si escogemos un sistema de referencia no inercial *parece* que existen en él fuerzas que no tienen la propiedad de estar asociadas con la mayor o menor proximidad de otros cuerpos.

La existencia de un sistema inercial de referencia plantea una pregunta difícil y sin respuesta: ¿Qué influencia tiene toda la demás materia del universo sobre

un experimento hecho en un laboratorio terrestre? Supongamos, por ejemplo, que toda la materia del universo, excepto la existente en la proximidad de nuestra propia Tierra, estuviese sometida a una gran aceleración **a** y que una partícula sobre la Tierra no sometida a ninguna fuerza neta originalmente tuviera una aceleración cero respecto a las estrellas fijas. Cuando se acelerasen estas estrellas, ¿conservaría aún su aceleración cero esta partícula —inicialmente libre de fuerzas pero con libertad de movimiento— respecto a las estrellas no aceleradas o experimentaría un cambio en su movimiento relativo respecto a su medio ambiente inmediato? ¿Existe alguna diferencia entre acelerar una partícula con el valor $+\mathbf{a}$ o las estrellas fijas con el valor $-\mathbf{a}$? Si únicamente importa la aceleración relativa, la respuesta a la última pregunta es *no*; si lo que tiene significado es la aceleración absoluta, la respuesta es *sí*. Esta es una cuestión fundamental indiscutible, pero no fácilmente susceptible de investigación experimental (ver. figs. 4.11 *a* a *c*).

Newton planteaba esta pregunta y su propia respuesta de un modo pintoresco. Consideremos un cubo de agua. Si giramos el cubo respecto a las estrellas, la superficie del agua adquiere una forma parabólica; sobre esto todos estamos de acuerdo. Pero supongamos que en lugar de girar el cubo pudiéramos conseguir de algún modo que las estrellas girasen alrededor del cubo de modo que el movimiento relativo fuera el mismo. Newton creía que la superficie sería plana si hiciésemos girar las estrellas. Este punto de vista da significado a la rotación absoluta y a la aceleración absoluta. Lo que sabemos empíricamente es que todos los fenómenos del cubo giratorio pueden describirse completamente y correlacionarse con los resultados de las medidas locales en el laboratorio sin ninguna referencia a las estrellas.

El punto de vista opuesto, que *sólo la aceleración relativa a las estrellas fijas tiene cierto significado*, es una conjetura que se le suele llamar ***principio de Mach***. De acuerdo con este punto de vista, el agua del cubo adoptaría la forma parabólica. Aunque no existe ninguna confirmación experimental, ni objeción a este punto de vista, algunos físicos, incluido Einstein, han encontrado atractivo este principio *a priori*, mientras que otros no lo consideran así. Es asunto de la cosmología especulativa.

Si se cree que el movimiento relativo del resto del universo influye en el comportamiento de una partícula aislada cualquiera, se presentan por sí mismas varias preguntas relacionadas con esta cuestión sin que nos ofrezcan ninguna pista para dar las respuestas. ¿Existen

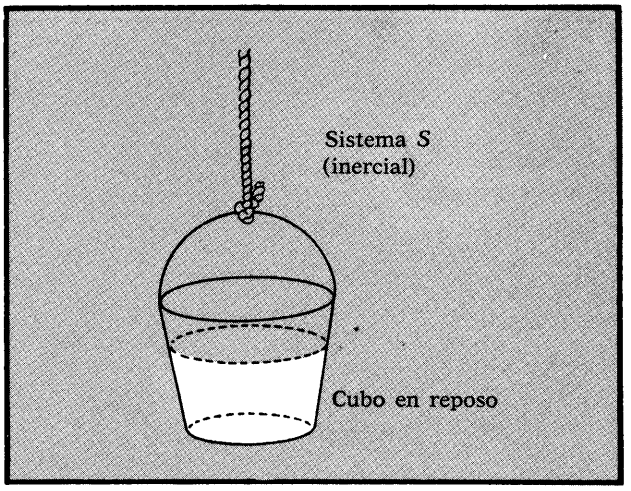
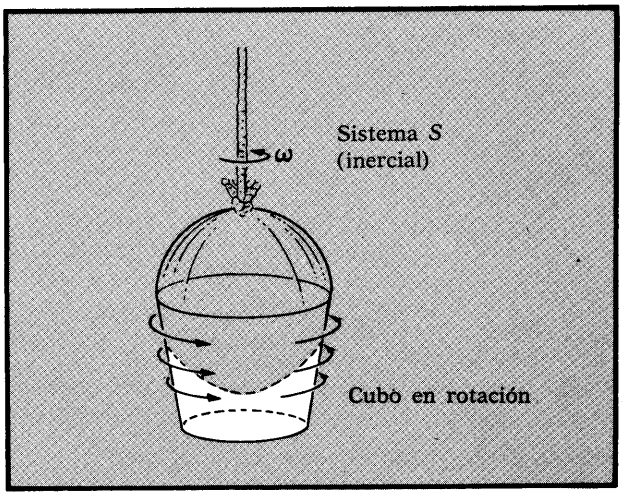
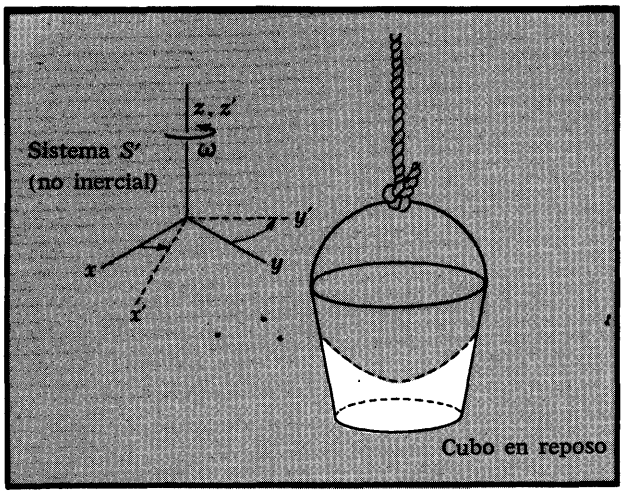


FIG. 4.11 ***a*) Ejemplo de fuerzas «ficticias» que aparecen en los sistemas no inerciales: cuando el cubo** está en reposo en S, la superficie del agua es plana. S se supone que no posee aceleración relativa respecto a las estrellas lejanas.



b) Cuando el cubo gira en S, la superficie del agua adquiere la forma de un paraboloide.



c) En el sistema en rotación S', el cubo está en reposo. Pero la superficie del agua tiene todavía la forma de un paraboloide. Una fuerza centrífuga «ficticia» actúa sobre el agua en el sistema no inercial S'.

otras relaciones entre las propiedades de una partícula aislada y el estado de reposo del universo? ¿Cambiaría la carga de los electrones, su masa, o la energía de interacción entre los nucleones * si el número de partículas en el universo o su densidad se alterasen ligeramente? Hasta ahora la respuesta a esta profunda cuestión, la relación que existe entre el universo distante y las propiedades de las partículas aisladas, permanece desconocida.

Fuerzas ficticias. Damos aquí unos pocos ejemplos de fuerzas que parecen existir porque un sistema de referencia está acelerado. Partimos de la segunda ley de Newton, refiriendo primeramente nuestro problema a un sistema inercial, ya que sabemos que esto es válido. A continuación incluimos la aceleración de un sistema no inercial y le relacionamos con la fuerza que «parece existir» cuando nos referimos al problema de este último sistema. La segunda ley de Newton establece que

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_I \tag{4.5}$$

en la que el primer miembro es la fuerza aplicada y $\mathbf{a}_I$ la aceleración que se observa en el sistema inercial. La masa M se supone constante. Se ha añadido el subíndice I para resaltar la palabra *inercial*. En un sistema no inercial, como el de la Tierra en rotación, sabemos que la ecuación (4.5) no es válida en la misma forma. La razón es que se ha omitido una aceleración $\mathbf{a}_0$ que debería haberse incluido, aceleración que corresponde a la del sistema no inercial respecto al sistema inercial.

Si $\mathbf{a}$ es la aceleración de un cuerpo cuando se mide en un sistema no inercial, tendremos $\mathbf{a} + \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_I$ **, o bien,

$$\mathbf{F} = M(\mathbf{a} + \mathbf{a}_0) \tag{4.6}$$

Si realizamos algún experimento en un sistema no inercial, debemos estar siempre seguros de incluir $\mathbf{a}_0$ *en la ecuación de la fuerza.* Al trabajar en un sistema no inercial es conveniente muchas veces introducir una magnitud $\mathbf{F}_0$ de modo que la Ec. (4.6) aparezca como

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = M\mathbf{a} \tag{4.7}$$

(*) Un nucleón es un protón o un neutrón; un *antinucleón* es un antiprotón o un antineutrón.

(**) En el primer Tema Avanzado discutimos el caso general de movimiento en un sistema giratorio, en donde $\mathbf{a}_I - \mathbf{a}$ depende de la velocidad y de la posición en el sistema acelerado.

en donde

$$\mathbf{F}_0 \equiv -M\mathbf{a}_0 \tag{4.8}$$

se denomina *fuerza ficticia* o *pseudofuerza.* La fuerza ficticia es aquella magnitud que debe sumarse a la fuerza real para que la suma sea igual a $M\mathbf{a}$, en donde $\mathbf{a}$ es la aceleración en el sistema no inercial. Si el sistema posee una aceleración de traslación $\mathbf{a}_0$ esta fuerza ficticia es justamente $-M\mathbf{a}_0$. A continuación discutiremos el caso de un sistema de rotación en el cual la fuerza ficticia depende de su posición en el sistema. Cualquier cosa ficticia en física tiende a parecer confusa, pero puede resolverse siempre un problema retornando a la ecuación (4.6).

EJEMPLO

Acelerómetro. Supongamos que la fuerza aplicada a una masa M por un muelle estirado en la dirección x es $F_x = -Cx$, siendo C una constante. Consideremos un sistema no inercial con la aceleración $\mathbf{a}_0 = a_0\hat{\mathbf{x}}$, en la dirección x. Si la masa M está en reposo en este sistema no inercial, entonces su aceleración $\mathbf{a}$ es cero, y $\mathbf{F} = M(\mathbf{a} + \mathbf{a}_0)$ se reduce a

$$F_x = Ma_0 = -Cx$$

de modo que

$$x = -\frac{Ma_0}{C} \tag{4.9}$$

O bien, usando la fuerza ficticia

$$\begin{aligned} \mathbf{F} + \mathbf{F}_{0x} &= M\mathbf{a} = 0 \\ F_x &= -F_{0x} \\ -Cx &= Ma_0 \end{aligned}$$

que es igual a la Ec. (4.9). El desplazamiento x es proporcional y de sentido opuesto a la aceleración a_0 del sistema no inercial, el cual puede ser un avión o un automóvil. Vemos que la Ec. (4.9) describe el funcionamiento de un *acelerómetro* en el que una masa M está sujeta a un muelle y obligada a moverse en una sola dirección. El desplazamiento x de la masa mide la aceleración a_0 del sistema de referencia no inercial.

EJEMPLO

Fuerza centrífuga y aceleración centrípeta en un sistema de rotación uniforme. Aunque estudiaremos en los Temas Avanzados los sistemas en rotación con detalle, es importante que discutamos directamente un ejemplo sencillo y común. Considérese una masa puntual M en reposo en un sistema no inercial de modo que en él $\mathbf{a} = 0$. El sistema no inercial gira uniformemente alrededor de un eje fijo respecto a un sistema inercial. Se vio en el Cap. 2 que la aceleración del punto en cuestión era

$$\mathbf{a}_0 = -\omega^2\mathbf{r} \tag{4.10}$$



FIG. 4.12 Péndulo de Foucault instalado en el edificio de las Naciones Unidas, en Nueva York. La esfera, que se ve a la izquierda, es dorada y pesa 200 libras (aproximadamente 90 kg). Está suspendida del techo 75 pies (alrededor de 22,5 m) por encima del suelo del vestíbulo. Un alambre de acero inoxidable la mantiene de modo que le permite oscilar libremente en cualquier plano. La esfera oscila directamente sobre el anillo de metal colocado en alto, que tiene cerca de seis pies de diámetro (1,8 m aproximadamente). La esfera oscila como un péndulo y su plano se desvía continuamente en el sentido de las agujas del reloj; ofreciendo así una prueba visual de la rotación de la Tierra. Un ciclo completo dura aproximadamente 36 horas y 45 minutos. En él está escrito un mensaje de la reina Juliana de Holanda: «Es un privilegio vivir hoy y mañana.» *(Fotografía de las Naciones Unidas.)*

respecto al sistema inercial, en donde $\mathbf{r}$ está dirigido del eje hacia la partícula. El vector $\mathbf{r}$ se toma perpendicular al eje.

La ecuación (4.10) expresa la famosa *aceleración centrípeta.* La masa puede estar obligada a permanecer en reposo mediante un muelle en tensión. La especificación de que en el sistema no inercial $\mathbf{a} = 0$, según las Ecs. (4.7) y (4.8), conduce a

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_0 = M\mathbf{a}_0 = -M\omega^2\mathbf{r} \tag{4.11}$$

La fuerza ficticia $\mathbf{F}_0$ en este ejemplo se denomina *fuerza centrífuga* y vale $\mathbf{F}_0 = M\omega^2\mathbf{r}$, estando dirigida de modo que se aleja del eje. La fuerza centrífuga está equilibrada en este ejemplo por la fuerza elástica $\mathbf{F}$ del muelle, con objeto de producir aceleración cero (masa en reposo) en el sistema no inercial en rotación.

Si $M = 100$ g, $r = 10$ cm y el sistema gira a 100 revoluciones por segundo, ¿cuál es el valor de la fuerza centrífuga? Tendremos $F_0 = M\omega^2 r = (10^2)\ (2\pi \times 100)^2\ (10) \approx 4 \times 10^8$ dinas, o $(0{,}1)\ (2\pi \times 100)^2\ (0{,}1) \approx 4 \times 10^3$ N.

EJEMPLO

Experimentos en un ascensor que cae libremente. Sea la aceleración de un sistema no inercial (un ascensor cayendo libremente)

$$\mathbf{a}_0 = -g\hat{\mathbf{y}}$$

en donde $\hat{\mathbf{y}}$ se mide hacia arriba a partir de la superficie de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad. Esta aceleración corresponde a la caída libre bajo la acción de la gravedad. Según (4.8) la fuerza ficticia sobre una masa M en el sistema no inercial es

$$\mathbf{F}_0 = -M\mathbf{a}_0 = Mg\hat{\mathbf{y}}$$

Un cuerpo no sujeto al ascensor está sometido a la suma de la fuerza gravitatoria $\mathbf{F} = -Mg\hat{\mathbf{y}}$ y de la fuerza ficticia $\mathbf{F}_0 = Mg\hat{\mathbf{y}}$ de modo que la fuerza total aparente en el sistema no inercial del ascensor cayendo libremente es cero:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = 0$$

Así, pues, el cuerpo en el sistema no inercial está sin acelerar. Esta es una forma de «ingravidez». El cuerpo parece permanecer suspendido en el espacio, si no tiene inicialmente velocidad relativa respecto al ascensor.

EJEMPLO

Péndulo de Foucault. El péndulo de Foucault demuestra el hecho de que la Tierra no es un sistema inercial de referencia. La experiencia se realizó primero públicamente por Foucault en 1851, bajo la gran cúpula del Panteón de París, utilizando una masa de 28 kg suspendida de un hilo de 70 m de largo aproximadamente. La sujeción del extremo superior del hilo permitía girar al péndulo con igual libertad en cualquier dirección. El período de un péndulo de esta longitud (véase Cap. 7) es de unos 17 segundos.

Alrededor del punto del suelo que estaba directamente debajo del punto de suspensión se construyó una especie de pretil circular de unos 3 m de radio. Sobre dicho pretil se amontonó arena de modo que una aguja de metal colocada en la parte inferior del péndulo barría la arena en cada oscilación.

En oscilaciones sucesivas se vio con toda claridad que el plano del movimiento del péndulo se movía en el sentido de las agujas del reloj cuando se observaba desde arriba. En una hora el péndulo giraba su plano de oscilación en 11 grados aproximadamente. La circunferencia se completaba en más de 32 horas y en una oscilación el plano se movía unos 3 mm si se medía en la circunferencia de arena.

¿Por qué gira el plano del péndulo? Si se hubiese llevado a cabo el experimento de Foucault en el polo norte terrestre, se podría ver inmediatamente que el plano de movimiento del péndulo permanecería fijo en un sistema inercial mientras la Tierra giraría bajo el péndulo dando una vuelta cada 24 horas. La rotación de la Tierra es de sentido contrario a las agujas del reloj cuando se ve desde por encima del polo norte (por ejemplo desde un cohete Polaris), de modo que un observador subido a una escalera situada sobre la tierra en el polo norte observaría que el plano del péndulo giraría en sentido horario respecto a él.

El caso resulta diferente (y más difícil de analizar) cuando abandonamos el polo norte y entonces el tiempo empleado en dar una vuelta completa es mayor. Consideremos las velocidades relativas de los puntos extremos hacia el norte y sur de la circunferencia de arena de radio r (fig. 4.13). El punto sur está más alejado del eje de rotación de la Tierra y, por consiguiente, se moverá en el espacio más rápidamente que el extremo norte. Si designamos por ω la velocidad angular de la Tierra y por R su radio, entonces el centro de la circunferencia de arena se mueve con velocidad $\omega R \cos \phi$, siendo ϕ la latitud de París (48° 51′ *N*) medida desde el ecuador terrestre. El punto más al norte del anillo se mueve a la velocidad

$$v_N = \omega R \cos \phi - \omega r \operatorname{sen} \phi$$

como puede deducirse de la figura, y el que está más al sur tendría una velocidad

$$v_S = \omega R \cos \phi + \omega r \operatorname{sen} \phi$$

La diferencia entre sus velocidades y la del centro del anillo es

$$\Delta v = \omega r \operatorname{sen} \phi$$

Si el péndulo inicia su movimiento en el plano norte-sur dándole un impulso desde su posición de reposo en el centro del anillo, la componente este-oeste de la velocidad en el espacio será la misma que la correspondiente al centro del anillo.

La circunferencia del anillo es $2\pi r$, de modo que el tiempo T_0 para dar una vuelta completa, siendo Δv constante a lo largo del anillo, es:

$$T_0 = \frac{2\pi r}{\omega r \operatorname{sen} \phi} = \frac{24 \text{ h}}{\operatorname{sen} \phi}$$

En el ecuador sen $\phi = 0$ y el tiempo resulta infinito.

¿Qué sucede cuando el plano del péndulo alcanza el plano este-oeste que pasa por el centro del anillo? ¿Por qué Δv

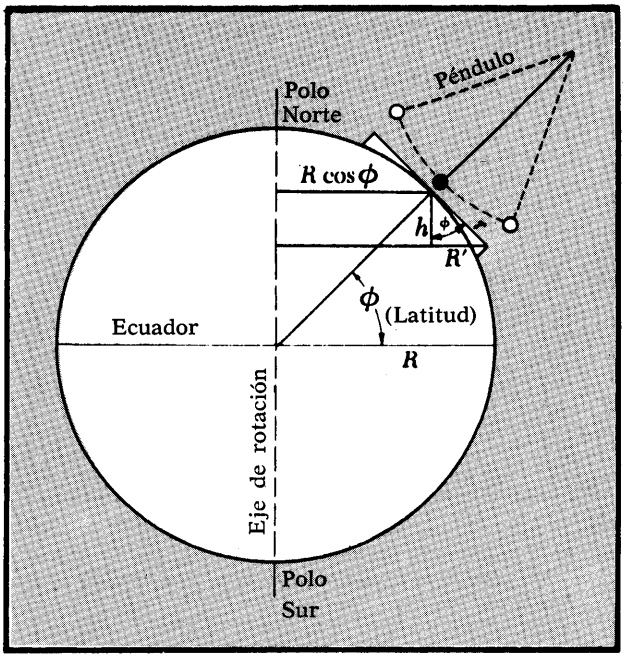


FIG. 4.13 El péndulo de Foucault (muy exagerado de tamaño en relación con la Tierra), se muestra aproximadamente en el ángulo correspondiente a la latitud ϕ de París. La circunferencia de arena bajo el péndulo tiene un radio r. La distancia del eje de la Tierra al centro de oscilación del péndulo es $R \cos \phi$. Debido a la rotación de la Tierra, el borde sur de la arena se mueve más aprisa que el borde norte (respecto a un sistema inercial).

seguirá siendo la misma en este caso que cuando el plano coincidía con el norte-sur? Esto es difícil de ver si no nos referimos a un globo terráqueo. Tomemos una hoja de cartulina o papel resistente y pongámosla en contacto con un globo en el punto aproximado que corresponda a París, de modo que sea normal a la superficie y que coincida con el plano este-oeste. La dirección normal a la superficie del globo es la línea del hilo del péndulo. Mantengamos fijo el plano de la cartulina con una mano mientras que con la otra hacemos girar lentamente el globo. Obsérvese que uno de los lados de la línea en que la cartulina casi coincide con la supèrficie del globo parece moverse hacia el sur mientras que el otro lado parece que lo hace hacia el norte. La observación del fenómeno o un análisis detallado dan para Δv el mismo resultado que encontramos anteriormente: el plano del péndulo realmente gira respecto al anillo situado en el suelo del Panteón con una velocidad angular constante ω sen ϕ, siendo ω la velocidad angular de la Tierra y ϕ la latitud. Muchos textos de mecánica elemental dan el estudio matemático de la ecuación del movimiento de un péndulo de Foucault.

VELOCIDAD ABSOLUTA Y RELATIVA

¿Tiene algún significado físico la velocidad absoluta? De acuerdo con todos los experimentos realizados hasta ahora, la respuesta es negativa. Llegamos así a sentar una hipótesis fundamental, la hipótesis de la *invarianza galileana:*

> Las leyes básicas de la física son idénticas en todos los sistemas de referencia que se mueven con movimiento uniforme (velocidad constante) unos respecto a otros.

De acuerdo con esta hipótesis un observador confinado en una caja sin ventanas no podría utilizar ningún experimento para decir si está estacionario o con movimiento uniforme respecto a las estrellas fijas. Unicamente mirando a las estrellas fijas a través de una ventana, de modo que pueda comparar su movimiento con el de las estrellas, puede un observador decir que está en movimiento uniforme respecto a las mismas. Incluso entonces no podría decidir si es él quien se mueve o son las estrellas. El principio de la invarianza galileana fue uno de los primeros en ser introducidos en física. Era básico para la visión que Newton tenía del universo; ha sobrevivido después de repetidos experimentos y constituye una de las piedras angulares de la teoría de la relatividad restringida. Es una hipótesis tan notablemente simple que debería considerarse seriamente incluso en ausencia de una evidencia considerable. La hipótesis de la invarianza galileana está totalmente de acuerdo con la relatividad restringida, como veremos en el Cap. 11.

¿Qué uso podemos hacer de esta hipótesis? La hipótesis de que la velocidad absoluta no tiene significado en física restringe en parte la forma y contenido de todas las leyes físicas, tanto las conocidas como las sin descubrir aún. Para dos observadores que se mueven con diferentes velocidades, pero sin aceleración relativa, las leyes de la física deben ser las mismas si la hipótesis es cierta. Supongamos que ambos observan algún fenómeno particular, como el choque entre dos partículas. Debido a las diferentes velocidades de ambos, el suceso examinado será descrito de modo diferente por cada observador. A partir de las leyes de la física podemos predecir cómo serán las observaciones de uno de ellos, cómo interaccionan las partículas y, finalmente, cómo se presenta el fenómeno al segundo observador.

Las leyes de la física del segundo observador pueden, por consiguiente, obtenerse a partir de las del primero mediante dos líneas separadas de razonamiento. Por hipótesis son las mismas que las del primero. Por otro lado, podemos predecir las leyes del segundo observador a partir del estudio de sus observaciones del fenómeno descrito por las leyes del primer observador. Los dos métodos dan el mismo resultado para las leyes físicas actuales. Antes de continuar expondremos algunos de los resultados empíricos sobre la manera en que dos observadores, moviéndose con velocidad uniforme uno respecto al otro, describirán el mismo suceso físico.

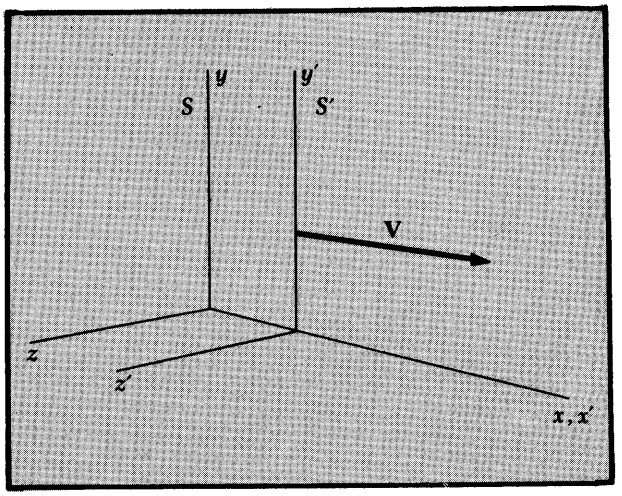


FIG. 4.14 Supongamos que S es un sistema inercial y que S' se mueve con velocidad constante **V** relativa a S. Entonces S' debe ser también inercial.

TRANSFORMACIONES DE GALILEO

Si discutimos ahora cómo medirán dos observadores una longitud y un intervalo de tiempo determinados, podremos deducir cómo se compararán sus mediciones de otras magnitudes físicas. Designemos con la letra S un sistema coordenado cartesiano inercial particular, y con S' otro sistema también cartesiano inercial moviéndose con velocidad **V** respecto al primero (fig. 4.14). Los ejes x', y', z' de S' se escogen paralelos a los x, y, z de S, y **V** se selecciona de modo que resulte en la dirección x. Debemos comparar las mediciones de tiempo y distancia realizadas por un observador ligado a S' con los de un observador en reposo situado en el sistema S. El resultado de la comparación sólo puede decidirse finalmente mediante la experimentación.

Si nuestros dos observadores construyen relojes idénticos, podrán realizar la siguiente experiencia: Supongamos primero que el observador en S distribuye sus relojes a lo largo de su eje x y los pone en hora de modo

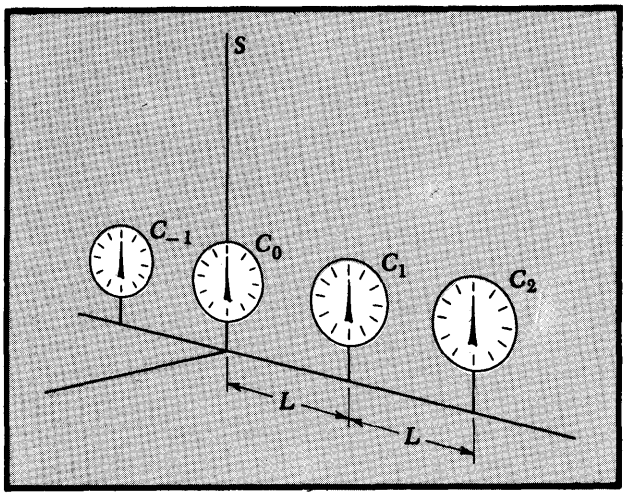


FIG. 4.15 Coloquemos relojes sincronizados C_0, C_1, etcétera, a intervalos de longitud L sobre el eje x, en reposo en S.

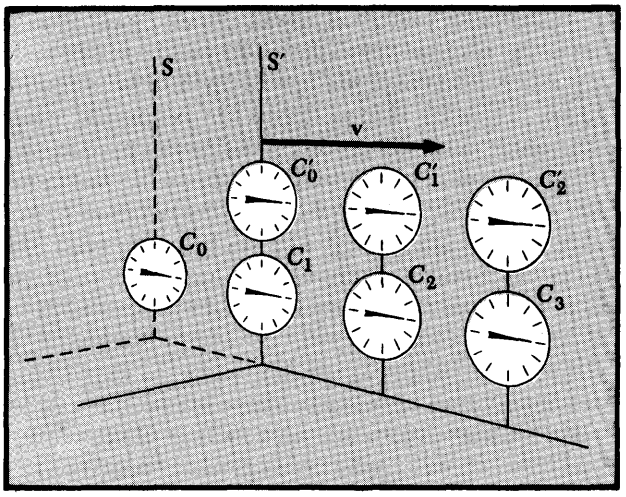


FIG. 4.16 Si colocamos relojes semejantes C'_0, C'_1, etcétera, en reposo en S', entonces para un observador en S estos relojes parecerán sincronizados entre ellos mismos y con los C_0 C_1, etc., de acuerdo con la transformación de Galileo.

que todos marquen la misma, como indica la fig. 4.15 *. Como veremos en el Cap. 11, ésta es una operación más complicada de lo que aparenta; supondremos aquí que la velocidad de la luz es infinita. Ahora podemos comparar la lectura de los relojes S' con los relojes 1, 2, 3... en S cuando S' pasa junto a cada uno de ellos (fig. 4.16). Si se hace este experimento con un reloj macroscópico real, habremos de restringirnos, por razones técnicas de orden práctico, a una velocidad V para S' del orden de 10^6 cm/s, que es una velocidad típica de satélite. En estas condiciones $V/c \ll 1$ y la experiencia confirma que si el reloj en S' marca la hora de acuerdo con el reloj 1, también marcará coincidiendo con 2, 3, 4... Con la exactitud con que podemos medir en estas condiciones **, podemos afirmar que

$$t' = t \qquad (4.12)$$

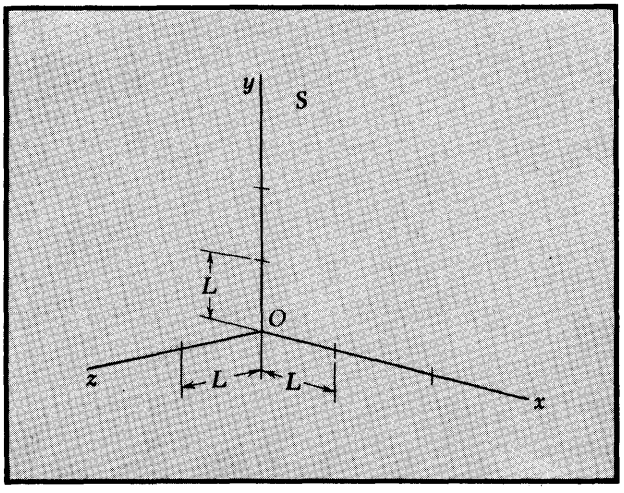


FIG. 4.17 *a*) Señalemos longitudes iguales L sobre los ejes (xyz) de S.

(*) Este procedimiento puede mejorarse de un modo sencillo si hacemos la corrección del tiempo transcurrido en alcanzar nuestros ojos las imágenes de los relojes más distantes, de modo que un reloj que diste l cm se verá retrasado respecto a otro cercano en l/c seg, en donde $c = 3 \times 10^{10}$ cm/s es la velocidad de la luz.

(**) La teoría de la relatividad predice para una velocidad $V = 10^6$ cm/s que t' y t diferirán únicamente en una parte en 2×10^9, o sea, menos de un segundo en 50 años. Aunque ahora pueden construirse relojes con tal estabilidad, no podemos mantener un reloj moviéndose a la velocidad de 10^6 cm/s durante el tiempo suficiente para realizar medidas hasta que se utilicen los satélites. La igualdad $t = t'$ para $V \ll c = 3 \times 10^{10}$ cm/s es una extrapolación simple a partir de nuestra experiencia y no está basada hasta la fecha en mediciones de gran exactitud.

Esto es, los tiempos que se leen en S' son iguales a los que se leen en S. En esta fórmula t se refiere al instante de un suceso en S y t' al de un suceso en S'.

Este resultado ni es evidente por sí mismo ni es exactamente cierto para todas las velocidades V, como veremos en el Cap. 11. Podemos también determinar las longitudes relativas de una regla estacionaria y otra móvil (fig. 4.17 *a* a *c*). Deseamos saber la longitud aparente para el observador en S de una regla en reposo en S'. Un modo sencillo de determinarla consiste en utilizar nuevamente los relojes y registrar simultáneamente las posiciones de ambos extremos de la regla móvil, esto es, cuando los relojes S coincidentes con la parte inicial y final de la misma marcan idéntica lectura. Se encuentra mediante la experiencia *, que

$$L' = L \tag{4.13}$$

con tal que $V \ll c$.

Podemos resumir las Ecs. (4.12) y (4.13) en función de una transformación que relacione las coordenadas x', y', z' y el tiempo t' medidos en S' con las coordenadas x, y, z y t medidas en S. El sistema S' se mueve con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ cuando se observa desde S. Supongamos que para $t = 0$, $t' = 0$ y que en este instante coinciden los orígenes O y O'. Si escogemos escalas idénticas para las distancias, tendremos las siguientes ecuaciones de transformación:

$$\boxed{t = t' \qquad x = x' + Vt' \qquad y = y' \qquad z = z'} \tag{4.14}$$

que se denomina *transformación galileana* (fig. 4.18).

Una consecuencia inmediata de la Ec. (4.14) es la *ley de la suma de velocidades:*

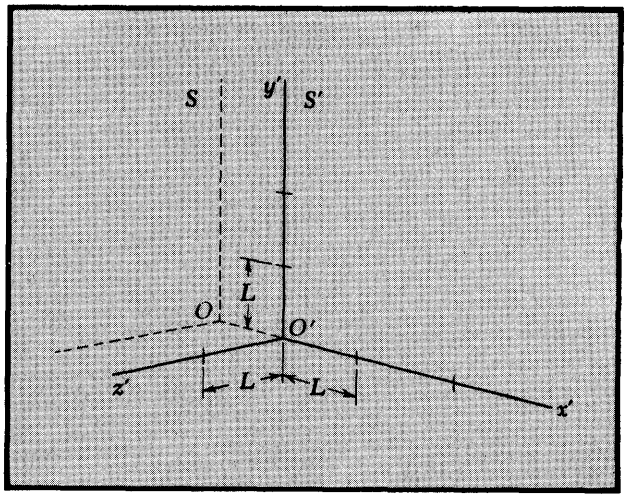
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} + V = v'_x + V$$

o en forma vectorial

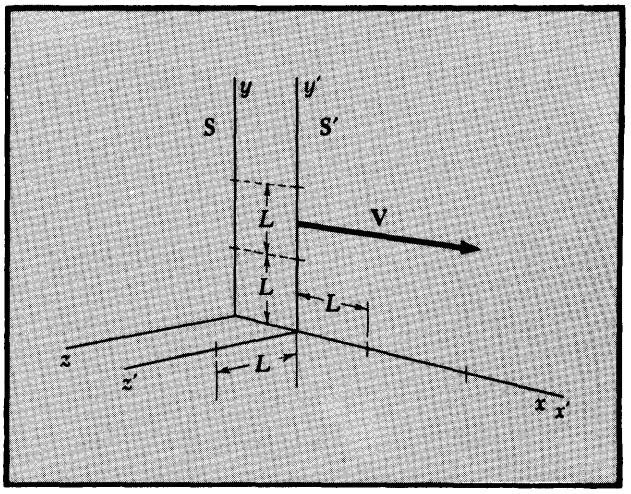
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \tag{4.15}$$

en donde $\mathbf{v}'$ es la velocidad medida en el sistema S' y $\mathbf{v}$ la medida en S. La transformación inversa de (4.15) es sencillamente $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$.

(*) No se ha realizado con gran exactitud una experiencia de este tipo y la creencia de que es válida la igualdad $L = L'$ para $V \ll c$ está basada principalmente en experiencias cualitativas, en la simplicidad de la hipótesis y en el hecho de que esta hipótesis no conduce a ninguna paradoja o incongruencia.



b) Y sobre los ejes (x', y', z') de S'.



c) Entonces, para un observador situado en S parecerán inalteradas las longitudes en S', aunque S' se esté moviendo, de acuerdo con la transformación de Galileo.

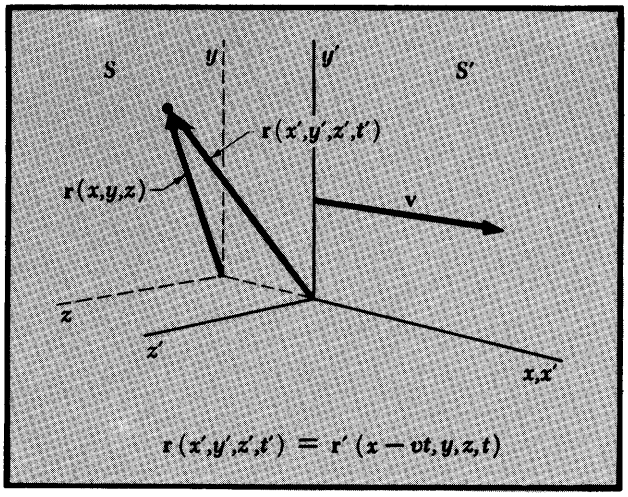


FIG. 4.18 Podemos resumir la transformación de Galileo de $S \leftrightarrow S'$ del modo siguiente: $x' = x - Vt$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = t$.

Si la definición (4.14) de una transformación galileana entre S y S' se combina con el postulado fundamental que afirma que las leyes de la física son idénticas cuando se determinan por físicos situados en S y S', podemos llegar a la siguiente conclusión:

> Las leyes básicas de la física tienen la misma forma en dos sistemas de referencia ligados por una transformación galileana.

Este enunciado es un poco más restrictivo que nuestro enunciado anterior de que las leyes de la física son idénticas en todos los sistemas de referencia que se mueven con velocidad constante unos respecto a otros, pues supone que $t' = t$. Excepto para los casos en que v^2/c^2 no es despreciable frente a 1, la afirmación es válida. En el Cap. 11 discutiremos las modificaciones de las ecuaciones de transformación de Galileo en el caso de v comparable a c para asegurar que las leyes de la física son idénticas en todos los sistemas de referencia que se mueven con velocidad uniforme unos respecto a otros.

La hipótesis presente de la invarianza escrita en la forma (4.14) significa que las leyes de la física deben tener exactamente el mismo aspecto cuando se escriben con variables marcadas con prima o sin marcar, como en las fórmulas (4.17) a (4.19) que veremos posteriormente. Este requisito impone una determinada restricción a la posible forma de las leyes físicas.

A partir de la relación $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$, en donde $\mathbf{V}$ es la velocidad relativa entre los dos sistemas de referencia, se deduce que

$$\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}'$$

es decir, una variación de velocidad observada desde S es igual a la variación de velocidad observada desde S'. Tanto S como S' son sistemas inerciales. Recordemos que se supone que $\mathbf{V}$ no cambia con el tiempo. Como $\Delta t = \Delta t'$, se deduce que las aceleraciones son iguales cuando se observan desde ambos sistemas:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{v}'}{\Delta t'} \equiv \mathbf{a}' \tag{4.16}$$

¿Cómo se transformará una fuerza $\mathbf{F}$ de S a S'? La hipótesis de que las leyes de la física son las mismas con las variables señaladas con prima que con variables sin marcar con primas significa que

$$\mathbf{F}' = M\mathbf{a}' \tag{4.17}$$

si

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} \tag{4.18}$$

con tal que la masa M sea independiente de la velocidad. Pero hemos demostrado en (4.16) que $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, por consiguiente

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}' = \mathbf{F}' \tag{4.19}$$

y, por lo tanto, las fuerzas son iguales: $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$. Se llega a la conclusión de que si se utiliza la relación $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ para definir la fuerza, los observadores en todos los sistemas inerciales de referencia coincidirán en el módulo y dirección de la fuerza $\mathbf{F}$ independientemente de las velocidades relativas de los sistemas de referencia.

Conservación de la cantidad de movimiento. La ley de la conservación de la cantidad de movimiento fue establecida en el Cap. 3. Vamos a deducirla de nuevo admitiendo la validez de la invarianza de Galileo y la conservación de la energía y de la masa. Esta deducción tiene la ventaja de no usar la hipótesis de que las fuerzas de acción y reacción son iguales, lo cual tiene el inconveniente de la velocidad finita de propagación de la fuerza. Algunos problemas, como las colisiones atómicas, incluyen la radiación y en este momento no podemos incluir la cantidad de movimiento de la radiación.

Consideremos dos partículas libres 1 y 2 que inicialmente tienen velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Se supone que las posiciones iniciales (y finales) están muy separadas de modo que en los períodos inicial y final las partículas no interaccionan. Por los conocimientos de física elemental (o del Cap. 5) sabemos que la energía cinética inicial de las partículas es

$$\tfrac{1}{2}M_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2v_2^2$$

Veamos ahora lo que ocurre cuando las partículas chocan; *no* es necesario que la colisión sea elástica, pues como veremos la cantidad de movimiento se conserva incluso cuando el choque es inelástico. La energía cinética después del choque es:

$$\tfrac{1}{2}M_1w_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2w_2^2$$

siendo $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ las velocidades después de la colisión lo *suficientemente después* * para que las partículas no

(*) Obsérvese que usamos w en lugar de v' (que se usó en el capítulo 3) para la velocidad después del choque. Los símbolos con prima aquí se reservan para el sistema de referencia S'.

interaccionen más. La ley de la conservación de la energía nos dice que

$$\tfrac{1}{2}M_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}M_1w_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2w_2^2 + \Delta\epsilon \qquad (4.20)$$

en donde $\Delta\epsilon$ (que puede ser positivo o negativo) es el cambio en la energía de excitación interna de las partículas como consecuencia del choque. En las presentes consideraciones debemos excluir aquellas colisiones que producen calor o sonido, pues no estamos todavía en condiciones de incluir sus cantidades de movimiento en nuestros cálculos.

La excitación interna puede ser una rotación o una vibración interna; puede consistir en la excitación de un electrón ligado que pasa de un estado de baja energía a otro de mayor energía. En un choque elástico $\Delta\epsilon = 0$, pero no necesitamos restringir la deducción a los choques elásticos *. Hemos supuesto que las masas M_1 y M_2 de las partículas no han variado en el choque.

Observemos ahora el mismo choque desde el segundo sistema de referencia (indicado con primas) que se mueve con velocidad uniforme $\mathbf{V}$ respecto al primero. Si en el segundo sistema las velocidades iniciales son $\mathbf{v}'_1$ y $\mathbf{v}'_2$ y las finales $\mathbf{w}'_1$ y $\mathbf{w}'_2$, tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} & \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{V} \\ \mathbf{w}'_1 &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{V} & \mathbf{w}'_2 &= \mathbf{w}_2 - \mathbf{V} \end{aligned} \qquad (4.21)$$

La formulación de la ley de la conservación de la energía en el segundo sistema es

$$\tfrac{1}{2}M_1(v'_1)^2 + \tfrac{1}{2}M_2(v'_2)^2 = \tfrac{1}{2}M_1(w'_1)^2 + \tfrac{1}{2}M_2(w'_2)^2 + \Delta\epsilon \qquad (4.22)$$

Hemos supuesto que la energía de excitación $\Delta\epsilon$ no ha variado con el cambio de los sistemas de referencia, lo cual está de acuerdo con la experiencia.

Si la ley de la conservación de la energía ha de ser invariante en una transformación galileana, entonces en ambos sistemas la energía cinética inicial debe ser igual a la energía cinética final más $\Delta\epsilon$, energía de excitación interna. Es decir, tanto (4.20) como (4.22) deben cumplirse. La ley de la conservación de la energía en el segundo sistema puede también expresarse sustituyendo en (4.22) la transformación (4.21) y observando que

(*) En un choque inelástico no existe violación del principio de la conservación de la energía. Lo que sucede es que la energía cinética perdida o ganada en el movimiento de los cuerpos aparece como movimiento de rotación, vibración o cualquier otro tipo de excitación interna de los cuerpos. Este movimiento interno se llama con frecuencia *calor* o movimiento térmico (Vol. 5).

$(v'_1)^2 = v_1^2 - 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V}^2$, etc., de modo que la Ec. (4.22) se transforma en

$$\tfrac{1}{2}M_1(v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \tfrac{1}{2}M_2(v_2^2 - 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{V} + V^2) = \tfrac{1}{2}M_1(w_1^2 - 2\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \tfrac{1}{2}M_2(w_2^2 - 2\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{V} + V^2) + \Delta\epsilon \quad (4.23)$$

Obsérvese que los términos en donde interviene V^2 se reducen en ambos miembros. Esta expresión es idéntica a la ley de la conservación de la energía (4.20) en el primer sistema, con tal de que se anulen en (4.23) los productos escalares

$$(M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{V} = (M_1\mathbf{w}_1 + M_2\mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{V} \quad (4.24)$$

La ecuación (4.24) debe ser válida para cualquier **V**. Por consiguiente, la solución general de (4.24) es

$$\boxed{M_1\mathbf{v}_1 + M_2\mathbf{v}_2 = M_1\mathbf{w}_1 + M_2\mathbf{w}_2}$$

Esta es precisamente la *ley de la conservación de la cantidad de movimiento.*

Revisemos lo realizado hasta ahora: Hemos supuesto que en un choque se conserva la masa y la energía y después admitimos también que estas leyes son válidas en cualquier sistema de referencia. Es decir, aceptamos como válida la invarianza galileana. Así encontramos que las leyes pueden ser válidas en diferentes sistemas inerciales, *únicamente* si se conserva en el choque la cantidad de movimiento. No se ha utilizado, sin embargo, la ley generalizada de la conservación de la masa. Si el choque implica un intercambio de cierta masa, de modo que después del mismo M_1 se transforma en $\bar{M}_1$ y M_2 en $\bar{M}_2$, pero de modo que $M_1 + M_2 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$, pueden utilizarse las mismas etapas utilizadas en la deducción anterior para obtener la conservación de la cantidad de movimiento. Esto se demostrará en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO

Choque inelástico de masas iguales. Como un ejemplo de estas ideas observemos una colisión inelástica de masas iguales desde dos sistemas de referencia distintos, siendo el primero el de una partícula inicialmente en reposo y el segundo aquel en el cual las dos masas inicialmente se aproximan una a la otra con velocidades iguales y opuestas. Después del choque las dos masas se adhieren entre sí.

Resolvamos el problema en el primer sistema (véase Cap. 3, pág. 90) y encontraremos que la velocidad de las dos masas

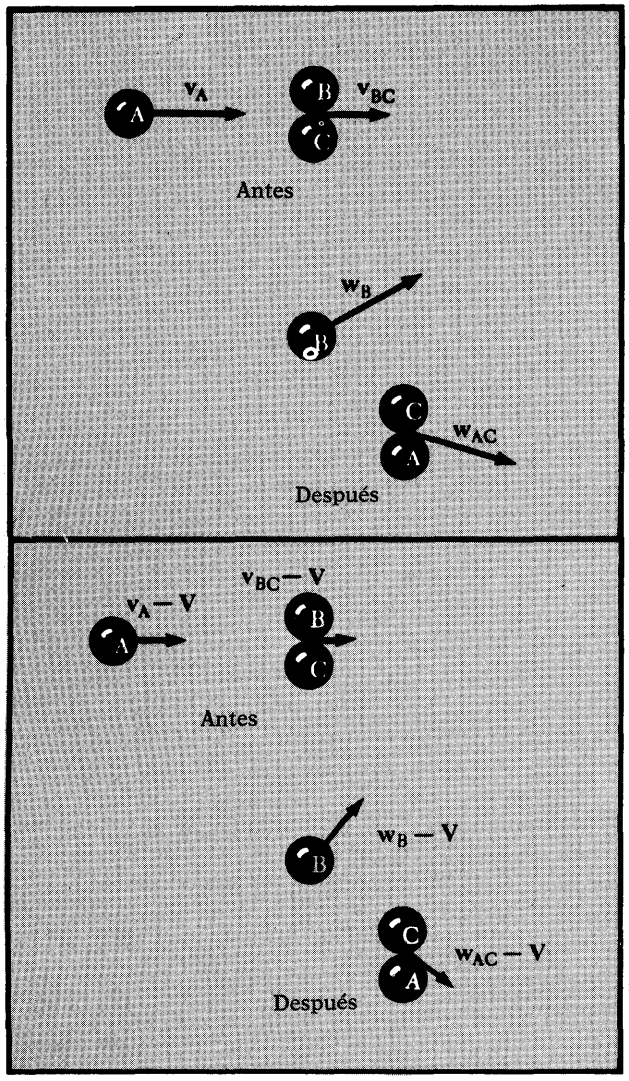


FIG. 4.19 Una colisión entre el átomo A y la molécula BC da como consecuencia un átomo B y una molécula AC. El choque se observa desde dos sistemas de referencia distintos.

después del choque es $v_1/2$, en donde v_1 es la velocidad de la masa móvil antes del choque. La pérdida de energía cinética es

$$\Delta\epsilon = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 2m_1\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}m_1v_1^2$$

En el segundo sistema de referencia la cantidad de movimiento total es cero; *este sistema* se denomina *sistema del centro de masas*. La velocidad del movimiento del sistema centro de masas es $v_1/2$, de modo que $v'_1 = v_1 - v_1/2 = v_1/2$ y $v'_2 = -v_1/2$. Después del choque $w'_1 = w'_2 = 0$ y la pérdida de energía cinética es

$$\Delta\epsilon = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 - 0 = \tfrac{1}{4}m_1v_1^2$$

Si interesa conocer la igualdad de $\Delta\epsilon$ en los dos sistemas de referencia, pueden resolverse otros ejemplos.

EJEMPLO

Reacciones químicas. Demostremos que se conserva la cantidad de movimiento en una reacción química en la que los átomos de las sustancias reaccionantes se redistribuyen o intercambian, mientras se conserva la masa total. Supondremos que no existen fuerzas externas (véase fig. 4.19).

La reacción puede representarse por

$$A + BC \rightarrow B + AC$$

en donde BC significa una molécula compuesta del átomo B y del átomo C. En la reacción, el átomo C se une al átomo A para formar AC. En un sistema inercial la ley de la conservación de la energía puede escribirse como

$$\tfrac{1}{2}M_Av_A^2 + \tfrac{1}{2}(M_B + M_C)v_{BC}^2 = \tfrac{1}{2}M_Bw_B^2 + \tfrac{1}{2}(M_A + M_C)w_{AC}^2 + \Delta\epsilon \quad (4.25)$$

En esta fórmula $\Delta\epsilon$ representa las variaciones en la energía de enlace de las moléculas que toman parte en la reacción. En un segundo sistema inercial moviéndose con velocidad $\mathbf{V}$ respecto al primero, la ley de la conservación de la energía puede escribirse, sustituyendo $\mathbf{v}_A$ por $\mathbf{v}_A - \mathbf{V}$, etc., como:

$$\tfrac{1}{2}M_A(\mathbf{v}_A - \mathbf{V})^2 + \tfrac{1}{2}(M_B + M_C)(\mathbf{v}_{BC} - \mathbf{V})^2 = \tfrac{1}{2}M_B(\mathbf{w}_B - \mathbf{V})^2 + \tfrac{1}{2}(M_A + M_C)(\mathbf{w}_{AC} - \mathbf{V})^2 + \Delta\epsilon \quad (4.26)$$

Desarrollando los paréntesis al cuadrado vemos que las ecuaciones (4.25) y (4.26) están de acuerdo si

$$M_A\mathbf{v}_A + (M_B + M_C)\mathbf{v}_{BC} = M_B\mathbf{w}_B + (M_A + M_C)\mathbf{w}_{AC}$$

que es exactamente un modo de enunciar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

EJEMPLO

Choque de una partícula pesada contra otra ligera. Una partícula pesada de masa M choca elásticamente con una partícula

ligera de masa m, inicialmente en reposo (fig. 4.20). La velocidad inicial de la primera partícula es $\mathbf{v}_h = v_h\hat{\mathbf{x}}$; su velocidad final es $\mathbf{w}_h$. Si este choque es tal que la partícula ligera sale despedida en la dirección $(+\hat{\mathbf{x}})$ ¿cuál es la velocidad $\mathbf{w}_l$? ¿Qué fracción de la energía de la partícula pesada se ha perdido en este choque?

A partir de la conservación de la cantidad de movimiento se deduce que en este caso, no hay componente $\hat{\mathbf{y}}$ de la velocidad final de la partícula pesada, de modo que

$$Mv_h\hat{\mathbf{x}} = Mw_h\hat{\mathbf{x}} + mw_l\hat{\mathbf{x}}$$

o

$$Mv_h = Mw_h + mw_l \tag{4.27}$$

Según la conservación de la energía tendremos (haciendo $\Delta\epsilon = 0$ en un choque elástico)

$$\tfrac{1}{2}Mv_h^2 = \tfrac{1}{2}Mw_h^2 + \tfrac{1}{2}mw_l^2$$

que puede escribirse con ayuda de (4.27) como

$$\frac{1}{2}M\left(w_h^2 + \frac{2m}{M}w_hw_l + \frac{m^2}{M^2}w_l^2\right) = \tfrac{1}{2}Mw_h^2 + \tfrac{1}{2}mw_l^2 \tag{4.28}$$

Si $m \ll M$, puede despreciarse el término de orden m^2/M^2, de modo que (4.28) se reduce a

$$mw_hw_l \approx \tfrac{1}{2}mw_l^2$$

o

$$w_l \approx 2w_h \tag{4.29}$$

Así, pues, la partícula ligera se moverá con una velocidad aproximadamente el doble de la velocidad de la partícula pesada. Se deduce, además, si sustituimos (4.29) en (4.27), que

$$Mv_h \approx Mw_h + 2mw_h$$

o

$$\frac{\Delta v_h}{v_h} = \frac{v_h - w_h}{v_h} \approx \frac{2m}{M + 2m} \approx \frac{2m}{M} \tag{4.30}$$

La fracción de energía perdida por la partícula pesada es

$$\frac{\tfrac{1}{2}Mv_h^2 - \tfrac{1}{2}Mw_h^2}{\tfrac{1}{2}Mv_h^2} = \frac{v_h^2 - w_h^2}{v_h^2} = 1 - \left(\frac{M}{M + 2m}\right)^2 \approx \frac{4m}{M} \tag{4.31}$$

utilizando la Ec. (4.30) *. Obsérvese que en las Ecs. (4.30) y (4.31) hemos despreciado los términos en m/M comparados con la unidad.

Otros ejemplos de aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento lineal se tratan en el capítulo 6.

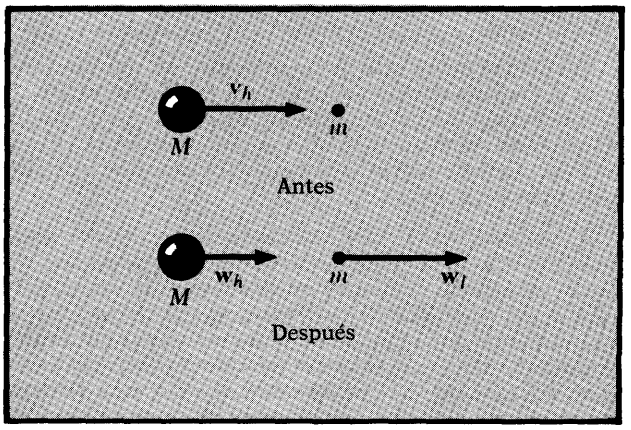


FIG. 4.20 Choque de una partícula pesada con una ligera. (Los dos vectores representan velocidades, no cantidades de movimiento.)

(*) Otra forma de hacer esto, utilizando Δ como operador, es

$$\frac{\Delta(\tfrac{1}{2}Mv_h^2)}{\tfrac{1}{2}Mv_h^2} = \frac{Mv_h\Delta v_h}{\tfrac{1}{2}Mv_h^2} = \frac{2\Delta v_h}{v_h} \approx \frac{4m}{M}$$

PROBLEMAS

1. *Bloque sobre una mesa giratoria.* Un bloque permanece en reposo respecto a una mesa horizontal rugosa que gira a 20 rpm. El bloque está a 150 cm del eje de rotación en posición vertical. ¿Cuánto vale el coeficiente de rozamiento? Indicar en un diagrama la fuerza de rozamiento y la fuerza centrífuga.

2. *Sistema móvil.* En un vagón de ferrocarril que se mueve a 500 cm/s a lo largo de una vía rectilínea tiene lugar un choque frontal entre una masa de 100 g que se mueve con velocidad de 100 cm/s en la misma dirección que el tren y una masa de 50 g que se mueve en dirección opuesta a 500 cm/s. Ambas velocidades son relativas al tren. Después del choque, la masa de 50 g está en reposo en el vagón; ¿cuál es la velocidad de la masa de 100 g? ¿Cuánta energía cinética se ha perdido? *Sol.* —150 cm/s.

Describir ahora la colisión desde el punto de vista de un observador en reposo respecto a la vía. ¿Se conserva la cantidad de movimiento? ¿Cuánta energía cinética se pierde en este sistema?

3. *Aceleración en el movimiento circular.* Un objeto se mueve en una trayectoria circular con una velocidad constante v de 50 cm/s. El vector velocidad $\mathbf{v}$ tiene un cambio de dirección de 30° en 2 segundos.

(*a*) Encontrar el módulo de la variación de velocidad, $\Delta\mathbf{v}$.

(*b*) Hallar el módulo de la aceleración media durante el intervalo citado. *Sol.* 12,95 cm/s².

(*c*) ¿Cuál es la aceleración centrípeta del movimiento circular uniforme? *Sol.* 13,16 cm/s².

4. *Fuerza efectiva debida a la rotación.* Un objeto fijo respecto a la superficie de un planeta idéntico en masa y radio a la Tierra experimenta una aceleración gravitatoria cero en el ecuador. ¿Cuál es la duración de un día en este planeta? *Sol.* 1,4 h.

5. *Movimiento en un sistema de referencia no inercial.* Consideremos un sistema inercial S sobre la superficie de la Tierra y un sistema no inercial S' en reposo en un ascensor que cae libremente.

(*a*) ¿Cuál es la ecuación del movimiento en S' de una partícula que cae libremente en S?

(*b*) ¿Cuáles son las fuerzas aplicadas y ficticias en S y S' sobre la partícula en (*a*)?

(*c*) ¿Cuáles son las ecuaciones del movimiento en S' de una partícula que se mueve en un círculo horizontal en S? Supongamos que $y = y' = 0$ en $t = 0$ e y es vertical.

6. *Péndulo en un coche acelerado.* Un péndulo cuelga verticalmente en un coche en reposo. ¿Qué ángulo formará con la vertical cuando la aceleración del coche, moviéndose en un plano horizontal, sea de 100 cm/s²?

7. *Centrifugadora para hombres.* En los estudios de medicina aeronáutica se utilizan centrifugadoras formadas por tambores horizontales en rotación alrededor de un eje vertical y transportando un sujeto experimental en un extremo del vástago. Si la distancia del sujeto al centro de rotación es 700 cm, ¿a qué velocidad debe girar la centrifugadora para que el sujeto esté sometido a una aceleración de 5 g? g = aceleración de la gravedad.

8. *Sistema acelerado.* Un sistema de referencia tiene una aceleración hacia arriba de 300 cm/s². Para $t = 0$, su origen está en reposo y coincide con el de un sistema inercial sobre la superficie de la Tierra. (Despreciar la rotación de la Tierra.)

(*a*) Suponiendo y vertical y x horizontal, determinar $x(t)$ e $y(t)$ en ambos sistemas para un objeto que se proyecta horizontalmente con velocidad de 1000 cm/s a $t = 0$, despreciando la gravedad.

(*b*) Resolver (*a*) incluyendo la gravedad.

9. *Cinemática del choque; centro de masas.* Dos partículas de masa $M_1 = 100$ g y $M_2 = 40$ g poseen velocidades iniciales $\mathbf{v}_1 = 2{,}8\hat{\mathbf{x}} - 3{,}0\hat{\mathbf{y}}$ cm/s y $\mathbf{v}_2 = 7{,}5\hat{\mathbf{y}}$ cm/s. Chocan y después del choque las velocidades son $\mathbf{v}'_1 = 1{,}2\hat{\mathbf{x}} - 2{,}0\hat{\mathbf{y}}$ cm/s y $\mathbf{v}'_2 = 4{,}0\hat{\mathbf{x}} + 5{,}0\hat{\mathbf{y}}$ cm/s.

(*a*) Determinar la cantidad de movimiento total.

(*b*) Determinar la velocidad de un sistema de referencia en el cual la cantidad de movimiento total (antes del choque) es cero. Este se denomina *sistema centro de masas.*

(*c*) Demostrar que la cantidad de movimiento es cero en este sistema después del choque.

(*d*) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial no está presente como energía cinética después del choque? ¿Es elástica la colisión?

10. *Choque de masas desiguales.* En el choque de dos partículas el sistema de referencia en el cual una está inicialmente en reposo y la otra se mueve con velocidad v se denomina *sistema de laboratorio.* Supongamos que la masa móvil es m y la estacionaria $2m$.

(*a*) ¿Cuál es la velocidad del sistema centro de masas (véase Prob. 9) respecto al sistema de laboratorio?

(*b*) ¿Cuánta energía se pierde en los sistemas de laboratorio y de centro de masas en una colisión completamente inelástica, es decir, cuando las dos partículas quedan totalmente unidas?

(*c*) Si la colisión es elástica, las velocidades de las partículas en el sistema centro de masas cambian de dirección, pero no de magnitud. Determinar una expresión que relacione el ángulo de desviación (usualmente llamado de dispersión o «scattering») de la masa m en coordenadas de laboratorio y en coordenadas centro de masas.

Obsérvese que en el sistema centro de masas el ángulo de la segunda partícula es siempre de 180° respecto al ángulo de la primera. En el choque de masas iguales, $\theta_{\text{lab}} = \theta_{\text{c.m.}}/2$. Los diagramas vectoriales son instructivos.

11. *Aceleración y desviación magnética de electrones.* (Este problema, así como los problemas 12 a 14, son revisiones de la materia expuesta en el Cap. 3.) Supongamos que en el punto 0 de un plano metálico se liberan electrones en reposo (véase fig. 4.21) y se aceleran hacia un plano paralelo distante 0,25 cm por la acción de un

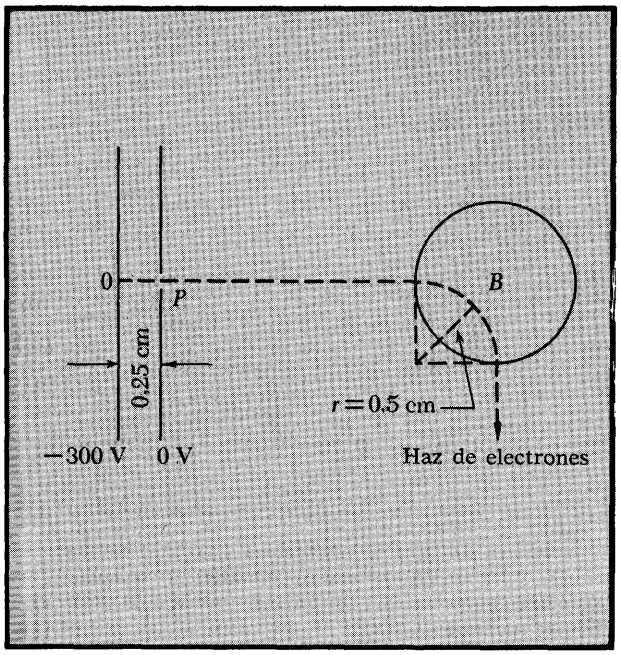


FIG. 4.21

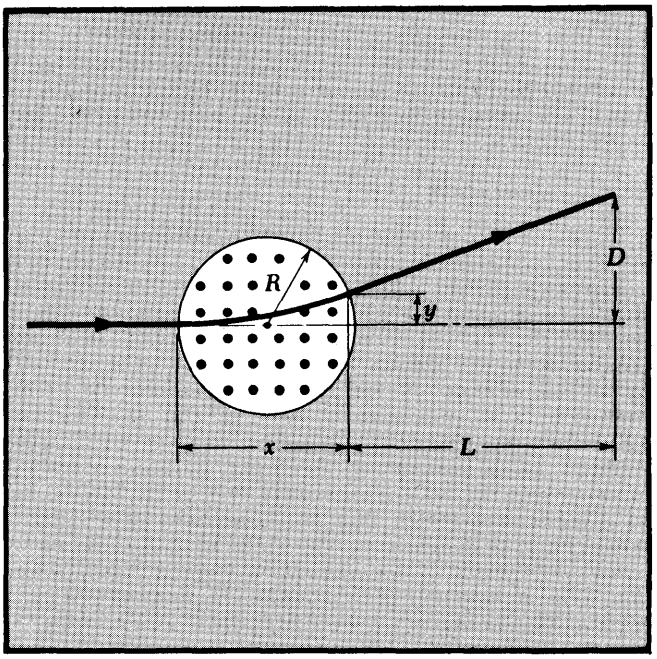


FIG. 4.22

campo eléctrico. Un pequeño agujero en P permite que un haz de electrones se escape a una región libre de campos eléctricos (todo en un alto vacío, naturalmente). El campo eléctrico se produce aplicando voltajes de -300 y 0 V a los planos metálicos del modo indicado. Se desea desviar el haz un ángulo de 90° en una trayectoria circular de radio 0,5 cm por un campo magnético de contorno circular, como puede verse en la figura. Calcular la intensidad de campo requerida; establecer también su dirección. (*Nota:* Una intensidad de campo eléctrico de 1 statvoltio/cm es igual a 300 V/cm.)

12. *Tiempo de vuelo o de tránsito de los iones.* Un pulso de iones de cesio con una carga Cs^+ es acelerado a partir del reposo por un campo eléctrico de 1 statvoltio/cm que actúa en una extensión de 0,33 cm y después recorre 1 mm en 87×10^{-9} s en un espacio libre de campo y en el que se ha hecho el vacío.

(*a*) Deducir a partir de estos datos la masa atómica del Cs^+. *Sol.* $2{,}4 \times 10^{-22}$ g.

Comparar este valor con los que se encuentran en las tablas, manuales o textos de química.

(*b*) ¿Cuál sería el tiempo que tardaría un haz de protones en recorrer la región de 1 mm? *Sol.* $7{,}2 \times 10^{-9}$ s.

13. *Desviación magnética de un haz de electrones.* La desviación de un haz de electrones en un tubo de rayos catódicos puede realizarse por medios magnéticos lo mismo que electrostáticos. Un haz de electrones de energía W entra en una región en la que existe un campo magnético uniforme transversal de intensidad B. (Despréciese la influencia del borde. Véase fig. 4.22.)

(*a*) Si es x la distancia entre los puntos de entrada y salida de los electrones en el campo, demostrar que el valor de y indicado en la figura viene dado por:

$$y = r\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]$$

siendo r el radio de curvatura de la trayectoria del electrón en el campo magnético transversal. El radio de curvatura es el radio de la circunferencia que se ajusta a (coincide con) la parte curvada de la trayectoria.

(*b*) Si R es el radio de los polos del imán, entonces $x \approx 2R$ cuando $r \gg R$. Utilícese el desarrollo del binomio para demostrar que $y \approx 2R^2/r$.

14. *Aceleración en un ciclotrón.* Supongamos un ciclotrón en el que $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}B$ y

$$E_x = E\cos\omega_c t \qquad E_y = -E\,\mathrm{sen}\,\omega_c t \qquad E_z = 0$$

siendo E constante. (En un ciclotrón real el campo eléctrico no es uniforme en el espacio.) Vemos que el extremo del vector intensidad de campo eléctrico describe una circunferencia con frecuencia angular ω_c. Demostrar que el desplazamiento de una partícula está dado por

$$x(t) = \frac{qE}{M\omega_c{}^2}(\omega_c t\,\mathrm{sen}\,\omega_c t + \cos\omega_c t - 1)$$

$$y(t) = \frac{qE}{M\omega_c{}^2}(\omega_c t \cos \omega_c t - \operatorname{sen} \omega_c t)$$

estando la partícula en reposo o en el origen para $t = 0$. Hágase un dibujo esquemático de los primeros ciclos del desplazamiento.

TEMAS AVANZADOS

Velocidad y aceleración en sistemas coordenados en rotación. Consideremos ahora un sistema de referencia no inercial girando con velocidad angular constante ω alrededor del eje z de un sistema inercial. Restringimos la discusión al caso de una rotación de coordenadas relativas respecto a un eje común z. (Las fórmulas para el caso general se deducen en los libros de mecánica de nivel intermedio y se relacionan al final de esta sección.) La importancia de este problema radica en el hecho de que la Tierra es un sistema de referencia rotatorio. Además de la aceleración centrípeta, incluiremos en el análisis la aceleración de Coriolis, que es importante en el movimiento en gran escala de las corrientes marinas y del aire.

Las coordenadas (x_R, y_R, z_R) de un punto P visto desde el sistema de rotación puede relacionarse simplemente con las coordenadas (x_I, y_I, z_I) del mismo punto visto desde el sistema inercial. Por consideraciones geométricas de las figuras 4.23 y 4.24 vemos que

$$\begin{aligned} x_I &= x_R \cos \omega t - y_R \operatorname{sen} \omega t \\ y_I &= x_R \operatorname{sen} \omega t + y_R \cos \omega t \\ z_I &= z_R \end{aligned} \tag{4.32}$$

Las relaciones entre las componentes de la velocidad en los dos sistemas se encuentran derivando las expresiones (4.32) respecto al tiempo. (Para abreviar representaremos a veces con un punto sobre una magnitud su derivada respecto al tiempo. Así pues, $\dot{x} \equiv dx/dt = v_x$ y $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2 \equiv \dot{v}_x \equiv dv_x/dt$). Tendremos

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= \dot{x}_R \cos \omega t - \omega x_R \operatorname{sen} \omega t - \dot{y}_R \operatorname{sen} \omega t - \omega y_R \cos \omega t \\ \dot{y}_I &= \dot{x}_R \operatorname{sen} \omega t + \omega x_R \cos \omega t + \dot{y}_R \cos \omega t - \omega y_R \operatorname{sen} \omega t \\ \dot{z}_I &= \dot{z}_R \end{aligned} \tag{4.33}$$

Hemos considerado que ω es constante para mayor sencillez. Obsérvese que para una partícula en reposo ($\dot{x}_R = \dot{y}_R = \dot{z}_R = 0$) en el sistema en rotación las fórmulas (4.30) se reducen a

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= -\omega x_R \operatorname{sen} \omega t - \omega y_R \cos \omega t \\ \dot{y}_I &= \omega x_R \cos \omega t - \omega y_R \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

Análogamente, para una partícula en reposo en el sistema inercial ($\dot{x}_I = \dot{y}_I = \dot{z}_I = 0$) tendremos (operando algebraicamente)

$$\dot{x}_R - \omega y_R = 0 \qquad \dot{y}_R + \omega x_R = 0 \qquad \dot{z}_R = 0$$

a partir de la ecuación (4.33).

Las componentes de la aceleración se hallan derivando la ecuación (4.33) respecto al tiempo:

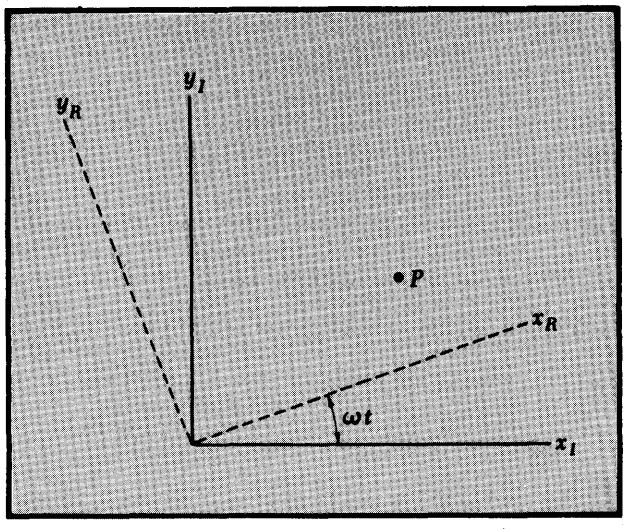


FIG. 4.23 El punto P en el plano xy de un sistema inercial (x_I, y_I) y de un sistema en rotación (x_R, y_R). Los ejes coinciden para $t = 0$ y la rotación posee la velocidad angular ω respecto al eje z.

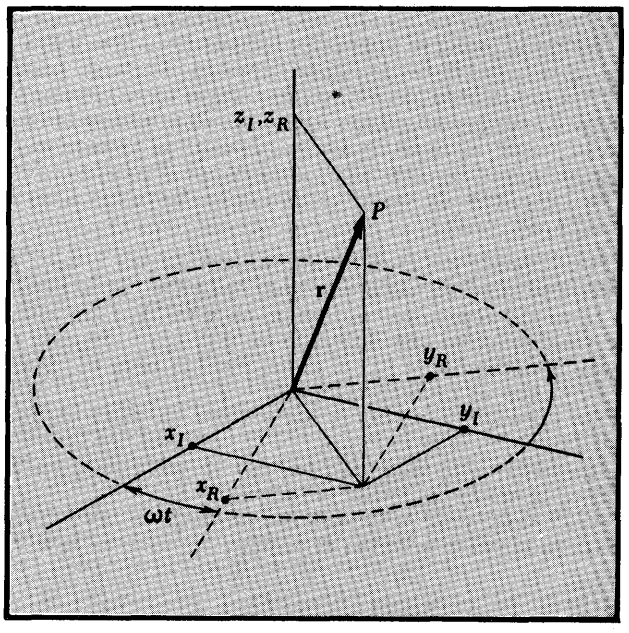


FIG. 4.24 El punto P puede describirse con las coordenadas $x_I y_I z_I$ del sistema inercial o con las $x_R y_R z_R$ del sistema en rotación. Esta tiene lugar alrededor del eje z.

$$\ddot{x}_I = \ddot{x}_R \cos\omega t - 2\omega\dot{x}_R \operatorname{sen}\omega t - \omega^2 x_R \cos\omega t - \ddot{y}_R \operatorname{sen}\omega t - 2\omega\dot{y}_R \cos\omega t + \omega^2 y_R \operatorname{sen}\omega t$$

$$\ddot{y}_I = \ddot{x}_R \operatorname{sen}\omega t + 2\omega\dot{x}_R \cos\omega t - \omega^2 x_R \operatorname{sen}\omega t + \ddot{y}_R \cos\omega t - 2\omega\dot{y}_R \operatorname{sen}\omega t - \omega^2 y_R \cos\omega t \quad (4.34)$$

$$\ddot{z}_I = \ddot{z}_R$$

Obsérvese que para una partícula en reposo en el sistema en rotación, (4.34) se reduce con ayuda de (4.32) a

$$\ddot{x}_I = -\omega^2(x_R \cos\omega t - y_R \operatorname{sen}\omega t) = -\omega^2 x_I \quad (4.35)$$

$$\ddot{y}_I = -\omega^2(x_R \operatorname{sen}\omega t + y_R \cos\omega t) = -\omega^2 y_I \quad (4.36)$$

Las ecuaciones (4.35) y (4.36) pueden escribirse vectorialmente en la forma

$$\mathbf{a}_I = -\omega^2 \mathbf{r}_I \quad (4.37)$$

en donde $\mathbf{a}_I \equiv \ddot{\mathbf{r}}_I$ es la aceleración de la partícula relativa al sistema inercial y $\mathbf{r}_I = x_I\hat{\mathbf{x}}_I + y_I\hat{\mathbf{y}}_I$ corresponde al vector **r** de la ecuación (4.10). La ecuación (4.37) es la expresión de la aceleración centrípeta usual.

Los primeros términos de las ecuaciones (4.34) son justamente la aceleración en el sistema de coordenadas de rotación ($\ddot{x}_R$ y $\ddot{y}_R$) proyectada sobre los ejes coordenados inerciales. Los segundos términos, sin embargo, dependen de la velocidad del sistema rotatorio ($\dot{x}_R$ y $\dot{y}_R$) y se anulan cuando $\dot{x}_R = \dot{y}_R = 0$. Pueden comprenderse considerando una partícula proyectada radialmente hacia el exterior sin que sobre ella actúen fuerzas reales. Su trayectoria real será una línea recta radial, como indica la fig. 4.25 *a*, pero en el sistema giratorio su trayectoria será como en la fig. 4.25 *b*. Esta aceleración se denomina *aceleración de Coriolis* y la fuerza ficticia deducida de la misma se denomina *fuerza de Coriolis* (véase fig. 4.25). Los términos terceros de las ecuaciones (4.34) son justamente los términos de la aceleración centrípeta y la fuerza ficticia que se deriva es la *fuerza centrífuga*. Si v es pequeña frente a ωr, la fuerza de Coriolis es pequeña comparada con la fuerza centrífuga.

Como ejemplo de estas fuerzas ficticias y concordancia de los puntos de vista de los sistemas inerciales y rotatorio, consideremos un avión supersónico que se mueve hacia el este en el ecuador a una velocidad en la Tierra de 2000 millas/h (o sea, $8{,}8 \times 10^4$ cm/s). La fig. 4.26 ilustra la situación. Consideremos que la trayectoria mantiene su «nivel» de modo que sigue la curvatura de la superficie de la Tierra y, como su altura es pequeña frente al tamaño de la Tierra, supongamos que se encuentra a la distancia r, radio de la Tierra, del centro.

En primer lugar veamos la situación desde el punto de vista del sistema inercial. En esta visión el avión se mueve en un círculo de radio r a la velocidad $\omega r + V$. Esta velocidad es la combinación del movimiento de la superficie de la Tierra en el plano del ecuador y la velocidad del avión respecto a la Tierra. Debe existir una fuerza centrípeta que proporcione la aceleración centrípeta relacionada con su trayectoria circular; el valor de esta fuerza centrípeta resulta de la combinación de la fuerza de la

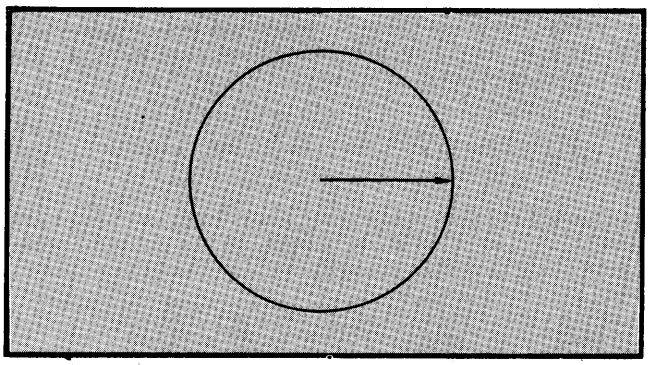
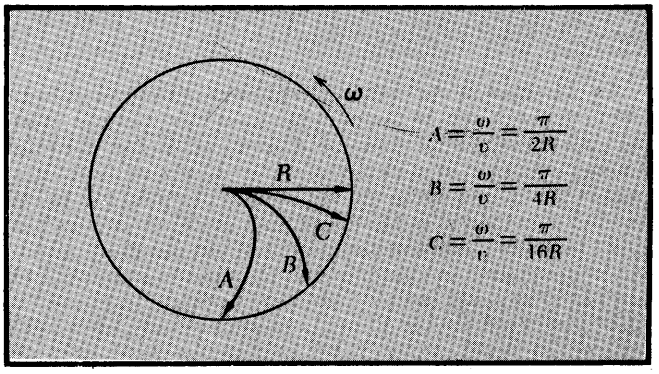


FIG. 4.25 *a*) Trayectoria de una partícula proyectada radialmente hacia fuera desde el centro, vista desde el sistema de referencia inercial.



b) Trayectoria de una partícula proyectada radialmente hacia fuera desde el centro, vista desde el sistema de referencia giratorio.

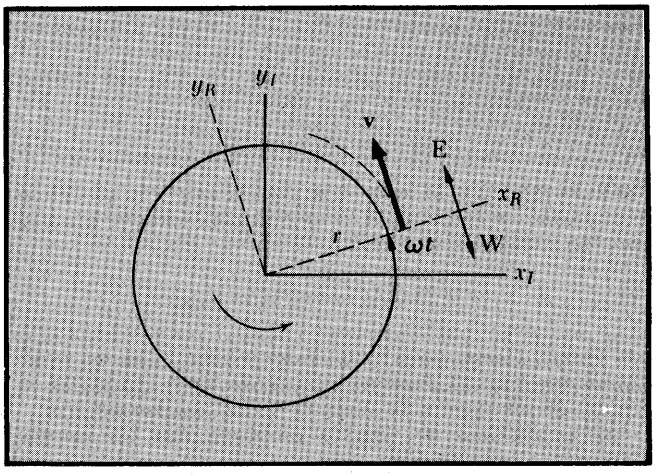


FIG. 4.26 Sistemas inercial y rotatorio de la Tierra vistos desde el espacio por encima del Polo Norte. x_R, y_R están en el plano ecuatorial. El vector **v** es la velocidad de un avión supersónico relativa a la Tierra, volando en una trayectoria «nivelada» hacia el este, como indica la curva punteada. Se indican las direcciones locales este y oeste.

gravedad y de la fuerza ascensional aerodinámica. Por tanto, escribiremos,

$$-\frac{GMm}{r^2}+f=-\frac{m(\omega r+V)^2}{r}=-m\omega^2 r-2m\omega V-\frac{mV^2}{r}$$

en donde f representa la fuerza ascensorial, m la masa del avión y los signos negativos indican que la fuerza o aceleración están dirigidas hacia el centro. Resolviendo para f resulta

$$f=\frac{GMm}{r^2}-m\omega^2 r-2m\omega V-\frac{mV^2}{r}$$

o sea

$$f=mg-2m\omega V-\frac{mV^2}{r}$$

En la segunda expresión se reconoce simplemente que $GMm/r^2-m\omega^2 r$ es la fuerza «de gravedad» efectiva local mg en el ecuador, tal como se describe en la pág. 111 («La Tierra, como sistema de referencia»). Llegamos a la conclusión de que a causa de los efectos combinados de la velocidad respecto a la Tierra del avión y la rotación ésta, la fuerza ascensional requerida es un poco menor que mg debido a los dos últimos términos sustractivos. Si utilizamos el valor de V dado anteriormente, con $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}$ rad/s y $r = 6{,}4 \times 10^8$ cm, encontramos que $2\omega V = 12{,}85$ cm/^{2} y $V^2/r = 12{,}10$ cm/s^2. Estos valores han de restarse de $g = 978$ cm/s^2, aceleración de un objeto que cae en el ecuador. La fuerza ascensional requerida se reduce aproximadamente en un 2,6 por ciento.

Veamos la misma situación desde el punto de vista del sistema de rotación. Utilizaremos la primera ecuación de (4.34) y elegiremos nuestro tiempo en el instante $t = 0$ cuando los ejes de rotación coinciden con los ejes inerciales. La primera ecuación se convierte en

$$\ddot{x}_I=\ddot{x}_R-2\omega\dot{y}_R-\omega^2 x_R$$

Naturalmente, $m\ddot{x}_I$ es igual a la fuerza real F y siguiendo el esquema de la ecuación (4.7) podemos escribir nuestra ecuación actual en la forma

$$F+2m\omega\dot{y}_R+m\omega^2 x_R=m\ddot{x}_R$$

Los términos segundo y tercero del primer miembro constituyen las fuerzas ficticias que deben estar presentes si $m\ddot{x}_R$ ha de ser igual a la suma de todas las fuerzas.

Las condiciones de nuestro problema dan los valores siguientes a las variables

$$x_R=r \qquad \dot{x}_R=0 \qquad \ddot{x}_R=-\frac{V^2}{r}$$

$$y_R=0 \qquad \dot{y}_R=V \qquad \ddot{y}_R=0$$

pues en el sistema rotatorio el avión se mueve en una trayectoria curvada con velocidad V. [Incidentalmente estas condiciones anulan todos los términos de la segunda ecuación de (4.34).] Como antes nuestra fuerza real es

$$F=-\frac{GMm}{r^2}+f$$

donde f es la fuerza de ascensión aerodinámica.

La sustitución de estas expresiones y estos valores en nuestra ecuación nos da

$$-\frac{GMm}{r^2}+f+2m\omega V+m\omega^2 r=-m\frac{V^2}{r}$$

Resolviendo de nuevo para f y escribiendo $GMm/r^2 - -m\omega^2 r = mg$ como antes, tenemos

$$f=mg-2m\omega V-m\frac{V^2}{r}$$

Este resultado coincide con el obtenido desde el punto de vista del sistema inercial. El término $2m\omega V$ es una fuerza de Coriolis; el último término mV^2/r es una fuerza centrífuga debida a la velocidad del avión en su trayectoria curva. La fuerza centrífuga debida a la rotación de la Tierra se ha absorbido en la fuerza local adscrita a la gravedad.

Otro ejemplo (mencionado anteriormente) es el siguiente. Sabemos que en un sistema inercial un cuerpo proyectado desde el centro de rotación se propagará en línea recta hacia fuera:

$$x_I=v_0 t \qquad y_I=0 \qquad z_I=0$$

Esto da en el sistema rotatorio

$$v_0 t=x_R\cos\omega t-y_R\operatorname{sen}\omega t \tag{4.38}$$

$$0=x_R\operatorname{sen}\omega t+y_R\cos\omega t \tag{4.39}$$

Comprobemos que esto satisface las ecuaciones (4.34) con $\ddot{x}_I=0$, $\ddot{y}_I=0$. Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $\cos\omega t$, la segunda por $\operatorname{sen}\omega t$ y sumando, obtenemos

$$\ddot{x}_R-2\omega\dot{y}_R-\omega^2 x_R=0 \tag{4.40}$$

A partir de las ecuaciones (4.38) y (4.39) resulta

$$x_R=v_0 t\cos\omega t \qquad y_R=-v_0 t\operatorname{sen}\omega t$$

y cuando sustituimos éstas en la ecuación (4.40) resulta que ésta se satisface.

Si consideramos el movimiento en tres dimensiones y una dirección arbitraria para el vector velocidad angular resulta

$$\mathbf{a}_I=\mathbf{a}_R+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_R+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\mathbf{F}/M$$

y por tanto,

$$M\mathbf{a}_R=\mathbf{F}-2M\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_R-M\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

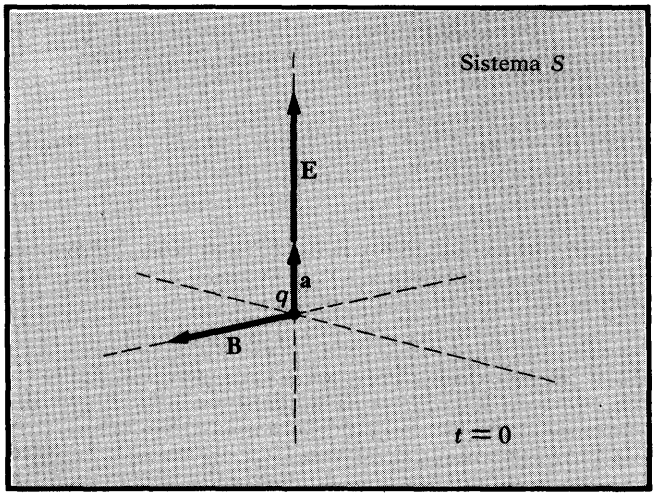
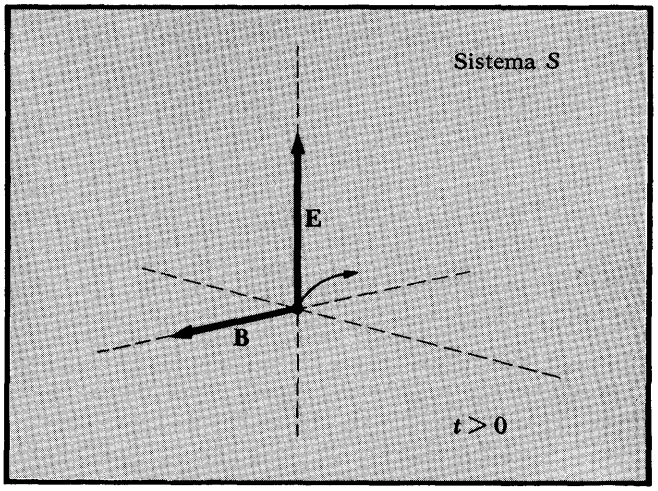
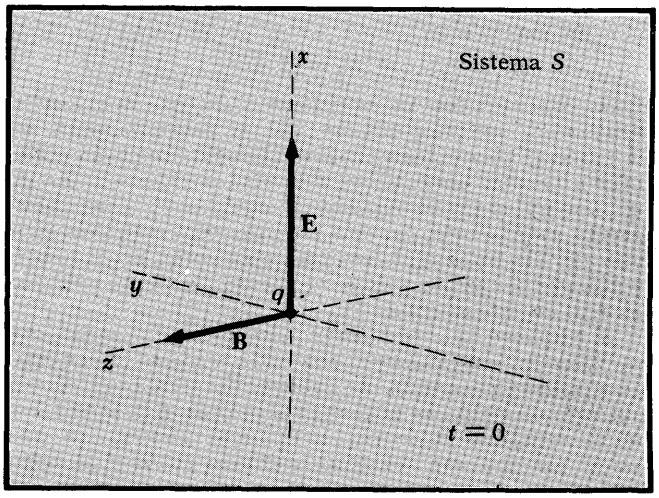


FIG. 4.27 *a*) Consideremos una carga positiva q en reposo en el origen sometida a un campo eléctrico **E** y un campo magnético **B** perpendiculares.



b) La aceleración inicial de q es $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/M$.



c) Tan pronto como q adquiere velocidad en la dirección de **E**, sufre una fuerza $\mathbf{F} = (q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La órbita se curva entonces en la dirección $-y$.

en donde **F** es la fuerza real. Es decir

$$-2M\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R \quad \text{es la fuerza de Coriolis} \tag{4.41}$$

y

$$-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad \text{es la fuerza centrífuga} \tag{4.42}$$

Movimiento de un protón en un campo eléctrico y otro magnético perpendiculares entre sí. Este es un ejemplo importante que puede resolverse con facilidad y su interpretación se hace simplemente mediante una transformación de coordenadas a un sistema móvil. Sean $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$, como se ilustra en la fig. 4.27 *a*. De acuerdo con las definiciones de la fuerza de Lorentz [dadas por la Ec. (3.19)] y de la frecuencia de giro [dada por la ecuación (3.27)] tenemos para las ecuaciones del movimiento de una partícula cargada

$$\dot{v}_x = \frac{e}{M}E + \omega_c v_y \qquad \dot{v}_y = -\omega_c v_x \qquad \dot{v}_z = 0 \tag{4.43}$$

Hay una *solución particular* para estas ecuaciones que describe el movimiento sin aceleración, que se obtiene haciendo $\dot{v}_x = \dot{v}_y = 0$. Entonces

$$v_x = 0 \qquad v_y = -\frac{eE}{M\omega_c} = -c\frac{E}{B} \tag{4.44}$$

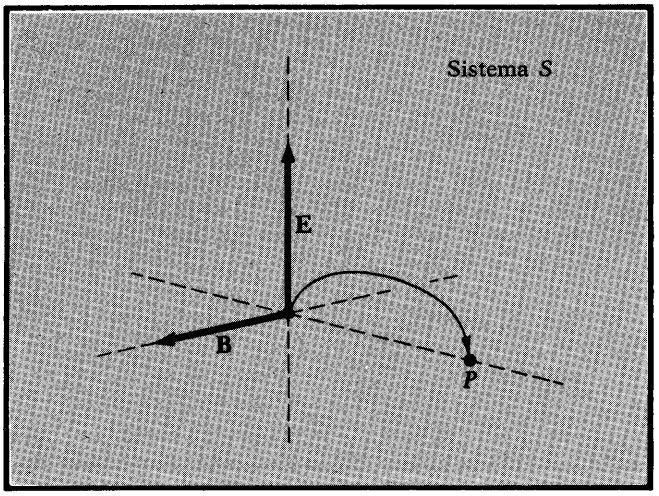
Para una partícula cargada que se mueve con esta velocidad la fuerza neta es nula, pues las fuerzas eléctricas y magnéticas se anulan entre sí. Los campos perpendiculares se utilizan de este modo como un *selector de velocidades* en la investigación atómica y nuclear.

Si transformamos el problema general del movimiento a un sistema de coordenadas S' que se mueve con la velocidad dada por la ecuación (4.44) resulta que en este nuevo sistema la partícula se mueve uniformemente en un círculo. Las transformaciones de las componentes de la velocidad son

$$v_x = v'_x \qquad v_y = -c\frac{E}{B} + v'_y \tag{4.45}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.43) resulta (recordemos que $\omega_c = eB/Mc$)

$$\dot{v}'_x = \omega_c v'_y \qquad \dot{v}'_y = -\omega_c v'_x \tag{4.46}$$



d) *q* finalmente se queda en reposo en *P*, que es un punto del eje *y*. Entonces empieza un nuevo ciclo del movimiento.

Estas coinciden con las ecuaciones (3.24) que describen el movimiento uniforme circular. Así, el comportamiento de la partícula puede describirse simplemente como un movimiento circular uniforme de velocidad angular $\omega_c = Be/Mc$ en el plano $x'y'$ del sistema S' superpuesto a un movimiento estacionario de este sistema, con velocidad $v_y = -cE/B$ relativa al sistema del laboratorio. En S' la partícula «siente» sólo el campo magnético; el campo eléctrico es cero en este sistema.

Si elegimos las condiciones iniciales de tal modo que la partícula cargada está momentáneamente en reposo en el origen del sistema del laboratorio para $t = 0$, el movimiento subsiguiente es el de una cicloide. Este movimiento es semejante al de un punto de la periferia de una rueda que gira con velocidad uniforme cE/B a lo largo del eje y negativo *. A continuación demostramos este hecho, ilustrado en las figs. 4.27 *a*, *b*, *c* y *d*.

En S' las condiciones iniciales de velocidad correspondientes a la velocidad cero en el sistema de laboratorio son $v'_x = 0$ y $v'_y = cE/B$. Las soluciones de las ecuaciones (4.46) que satisfacen esta condición inicial son

$$v'_x = c\frac{E}{B}\operatorname{sen}\omega_c t \qquad v'_y = c\frac{E}{B}\cos\omega_c t \tag{4.47}$$

Estas representan un movimiento circular uniforme de igual sentido que las agujas del reloj cuando se observan desde una posición sobre el eje z' positivo, con velocidad angular ω_c y radio

$$r = \frac{cE}{\omega_c B} \tag{4.48}$$

(*) Si la partícula posee una velocidad inicial su movimiento será el de un punto interior o exterior a la periferia de la rueda.

Cuando se transforma en el sistema de laboratorio, las ecuaciones (4.47), teniendo en cuenta la ecuación (4.45) nos ofrecen

$$v_x = \frac{dx}{dt} = c\frac{E}{B}\operatorname{sen}\omega_c t \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = c\frac{E}{B}(-1 + \cos\omega_c t) \tag{4.49}$$

La integración de las ecuaciones (4.49) con condiciones iniciales $x = y = 0$ para $t = 0$ y teniendo en cuenta (4.48) nos da

$$x = r(1 - \cos\omega_c t) \qquad y = r(-\omega_c t + \operatorname{sen}\omega_c t)$$

Estas son precisamente las ecuaciones del movimiento de un punto de la periferia de un disco de radio r que gira en la dirección del eje y negativo (véase fig. 4.28 *a* y *b*). Utilizando unidades SI la velocidad del sistema móvil es $-E/B$ y, naturalmente, $\omega_c = eB/M$. La ecuación (4.48) se convierte en

$$r = \frac{E}{\omega_c B} = \frac{ME}{eB^2}$$

La descripción del movimiento es la misma.

NOTA MATEMÁTICA

Derivada del producto de vectores. En el Cap. 2 consideramos la derivada vectorial; recordemos en particular que si

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

entonces

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\hat{\mathbf{x}} + \dot{y}\hat{\mathbf{y}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}}$$

siempre que los vectores unitarios de referencia sean constantes.

Derivemos ahora la relación

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}}$$

Designemos el producto $\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)$ por $\mathbf{P}(t)$ y consideremos la expresión

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t) &= \mathbf{A}(t + \Delta t) \times \mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) \\ &\approx \left[\mathbf{A}(t) + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\Delta t\right] \times \left[\mathbf{B}(t) + \frac{d\mathbf{B}}{dt}\Delta t\right] - \mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) \\ &= \Delta t\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\right] + (\Delta t)^2\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\right]\end{aligned}$$

Así, pues, se tiene

$$\dot{\mathbf{P}} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}}$$

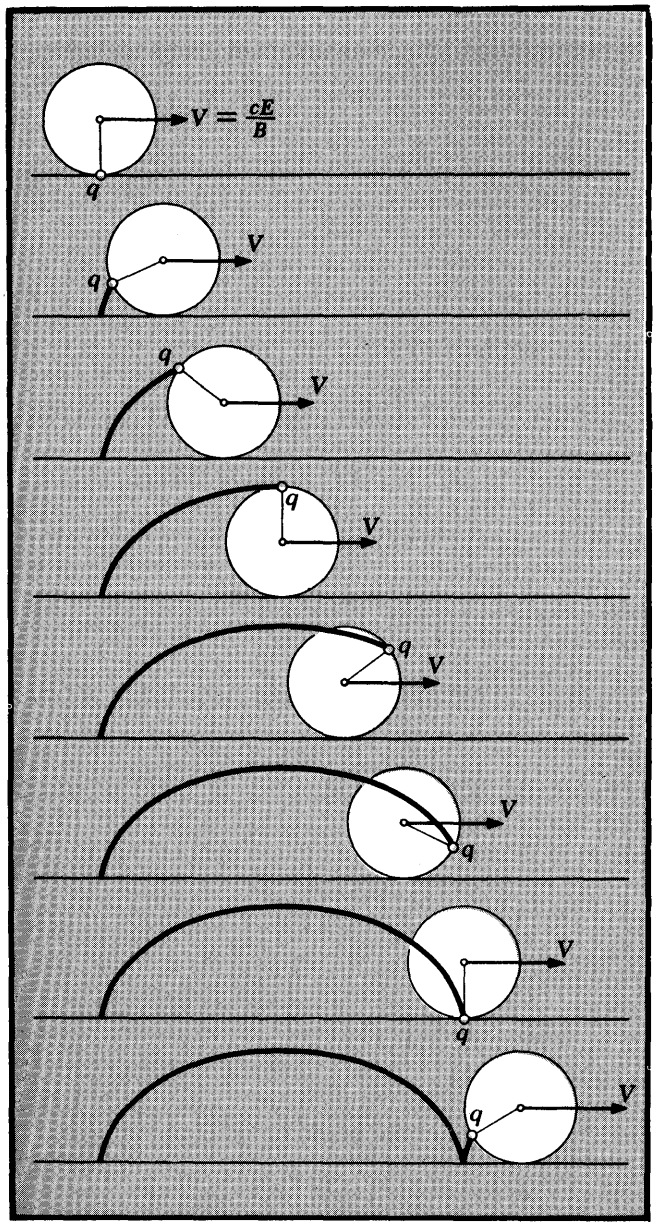
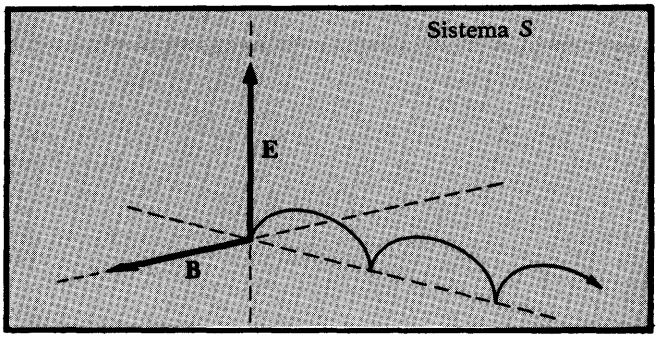


FIG. 4.28 *a*) La órbita es una cicloide común (si la partícula parte de reposo) y q posee una velocidad media hacia la derecha: $V = cE/B$. Obsérvese que la dirección de la velocidad media cE/B coincide con la dirección $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. En el segundo Tema Avanzado, $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = E\hat{\mathbf{x}} \times B\hat{\mathbf{z}} = -EB\hat{\mathbf{y}}$, que es el resultado de las Ecs. (4.44) y (4.45).



b) La cicloide común se genera por q, situada en una circunferencia que rueda sobre una línea recta.

Obsérvese que el orden de los factores en el producto vectorial es importante para el resultado.

Por un razonamiento semejante tendremos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}}$$

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

PSSC, *Física,* Caps. 20 (secs. 9-11), 22, Ed. Reverté, S. A.

Ernst Mach, *The Science of Mechanics,* cap. 2, sec. 6, The Open Court Publishing Company, La Salle, Ill., 1960.

Collier's Encyclopedia, 1964. Una discusión elemental excelente del péndulo de Foucault, puede leerse bajo el epígrafe de Foucault.

Mary Hesse, Resource Letter on Philosophical Foundations of Classical Mechanics, *Am. J. Phys.* **32**:905 (1964). Esta es una lista muy completa de trabajos.

Contenido

LEYES DE CONSERVACIÓN DEL MUNDO FÍSICO
DEFINICIÓN DE CONCEPTOS
Ejemplo. Movimiento libre de un cuerpo proyectado hacia arriba
Conservación de la energía
Trabajo
Energía cinética
Ejemplo. Caída libre
Energía potencial
Ejemplo. Fuerza restauradora lineal; transformaciones entre la energía cinética y la potencial
Ejemplo. Conversión de energía en una cascada
Ejemplo. Transformaciones de energía en el salto de pértiga

FUERZAS CONSERVATIVAS
Energía potencial y conservación de la energía en campos gravitatorios y eléctricos
Ejemplo. Velocidad de escape desde la Tierra y desde el sistema solar
Ejemplo. Potencial gravitatorio próximo a la superficie de la Tierra
Ejemplo. Movimiento de proyectiles
Ejemplos:
- Campo electrostático
- Potencial
- Diferencia de potencial
- Energía de la partícula cargada deducida de la diferencia de potencial
- Aceleración de un protón en un campo eléctrico uniforme

Ejemplo. Electrón-volt

POTENCIA
Problemas
Notas históricas:
- Descubrimiento de Ceres
- Descubrimiento de Neptuno

Lecturas suplementarias

5

Conservación de la energía

LEYES DE CONSERVACIÓN DEL MUNDO FÍSICO

En el mundo físico existe un cierto número de leyes de conservación, algunas de las cuales son exactas y otras aproximadas. Una ley de conservación es normalmente la consecuencia de una simetría fundamental del universo. Existen leyes de conservación relativas a la energía, a la cantidad de movimiento, al momento cinético, a la carga, al número de bariones (protones, neutrones y partículas elementales más pesadas), extrañeza y otras diversas magnitudes. En los Caps. 3 y 4 discutimos la conservación de la cantidad de movimiento lineal. Discutiremos la conservación de la energía en este capítulo. En el siguiente trataremos de la conservación y uso del momento cinético. La discusión completa se ceñirá de momento al régimen no relativista, lo cual equivale a restringirse a las transformaciones galileanas, a velocidades mucho menores que las de la luz y a la independencia entre la masa y la energía. En el Cap. 12, después de discutir la transformación de Lorentz y la relatividad restringida, daremos las formas apropiadas de las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento en el régimen relativista.

Si se conocen todas las fuerzas que intervienen en un problema y si somos lo suficientemente hábiles y tenemos calculadoras de adecuada velocidad y capacidad para obtener las trayectorias de todas las partículas, entonces las leyes de la conservación no nos dan ninguna información adicional. Pero constituyen una herramienta muy poderosa que los físicos utilizan diariamente. ¿Por qué dichas leyes de conservación son herramientas de tanta utilidad?

1. Las leyes de conservación son independientes de los detalles de la trayectoria y, a menudo, de los detalles de una fuerza particular. Estas leyes, por consiguiente, son un procedimiento de obtener consecuencias muy generales y significativas de las ecuaciones del movimiento. Una ley de conservación puede asegurarnos a veces que algo es imposible. Por lo tanto, no perderemos tiempo en analizar un pretendido aparato de movimiento perpetuo, si es simplemente un sistema cerrado formado por componentes mecánicos y eléctricos, o un esquema de propulsión de satélites, el cual da a entender que trabaja moviendo pesos internos.

2. Las leyes de conservación pueden utilizarse aun cuando no se conozca la fuerza; esto se aplica particularmente a la física de las partículas elementales.

3. Las leyes de conservación tienen una conexión íntima con la invarianza. En la exploración de fenómenos nuevos y aún sin comprender, las leyes de conservación son con frecuencia el hecho físico más importante que conocemos y pueden sugerirnos conceptos de invarianza apropiados. En el Cap. 4 vimos que la conservación de la cantidad de movimiento podría interpretarse como una consecuencia del principio de la invarianza galileana.

4. Aun cuando se conozca exactamente la fuerza, una ley de conservación puede constituir una ayuda conveniente para obtener el movimiento de una partícula. Muchos físicos tienen una rutina normal para resolver problemas desconocidos: Primero utilizan las leyes de la conservación más importantes una por una; únicamente después de esto, si no han contribuido a desvelar el problema, empiezan el trabajo real con ecuaciones diferenciales, métodos variacionales y de perturbaciones, calculadoras, intuición y demás instrumentos a nuestra disposición. En los Caps. 7 a 9 haremos uso de las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento de este modo.

DEFINICIÓN DE CONCEPTOS

La ley de la conservación de la energía comprende los conceptos de *energía cinética, energía potencial y trabajo.* Estos conceptos, que pueden comprenderse con un ejemplo sencillo, surgen de modo natural de la segunda ley de Newton y se tratarán con más detalle posteriormente. Para empezar trataremos el caso de fuerzas y movimientos en una sola dimensión. Esto simplifica la notación. La mayoría de los temas de este capítulo se tratarán para las tres dimensiones; su repetición puede ser útil.

Para desarrollar los conceptos de trabajo y energía cinética consideremos una partícula de masa M flotando en el espacio intergaláctico y libre de todas las interacciones externas. Observemos la partícula desde un sistema de referencia inercial. Se aplica una fuerza $\mathbf{F}$ a la partícula en el instante $t = 0$. La fuerza, por tanto, se mantiene constante en magnitud y dirección. Se toma su dirección como eje y. La partícula se acelerará bajo la acción de la fuerza aplicada. El movimiento para cualquier instante $t > 0$ viene descrito por la segunda ley de Newton

$$F = M\frac{d^2y}{dt^2} = M\ddot{y} * \tag{5.1}$$

Así, pues, la velocidad después del tiempo t es

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t \ddot{y}\, dt = \int_0^t \frac{F}{M} dt$$

o sea

$$v - v_0 = \frac{F}{M}t \tag{5.2}$$

en donde v_0 es la velocidad inicial, que suponemos coincide con la dirección y.

Obsérvese que (5.2) puede escribirse como

$$Ft = Mv(t) - Mv_0$$

El segundo miembro es la variación de la cantidad de movimiento de la partícula entre 0 y t; el primero es la magnitud denominada *impulso* de la fuerza entre los mismos instantes. En el caso que F sea muy grande, pero el tiempo sobre el que actúa muy corto, puede ser conveniente definir el impulso del modo siguiente:

$$\text{Impulso} = \int_0^t F dt = \Delta(Mv) \tag{5.3}$$

La Ec. (5.3) nos dice que la variación de la cantidad de movimiento es igual al impulso **.

Si la posición inicial es y_0, integrando la Ec. (5.2), respecto al tiempo resulta

$$y(t) - y_0 = \int_0^t v(t)\, dt = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{M}t\right) dt = v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2 \tag{5.4}$$

Resolviendo la ecuación (5.2) para el tiempo t

$$t = \frac{M}{F}(v - v_0) \tag{5.5}$$

Sustituyendo ahora la Ec. (5.5) en la (5.4) se obtiene

$$y - y_0 = \frac{M}{F}(vv_0 - v_0^2) + \frac{1}{2}\frac{M}{F}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{M}{F}(v^2 - v_0^2)$$

(*) Utilizamos y en lugar de x o z simplemente por conveniencia para aplicar los resultados al campo gravitatorio constante, para el cual utilizamos y en el Cap. 3.

(**) Cursos más avanzados de mecánica tratan frecuentemente el impulso. El Problema 16 de este Capítulo y el Problema 10 del Capítulo 8, utilizan dicho concepto.

y, por tanto,

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 - \tfrac{1}{2}Mv_0^2 = F \times (y - y_0) \qquad (5.6)$$

Si llamamos a $1/2\ Mv^2$ *energía cinética* de la partícula, es decir, la energía que posee en virtud de su movimiento, entonces el primer miembro en la Ec. (5.6) es la variación de la energía cinética. Dicha variación está originada por la fuerza F, que actúa a lo largo de la distancia $(y - y_0)$. Constituye evidentemente una buena definición de *trabajo* considerar a $F \times (y - y_0)$ como el *trabajo realizado por la fuerza aplicada sobre la partícula.* Con estas definiciones la Ec. (5.6) puede expresarse diciendo que el trabajo realizado por la fuerza aplicada es igual a la variación de la energía cinética de la partícula. Todo ello es consecuencia de las definiciones, pero éstas son útiles y están de acuerdo con la segunda ley de Newton.

Si $M = 20$ g y $v = 100$ cm/s, la energía cinética

$$Ec = \tfrac{1}{2}Mv^2 = \tfrac{1}{2}(20)(10^4) = 1 \times 10^5 \text{ g-cm}^2/\text{s}^2$$
$$= 1 \times 10^5 \text{ ergs}$$

El *ergio* es la unidad de energía en el sistema cgs de unidades. Si una fuerza de 100 dinas se aplica a lo largo de una distancia de 10^3 cm,

$$F(y - y_0) = (10^2)(10^3) = 10^5 \text{ dina-cm} = 10^5 \text{ ergs}$$

Un ergio es la cantidad de trabajo realizado por una fuerza de una dina que actúa a lo largo de un centímetro. El trabajo tiene las dimensiones

$$[\text{Trabajo}] \sim [\text{fuerza}][\text{distancia}] \sim [\text{masa}][\text{aceleración}][\text{distancia}] \sim [\text{masa}][\text{velocidad}]^2 \sim$$

$$\left[M\frac{L}{T^2}L\right] \sim [ML^2T^{-2}] \sim [\text{energía}]$$

En el Sistema Internacional la unidad es el *julio,* que es el trabajo realizado por una fuerza de un newton actuando a lo largo de un metro. Para convertir julios en ergios, multiplíquese por 10^7 el valor del trabajo expresado en julios, pues como vimos en el Cap. 3, $1\text{ N} = 10^5$ dinas y $1\text{ m} = 10^2$ cm. En el ejemplo anterior de energía cinética, $M = 0{,}020$ kg, $v = 1$ m/s y $Ec = 1/2\ (0{,}02 \times 10^2) = 1 \times 10^{-2}$ J.

Al hablar de trabajo debemos especificar siempre el *trabajo realizado por algo.* En el caso anterior, el trabajo está realizado por la fuerza que acelera la partí-

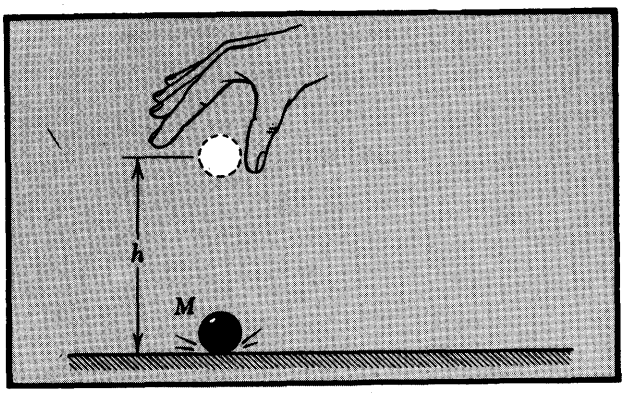


FIG. 5.1 Al caer desde la altura h, partiendo del reposo, la fuerza de la gravedad realiza el trabajo Mgh, que es igual a la energía cinética engendrada.

cula. Estas fuerzas son a menudo partes integrales del sistema que estamos analizando; por ejemplo, pueden ser gravitatorias, eléctricas o magnéticas. Más tarde, cuando estudiemos la energía potencial, les llamaremos *fuerzas del campo* o *fuerzas del sistema*; pero podemos considerar también fuerzas aplicadas por un agente externo (quizás nosotros mismos) y será importante distinguir entre el trabajo realizado por las fuerzas del campo y el trabajo realizado por el agente. Por ejemplo, si el agente aplica una fuerza siempre igual y opuesta a la fuerza del campo, entonces la partícula no será acelerada y no se producirá ningún cambio de energía cinética. El trabajo realizado por la fuerza del campo es exactamente **neutralizado** por el trabajo realizado por el agente, como es lógico, ya que $F_{ag} = -F$. (Es importante tener en cuenta que hemos excluido los efectos de las fuerzas de rozamiento en la discusión actual; utilizamos situaciones ideales para establecer nuestras definiciones y conceptos.)

Consideremos ahora un cuerpo (partícula), no en el espacio intergaláctico, sino liberado desde una altura h por encima de la superficie de la Tierra ($y_0 = h$, $v_0 = 0$). La fuerza gravitatoria $F_G = -Mg$ tira hacia abajo del cuerpo. Cuando el cuerpo cae hacia la superficie de la Tierra, el trabajo realizado por la gravedad es igual al aumento en energía cinética del cuerpo (véase fig. 5.1):

$$W\text{ (por la gravedad)} = F_G \times (y - y_0)$$

o, en la superficie de la Tierra ($y = 0$),

$$\begin{aligned} W\text{ (por la gravedad)} &= (-Mg)(0 - h) = Mgh \\ &= \tfrac{1}{2}Mv^2 - \tfrac{1}{2}Mv_0{}^2 = \tfrac{1}{2}Mv^2 \end{aligned} \qquad (5.7)$$

en donde v es la velocidad del cuerpo al alcanzar la superficie de la Tierra. La Ec. (5.7) sugiere que a la altura h el cuerpo tiene *energía potencial* (capacidad para realizar trabajo o adquirir energía cinética) de valor Mgh respecto a la superficie terrestre.

¿Qué le sucede a la energía potencial cuando una partícula en reposo sobre la superficie de la Tierra se eleva hasta una altura h? Para elevar el cuerpo debemos aplicar al cuerpo una fuerza hacia arriba $F_{ag} (= -F_G)$. Ahora $y_0 = 0$, $x = h$. Realizaremos el trabajo

$$\begin{aligned} W\text{ (por nosotros)} &= \\ &= F_{ag} \times (y - y_0) = (Mg)(h) = Mgh \end{aligned} \qquad (5.8)$$

sobre el cuerpo, por lo que le daremos a éste la energía potencial Mgh que, como dijimos anteriormente, tiene a la altura h (véanse figs. 2.5 *a* a *c*).Obsérvese que la fuerza ejercida por *nosotros* se llama F_{ag}; en otras palabras, existe identidad entre nosotros y el agente externo. Es importante recordar que aquí un agente externo se introduce conceptualmente en el problema sólo con el propósito de evaluar la energía potencial.

En ausencia de las fuerzas de rozamiento puede formularse ahora una definición específica de la energía potencial de un cuerpo (partícula) en un punto de interés: *La energía potencial es el trabajo que realizamos al mover el cuerpo sin aceleración desde una posición inicial, asignada arbitrariamente con valor cero, hasta el punto de interés.* Conviene hacer unos comentarios al respecto para una mejor comprensión. Podemos libremente asignar el cero de energía potencial según nuestra conveniencia, y así el valor del punto que nos interesa será siempre relativo respecto a este origen. Posiblemente existen fuerzas de campo que actúan sobre el cuerpo y para moverlo sin aceleración debemos ejercer una fuerza igual y opuesta a su fuerza resultante. Bajo esta condición movemos el cuerpo sin aceleración *desde la posición cero hasta el punto en que deseamos evaluar la energía potencial.* El trabajo realizado es igual a la energía potencial. Como en ausencia de rozamiento la fuerza que aplicamos es siempre igual y opuesta a las fuerzas de campo presentes en el problema, el trabajo que realizamos es igual y opuesto al efectuado por estas fuerzas. Por tanto, podemos igualmente definir la energía potencial como el trabajo realizado por las fuerzas presentes en el problema, las fuerzas del campo, para mover el sistema en la dirección opuesta, *desde el punto en consideración al cero arbitrario.* Por ejemplo, el trabajo realizado por la gravedad [Ec. (5.7)] sobre el cuerpo que cae es igual al trabajo que hacemos [Ec. (5.8)] en contra de la gravedad para elevar el cuerpo.

Igualmente válida es la definición de energía potencial positiva en un punto como la energía cinética engendrada por las fuerzas en el movimiento libre del cuerpo hasta el cero arbitrario (fig. 5.1). Esta definición no se aplica a aquellos casos en los que la energía potencial es negativa respecto al cero; pero una modificación obvia de la definición es válida. Al final del capítulo se da un ejemplo.

Conviene destacar otros dos puntos. En primer lugar, la energía potencial es puramente una función de la posición, es decir, de las coordenadas del cuerpo o sis-

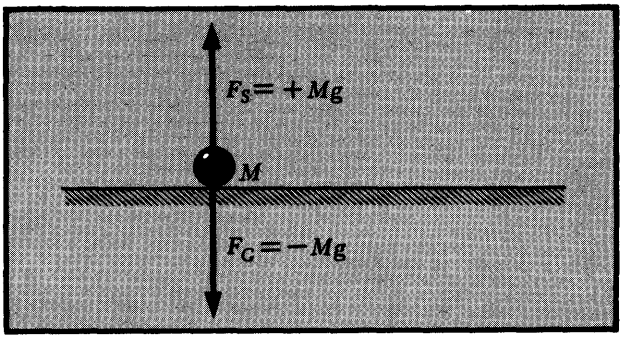
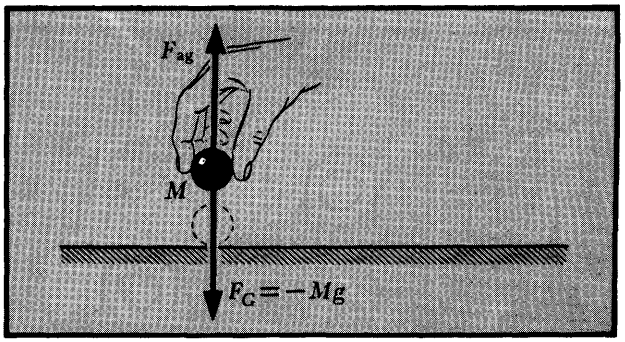
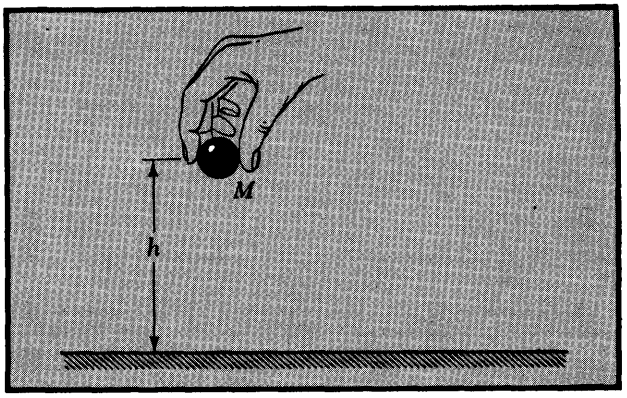


FIG. 5.2 *a*) Una masa M en reposo sobre la superficie de la Tierra experimenta dos fuerzas iguales y opuestas: F_G, la fuerza gravitatoria de atracción, y F_S, la fuerza ejercida sobre M por la superficie de apoyo.



b) Para elevar M a velocidad constante se necesita una fuerza aplicada $F_{ag} = +Mg$.



c) La cantidad de trabajo realizado al elevar M hasta la altura h es $W = F_{ag} \times h = +Mgh$. La energía potencial U de la masa M se ha incrementado por ello en la cantidad Mgh.

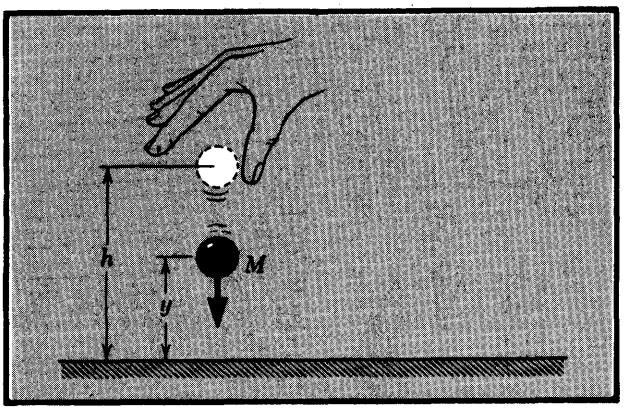


FIG. 5.3 Si la masa se suelta, la energía potencial U disminuye y la cinética Ec aumenta, pero su suma permanece constante. A la altura y, $U(y) = Mgy$ y $Ec(y) = \frac{1}{2}Mv(y)^2 = Mg(h - y)$.

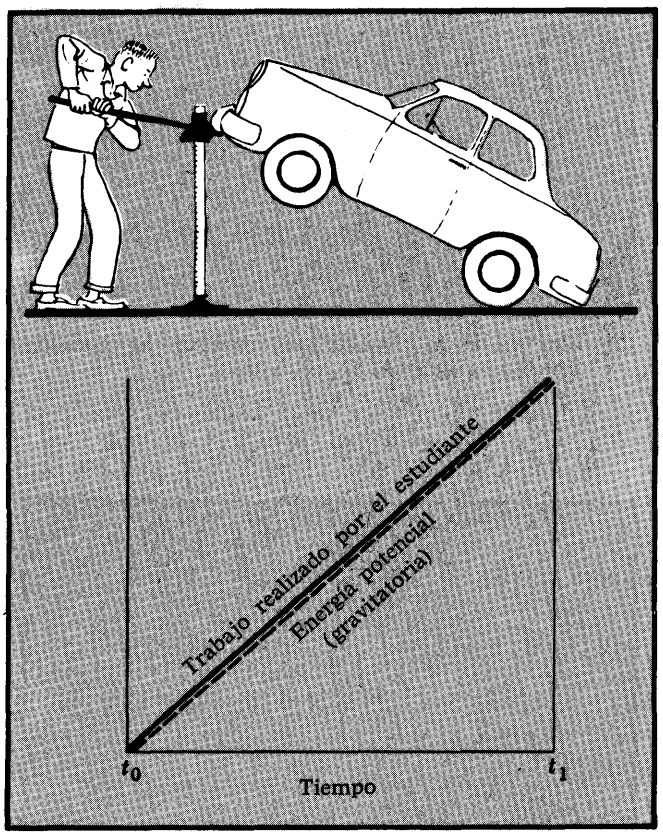


FIG. 5.4 *a*) Trabajo realizado por un estudiante en función del tiempo empleado en alzar, mediante un gato, un coche para cambiar la rueda. [El trabajo realizado sobre un coche pequeño de 1 000 kg para elevar su centro de masa 10 cm, será $Fh = Mgh \approx (10^3 \times 10^3\ \text{g}) \times (10^3\ \text{cm/s}^2)\ (10\ \text{cm}) = 10^{10}$ ergs.] El trabajo realizado aparece en forma de energía potencial gravitatoria.

tema *. En segundo lugar, el punto origen debe especificarse siempre. Es sólo el *cambio* en energía potencial el que tiene significado; por ejemplo, puede convertirse en energía cinética o, al revés, creada a expensas de ésta. El valor absoluto de la energía potencial no tiene significado. Como esto es cierto, la elección del origen es arbitraria, por ejemplo, la superficie de la Tierra, el plano de una mesa, etc.; *cualquier otro* cero daría la misma respuesta a una pregunta de física.

Las unidades $[F][L] = [M][L^2]/[T^2]$ de la energía potencial son las mismas que las de la energía cinética. Si $F_{ag} = 10^3$ dinas y $h = 10^2$ cm, la energía potencial es $(10^3)(10^2) = 10^5$ dinas-cm $= 10^5$ ergs, o en unidades S.I., $10^{-2} \times 1{,}0 = 10^{-2}$ J. Designaremos la energía potencial por U o por E.P. Si en la Ec. (5.7) designamos por v, no la velocidad después de caer una distancia h, sino la velocidad después de haber caído una distancia $(h - y)$, entonces la ecuación análoga a la (5.7) es

$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mg(h - y)$$

o

$$\frac{1}{2}Mv^2 + Mgy = Mgh = E \tag{5.9}$$

en donde E es una constante que tiene el valor Mgh (fig. 5.3). Como E es una constante, tendremos en la Ec. (5.9) un enunciado de *la ley de la conservación de la energía:*

$$E = Ec + U$$

$$= \text{energía cinética} + \text{energía potencial} = \text{constante}$$

$$= \text{energía total.}$$

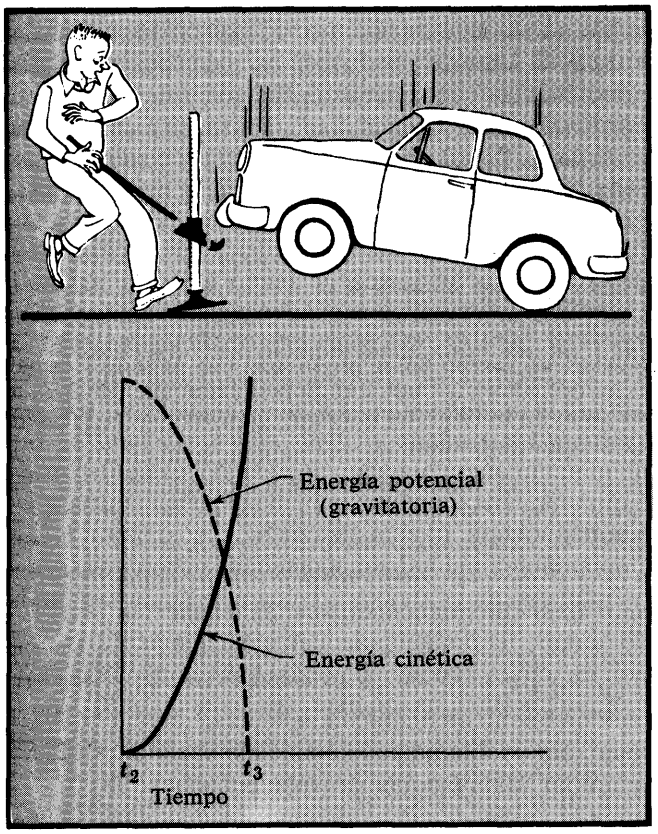
En la Ec. (5.9) el término Mgy es la energía potencial, en donde hemos escogido $y = 0$ como cero de la energía potencial. El símbolo E designa la energía total, que es constante con el tiempo para un sistema aislado (figuras 5.4 *a* y *b* y 5.5 *a* y *b*).

Supongamos que elegimos el cero de energía potencial para $y = -H$. Entonces tendríamos

$$E' = Ec + U = \frac{1}{2}Mv^2 + Mg(y + H) = Mg(h + H)$$

que se reduce a la Ec. (5.9) por sustracción de MgH a cada miembro y nos confirma que el cero de energía potencial no altera la situación.

(*) En problemas más complicados el alumno puede encontrar funciones útiles como la energía potencial que incluye otras magnitudes.



b) Aquí, el gato ha resbalado y el coche cae bruscamente. La energía potencial se ha convertido en cinética. Después que el coche hace contacto con el suelo, la energía cinética se convierte en calor en los amortiguadores, muelles y ruedas.

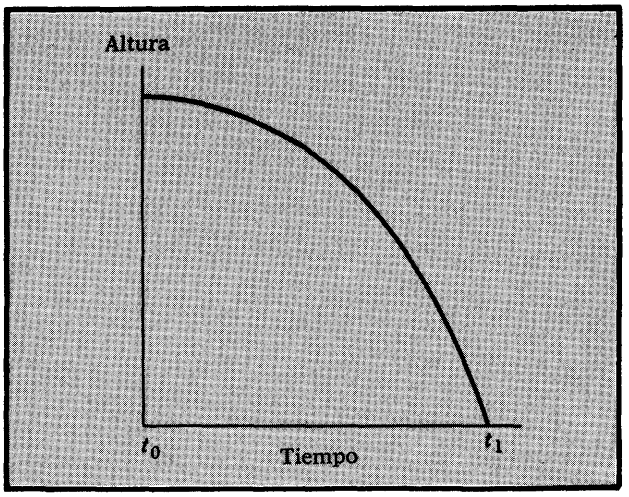
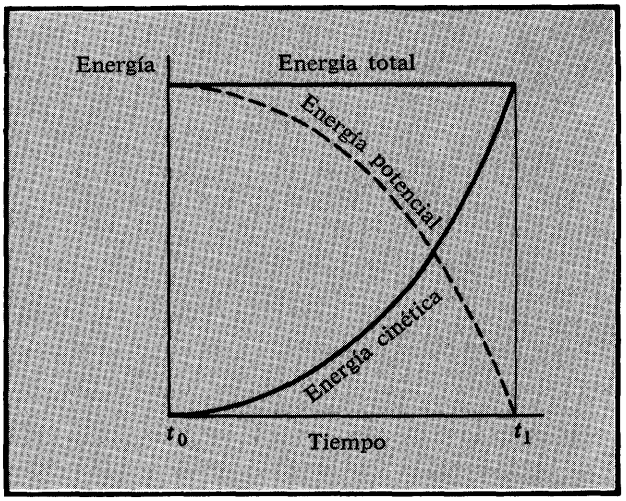


FIG. 5.5 *a*) La altura en función del tiempo de un cuerpo que cae hacia tierra, partiendo del reposo.

A veces es conveniente llamar *función energía* $E = Ec + U$, a la suma de las contribuciones de las energías cinética y potencial. La contribución de la energía cinética Ec es igual a $\frac{1}{2}Mv^2$. La energía potencial depende del campo de fuerza que actúa y tiene la propiedad esencial de que $-\int F\,dx = U$, la cual es una expresión del trabajo en el caso de que la fuerza del campo F sea una función de la posición y. Entonces

$$F = -\frac{dU}{dy} \tag{5.10}$$

en donde F, la fuerza que actúa sobre la partícula, resulta de interacciones intrínsecas, como las eléctricas o gravitatorias y es lo que hemos denominado *fuerza del campo* o *fuerza del problema.* (En el ejemplo anterior, $U = Mgy$, de modo que $F = F_G = -Mg$.)



b) Energía potencial y cinética de un cuerpo que cae en función del tiempo. La energía total, que es constante, es suma de las energías cinética y potencial.

La Ec. (5.10) ilustra las *fuerzas del campo*. U define un campo de energía potencial; es una función escalar de y. Las fuerzas son derivables de esta función de campo. Obsérvese aquí que el cero aparecerá en U como una constante, de tal modo que cuando la fuerza se deriva de la Ec. (5.10), su valor es el mismo independientemente de la constante.

EJEMPLO

Movimiento libre de un cuerpo proyectado hacia arriba. Si proyectamos un cuerpo hacia arriba con una velocidad de 1000 cm/s, ¿a qué altura se elevará? Supongamos que el nivel de proyección es la posición de la energía potencial cero. Entonces, en el punto del lanzamiento

$$E = 0 + \tfrac{1}{2}Mv^2 = \tfrac{1}{2}M \times 10^6 \text{ ergs}$$

En la altura máxima $v = 0$ y, por tanto,

$$E = Mgh$$

Igualando estas dos expresiones para E, resulta

$$h = \frac{v^2}{2g} \approx \frac{10^6}{2{,}10^3} \approx 500 \text{ cm} \quad \text{o en unidades SI} \quad \approx \frac{10^2}{2{,}10} \approx 5 \text{ m}$$

Resolver este problema por el método dado en el Cap. 3 y comprobar las ventajas de este enfoque.

Conservación de la energía. A continuación procedemos a desarrollar estas ideas en tres dimensiones, de modo que podemos usarlas con toda generalidad. La ley de la conservación de la energía establece que para un sistema de partículas cuyas interacciones no son explícitamente * dependientes del tiempo, *la energía total del sistema es constante.* Aceptaremos este resultado como un hecho experimental muy bien establecido. Más específicamente, la ley nos dice que existe alguna función escalar [como la función $\frac{1}{2}Mv^2 + Mgy$ en la Ec. (5.9)] de las posiciones y de la velocidad de las partículas constituyentes que es invariante respecto a un cambio en el tiempo, con tal que no haya un cambio explícito en las interacciones externas durante el intervalo de tiempo considerado. Por ejemplo, la masa m o la carga elemental e no debe variar con el tiempo. Además de la función energía, existen otras funciones que son constantes en las condiciones especificadas aquí. (Trataremos otras funciones en el Cap. 6 bajo el epígrafe de *Conservación de la*

(*) Consideremos el sistema con las partículas permanentemente fijas o congeladas en su lugar; entonces una fuerza que dependa del tiempo se dice que depende *explícitamente* del tiempo.

cantidad de movimiento y del momento cinético.) La energía es una constante escalar del movimiento. Interpretaremos la frase *interacción externa* para incluir cualquier variación en las leyes de la física o en los valores de las constantes físicas fundamentales (como g, e o m) durante el intervalo de tiempo que interesa, así como cualquier cambio en las condiciones externas, como los campos gravitatorio, eléctrico o magnético. Recuérdese que la ley no nos da ninguna nueva información que no esté contenida en las ecuaciones del movimiento $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$. En este tratamiento no consideramos cambios de energía de la forma mecánica (cinética y potencial) a la forma calorífica. Por ejemplo, omitimos fuerzas de rozamiento; éstas no son lo que más tarde definiremos como fuerzas conservativas.

El problema central consiste en encontrar una expresión para la función energía que tenga la deseada invarianza respecto al tiempo y que sea consistente con $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$. Por consistente, queremos decir que, por ejemplo,

$$\frac{d}{dy}E \equiv \frac{d}{dy}(Ec + U) = \frac{dEc}{dy} - F_y = 0$$

es idéntica con $F_y = Ma_y$. Puede comprobarse esto mediante (5.9), resultando

$$Mv\frac{dv}{dy} + Mg = M\frac{dy}{dt}\frac{dv}{dy} + Mg = M\frac{dv}{dt} + Mg = 0$$

o sea

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg$$

Desde un punto de vista más avanzado este establecimiento de la función energética correcta es el problema fundamental de la mecánica clásica y su resolución formal puede realizarse de muchas maneras, algunas muy elegantes. La formulación hamiltoniana de la mecánica, en particular, es muy adecuada para su nueva interpretación en el lenguaje de la mecánica cuántica. Pero aquí, al principio de nuestro curso, necesitamos una formulación directa sencilla más que la generalidad de las formulaciones lagrangiana o hamiltoniana, que normalmente son tema de cursos posteriores *.

Trabajo. Definimos el trabajo W realizado sobre una partícula por una fuerza aplicada constante $\mathbf{F}$ en un desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ como

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = F\,\Delta r \cos(\mathbf{F}, \Delta\mathbf{r})$$

(*) La deducción de las ecuaciones lagrangianas del movimiento exige el conocimiento de varios resultados elementales del cálculo de variaciones.

de conformidad con la definición (5.6) que dimos anteriormente. Supongamos que **F** no es constante, sino que se trata de una función **F**(**r**) de la posición **r**. Si la trayectoria puede descomponerse en N segmentos lineales en cada uno de los cuales **F**(**r**) es constante, podemos escribir

$$W = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) \cdot \Delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}(\mathbf{r}_2) \cdot \Delta\mathbf{r}_2 + \cdots \mathbf{F}(r_N) \cdot \Delta\mathbf{r}_N$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta\mathbf{r}_j \qquad (5.11)$$

en donde el símbolo $\sum$ reemplaza a la suma indicada. La Ec. (5.11) es estrictamente válida sólo en el límite de los desplazamientos infinitesimales $d\mathbf{r}$, porque en general una trayectoria curva no puede descomponerse exactamente en un número finito de segmentos rectilíneos.

El límite

$$\lim_{\Delta\mathbf{r}_j \to 0} \sum_j \mathbf{F}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta\mathbf{r}_j = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

es la integral de la proyección de **F**(**r**) sobre el vector desplazamiento $d\mathbf{r}$ y se denomina *integral curvilínea* de **F** desde A a B. El trabajo realizado en el desplazamiento por la fuerza aplicada se define como

$$\boxed{W(A \to B) \equiv \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}} \qquad (5.12)$$

en donde los límites A y B corresponden a las posiciones $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$.

Energía cinética. Volvamos de nuevo a la partícula libre sujeta a la acción de las fuerzas. Nuestra intención es generalizar (5.6)

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 - \tfrac{1}{2}Mv_0^2 = \mathbf{F} \times (y - y_0)$$

para incluir las fuerzas aplicadas que varían en dirección y módulo, pero se conocen como funciones de la posición en toda la región donde ocurra el movimiento. Sustituyendo $\mathbf{F} = M\, d\mathbf{v}/dt$ en la Ec. (5.12), en donde **F** es la suma vectorial de las fuerzas, encontramos para el trabajo realizado por estas fuerzas

$$W(A \to B) = M \int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \qquad (5.13)$$

Ahora

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \mathbf{v}\,dt$$

de modo que

$$W(A \rightarrow B) = M\int_A^B \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\right)dt \qquad (5.14)$$

en donde los límites A y B corresponden a los tiempos t_A y t_B cuando la partícula está en las posiciones designadas por A y B.

Reordenando el integrando resulta

$$\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}$$

de modo que

$$2\int_A^B \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\right)dt = \int_A^B \left(\frac{d}{dt}v^2\right)dt = \int_A^B d(v^2) = v_B{}^2 - v_A{}^2$$

Sustituyendo en la Ec. (5.14) obtenemos el importante resultado

$$\boxed{W(A \rightarrow B) = \int_A^B F\cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}Mv_B{}^2 - \tfrac{1}{2}Mv_A{}^2} \qquad (5.15)$$

para la partícula libre, lo cual es una generalización de la Ec. (5.6).

Reconocemos a

$$Ec \equiv \tfrac{1}{2}Mv^2 \qquad (5.16)$$

como la *energía cinética* definida en (5.6) y la designaremos por el símbolo Ec. Vemos a partir de (5.15) que nuestras definiciones de trabajo y energía cinética tienen la propiedad de que *el trabajo realizado sobre una partícula libre por una fuerza aplicada arbitraria es igual a la variación de la energía cinética de la misma:*

$$W\,(A \rightarrow B) = Ec_B - Ec_A \qquad (5.17)$$

EJEMPLO

Caída libre

(1) Repetimos un ejemplo dado antes. Si la dirección y es normal a la superficie de la Tierra y su sentido positivo es hacia arriba, la fuerza gravitatoria es $\mathbf{F}_G = -Mg\hat{\mathbf{y}}$, siendo g la aceleración de la gravedad que tiene el valor aproximado de 980 cm/s². Calcular el trabajo realizado por la gravedad cuando una masa de 100 g desciende 10 cm. Aquí podemos poner

$$\mathbf{r}_A = 0 \qquad \mathbf{r}_B = -10\hat{\mathbf{y}} \qquad \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = -10\hat{\mathbf{y}}$$

El trabajo realizado por la gravedad es

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F}_G \cdot \Delta\mathbf{r} = (-Mg\hat{\mathbf{y}}) \cdot (-10\hat{\mathbf{y}}) \\ &= (10^2)(980)(10)\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 9{,}8 \times 10^5 \text{ ergs} \end{aligned}$$

Obsérvese que W es independiente de cualquier desplazamiento horizontal Δx. Aquí la fuerza gravitatoria juega el papel de la fuerza **F**.

(2) Si la partícula en (1) tenía inicialmente la velocidad 1×10^2 cm/s, ¿cuál sería su energía cinética y su velocidad al final de su caída de 10 cm?

El valor inicial Ec_A de la energía cinética es $\frac{1}{2} \times 100\ (100)^2 = 5 \times 10^5$ ergios; el valor final Ec_B, según la Ec. (5.17), es igual al trabajo realizado por la gravedad sobre la partícula, más la energía cinética en A:

$$Ec = W + \tfrac{1}{2}Mv_A^2 = 9{,}8 \times 10^5 + 5 \times 10^5 \approx 15 \times 10^5$$

$$v_B^2 \approx \frac{2 \times 15 \times 10^5}{100} \approx 3 \times 10^4$$

$$v_B \approx 1.7 \times 10^2 \text{ cm/s}$$

Este resultado está de acuerdo con el que obtendríamos a partir de $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$, pero observemos que anteriormente no hemos especificado la dirección de la velocidad inicial 1×10^2 cm/s. Si estuviera en la dirección x, permanecería constante y

$$\frac{1}{2}M(v_y^2 + v_x^2)_B - \frac{1}{2}M(v_x^2)_A = 9{,}8 \times 10^5$$

$$\begin{aligned} v_{yB} &\approx \sqrt{2} \times 10^2 \\ v_B &= \sqrt{v_x^2 + v_{yB}^2} \\ &= \sqrt{1 \times 10^4 + 2 \times 10^4} \\ &\approx 1{,}7 \times 10^2 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

Ahora bien, si v_y se dirigiese hacia abajo en la dirección y negativa, podríamos aplicar las conocidas relaciones de los cuerpos que caen:

$$\begin{aligned} h &= v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2 \\ v - v_0 &= gt \\ h &= v_0 \frac{v - v_0}{g} + \frac{1}{2}g\left(\frac{v - v_0}{g}\right)^2 \\ 2gh &= v^2 - v_0^2 \end{aligned}$$

y de aquí obtener de nuevo la misma relación entre el trabajo y la energía cinética

$$Mgh = \tfrac{1}{2}Mv_B^2 - \tfrac{1}{2}Mv_0^2 \qquad \text{pues} \qquad v_0 = v_A$$

Este es un ejemplo de lo que queremos decir cuando afirmamos que los resultados obtenidos a partir de la ley de conservación deben ser consistentes con las ecuaciones del movimiento. Utilizando el principio de conservación de la energía obtenemos el mismo resultado que empleando una ecuación $v^2 - v_0^2 = 2gh$ deducida de la ecuación del movimiento $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ (véase Cap. 3).

Energía potencial. Ya dijimos anteriormente (pág. 148) que sólo las *diferencias* de potencial tenían significado. Nuestra definición de energía potencial indica que la diferencia de energía potencial en los puntos B y A es el trabajo que debemos hacer al mover el sistema sin aceleración de A a B, de modo que

$$U(\mathbf{r}_B) - U(\mathbf{r}_A) = W(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F}_{ag} \cdot d\mathbf{r} \qquad (5.18)$$

Las diferencias pueden ser positivas o negativas. Es decir, *si realizamos* trabajo en contra de las fuerzas del campo, la energía potencial se incrementa $U(\mathbf{r}_B) > U(\mathbf{r}_A)$; si el trabajo se realiza en contra nuestra por las fuerzas del campo (realizamos un trabajo negativo), la energía potencial decrece. Lógicamente, si la energía potencial crece al ir de A a B, la energía cinética de una partícula libre moviéndose en dicha dirección decrecerá (naturalmente $\mathbf{F}_{ag}$ no actúa), mientras que si la energía potencial decrece, la energía cinética se incrementará. Si ahora especificamos $U(A) = 0$ en la Ec. (5.18), el valor de $U(B)$ está unívocamente definido siempre que las fuerzas sean conservativas (véase pág. 162).

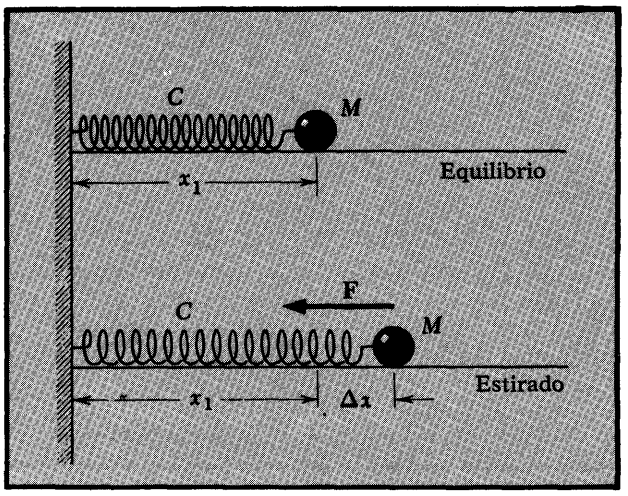


FIG. 5.6 *a*) Un muelle sin masa se conecta a una masa M. Si el muelle se estira una pequeña cantidad Δx, ejerce una fuerza restauradora $F = -C\,\Delta x$ sobre M en la dirección indicada, siendo C la constante de fuerza del muelle.

EJEMPLO

Fuerza restauradora lineal; transformaciones entre la energía cinética y la potencial. Una partícula está sometida a una fuerza restauradora lineal en la dirección x. Una fuerza de este tipo es directamente proporcional al desplazamiento respecto a un punto fijo y en un sentido que tienda a reducir dicho desplazamiento (véase fig. 5.6 *a, b* y *c*). Si tomamos como origen el punto fijo,

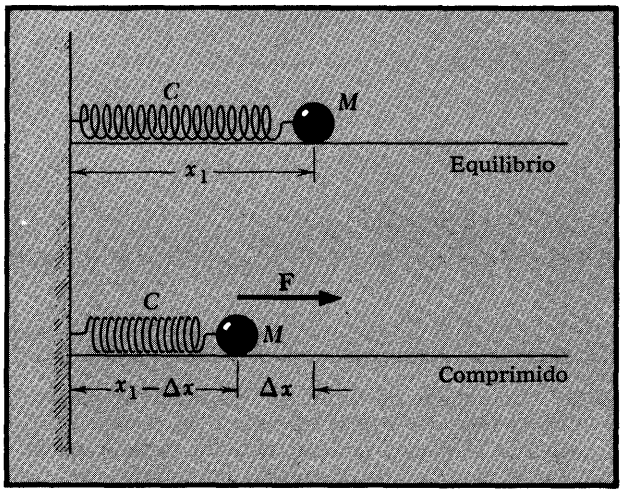
$$\mathbf{F} = -Cx\hat{\mathbf{x}} \qquad \text{o} \qquad F_x = -Cx \qquad (5.19)$$

en donde C es una constante positiva determinada, la *constante del muelle.* Esta expresión constituye la denominada *ley de Hooke.* Para desplazamientos suficientemente pequeños, una fuerza de esta clase puede ser originada por un muelle extendido o comprimido. Para desplazamientos elásticos mayores debemos añadir en (5.19) términos con mayores potencias de x. El signo de la fuerza es tal que la partícula siempre está atraída hacia el origen $x = 0$.

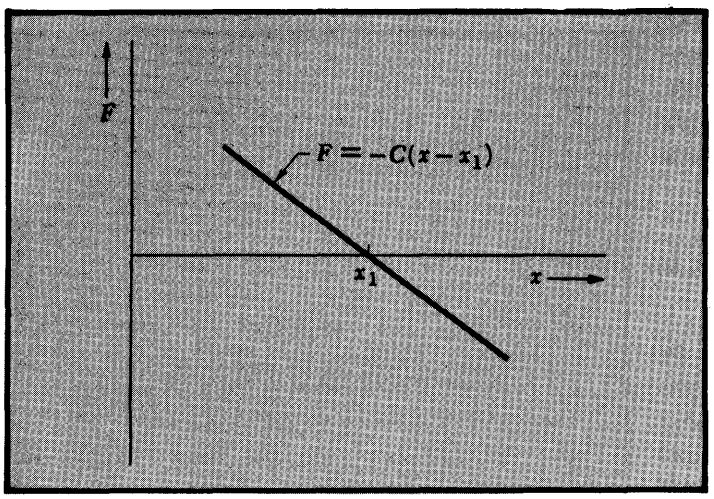
(1) Con la partícula sujeta al muelle, aplicamos ahora una fuerza extrema que lleva a la partícula desde un punto x_1 a otro x_2. ¿Cuál es el trabajo realizado sobre la partícula por la fuerza aplicada a lo largo de este desplazamiento?

En este caso la fuerza sobre la partícula es una función de la posición. Para calcular el trabajo realizado por la misma utilizaremos la definición (5.12) con $\mathbf{F}_{ag} = -\mathbf{F} = +Cx\hat{\mathbf{x}}$.

$$W(x_1 \to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{F}_{ag} \cdot d\mathbf{r} = C\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = \tfrac{1}{2}C(x_2^2 - x_1^2)$$



b) Si el muelle se comprime una cantidad $-\Delta x$, ejerce una fuerza restauradora sobre M igual a $-C(-\Delta x) = C\,\Delta x$, como se indica.



c) La fuerza restauradora, para pequeños desplazamientos a partir de x_1, es proporcional a éstos.

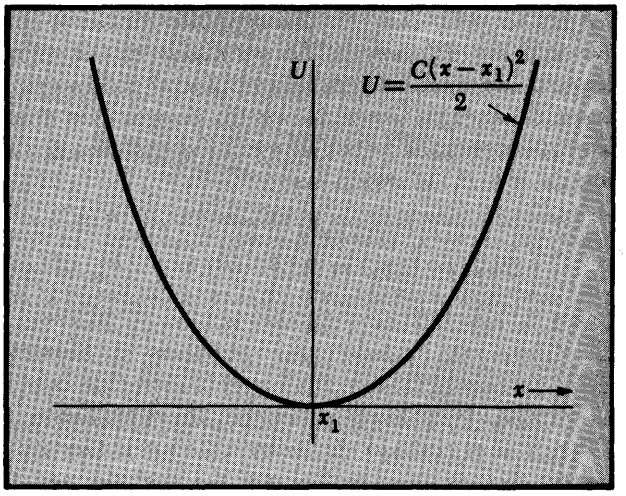


FIG. 5.8 Al hacer este trabajo se aumenta la energía potencial del sistema muelle-masa. Un sistema de éstos, desplazado del equilibrio $\Delta x = x - x_1$, tiene una energía potencial $U = \frac{1}{2}C(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}C(x - x_1)^2$.

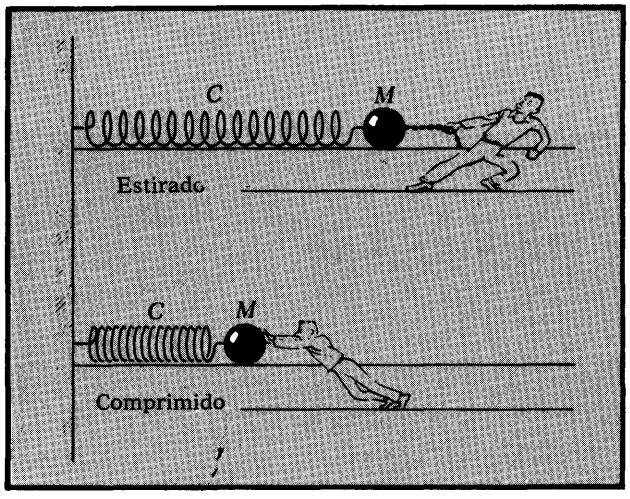


FIG. 5.7 Con objeto de estirar (o comprimir) el muelle, se debe ejercer una fuerza opuesta a la restauradora. Al desplazar el muelle una cantidad Δx a partir de la posición de equilibrio x_1, se realiza un trabajo

$$W = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} C(x - x_1)\,dx = \tfrac{1}{2}C(\Delta x)^2$$

Si aquí elegimos $x_1 = 0$, posición de equilibrio, como cero de energía potencial, resulta

$$\boxed{U(x) = \tfrac{1}{2}Cx^2} \qquad (5.20)$$

Este resultado es importante: *la energía potencial referida a la fuerza restauradora lineal es proporcional al cuadrado del desplazamiento* (véanse figs. 5.7 y 5.8).

(2) Si la partícula de masa M se deja en libertad en reposo en la posición x_{max}, ¿cuál es su energía cinética cuando alcanza el origen?

Se obtiene la respuesta directamente de (5.15) y (5.20): el trabajo realizado por el *muelle* al ir de x_{max} al origen es

$$W(x_{max} \to 0) = \tfrac{1}{2}Mv_1^2$$

en donde tenemos en cuenta que $v = 0$ para x_{max}; la partícula se supone que estaba allí en reposo. La velocidad en el origen es v_1. Así, pues,

$$\tfrac{1}{2}Cx_{max}^2 = \tfrac{1}{2}Mv_1^2$$

es la energía cinética en el origen $x = 0$. Alternativamente, podemos utilizar el principio de conservación de la energía. Para x_{max}, $Ec = 0$; de modo que $U = \frac{1}{2}Cx_{max}^2 = E$. Entonces para $x = 0$, (véanse figs. 5.9 y 5.10).

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 = E = \tfrac{1}{2}Cx_{max}^2 \qquad (5.21)$$

(3) ¿Cuál es la conexión entre la velocidad de la partícula en el origen y el desplazamiento máximo x_{max}?

$$v_1^2 = \frac{C}{M}x_{max}^2$$

o

$$v_1 = \pm\sqrt{\frac{C}{M}}x_{max} \qquad (5.22)$$

EJEMPLO

Conversión de energía en una cascada. La conversión de energía de una forma en otra (potencial a cinética) viene ilustrada por la cascada de la fig. 5.11. El agua en la parte superior de la cascada tiene energía potencial gravitatoria que se convierte en cinética al caer. Una masa M de agua al caer desde una altura h pierde energía potencial Mgh y adquiere energía cinética $\frac{1}{2}M(v^2 - v_0^2) = Mgh$. (La velocidad v se determina por esta ecuación si se conoce la velocidad inicial v_0 del agua.) La energía cinética del agua que cae puede convertirse en una central hidroeléctrica en la energía de rotación de una turbina; si no es así, la energía cinética del agua al caer se convierte al pie de la cascada en energía térmica o calor. La energía térmica es simplemente la energía asociada con el movimiento caótico de las moléculas del agua. (A una temperatura alta, el movimiento caótico molecular comporta más energía que a temperatura baja.)

EJEMPLO

Transformaciones de energía en el salto de pértiga. Un ejemplo ameno de la interconversión de energía entre formas diversas —energía cinética, energía potencial de la pértiga elástica y energía potencial debida a la elevación— viene ofrecida por la secuencia de imágenes de la fig. 5.12 y las leyendas que las ilustran.

FUERZAS CONSERVATIVAS

Una fuerza es *conservativa* si el trabajo $W(A \to B)$ que realiza al mover una partícula desde A a B es independiente de la trayectoria que recorre la partícula al ir de A a B. Si $W(A \to B)$ en la Ec. (5.15) tiene un valor distinto al variar de ruta (como ocurriría si hubiera rozamiento) la importancia de la Ec. (5.15) disminuiría drástica-

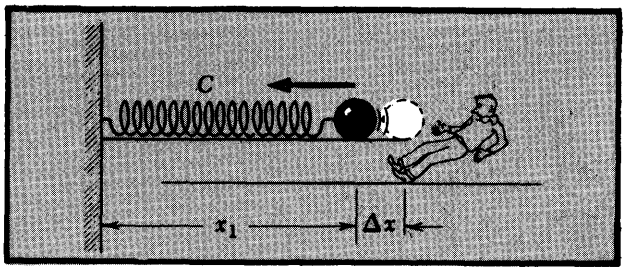


FIG. 5.9 Si se estira el sistema muelle-masa una longitud Δx y luego se deja en libertad, U inicialmente disminuye y Ec aumenta.

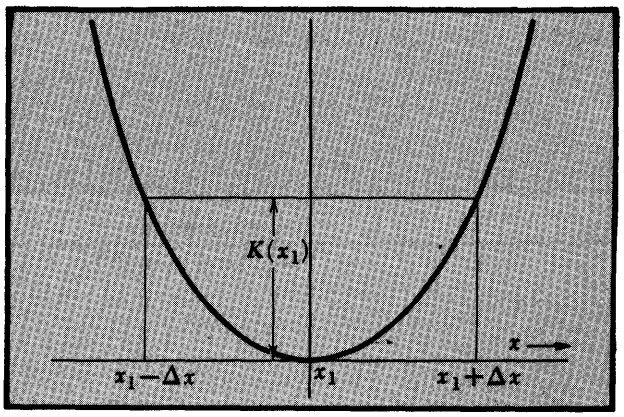
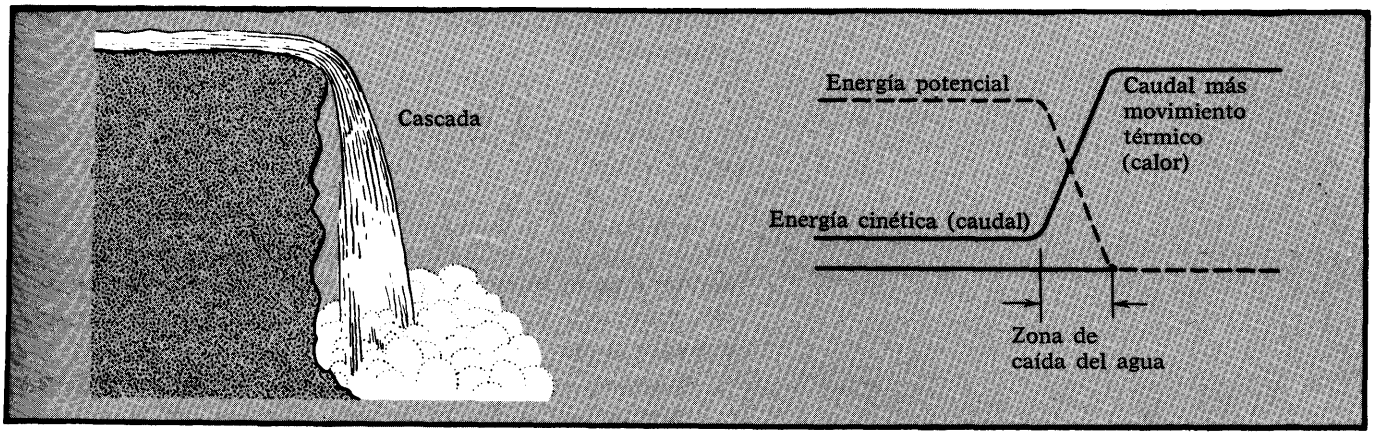


FIG. 5.10 Para $x = x_1$, $U = 0$ y $Ec(x_1) = \frac{1}{2}C(\Delta x)^2$, como está indicado.

FIG. 5.11 La cascada como ejemplo de conversión entre formas distintas de la energía.



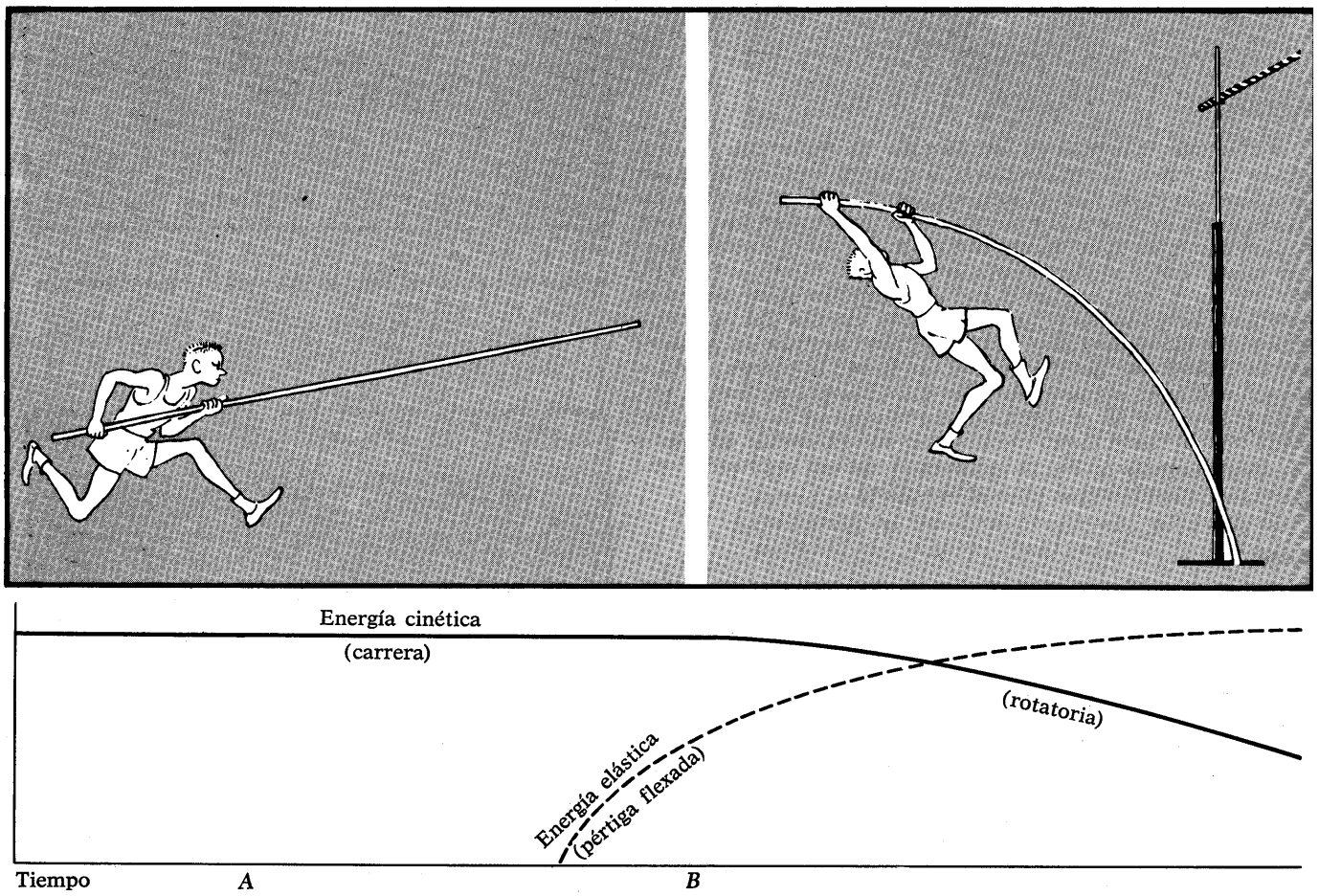


FIG. 5.12 Movimiento de un saltador con pértiga. En *A* su energía es toda cinética, asociada con su velocidad de carrera. En *B* ha apoyado el extremo delantero de la pértiga en el suelo y (especialmente con las nuevas pértigas de fibra de vidrio) almacena energía potencial elástica en la pértiga flexándola. En *C* se está elevando en el aire, ha perdido una considerable cantidad de energía cinética, asociada ahora con su velocidad de

mente. Suponiendo que $\int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

o

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\int$ es la integral en el trayecto cerrado, por ejemplo, partiendo de *A* y *B* y regresando a *A* posiblemente por otra ruta.

Podemos ver fácilmente que una fuerza central es conservativa. Una *fuerza central* ejercida por una par-

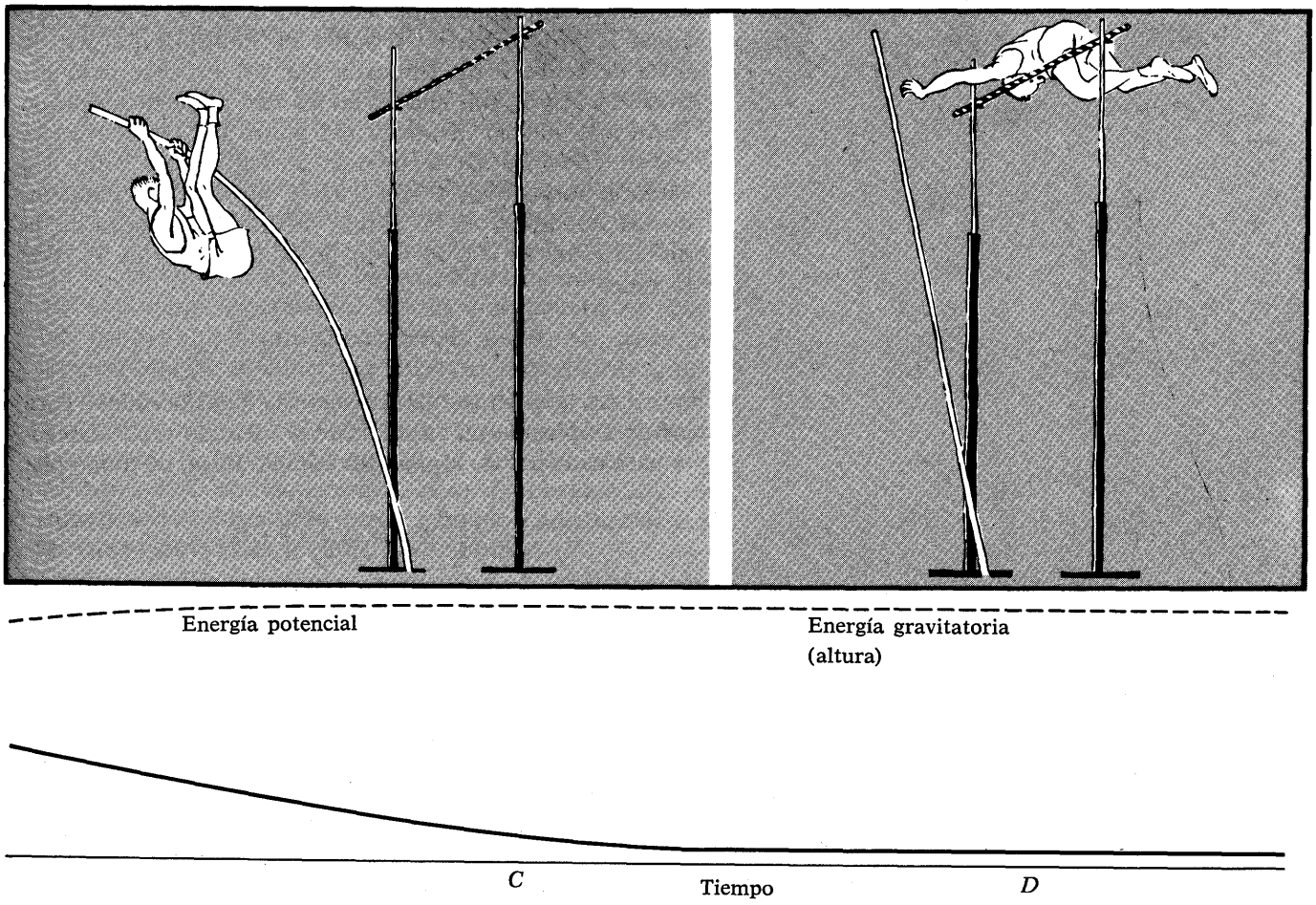


FIG. 5.12 *(continuación)* rotación alrededor del extremo inferior de la pértiga. Adquiere energía potencial gravitatoria y el resto de la energía elástica de la pértiga. En *D*, pasando por encima de la barra, su energía cinética es baja porque se está moviendo con lentitud; su energía potencial (gravitatoria) es alta. La energía total no es siempre constante en el saltador porque hay rozamientos (externos y musculares) y porque, mientras flexa la pértiga, el saltador realiza trabajo. El último componente del trabajo incluye energía «interna» no tenida en cuenta en el trabajo de elevación.

tícula sobre otra es aquélla cuyo módulo depende únicamente de la separación entre ambas y cuya dirección coincide con la recta que las une. En la fig. 5.13, una fuerza central está dirigida hacia el centro (punto *O*) alejándose (o acercándose) a dicho punto. Dos trayectorias, 1 y 2, unen el punto *A* con el *B* como está indicado. Las curvas a trazos son arcos de circunferencia con centro en *O*. Consideremos las magnitudes $(\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1)$ y $(\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2)$ calculadas sobre los segmentos de trayectoria comprendidos entre los arcos de trazos. (Podemos considerar

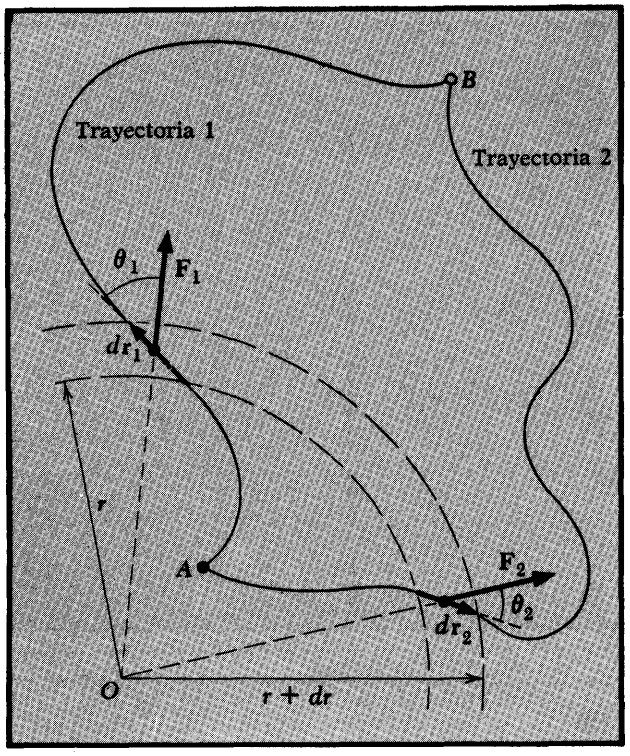


FIG. 5.13 Diagrama ilustrando la evolución de $\int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para dos trayectorias en el caso de que **F** sea una fuerza central.

de un modo igualmente correcto a $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F\,dr\cos\theta$ como la proyección de **F** sobre $d\mathbf{r}$ multiplicada por $d\mathbf{r}$ o de $d\mathbf{r}$ sobre **F** multiplicada por **F**). En este caso los módulos F_1 y F_2 son iguales en los dos segmentos porque están a la misma distancia del punto O; las proyecciones $dr\cos\theta$ de los segmentos de trayectoria sobre los vectores respectivos **F** son iguales, porque la separación de los dos arcos es la misma medida a lo largo de la dirección de $\mathbf{F}_1$ o a lo largo de la dirección de $\mathbf{F}_2$. Por lo tanto

$$\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$$

sobre los segmentos de trayectoria considerados. Pero puede emplearse un razonamiento idéntico repetidamente para cada par de segmentos comparables, de modo que

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

(Trayectoria 1) (Trayectoria 2)

Para el campo gravitatorio constante la prueba viene dada en la fig. 5.14.

Las fuerzas que tienen la propiedad de que

$$W(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{5.23}$$

es independiente de la trayectoria se denominan *fuerzas conservativas*. Para dichas fuerzas el trabajo que realizan a lo largo de una trayectoria cerrada es *cero*.

Supongamos que la fuerza depende de la velocidad con que se recorre la trayectoria. (La fuerza que actúa sobre una partícula cargada en un campo magnético depende de su velocidad.) ¿Puede ser conservativa una fuerza de este tipo? Resulta que las fuerzas fundamentales importantes que dependen de la velocidad son conservativas porque su dirección es *perpendicular* a la del movimiento de la partícula, de modo que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es cero. Puede comprobarse para la fuerza de Lorentz (Cap. 3), que es proporcional a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Las fuerzas de rozamiento no son realmente fuerzas fundamentales, sino que son dependientes de la velocidad y no son conservativas.

Toda nuestra discusión presupone que las *fuerzas actúan entre dos cuerpos*. Esta hipótesis es importante; probablemente los alumnos de este curso a lo largo de su carrera tendrán que enfrentarse con fuerzas que actúan entre varios cuerpos. En el Vol. 2 se hará un estudio extenso de la hipótesis de los dos cuerpos.

Se sabe experimentalmente que $W(A \to B)$ es independiente de la trayectoria para las fuerzas gravitatorias y para las electrostáticas. Se infiere este último resultado para las interacciones entre las partículas elementales a partir de los experimentos sobre difusión y para las fuerzas gravitatorias se deduce de la exactitud de las predicciones de los movimientos lunares y planetarios, como se verá en las *Notas históricas* al final de este capítulo. También sabemos que la Tierra ha completado aproximadamente 4×10^9 órbitas alrededor del Sol sin que cambie su distancia al Sol de una manera apreciable, como se deduce de las pruebas geológicas sobre la temperatura de la superficie terrestre. La notable prueba geológica que se remonta hasta quizás 10^9 años atrás no puede considerarse totalmente concluyente debido a numerosos factores, incluyendo la emisión solar que influye sobre la temperatura, pero la observación es sugestiva. (Se discutirán otros ejemplos adicionales en las *Notas históricas* al final del capítulo.)

Necesitamos decir algo más sobre la comparación entre las fuerzas centrales y las no centrales. En la consideración de la fuerza entre dos partículas existen dos posibilidades: (1) Las partículas no tienen más coordenadas que las de su posición. (2) Una de ellas o las dos tienen ejes que distinguen físicamente su orientación. En la primera posibilidad pueden existir *únicamente* **fuerzas centrales, mientras que en la segunda, la** especificación de que la partícula se mueve desde A a B es incompleta; hemos de especificar también que el eje se mantiene en la misma dirección respecto a algo. Una barra imantada tiene un eje que se distingue físicamente: Si movemos el imán realmente a lo largo de una trayectoria cerrada en un campo magnético uniforme, podemos obtener, o no, una cantidad neta de trabajo sobre el mismo. Si el imán termina en la misma posición y con la *misma orientación* con que partió, no se realiza trabajo. Si la posición es la misma, pero la orientación es diferente, se habrá realizado trabajo (el cual podrá tener signo positivo o negativo).

Es fácil ver que el rozamiento no es una fuerza conservativa. Se opone siempre a la dirección del movimiento, de tal modo que el trabajo realizado por una fuerza **de rozamiento constante en un movimiento de A a B a la distancia d será $F_{roz}\, d$; si el movimiento se realiza de B a A, será también $F_{roz}\, d$. Ahora bien, si el rozamiento es** una manifestación de fuerzas fundamentales que son conservativas, ¿cómo es posible que las fuerzas de rozamiento no lo sean? Es una cuestión de detalle de nuestro

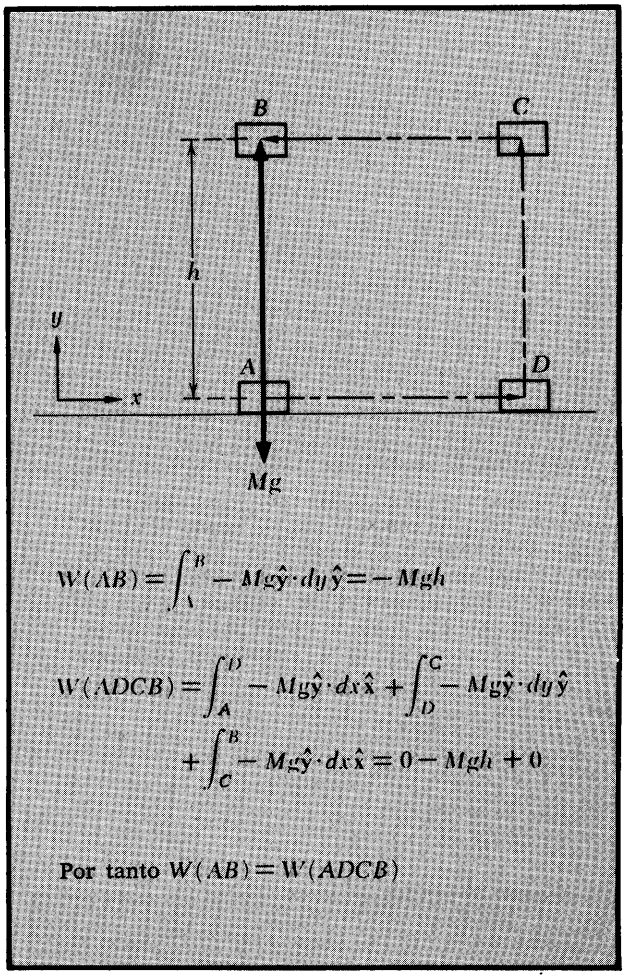


FIG. 5.14 Figura que ilustra la magnitud $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ para dos trayectorias distintas en un campo gravitatorio constante.

análisis. Si analizamos todos los movimientos a nivel atómico, el correspondiente a las fuerzas fundamentales será un «movimiento» conservativo; pero si consideramos parte del movimiento como calor, el cual es inútil en sentido mecánico, es porque ha actuado el rozamiento. La identidad entre el calor y la energía cinética aleatoria se trata en el Vol. 5. En la discusión de la conservación de la cantidad de movimiento en el Cap. 4 consideramos un choque inelástico de dos partículas. La energía cinética no se conservaba, pero la suma de la energía cinética y de la energía de excitación interna de las dos partículas se denominó *energía total* y se supuso que se conservaba, de acuerdo con todos los experimentos conocidos.

Volvamos ahora a la discusión de la energía potencial. La discusión de las fuerzas conservativas destaca la nota importante de que la energía potencial en un punto puede definirse unívocamente sólo en el caso de fuerzas conservativas (pág. 155). Ya hemos visto cómo se calcula la energía potencial a partir de un conocimiento de las fuerzas que actúan en un problema; elegimos el valor cero y después calculamos el trabajo que realizamos (o realiza el agente) al mover lentamente el sistema sin cambiar la energía cinética desde el valor cero hasta la posición deseada. Como $\mathbf{F}_{ag}$ es siempre exactamente igual y opuesta a la fuerza $\mathbf{F}$ del problema, vemos que el conocimiento de las fuerzas del problema nos permite calcular la energía potencial:

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{ag} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{A}) = U(\mathbf{r}) \quad (5.24)$$

suponiendo que $U(A) = 0$.

¿El conocimiento de la energía potencial nos permite calcular las fuerzas? Sí. En una dimensión

$$U(x) - U(A) = -\int_A^x F\,dx \quad (5.25)$$

de donde se obtiene por derivación

$$\frac{dU}{dx} = -F \quad (5.26)$$

Este resultado puede comprobarse sustituyendo (5.26) en (5.25):

$$-\int_A^x F\,dx = \int_A^x \frac{dU}{dx}dx = \int_A^x dU = U(x) - U(A) \quad (5.27)$$

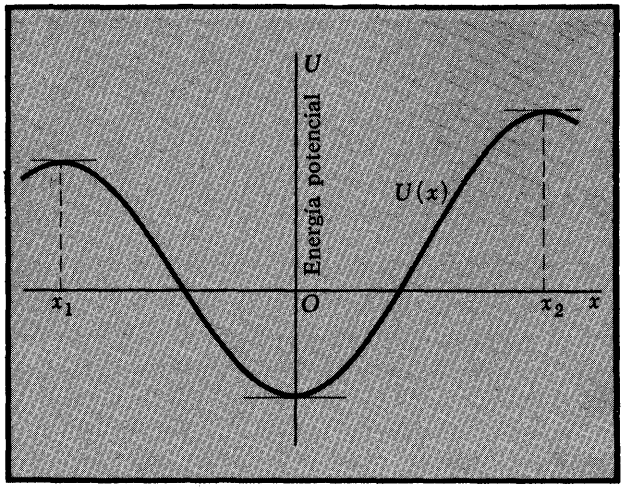
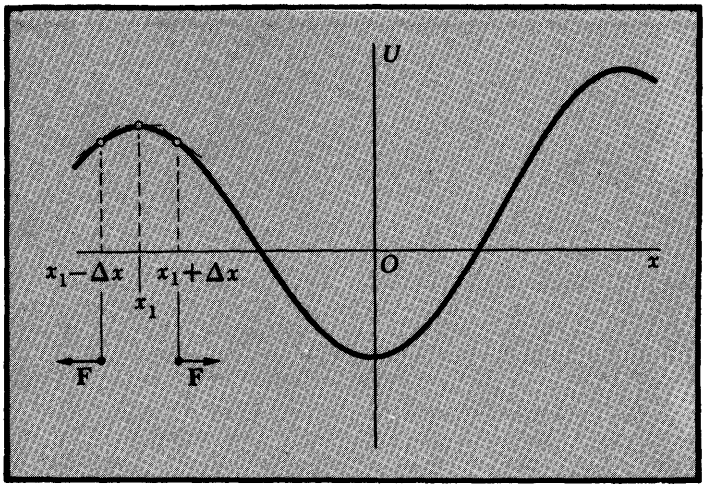


FIG. 5.15 *a*) Función de energía potencial unidimensional $U(x)$ representada en función de x. En los puntos $x = x_1$, O, y x_2 tenemos $dU/dx = 0$ y, por tanto, la fuerza F es nula en estos puntos. Estos son, por consiguiente, posiciones de equilibrio, no necesariamente estable.



b) En el punto $x_1 - \Delta x$, $dU/dx > 0$, de modo que $F < 0$ (hacia la izquierda). En el punto $x_1 + \Delta x$, $dU/dx < 0$, de modo que $F > 0$ (hacia la derecha). Un pequeño desplazamiento a partir de x_1, por consiguiente, da como resultado una fuerza que tiende a aumentar el desplazamiento, y así x_1 es una posición de equilibrio *inestable*.

La ecuación (5.27) es un ejemplo del resultado general de que la fuerza con signo menos representa la variación de la energía potencial por unidad de longitud. En tres dimensiones, la expresión análoga a (5.26) es *

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial U}{\partial z} \equiv -\text{grad}\, U \qquad (5.28)$$

en donde «grad» designa el operador gradiente que se define por

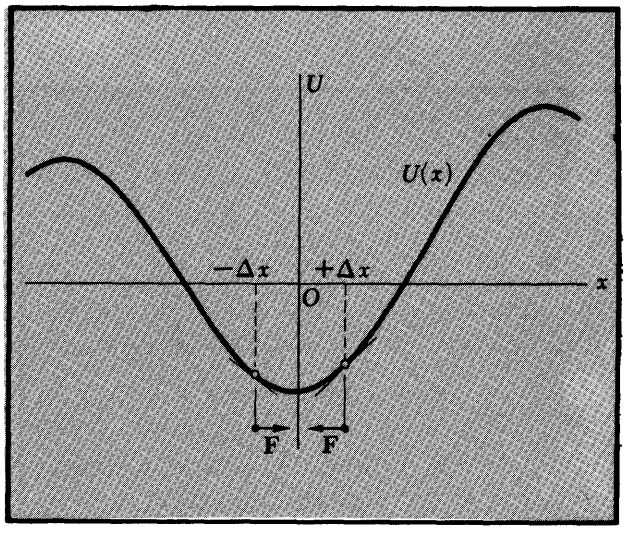
$$\text{grad} \equiv \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{en coordenadas cartesianas}$$

$$\text{grad} \equiv \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{en coordenadas polares planas} \qquad (5.29)$$

Las propiedades generales del operador gradiente se consideran en el Vol. 2. Se demuestra allí que el gradiente de un escalar es un vector cuya dirección es aquella en que es más rápida la variación del escalar en el espacio y cuyo módulo es igual a la variación por unidad de longitud. El gradiente de un escalar U se escribe como grad U, o ∇U. El operador ∇ se lee como «nabla» y ∇U se lee «nabla de u».

La aplicación de estas ideas al caso $dU/dx = 0$, que es una posición de equilibrio, y a la estabilidad de tal equilibrio, se ve en las figs. 5.15 *a* a *c*.

(*) El símbolo $\partial/\partial x$ indica derivación parcial y significa que y y z permanecen constantes. Lo mismo se aplicará a $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$. (Véase, por ejemplo, pág. 167.)



c) Para $x = -\Delta x$, $dU/dx < 0$ y F está dirigida hacia la derecha. Para $x = +\Delta x$, $dU/dx > 0$, de modo que F está dirigida hacia la izquierda. Así, pues, $x = 0$ es una posición de equilibrio *estable*. ¿Qué ocurre en x_2?

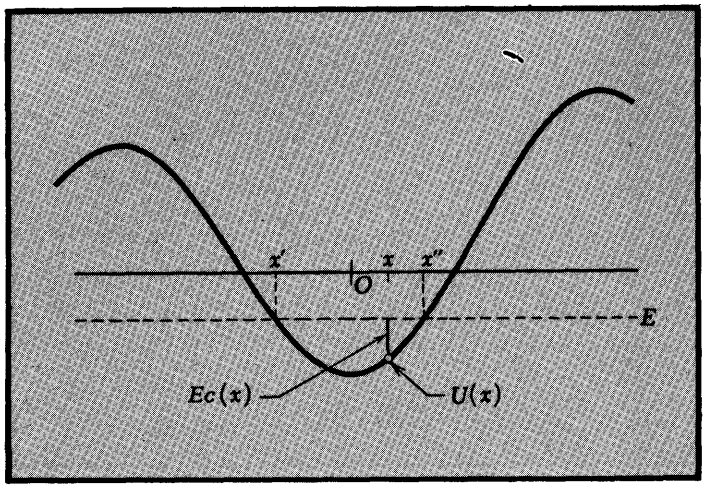
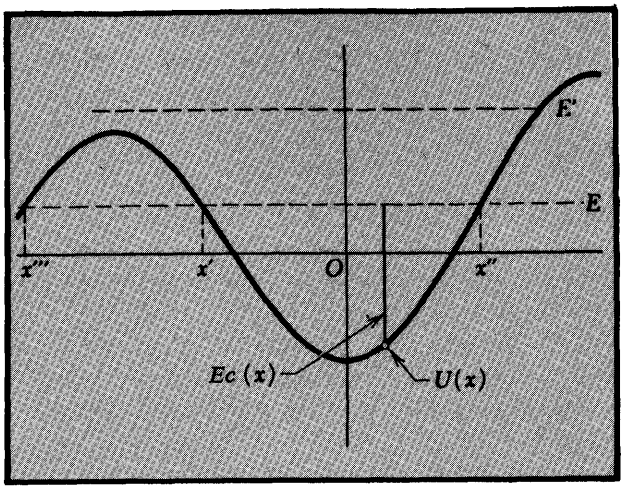


FIG. 5.16 *a*) La energía total $E = Ec + U =$ const. Así, pues, dada E, el movimiento puede verificarse únicamente entre x' y x'', «puntos de retroceso». Entre ellos $Ec = Mv^2/2 = E - U \geqq 0$.



b) Si se aumenta E, los puntos de retroceso x' y x'', en general, cambian. Ahora $Ec(x) = E - U(x)$ es mayor. El movimiento puede ahora tener lugar a la izquierda de x''' si comienza en x'''.

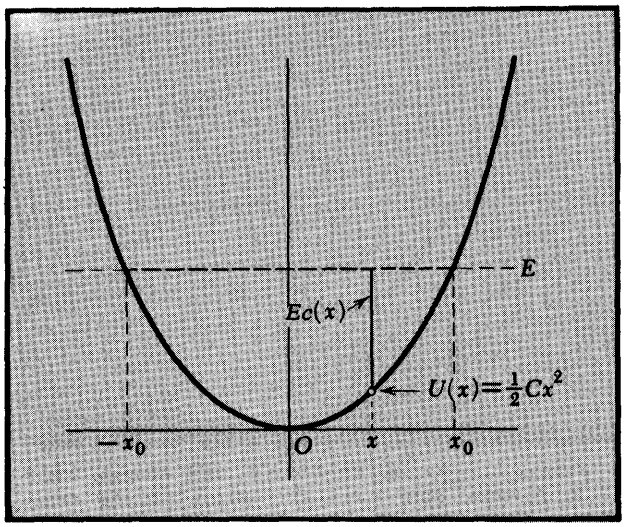
Los simples gráficos de la energía potencial U en función de la coordenada x pueden ser muy informativos. Las figs. 5.16 *a* a *c* son ejemplos; utilizan el hecho de que la energía cinética Ec no puede ser negativa. ¿Cuál sería el movimiento si la energía fuera E' en la fig. 5.16 b? El enunciado

Energía cinética + energía potencial = constante

de la ley de la conservación de la energía se generalizará en el Cap. 12 para incluir aquellos procesos en que parte o toda la masa se convierte en energía y, por tanto, incluyen la mayoría de las reacciones nucleares. La generalización es necesaria como consecuencia de la teoría de la relatividad restringida.

Energía potencial y conservación de la energía en los campos gravitatorios y eléctricos. Hemos calculado la energía potencial para el caso de una fuerza constante y para el caso de una fuerza tipo-muelle, $-Cx$. Otro caso importante es la fuerza que rige una ley inversa al cuadrado de la distancia, como la que rige la ley de la gravitación de Newton (pág. 70) o la ley de Coulomb (pág. 72).

Veamos en primer lugar el caso de la ley de gravitación de Newton. Hemos visto que se trata de una fuerza conservativa y calcularemos el trabajo de la forma más fácil posible. Supongamos dos masas M_1 y M_2 inicialmente a la distancia r_A y calculemos el trabajo rea-



c) El oscilador armónico simple está en equilibrio estable para $x = 0$. Para $x = \pm x_0$, $Ec = 0$.

lizado por nosotros para llevarlas a la distancia r. Supongamos que M_1 está fijo y llamemos $\mathbf{r}$ al vector trazado de M_1 a M_2, como indica la fig. 5.17. Si desplazamos M_2 a una distancia $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ realizamos el trabajo

$$dW = \mathbf{F}_{ag} \cdot d\mathbf{r} = \frac{GM_1M_2}{r^3}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{GM_1M_2}{r^2}dr$$

El trabajo realizado para un desplazamiento completo será

$$W = \int_{r_A}^{r} \frac{GM_1M_2}{r^2}dr = -\frac{GM_1M_2}{r}\Bigg|_{r_A}^{r}$$

$$= -\frac{GM_1M_2}{r} + \frac{GM_1M_2}{r_A} \qquad (5.30)$$

Comprobemos que éste es el signo correcto, pues si $r > r_A$, el trabajo es positivo (damos trabajo al sistema); si $r < r_A$, el trabajo es negativo (el sistema nos da trabajo).

Apliquemos estos conceptos a la energía potencial. ¿Cuál es la localización conveniente para el cero de energía potencial? Si $U = 0$ para $r = r_A$, la expresión (5.30) tendrá el valor de U:

$$U(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} + \frac{GM_1M_2}{r_A}$$

Pero cuando $r_A = \infty$ el último término se anula, de modo que

$$\boxed{U(r) = -\frac{GM_1M_2}{r}} \qquad (5.31)$$

Esta será, por tanto, la mejor opción: $U = 0$ para $r = \infty$. La energía potencial será entonces siempre negativa y podremos obtener trabajo del sistema dejando que las masas se aproximen lentamente desde el infinito.

Establezcamos el principio de conservación de la energía mecánica para un cuerpo de masa M_1 que se mueve en el campo gravitatorio de un cuerpo de masa M ($M \gg M_1$, de tal modo que el movimiento de M puede despreciarse).

$$E = \frac{1}{2}M_1v_A^2 - \frac{GM_1M}{r_A} = \frac{1}{2}M_1v_B^2 - \frac{GM_1M}{r_B} \qquad (5.32)$$

en donde v_A y r_A son la velocidad y la distancia en un instante y v_B y r_B en otro.

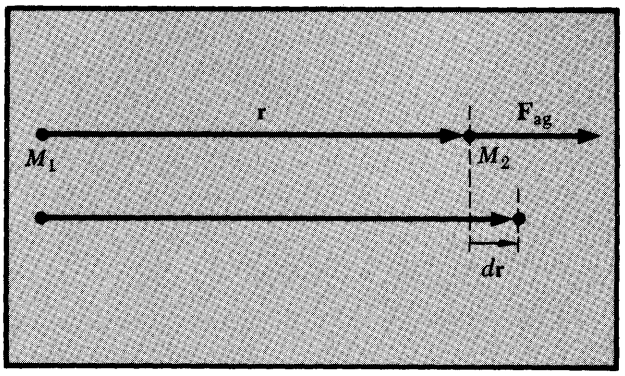


FIG. 5.17 La fuerza $\mathbf{F}_{ag}$ es igual y opuesta a la fuerza gravitatoria atractiva y realiza el trabajo $\mathbf{F}_{ag} \cdot d\mathbf{r} = F_{ag}\,dr$ en el desplazamiento $d\mathbf{r}$.

Volvamos al caso eléctrico:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3}\mathbf{r} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

para dos cargas q_1 y q_2. Supongamos que q_1 está fija. Determinemos el trabajo necesario para desplazar lentamente q_2 de r_A a r. La fuerza que debemos ejercer es

$$F_{ag} = -\frac{q_1 q_2}{r^3}\mathbf{r}$$

El incremento de nuestro trabajo en un desplazamiento $d\mathbf{r}$ es

$$dW = \mathbf{F}_{ag} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q_1 q_2}{r^3}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q_1 q_2}{r^2}dr$$

ya que $\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}$ son vectores paralelos. Para el trabajo total obtenemos

$$W = \int_{r_A}^{r} -\frac{q_1 q_2}{r^2}dr = \frac{q_1 q_2}{r}\Big|_{r_A}^{r} = \frac{q_1 q_2}{r} - \frac{q_1 q_2}{r_A}$$

De nuevo es conveniente hacer $U = 0$ para $r = \infty$ y resulta

$$\boxed{U = \frac{q_1 q_2}{r}} \tag{5.33}$$

U es positivo si q_1 y q_2 tienen el mismo signo y negativo si tienen signos opuestos. Sabemos que esto es correcto, pues si poseen el mismo signo, *debemos* realizar trabajo para aproximarles desde el infinito. Cuando hay presentes más de dos cargas puntuales, la energía potencial total es la suma de términos semejantes a los de la ecuación (5.33) para cada par de partículas que pueden formarse en el sistema.

De la discusión del Cap. 3 («Fuerzas eléctricas y magnéticas sobre una partícula cargada») resulta, en unidades SI

$$\boxed{U = k\frac{q_1 q_2}{r}} \tag{5.33a}$$

Podemos comprobar que esta expresión es correcta calculando $\mathbf{F}$ por la Ec. (5.29):

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q_1 q_2}{r}\right)\hat{\mathbf{r}} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

y para la fuerza gravitatoria

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{GM_1M_2}{r}\right)\hat{\mathbf{r}} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Si escribimos

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

podemos calcular F_x, F_y y F_z:

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{GM_1M_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$
$$= -\frac{GM_1M_2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{GM_1M_2x}{r^3}$$

e igualmente para el campo eléctrico:

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{q_1q_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q_1q_2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q_1q_2x}{r^3}$$

El *potencial electrostático* $\Phi(\mathbf{r})$ en $\mathbf{r}$ se define como la *energía potencial por unidad de carga positiva,* en el campo de fuerzas de las demás cargas:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q} = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{5.34}$$

Esta magnitud resulta de gran utilidad. Obsérvese que es un escalar. Es de la mayor importancia distinguir Φ de la energía potencial U. Hay que evitar también el empleo en el trabajo experimental del símbolo V para las dos magnitudes: potencial electrostático y energía potencial.

Si conocemos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en todos los puntos, podremos hallar en ellos el potencial electrostático $\Phi(\mathbf{r})$. [Esto supone que hemos escogido un origen para $\Phi(\mathbf{r})$.] Es conveniente trabajar con $\Phi(\mathbf{r})$ porque es un escalar, mientras que $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ es un vector.

La caída de potencial o *diferencia de potencial,* D.P., entre dos puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se define en la forma

$$\mathrm{D\,P} = \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1) \tag{5.35}$$

Esta es la variación de la energía potencial electrostática de una carga positiva unidad cuando se desplaza de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$. Así, pues, para una carga q que se desplaza entre estos puntos, la diferencia de energía potencial es

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = q[\Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1)]$$

La unidad del potencial electrostático o diferencia de potencial en el sistema cgs gaussiano es el *statvoltio.*

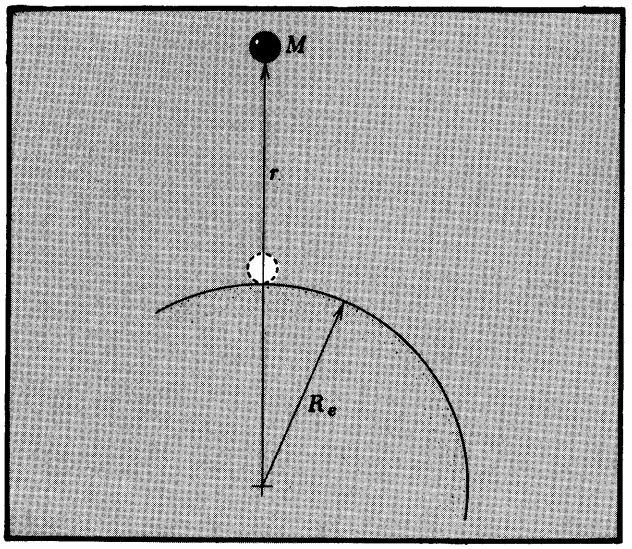
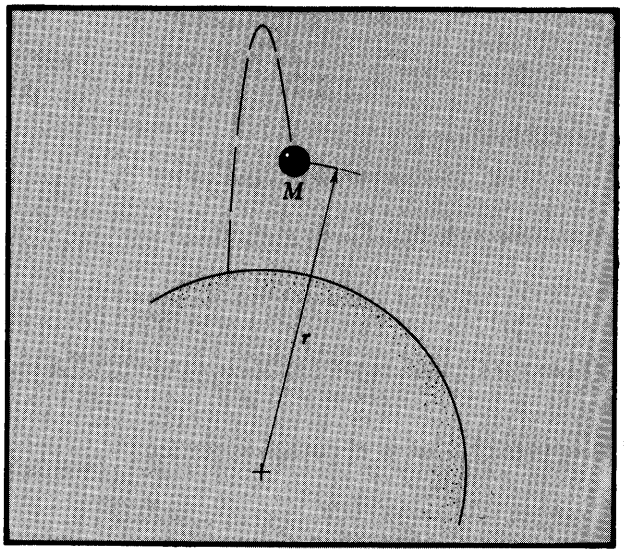
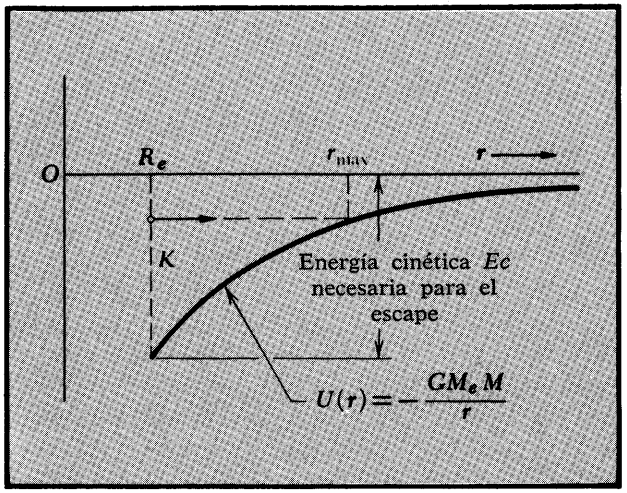


FIG. 5.18 *a*) Consideremos la velocidad de escape requerida para que una masa *M* abandone el campo gravitatorio terrestre partiendo desde su superficie.



b) Trayectoria descrita cuando la energía cinética es demasiado pequeña para escapar.



c) La energía cinética inicial es demasiado pequeña para el escape. Para alcanzar el infinito $Ec \geqq |-U|$.

Vimos en el Cap. 3 que la unidad de intensidad de campo eléctrico se denomina *statvoltio/cm*; pero Φ difiere de **E** en sus dimensiones en una longitud y, por consiguiente, se mide en statvoltios. También es cierto que Φ tiene las dimensiones de [carga]/[longitud] de modo que el statcoulomb/cm es también un nombre posible para la unidad de potencial.

La unidad *práctica* del potencial electrostático o diferencia de potencial es el *voltio*. El voltio unidad también SI, se emplea en la vida cotidiana y ampliamente en el laboratorio. Se define de modo que

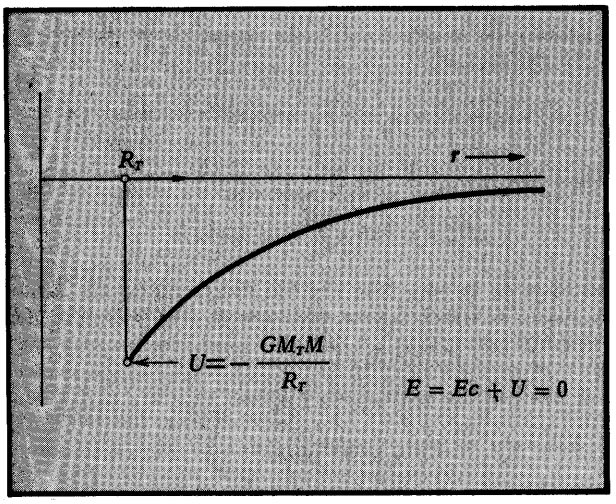
$$\frac{c}{10^8} \times \text{diferencia de potencial en statvoltios} = \text{diferencia de potencial en voltios}$$

en donde c es la velocidad de la luz en cm/s. O, aproximadamente

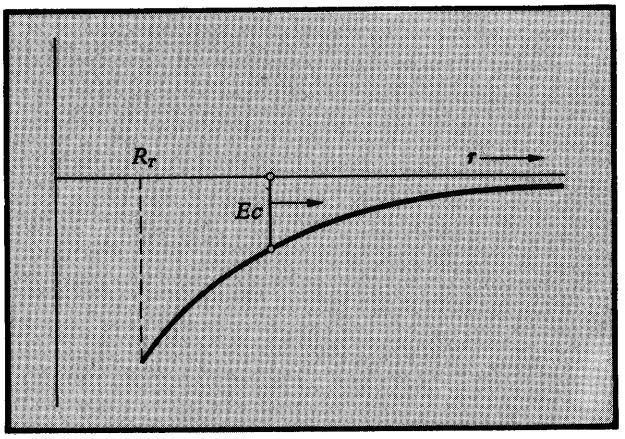
$$300 \times \text{diferencia de potencial en statvoltios} \approx \text{diferencia de potencial en voltios}$$

El campo eléctrico E en unidades SI se mide en voltios por metro (V/m); pero *no* es cierto que Φ pueda medirse en culombios por metro (C/m). Sin embargo, el *julio por culombio* (J/C) es otro nombre para el *voltio*, del mismo modo que el *ergio/statculombio* es equivalente al *statvoltio*.

Damos a continuación algunos ejemplos de problemas que tratan de la energía potencial y del potencial; en algunos interviene la interacción de fuerza central de tipo gravitatorio y eléctrico.



d) Masa M lanzada desde la superficie de la Tierra (radio R_T) con la energía cinética mínima necesaria para el escape $Ec = \frac{1}{2}Mv_e^2 = GM_TM/R_T$. La velocidad de escape de la Tierra se designa por v_e.



e) Algún tiempo después U ha aumentado y Ec ha disminuido a medida que M se aleja del centro de la Tierra.

EJEMPLO

Velocidad de escape de la Tierra y del sistema solar. Calcular la velocidad inicial que se necesita para que una partícula de masa M escape (1) de la Tierra y (2) del sistema solar. (Despréciese la rotación de la Tierra.)

La fig. 5.18 *a* a *f* ilustra el significado, así como el uso de los diagramas de energía potencial para este tipo de situación. Utilizando la Ec. (5.32) podemos escribir la energía total E de una partícula de masa M a la distancia R_T, radio de la Tierra, desde el centro del planeta:

$$E = \tfrac{1}{2}Mv^2 - \frac{GM_eM}{R_e}$$

donde

$M_T = 5{,}98 \times 10^{27}$ g $\quad R_T = 6{,}4 \times 10^8$ cm $\quad G = 6{,}67 \times 10^{-8}$

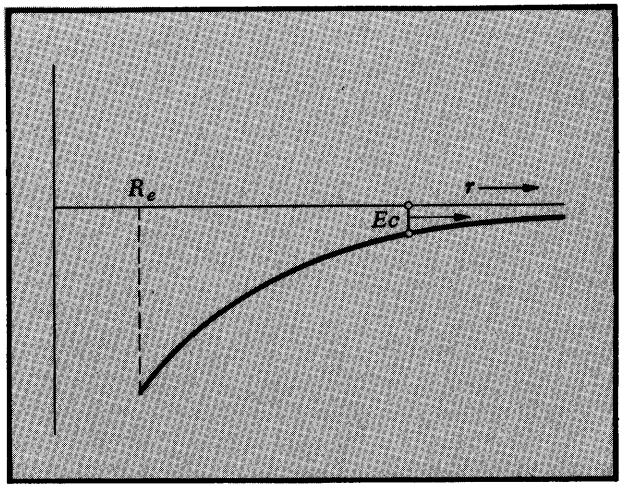
o

$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg $\quad R_T = 6{,}4 \times 10^6$ m $\quad G = 6{,}67 \times 10^{-11}$

(capítulo 3, ley de la gravitación de Newton).

Para alcanzar una distancia infinita de la Tierra con la velocidad menor posible (que es cero) la energía total debe ser nula, porque la energía cinética es cero y la potencial gravitatoria también lo es. Esto se deduce porque $U(r) \to 0$ cuando $r \to \infty$. Así, pues, E debe ser cero si la energía total de la partícula es constante entre el lanzamiento y el escape. De aquí que la velocidad de escape v_e vendrá dada por

$$\tfrac{1}{2}Mv_e^2 = \frac{GM_TM}{R_T} \qquad v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \tag{5.36}$$



f) Más tarde, Ec y $|U|$ han disminuido aún más.

La aceleración g de la gravedad en la superficie de la Tierra es GM_T/R_T^2, de modo que,

$$v_e = \sqrt{2gR_T} \approx (2 \times 10^3 \times 6 \times 10^8)^{\frac{1}{2}} \approx 10^6 \text{ cm/s}$$

o en unidades SI

$$\sqrt{(2 \times 10)(6 \times 10^6)} \approx 10^4 \text{ m/s}$$

Para escapar de la atracción del Sol únicamente, una partícula lanzada desde la Tierra (a una distancia R_{Ts} del Sol) necesitará una velocidad de escape

$$v_s = \sqrt{\frac{2GM_s}{R_{Ts}}} \approx \left[\frac{2 \times (7 \times 10^{-8}) \times (2 \times 10^{33})}{1{,}5 \times 10^{13}}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\approx 4 \times 10^6 \text{ cm/s}$$

utilizando la razón $M_s/M_T = 3{,}3 \times 10^5$ y el valor $R_{Ts} = 1{,}5 \times 10^{13}$ cm. Para cuerpos lanzados desde la Tierra, escapar del sistema solar es más difícil que escapar de la Tierra.

EJEMPLO

Potencial gravitatorio cerca de la superficie de la Tierra. La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa M a una distancia r del centro de la Tierra es, para $r > R_T$,

$$U(r) = -\frac{GMM_T}{r}$$

en donde M_T es la masa de la Tierra. Si R_T es el radio de la Tierra y la altura sobre la superficie terrestre es y, demostrar que

$$U \approx -MgR_T + Mgy \tag{5.37}$$

para $y/R_T \ll 1$. Aquí $g = GM_T/R_T^2 \approx 980$ cm/s^2. Se demuestra del modo siguiente. Tenemos

$$U = -GMM_T \frac{1}{(R_T + y)}$$

Dividiendo numerador y denominador por R_T:

$$U = -\frac{GMM_T}{R_T} \times \frac{1}{(1 + y/R_T)}$$

Utilizando el desarrollo en serie (2.49) (Dwight, 9.04) resulta para $(n = -1)$:

$$U = -\frac{GMM_T}{R_T}\left(1 - \frac{y}{R_T} + \frac{y^2}{R_T^2} - \ldots\right)$$

Sea $g = GM_T/R_T^2$; entonces

$$U = -MgR_T\left(1 - \frac{y}{R_T} + \frac{y^2}{R_T^2} - \cdots\right)$$

que se reduce a (5.37) para $y \ll R_T$ y a la Ec. (5.8), excepto en la constante $-MgR_T$.

EJEMPLO

Movimiento de proyectiles. Aquí damos un ejemplo más de un movimiento bidimensional en un campo gravitatorio constante. El problema se ha resuelto ya utilizando la segunda ley de Newton. Sea la fuerza $\mathbf{F}_G = -Mg\hat{\mathbf{y}}$, en donde g es, aproximadamente, 980 cm/s^2.

(1) Calcular el trabajo realizado por la gravedad cuando una masa de 100 g se desplaza desde el origen a

$$\mathbf{r} = 50\hat{\mathbf{x}} + 50\hat{\mathbf{y}}$$

$$W = \int_{0,0}^{50,50} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = -Mg\hat{\mathbf{y}} \cdot (50\hat{\mathbf{x}} + 50\hat{\mathbf{y}}) = -100 \times 980 \times 50$$

$$= -4{,}9 \times 10^6 \text{ ergios}$$

La fuerza gravitatoria realiza un trabajo negativo; o lo que es lo mismo, se realiza trabajo *contra* la fuerza gravitatoria por algún otro medio.

(2) ¿Cuál es el cambio de energía potencial en este desplazamiento?

$$F_{ag} = +Mg\hat{\mathbf{y}}$$

y, por tanto,

$$\Delta U = -W = +4{,}9 \times 10^6 \text{ ergios}$$

de modo que la energía potencial se incrementa en $4{,}9 \times 10^6$ ergios, y vemos que si $U = 0$ cuando $x = 0$, $y = 0$,

$$U = Mgy$$

(3) Si una partícula de masa M se proyecta desde el origen con velocidad v_0 bajo un ángulo θ con la horizontal, ¿a qué altura se elevará? Aquí debemos usar el hecho de que v_x no cambia

$$E = \tfrac{1}{2}Mv_0^2 = \tfrac{1}{2}M(v_x^2 + v_y^2) = \tfrac{1}{2}M(v_0^2\cos^2\theta + v_0^2\operatorname{sen}^2\theta)$$
$$= \tfrac{1}{2}Mv_0^2\cos^2\theta + Mgy_{\max}$$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

lo cual puede deducirse de la Ec. (3.9).

EJEMPLOS

Campo electrostático. ¿Cuál es el valor del campo eléctrico a una distancia de 1 Å ($= 10^{-8}$ cm) de un protón?

Según la ley de Coulomb

$$E = \frac{e}{r^2} \approx \frac{5 \times 10^{-10}\ \text{statcoulomb}}{(1 \times 10^{-8}\ \text{cm})^2} \approx 5 \times 10^6\ \text{statvolts/cm}$$
$$\approx (300)(5 \times 10^6)\ \text{V/cm} \approx 1{,}5 \times 10^9\ \text{V/cm}$$

En unidades SI

$$E = \frac{ke}{r^2} = \frac{(9 \times 10^9)(1{,}6 \times 10^{-19})}{(1 \times 10^{-10})^2} \approx 1{,}5 \times 10^{11}\ \text{V/m}$$

El campo está dirigido radialmente alejándose del protón.

Potencial. ¿Cuál es el potencial electrostático a esta distancia? De las Ecs. (5.33) y (5.34) resulta

$$\Phi(r) = \frac{1}{q}\frac{qe}{r} = \frac{e}{r} \approx \frac{5 \times 10^{-10}\ \text{statcoulomb}}{1 \times 10^{-8}\ \text{cm}}$$
$$\approx 5 \times 10^{-2}\ \text{statvolts} \approx 15\ \text{V}$$

teniendo en cuenta los factores de conversión dados anteriormente. En unidades SI

$$\Phi(r) = k\frac{e}{r} = (9 \times 10^9)\frac{1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}}{1 \times 10^{-10}\ \text{m}} \approx 15\ \text{V}$$

Diferencia de potencial. ¿Cuál es la diferencia de potencial en voltios entre las posiciones que distan 1 Å y 0,2 Å de un protón?

El potencial a 1×10^{-8} cm es 15 voltios; a $0{,}2 \times 10^{-8}$ cm es 75 voltios. La diferencia es 75-15 = 60 voltios ó $60/300 \cong 0{,}2$ statvoltios.

Energía de la partícula cargada deducida de la diferencia de potencial. Un protón se deja en libertad partiendo del reposo a una distancia de 1 Å de otro protón. ¿Cuál es la energía cinética cuando los protones se han alejado hasta el infinito?

Por la conservación de la energía sabemos que la energía cinética debe igualar a la energía potencial original, que es

$$\frac{e^2}{r} \approx \frac{(4{,}8 \times 10^{-10}\ \text{statcoulomb})^2}{1 \times 10^{-8}\ \text{cm}} \approx 23 \times 10^{-12}\ \text{erg}$$

Si un protón se mantiene en reposo mientras que el otro se mueve, la velocidad final del protón móvil viene dada por (utilizando la conservación de la energía)

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 \approx 23 \times 10^{-12}\ \text{erg}$$
$$v^2 \approx \frac{2 \times 23 \times 10^{-12}\ \text{erg}}{1{,}67 \times 10^{-24}\ \text{g}} \approx 27 \times 10^{12}\ (\text{cm/s})^2$$

o

$$v \approx 5 \times 10^6\ \text{cm/s}$$

Utilizando unidades SI

$$U = (9 \times 10^9)\frac{(1{,}6 \times 10^{-19})^2}{10^{-10}} \approx 23 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

$$v^2 \approx \frac{2 \times 23 \times 10^{-19}}{1{,}67 \times 10^{-27}} \approx 27 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$v \approx 5 \times 10^4 \text{ m/s}$$

Si ambos protones tienen libertad de movimiento, cada protón tendrá la misma energía cinética cuando estén muy separados y, por tanto

$$\tfrac{1}{2}Mv_1^2 + \tfrac{1}{2}Mv_2^2 = Mv^2 \approx 23 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

y

$$v \approx \frac{5 \times 10^6 \text{ cm/s}}{\sqrt{2}} \approx 3{,}5 \times 10^6 \text{ cm/s}$$

Aceleración de un protón en un campo eléctrico uniforme. Un protón se acelera desde el reposo mediante un campo eléctrico uniforme. El protón se mueve a través de una caída de potencial de 100 voltios. ¿Cuál es su energía cinética final? (Obsérvese que 100 V $\cong$ 0,33 statvolt.)

La energía cinética será igual al cambio en energía potencial que es $e\Delta\Phi$, o sea

$$(4{,}8 \times 10^{-10} \text{ statcoul})\ (0{,}33 \text{ statvolt}) \cong 1{,}6 \times 10^{-10} \text{ erg})$$

o en unidades SI

$$(1{,}6 \times 10^{-19})(100) \approx 1{,}6 \times 10^{-17} \text{ J}$$

EJEMPLO

Electrón voltio. Una unidad de energía conveniente en física atómica y en física nuclear es el *electrón voltio* (eV). Se define el electrón voltio como la diferencia de energía potencial de una carga e entre dos puntos que tienen una diferencia de potencial de un voltio o como la energía cinética ganada por una carga e que cae a través de una diferencia de potencial de un voltio. Así

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &\approx (4{,}80 \times 10^{-10} \text{ statcoulomb } (\tfrac{1}{300} \text{ statvolt}) \\ &= 1{,}60 \times 10^{-12} \text{ erg} \\ &= 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ Volt} \\ &= 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

Una partícula alfa (núcleos de He^4 o átomos de helio doblemente ionizados) acelerada desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 1 000 voltios, tiene una energía cinética igual a

$$2e \times 1000 \text{ V} = 2000 \text{ eV}$$

donde

$$2000 \text{ eV} = (2 \times 10^3)(1{,}60 \times 10^{-12}) = 3{,}2 \times 10^{-9} \text{ erg}$$

Hemos visto que la diferencia $(Ec_B - Ec_A)$ en la energía cinética de una partícula entre dos puntos tiene la propiedad de que

$$Ec_B - Ec_A = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

en donde **F** es la fuerza que actúa sobre la misma. Pero sabemos de (5.25) que

$$U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de modo que sumando estas dos ecuaciones tenemos

$$(Ec_B + U_B) - (Ec_A + U_A) = 0. \tag{5.38}$$

Así, pues, *la suma de la energía cinética y la potencial es una constante, independiente del tiempo y de la partícula.* Volviendo a escribir (5.38), tenemos para un sistema de una partícula la función energía

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}Mv^2(A) + U(A) = \tfrac{1}{2}Mv^2(B) + U(B)} \tag{5.39}$$

en donde E es una constante denominada la *energía (o energía total)* del sistema. La Ec. (5.32) es justamente esta ecuación para la energía gravitatoria potencial.

Escribamos a continuación la generalización de (5.39) a un sistema de dos partículas en el campo de un potencial externo:

$$\begin{aligned} E &= Ec + U \\ &= \tfrac{1}{2}M_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2v_2^2 + U_1(\mathbf{r}_1) + U_2(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &= \text{const} \end{aligned} \tag{5.40}$$

El primer término es la energía cinética de la partícula 1; el segundo término es la energía cinética de la partícula 2; el tercero y cuarto términos son las energías potenciales de las partículas 1 y 2 debidas a un potencial externo; el quinto término es la energía potencial debida a la interacción entre las partículas 1 y 2. Obsérvese que $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ se ha puesto una sola vez: si dos partículas interaccionan, ¡la energía de interacción es mutua!

Si las partículas 1 y 2 son protones en el campo gravitatorio terrestre, la energía E en (5.40) es

$$E = \tfrac{1}{2}M(v_1^2 + v_2^2) + Mg(y_1 + y_2) - \frac{GM^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{12}}$$

en donde y se mide hacia arriba y $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. El último término es la energía de Coulomb de los dos protones; el término penúltimo es su energía gravitatoria. La primera es repulsiva y la segunda atractiva. La relación entre ambos términos es

$$\frac{GM^2}{e^2} \approx \frac{10^{-7} \times 10^{-48}}{10^{-19}} \approx 10^{-36}$$

que demuestra que como las fuerzas dependen de la distancia de la misma forma, las fuerzas gravitatorios entre los protones son extraordinariamente débiles en comparación con las electrostáticas. En unidades SI, tenemos

$$\frac{GM^2}{ke^2} \approx \frac{10^{-10} \times 10^{-54}}{10^{10} \times 10^{-38}} \approx 10^{-36}$$

POTENCIA

La *potencia* P es la transferencia de energía por unidad de tiempo. Hemos definido el trabajo realizado sobre una partícula en un desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ por una fuerza aplicada como

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

El cociente del trabajo realizado por la fuerza y el tiempo empleado es

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

En el límite $\Delta t \to 0$, tendremos la potencia

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} \qquad (5.41)$$

A partir de la potencia $P(t)$ como función del tiempo podemos escribir el trabajo proporcionado como

$$W(t_1 \to t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt$$

En el sistema cgs *la unidad de potencia es el ergio por segundo.* En el sistema mks la unidad es el julio por segundo, o *vatio* (1w). Para hallar la potencia en erg/s basta multiplicar la potencia expresada en vatios por 10^7.

Para obtener la potencia en vatios a partir del valor expresado en caballos de vapor, multiplíquese por 746 (aproximadamente).

PROBLEMAS

1. *Energía cinética y potencial: cuerpo que cae*

(*a*) ¿Cuál es la energía potencial de una masa de 1 kg a una altura de 1 km por encima de la Tierra? Expresar la respuesta en ergs y referir la energía potencial a la superficie de la Tierra. *Sol.* $9{,}8 \times 10^{10}$ ergs = 9 800 J.

(*b*) ¿Cuál es la energía cinética en el momento preciso que la masa de 1 kg, que se ha soltado a 1 km de altura, toca la Tierra? Despréciese el rozamiento *Sol.* $9{,}8 \times 10^{10}$ ergs.

(*c*) ¿Cuál es la energía cinética de la misma masa cuando ha recorrido en su caída la mitad del camino?

(*d*) ¿Cuál es la energía potencial cuando ha recorrido medio camino? ¿La suma de (*c*) y (*d*) debe ser igual a (*a*) o a (*b*)? ¿Por qué?

2. *Energía potencial sobre la Tierra*

(*a*) ¿Cuál es la energía potencial $U(R_T)$ de una masa de 1 kg sobre la superficie terrestre, referida a la energía potencial cero a distancia infinita? (Obsérvese que $U(R_T)$ es negativa.) *Sol.* $-6{,}25 \times 10^{14}$ ergs.

(*b*) ¿Cuál es la energía potencial de una masa de 1 kg a una distancia de 10^5 km del centro de la Tierra, referida a la energía potencial cero a una distancia infinita? *Sol.* $-3{,}98 \times 10^{13}$ ergs.

(*c*) ¿Cuál es el trabajo necesario para mover la masa desde la superficie de la Tierra hasta un punto situado a 10^5 km del centro de la Tierra?

3. *Energía potencial electrostática*

(*a*) ¿Cuál es la energía potencial electrostática de un electrón y un protón distantes entre sí $1\,\text{Å} \equiv 10^{-8}$ cm, referida a la energía potencial cero a separación infinita? Si la carga se expresa en ues, el resultado vendrá en ergs.
Sol. $-2{,}3 \times 10^{-11}$ ergs.

(*b*) ¿Cuál es la energía potencial electrostática de dos protones a la misma distancia? (Préstese especial atención al signo de la respuesta).

4. *Satélite en una órbita circular*

(*a*) ¿Cuál es la fuerza centrífuga que actúa sobre un satélite que se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra a una distancia r de su centro? La velocidad del satélite respecto al centro de la Tierra es v y su masa es M.

(*b*) Igualar la fuerza centrífuga en (*a*) a la fuerza gravitatoria (M está en equilibrio en el sistema rotatorio).

(*c*) Expresar v en función de r, G y M_T.

(*d*) ¿Cuál es la relación entre la energía cinética y la potencial suponiendo que $U = 0$ para $r = \infty$?

5. *La Luna: su energía cinética.* ¿Cuál es la energía cinética de la Luna respecto a la Tierra? Los datos más importantes se dan en la tabla de constantes en el interior de la cubierta de este libro.

6. *Muelle anarmónico.* Un muelle especial tiene la siguiente ley de fuerzas $F = -Dx^3$.

(*a*) ¿Cuál es la energía potencial en x, referida a $U = 0$ para $x = 0$? *Sol.* $\frac{1}{4}Dx^4$.

(*b*) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el muelle al alargarlo lentamente de 0 a x?

7. *Energía potencial gravitatoria*

(*a*) ¿Cuál es la energía potencial relativa a la superficie de la Tierra de un obús de 1,0 kg en el borde de un acantilado de 500 m de altura?

(*b*) Si el obús se proyecta desde el acantilado con una velocidad de $9{,}0 \times 10^3$ cm/s, ¿cuál será su velocidad al chocar contra el suelo? ¿Afecta a la respuesta el ángulo de tiro?

8. *Máquina de Atwood.* En el Cap. 3 se describió la máquina de Atwood.

(*a*) Utilizar la ecuación de la conservación de la energía para determinar las velocidades de las dos masas cuando m_2 ha descendido una distancia y después de partir del reposo.

(*b*) A partir de esta expresión de la velocidad, determinar la aceleración. Comparar con el resultado de la ecuación (3.40).

9. *Electrón en una órbita de enlace alrededor del protón.* Supongamos que un electrón se mueve en una órbita circular alrededor de un protón a una distancia de 2×10^{-8} cm. Considérese que el protón está en reposo.

(*a*) Obtener la velocidad del electrón igualando las fuerzas centrífugas y electrostáticas.

(*b*) ¿Cuál es la energía cinética?, ¿y la potencial? Dar los valores en ergs y en electrón-voltios.
Sols. $Ec = 5{,}8 \times 10^{-12}$ ergs $= 3{,}6$ eV; $U = 11{,}5 \times 10^{-12}$ ergs $= -7{,}2$ eV.

(*c*) ¿Cuánta energía se necesita para ionizar el sistema, es decir, para llevar el electrón a distancia infinita con energía cinética final nula? (Póngase atención cuidadosa a los distintos signos.)

10. *Paradoja del muelle.* ¿Dónde está el fallo en el siguiente argumento? Consideremos una masa m en reposo, en el extremo $y = 0$, de un muelle que cuelga verticalmente. La masa se cuelga del muelle, el cual se alarga a causa de la fuerza gravitatoria mg que actúa sobre la masa. La masa pierde energía potencial mgy y el muelle gana la misma cantidad de energía potencial $mgy = \frac{1}{2}Cy^2$, con lo cual se alcanza el equilibrio en la posición

$$y = \frac{2mg}{C}$$

11. *Velocidad de escape de la Luna.* Utilizando $R_L = 1{,}7 \times 10^8$ cm y $M_L = 7{,}3 \times 10^{25}$ g, hallar:

(*a*) La aceleración gravitatoria en la superficie de la Luna.

(*b*) La velocidad de escape de la Luna.

12. *Energía potencial de un par de muelles.* Dos muelles, que tienen cada uno de ellos una longitud natural a y una constante de rigidez C están fijos a los puntos $(-a,0)$ y $(+a,0)$ y conectados entre sí por los otros extremos. En lo que sigue supóngase que pueden estirarse o contraerse sin pandeo. (Fig. 5.19.)

(*a*) Demostrar que la energía potencial del sistema para un desplazamiento de los extremos unidos hasta (x,y) es

$$U = \frac{C}{2}\{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} - a\}^2 + \frac{C}{2}\{[(a-x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} - a\}^2$$

(*b*) La energía potencial depende de x e y, y deberemos, por consiguiente, utilizar las derivadas parciales para calcular las fuerzas de importancia. Recuérdese que las derivadas parciales de una función $f(x,y)$ se obtienen por las reglas normales de la derivación de acuerdo con

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{d}{dx}f(x;\ y = \text{const}) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{d}{dy}f(x = \text{const};\ y)$$

Hallar la componente F_x de la fuerza y demostrar que $F_x = 0$ para $\mathbf{r} = 0$.

(*c*) Hallar F_y para $x = 0$. Comprobar cuidadosamente los signos para asegurarse de que la solución tiene sentido.

(*d*) Dibujar un gráfico de la energía potencial como una función de $\mathbf{r}$ en el plano xy y encontrar la posición de equilibrio.

13. *El círculo de «la muerte».* Una masa m se desliza por una vía sin rozamiento y asciende por la parte interior de un círculo vertical de radio R. Determinar la altura desde la cual debe dejarse partir para que complete el círculo sin caer por efecto de la fuerza de la gravedad. *Sugerencia:* ¿Cuál es la fuerza ejercida por la vía en el punto más alto del círculo?

14. *Espectrómetro de masa de tiempo de vuelo.* El funcionamiento de un espectrómetro de masa de tiempo de vuelo está basado en el hecho de que la frecuencia angular del movimiento helicoidal en un campo magnético uniforme es independiente de la velocidad inicial del ion. En la práctica, el aparato produce un corto pulso de iones y mide electrónicamente el tiempo de vuelo para una o más revoluciones de los iones en el pulso.

(*a*) Demostrar que el tiempo de vuelo para N revoluciones es, aproximadamente, para iones de carga e,

$$t \approx 650 \frac{NM}{B}$$

en donde t está en *microsegundos*, M en *unidades de masa atómica* y B en *gauss*. (Unidad masa atómica = $1{,}66 \times 10^{-24}$ g.)

(*b*) Demostrar que el radio de giro es aproximadamente

$$R \approx \frac{144\sqrt{VM}}{B} \text{cm}$$

en donde V es la energía de iones en electrón-volts.

(*c*) Dado un campo magnético de 1 000 gauss, calcular el tiempo de vuelo para 6 revoluciones de un átomo de potasio K^{39} simplemente ionizado.

Sol. 152 μs.

15. *Haz de electrones en un osciloscopio.* Los electrones en el tubo de un osciloscopio son acelerados a partir del reposo a través de una diferencia de potencial Φ_a y pasan entre dos placas deflectoras electrostáticas. Las placas, que tienen una longitud l y una separación d, tienen una diferencia de potencial Φ_b entre ellas. La pantalla del tubo está situada a una distancia L del centro de las placas. Utilizar la relación $e\,\Delta\Phi = \frac{1}{2}mv^2$ entre el potencial acelerador y la velocidad v.

(*a*) Deducir una expresión para la deflexión lineal D del «spot» sobre la pantalla.

(*b*) Suponer que $\Phi_a = 400$ volts; $\Phi_b = 10$ volts, $l = 2$ cm; $d = 0{,}5$ cm; $L = 15$ cm; ¿cuál es la deflexión? (Recuérdese cambiar los volts a statvolts.) El aparato es como el de la fig. 3.6, excepto en que las placas están más próximas.

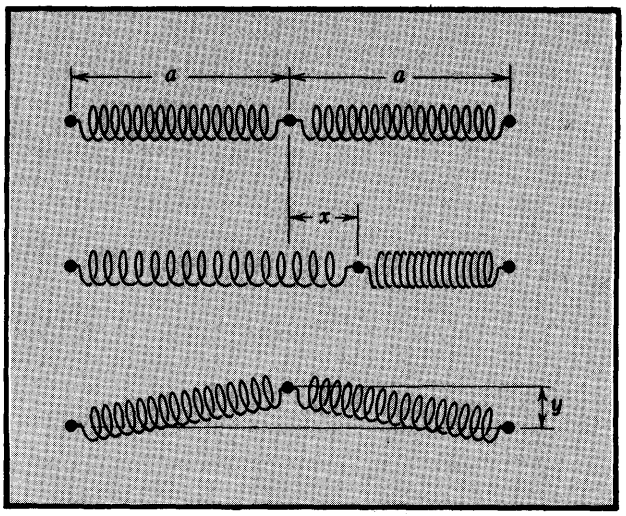


FIG. 5.19

16. *Impulso*

(*a*) Calcular el impulso que una bola ejerce sobre otra en una colisión frontal completamente inelástica, si sus masas son de 500 g y cada una de ellas se aproxima a la otra con una velocidad de 100 cm/s.

(*b*) ¿Cuál sería el impulso en el caso de que la colisión fuera elástica?

(*c*) Si suponemos que el tiempo de la colisión en (*a*) y (*b*) es $1{,}0 \times 10^{-3}$ s, determinar la fuerza media en cada caso:

$$F_{\text{med}} = \frac{\int_0^t F\,dt}{\int_0^t dt}$$

17. *Potencia.* Una cinta transportadora se utiliza para llevar arena de un punto a otro. La arena cae desde el reposo en una tolva a la correa que se mueve horizontalmente a la velocidad v. Despreciando el rozamiento y lo qué ocurre al otro extremo de la correa, calcular la potencia necesaria para que la correa se desplace en función de v y de la masa de arena, $M = dM/dt$, que cae sobre la correa por segundo. ¿Cuánta potencia se convierte en energía cinética por segundo? (Despreciar la energía gravitatoria de la arena que cae.)

Sol. Mv^2; $\frac{1}{2}$.

NOTAS HISTÓRICAS

Descubrimiento de Ceres. (Esta descripción ilustra la exactitud de las predicciones basadas en la mecánica clásica.)

1. El primer planeta menor o asteroide que se descubrió fue Ceres, siendo encontrado visualmente por Piazzi en Palermo (Sicilia), el día primero del siglo diecinueve, 1 de enero de 1801. Piazzi observó sus movimientos durante algunas semanas, luego cayó enfermo y perdió todo rastro de él. Cierto número de científicos calcularon su órbita, a partir del número limitado de posiciones observadas por Piazzi, pero únicamente la órbita calculada por Gauss fue lo bastante exacta para predecir dónde podría estar el año siguiente. El 1 de enero de 1802, el planeta Ceres fue vuelto a descubrir por Olbers a una distancia angular de 30′ únicamente de la situación predicha. Con más observaciones acumuladas, Gauss y otros pudieron mejorar las características de la órbita calculada y en 1830 la posición del planeta sólo discrepaba 8″ de la posición predicha. Incluyendo las principales perturbaciones de la órbita de Ceres debidas a Júpiter, Enke halló que podía reducir el error residual a una media de 6″ por año. Cálculos posteriores, que tuvieron en cuenta las perturbaciones con más exactitud, dieron lugar a predicciones que discordaron de las observaciones únicamente por 30″ en 30 años.

Se dio cuenta del descubrimiento en el Vol. 12 del *Philosophical Magazine* (1802); véanse los artículos de Piazzi (pág. 54), Von Zach (pág. 62), Tilloch (pág. 80) y Lalande (pág. 112). Resulta curioso saber que se organizó en Lilienthal una sociedad de eminentes astrónomos europeos, el 21 de septiembre de 1800, con «el propósito expreso de buscar el planeta que se supone que existe entre Marte y Júpiter... El plan de la sociedad consistía en dividir el zodíaco entero entre los veinticuatro miembros». Debido a los retrasos postales motivados por las guerras napoleónicas, la invitación a participar en el equipo de investigación no se le transmitió a Piazzi hasta después de su descubrimiento. Otra relación del descubrimiento de Ceres se encuentra en el *Astronomisches Jahrbuch* 1804/5. Los cálculos de Gauss están en el Vol. 6 de sus *Werke*, páginas 119-211.

La tradición astronómica iniciada en Palermo por el Abate Piazzi se cree que alcanzó hasta Lampedusa (héroe de la novela «*El Gatopardo*», escrita por su descendiente) por medio del Abate Pirrone, que fue el consejero espiritual de Lampedusa y su ayudante en las investigaciones astronómicas.

Descubrimiento de Neptuno. Durante la primera mitad del siglo diecinueve, al mejorar la teoría y la precisión de las observaciones, se vio que el planeta Urano no se movía de acuerdo con las leyes de la gravitación y de la conservación de la energía y del momento angular (véanse capítulos 6 y 9). El planeta aceleraba y deceleraba erráticamente en cantidades pequeñas pero significativas. No había manera de explicar esta conducta sobre la base de las propiedades conocidas del sistema solar y las leyes de la Física. Finalmente, en 1846, Leverrier y Adams independientemente descubrieron que la existencia de un hipotético nuevo planeta de cierta masa y de cierta órbita exterior a la de Urano, explicaba completamente el movimiento anómalo observado *. Resolvieron sus ecuaciones para localizar la

(*) Yo demostré que no era posible explicar las observaciones realizadas sobre este planeta [Urano] mediante la teoría de la gravitación universal si el planeta estuviera sometido únicamente a la acción combinada del Sol y de los planetas conocidos. Pero todas las anomalías observadas pueden explicarse hasta los detalles más pequeños por la influencia de un planeta nuevo [sin descubrir] más allá de Urano.... Predijimos [31 de agosto de 1846] la siguiente posición para el nuevo planeta el 1 de enero de 1847: longitud heliocéntrica 326° 32′.» U. J. Le Verrier, *Compt. Rend.*, **23**, 428 (1846).

situación de este planeta desconocido, y después de sólo media hora de búsqueda, el nuevo planeta, denominado Neptuno, fue encontrado por Galle a 1° únicamente de su posición predicha *. Las predicciones presentes de las posiciones de los planetas mayores están de acuerdo con la aproximación de unos segundos de arco con las observaciones incluso después de una extrapolación de muchos años. La exactitud parece depender totalmente del estudio completo de los diversos efectos perturbadores.

Es interesante observar que el planeta Plutón, que está todavía más alejado del Sol, fue descubierto de un modo similar y que los elementos 93 y 94 que siguen al uranio (elemento 92) fueron llamados neptunio y plutonio.

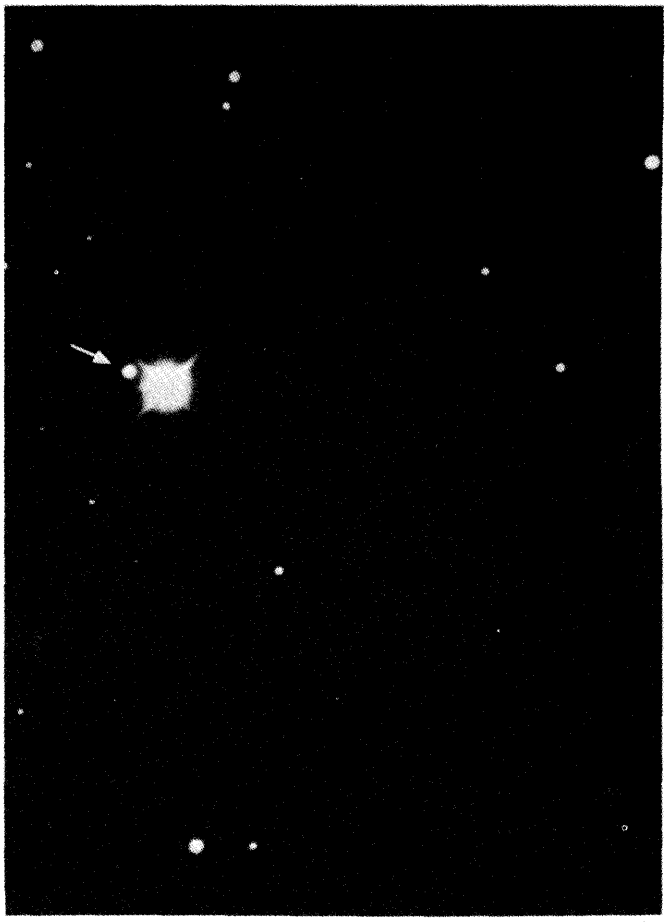
LECTURAS SUPLEMENTARIAS

PSSC, *Física*, caps. 23 y 24. Ed. Reverté.

HPP, *Project Physics Course*, cap. 10 (secs. 1-4), Holt, Rinehart and Winston, Inc., Nueva York, 1970.

E. P. Wigner, Symmetry and Conservation Laws, *Physics Today*, **17** (3): 34 (1964).

Ernst Mach, *The Science of Mechanics*, cap. 3, sec. 2. The Open Court Publishing Company, La Salle, Ill., 1960. Sobre la historia del concepto de energía cinética («vis viva»).



Neptuno visto mediante el reflector de 120 pulgadas del Lick Observatory. La flecha apunta a Tritón, un satélite de Neptuno. *(Fotografía del Lick Observatory.)*

(*) «Escribí a M. Galle el 18 de septiembre para solicitar su colaboración; este hábil astrónomo vio el planeta el mismo día [23 de septiembre de 1846] que recibió mi carta.... Longitud heliocéntrica [observada] 327° 24′ reducida al 1 de enero de 1847.... Diferencia [observada y teoría] 0° 52′.» Le Verrier, *Compt. Rend.*, **23**, pág. 657 (1846).

«M. Le Verrier vio el nuevo planeta sin necesidad de echar un vistazo tan siquiera al firmamento; lo vio en la *punta de su pluma*; determinó, con el único poder de su cálculo, la posición y el tamaño de un cuerpo situado mucho más allá de los límites conocidos entonces de nuestro sistema planetario....» Arago, *Compt. Rend.*, **23**, pág. 659 (1846).

Para una introducción a la magnífica controversia sobre el descubrimiento, véanse las págs. 741-754 del mismo volumen de las *Compt. Rend.* (París); véase también: M. Grosser, *The discovery of Neptune* (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1962).

Contenido

FUERZAS INTERNAS Y CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO
CENTRO DE MASAS
Ejemplo. Choque de partículas que se adhieren entre sí
Ejemplo. Componentes transversales de la cantidad de movimiento
Ejemplo. Choque de partículas con excitaciones internas
Ejemplo. Choque general elástico de partículas de masa diferente

SISTEMAS CON MASA VARIABLE
Ejemplo. Satélite en el polvo interplanetario
Ejemplo. Problema del vehículo espacial
Ejemplo. Fuerza debida a una cadena que cae

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO
Los momentos debidos a fuerzas internas tienen una resultante nula
Momento debido a la gravedad
Momento cinético alrededor del centro de masas
Ejemplo. Difusión de protones por un núcleo pesado
Ejemplo. Aceleración angular que acompaña a una contracción
Ejemplo. Forma de la galaxia

Problemas
Lecturas suplementarias



Conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético

En el Cap. 4 consideramos sistemas para los que era válida la invariancia de Galileo y demostramos que la conservación de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas que interaccionan es una consecuencia necesaria de la invariancia galileana y de la conservación de la energía, siempre que no actúan fuerzas exteriores. La conservación de la cantidad de movimiento, ley exacta comprobada experimentalmente, es una parte esencial del «bagaje clásico», que se discutió anteriormente. En este capítulo desarrollaremos las implicaciones de la conservación de la cantidad de movimiento en el movimiento de un conjunto de partículas y definiremos el centro de masas y consideraremos los procesos del choque, tal y como se observarían desde un sistema de referencia con el centro de masas en reposo. Los procesos de choque entre pares de partículas constituyen casos especiales importantes. Introduciremos también el importante concepto del momento cinético, la conservación del mismo y el concepto de par. Estos conceptos son de particular importancia en el tratamiento de los cuerpos rígidos en el Cap. 8 y de las fuerzas centrales en el Cap. 9.

FUERZAS INTERNAS Y CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Al tratar el comportamiento dinámico de un sistema de partículas resulta útil distinguir entre las fuerzas de interacción de las partículas del sistema y otras fuerzas debidas a factores externos del sistema, tales como los campos gravitatorio y eléctrico. Nos referimos a las fuerzas entre partículas como fuerzas *internas* del sistema.

Las fuerzas internas no pueden afectar a la cantidad total de movimiento del conjunto de partículas, en donde por *cantidad total de movimiento* entendemos el vector suma

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \tag{6.1}$$

(Se ha dado una demostración en el Cap. 3 que el lector debe recordar en la discusión que sigue.) Considerando que las fuerzas entre partículas son newtonianas, es fácil entender que la interacción mutua entre dos partículas obedece la ecuación

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

en donde $\mathbf{F}_{ij}$ representa la fuerza ejercida sobre la partícula i por la partícula j y viceversa. Así, según la segunda ley de Newton, llegamos a la conclusión de

que en cualquier intervalo de tiempo la variación de **la cantidad de movimiento producida en la partícula *i*** por la fuerza $\mathbf{F}_{ij}$ es vectorialmente igual y opuesta a la producida en la partícula *j* por la fuerza $\mathbf{F}_{ji}$ y, por tanto, la variación de cantidad de movimiento debida a la interacción mutua del par de partículas es cero. Este argumento es válido para cualquier par de partículas del conjunto y no viene afectado por la presencia de las restantes. Así llegamos a la conclusión de que las fuerzas internas no pueden afectar a la cantidad de movimiento total del sistema, ya que la suma vectorial de todas estas fuerzas es cero.

El párrafo anterior se refiere a la cantidad de movimiento total lineal del sistema. Posteriormente, en este capítulo extenderemos el argumento para demostrar que las fuerzas internas tampoco pueden producir un cambio en el momento cinético de un sistema de partículas. El reconocimiento de estos dos principios de *conservación de la cantidad de movimiento* en relación con las fuerzas internas simplifica grandemente el entendimiento y el análisis de muchos problemas de movimiento colectivo.

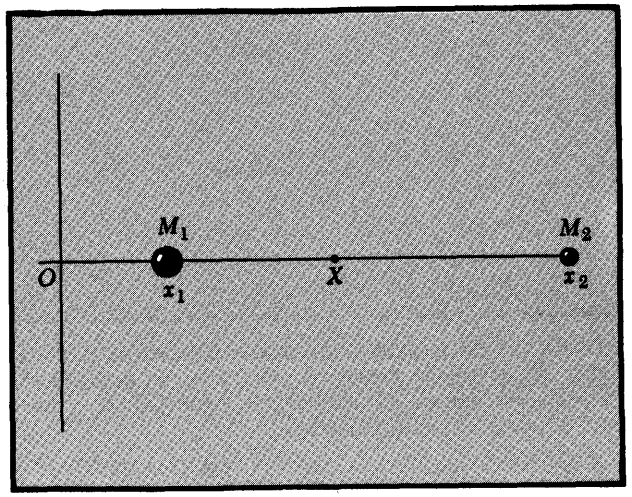


FIG. 6.1 Dos masas M_1 y M_2 en las posiciones x_1 y x_2 sobre el eje x tienen un centro de masas situado en $X = (M_1x_1 + M_2x_2)/(M_1 + M_2)$.

CENTRO DE MASAS

Respecto a un origen fijo O se define la posición $\mathbf{R}_{\text{c-m.}}$ del centro de masas (c.m.) de un sistema de N partículas como

$$\mathbf{R}_{\text{c.m.}} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{r}_n M_n}{\sum_{n=1}^{N} M_n} \tag{6.2}$$

Se trata de una posición media, ponderada de acuerdo con la masa de las partículas. Para un sistema de dos partículas

$$\mathbf{R}_{\text{c.m.}} = \frac{\mathbf{r}_1 M_1 + \mathbf{r}_2 M_2}{M_1 + M_2} \tag{6.3}$$

como indican las figs. 6.1 y 6.2.

Derivando la Ec. (6.2) respecto al tiempo:

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}} = \frac{\sum_n \dot{\mathbf{r}}_n M_n}{\sum_n M_n} = \frac{\sum_n \mathbf{v}_n M_n}{\sum_n M_n} \tag{6.4}$$

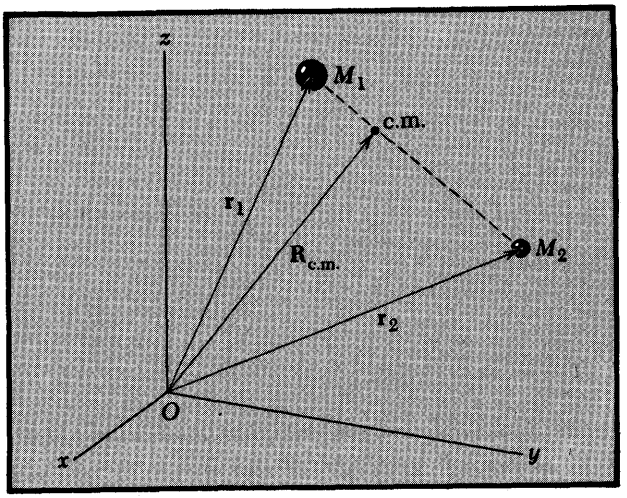


FIG. 6.2 Para dos masas M_1 y M_2 en posiciones arbitrarias $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{R}_{\text{c.m.}} = (M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2)/(M_1 + M_2)$.

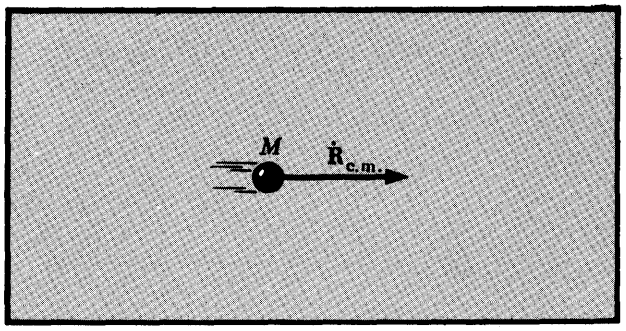
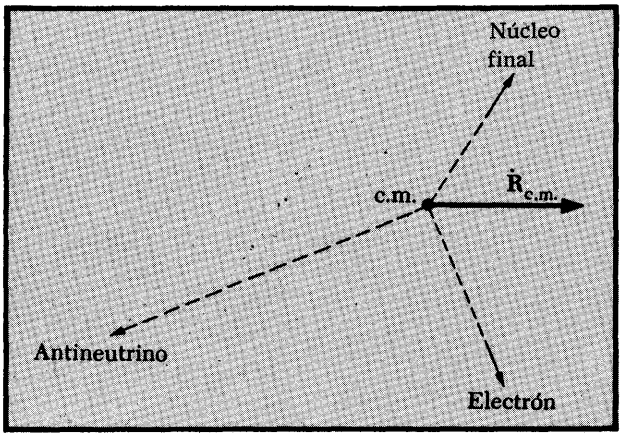


FIG. 6.3 *a*) En ausencia de fuerzas exteriores, la velocidad del centro de masas es constante. En esta figura tenemos un núcleo radiactivo con velocidad $\dot{\mathbf{R}}_{c.m.}$ que está a punto de desintegrarse.



b) El núcleo se desintegra en tres partículas que se mueven en direcciones diferentes. Sin embargo, la velocidad del centro de masas de estas tres partículas permanece invariable.

pero $\sum_n \mathbf{v}_n M_n$ es precisamente la cantidad de movimiento total del sistema. En ausencia de fuerzas externas la cantidad de movimiento es constante, de modo que

$$\dot{\mathbf{R}}_{c.m.} = \text{const} \tag{6.5}$$

Esta es una propiedad notable del centro de masas: la *velocidad del centro de masas es constante en ausencia de fuerzas exteriores.* Esto es cierto, por ejemplo, para un núcleo radiactivo que se desintegra en pleno vuelo (véase fig. 6.3 *a* y *b*) o para un proyectil que explota en fragmentos en un espacio libre de fuerzas.

Es fácil demostrar a partir de (6.4) que la aceleración del centro de masas está determinada por la fuerza externa total que actúa sobre el sistema de partículas. Si $\mathbf{F}_n$ es la fuerza sobre la partícula n, tendremos, al derivar (6.4) respecto al tiempo,

$$\left(\sum_n M_n\right)\ddot{\mathbf{R}}_{c.m.} = \sum_n (M_n \dot{\mathbf{v}}_n) = \sum_n \mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{ext} \tag{6.6}$$

en donde las fuerzas internas entre las partículas se contrarrestan (porque son fuerzas newtonianas) en la suma $\sum_n \mathbf{F}_n$ extendida a todas las partículas.

Este es otro resultado importante: *En presencia de fuerzas externas el vector aceleración del centro de masas es igual a la suma vectorial de las fuerzas externas dividida por la masa total del sistema.* En otras palabras, podemos utilizar los métodos desarrollados en los capítulos 3 y 5 para tratar el movimiento del centro de masas como si allí toda la masa del cuerpo estuviera concentrada y todas las fuerzas externas actuasen sobre el mismo. (Este principio es particularmente importante en los problemas del cuerpo rígido tratados en el Cap. 8.) Como otro ejemplo, el centro de masas de la Tierra y de la Luna se mueven en una órbita aproximadamente circular alrededor del Sol. Vamos ahora a ilustrar la utilidad del centro de masas resolviendo algunos problemas de colisión importantes. (Algunos de ellos han sido ya tratados en los Caps. 3 y 4.)

EJEMPLO

Choque de partículas que se adhieren entre sí *. Consideremos el choque de dos partículas de masas M_1 y M_2 que se pegan

(*) El caso de partículas de igual masa fue considerado en el Cap. 4. Resulta instructivo calcular el $\Delta\epsilon$ en ambos sistemas para este caso general.

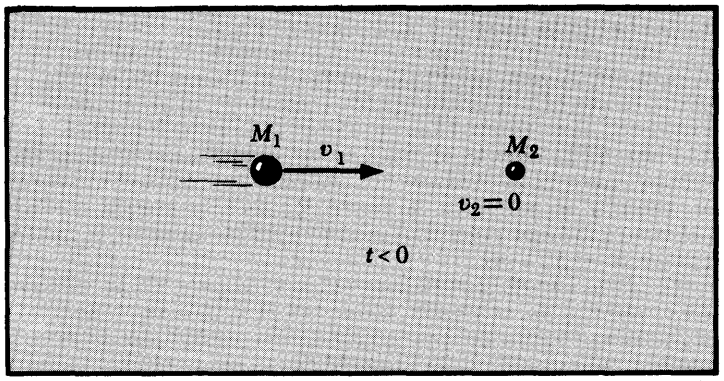
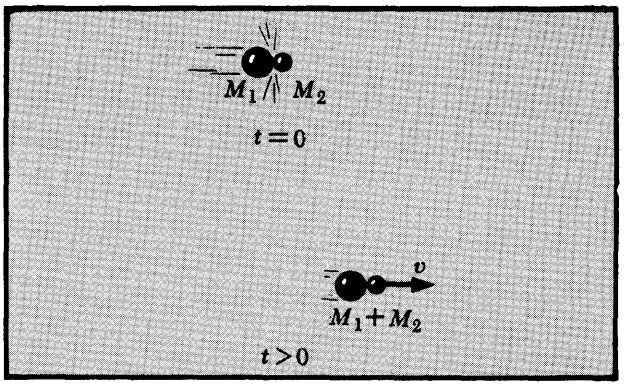


FIG. 6.4 *a*) La cantidad de movimiento debe conservarse incluso en un choque inelástico. Consideramos un choque en el que las partículas se adhieren entre sí. Antes del mismo $p_x = M_1v_1$.



b) Después del choque $p_x = M_1v_1 = (M_1 + M_2)v$, de modo que $v = M_1v_1/(M_1 + M_2) < v_1$.

durante el mismo. Supongamos que M_2 está en reposo en el origen antes de la colisión y que $\mathbf{r}_1 = v_1 t\,\hat{\mathbf{x}}$ describe el movimiento de M_1 también antes del choque.

(1) Describir el movimiento de $M = M_1 + M_2$ después del choque. La fig. 6.4 *a* y *b* ilustra el caso. Independientemente de que el choque sea elástico o inelástico, la cantidad de movimiento total no varía durante la colisión. El choque considerado aquí es inelástico. La componente x inicial de la cantidad de movimiento es M_1v_1, la componente x final de la cantidad de movimiento es $(M_1 + M_2)\,v$. Las otras componentes son cero. Por la conservación de la cantidad de movimiento tenemos

$$M_1v_1 = (M_1 + M_2)v \tag{6.7}$$

de modo que la velocidad final v viene dada por

$$v = \frac{M_1}{M_1 + M_2}v_1 \tag{6.8}$$

y como las partículas se han adherido entre sí

$$\mathbf{X}_{\text{c.m.}} = vt\hat{\mathbf{x}} \qquad t > 0$$

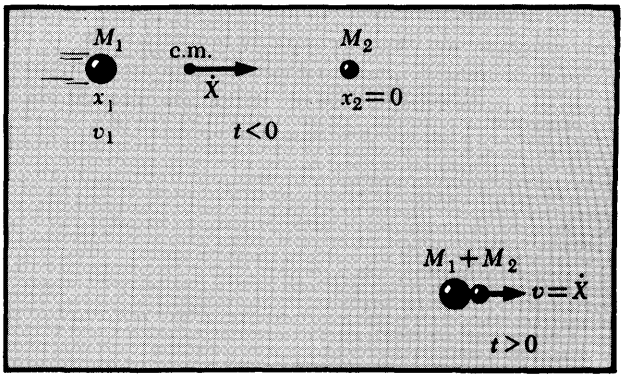
describe el movimiento del sistema después del choque. De acuerdo con (6.5) esta misma relación debe describir el movimiento del centro de masas en todo instante, antes y después de la colisión:

$$\mathbf{X}_{\text{c.m.}} = vt\hat{\mathbf{x}} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}v_1t\hat{\mathbf{x}} \tag{6.9}$$

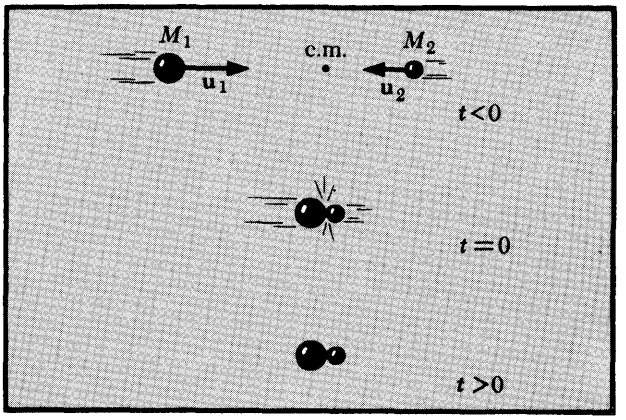
utilizando la ecuación (6.7) como se indica en la fig. 6.4 *c*.

(2) ¿Cuál es la relación entre la energía cinética después del choque y la inicial? La energía cinética Ec_f después del choque es

$$Ec_f = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2)\frac{M_1^2}{(M_1 + M_2)^2}v_1^2 = \frac{M_1^2v_1^2}{2(M_1 + M_2)} \tag{6.10}$$



c) $X = (M_1x_1+M_2x_2)/(M_1+M_2)$, de modo que $\dot{X} = M_1v_1/(M_1 + M_2)$. $\dot{X}$ no varía a causa del choque.



d) En el sistema de referencia del centro de masas las velocidades de M_1 y M_2 antes del choque son $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Después del choque $(M_1 + M_2)$ está en reposo.

La inicial Ec_i es igual a $\frac{1}{2} M_1 v_1^2$, de modo que

$$\frac{Ec_f}{Ec_i} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \tag{6.11}$$

El resto de la energía aparece en las excitaciones internas del sistema compuesto después del choque. Cuando un meteorito M_1 choca y se adhiere a la Tierra M_2, toda la energía cinética del mismo aparece prácticamente en forma de calor en la Tierra, porque $M_1 \ll M_1 + M_2$.

(3) Describir el movimiento, antes y después de la colisión, en el sistema de referencia en el que el centro de masas está en reposo. (Dicha referencia se denomina *sistema del centro de masas* y viene ilustrada en la fig. 6.4 *d*.)

La posición del centro de masas del sistema viene dada según (6.9) por

$$\mathbf{X}_{\text{c.m.}} = \frac{M_1 v_1 t \hat{\mathbf{x}}}{M_1 + M_2}$$

La velocidad del centro de masas viene dada por

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{X}}_{\text{c.m.}} = \frac{d}{dt}\mathbf{X}_{\text{c.m.}} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 \hat{\mathbf{x}}$$

En el sistema de referencia del centro de masas la velocidad inicial $\mathbf{u}_1$ de la partícula 1 es

$$\mathbf{u}_1 = v_1 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{V} = \left(1 - \frac{M_1}{M_1 + M_2}\right) v_1 \hat{\mathbf{x}} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_1 \hat{\mathbf{x}}$$

En el sistema de referencia del centro de masas la velocidad inicial $\mathbf{u}_2$ de la partícula 2 es

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{V} = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 \hat{\mathbf{x}}$$

Obsérvese que

$$M_1 \mathbf{u}_1 + M_2 \mathbf{u}_2 = \left(\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} v_1 - \frac{M_2 M_1}{M_1 + M_2} v_1\right) \hat{\mathbf{x}} = 0$$

en donde puede verse la ventaja del sistema del centro de masas; las cantidades de movimiento son siempre iguales y opuestas.

Ahora bien, al chocar las partículas se pegan entre sí; la nueva partícula tiene masa $M_1 + M_2$ y debe estar en reposo en el sistema del centro de masas. Respecto al sistema del laboratorio la nueva partícula tiene la velocidad $\mathbf{V}$ del centro de masas que es exactamente la misma que la velocidad de la ecuación (6.8) obtenida por el primer método.

EJEMPLO

Componentes transversales de la cantidad de movimiento. Dos partículas de igual masa se mueven inicialmente sobre trayectorias paralelas al eje x y chocan entre sí. Después del choque se observa que una de las partículas tiene un valor particular v_y (1) de la componente y de la velocidad. ¿Cuál es la componente y de la velocidad de la otra partícula después de la colisión? (Re-

cuérdese que cada componente x, y o z de la cantidad de movimiento total se conserva por separado.)

Antes del choque las partículas estaban moviéndose a lo largo del eje x, de modo que la componente y total de la cantidad de movimiento era cero. Según la conservación de la cantidad de movimiento, la componente y total de la misma debe ser también cero después del choque, de modo que,

$$M[v_y(1) + v_y(2)] = 0$$

de donde

$$v_y(2) = -v_y(1)$$

No se puede calcular v_y (1) por sí solo sin especificar las trayectorias iniciales y los detalles de las fuerzas que actúan durante el proceso del choque.

EJEMPLO

Choque de partículas con excitaciones internas. Dos partículas de igual masa y velocidades iguales pero opuestas $\pm \mathbf{v}_i$ chocan entre sí. ¿Cuáles son las velocidades después del choque?

El centro de masas está en reposo y debe permanecer en reposo, de modo que las velocidades finales $\pm \mathbf{v}_f$ son iguales pero opuestas. Si la colisión es elástica, la conservación de la energía exige que la celeridad final v_f sea igual a la inicial v_i. Si una o ambas partículas son excitadas internamente por la colisión, entonces $v_f < v_i$ por la conservación de la energía. Si una de las partículas, o las dos, están inicialmente en estados excitados de movimiento interno y en el choque transforman su energía de excitación en energía cinética, entonces v_f será mayor que v_i.

EJEMPLO

Choque general elástico de partículas de masa diferente. Este problema es famoso. Una partícula de masa M_1 choca elásticamente con otra de masa M_2 que inicialmente está en reposo en el sistema de referencia del laboratorio. La trayectoria de M_1 se desvía un ángulo θ_1 debido al choque. El máximo valor posible del ángulo de difusión θ_1 se determina por las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento, independientemente de los detalles de la interacción entre las partículas. Nuestro problema consiste en encontrar $(\theta_1)_{\max}$. Veremos que es conveniente en cierta fase del cálculo observar la colisión desde el sistema de referencia en que el centro de masas está en reposo.

Designemos las velocidades iniciales en el sistema del laboratorio (fig. 6.5) por

$$\mathbf{v}_1 = v_1\hat{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{v}_2 = 0$$

y las finales (después del choque) por $\mathbf{v}'_1$ y $\mathbf{v}'_2$. La ley de la conservación de la energía exige que en una colisión elástica la energía cinética total antes de la misma sea igual a la energía cinética total después de ella. Así, pues,

$$\tfrac{1}{2}M_1v_1^2 = \tfrac{1}{2}M_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}M_2v_2'^2 \tag{6.12}$$

observando la condición inicial $v_2 = 0$. La ley de la conservación de la cantidad de movimiento aplicada a la componente x de la misma, impone que

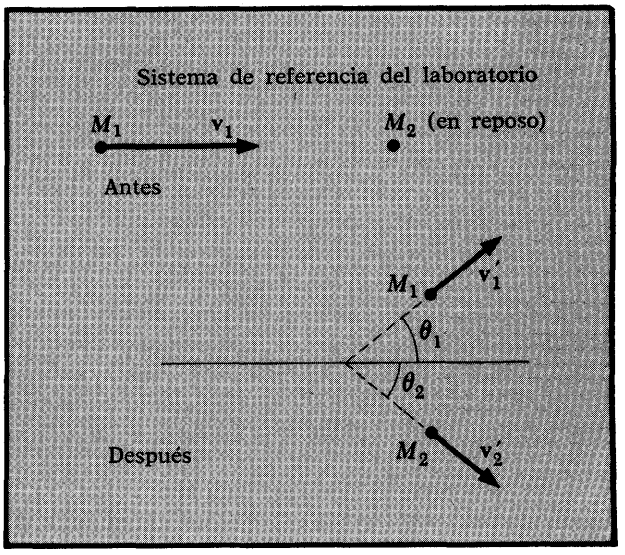


FIG. 6.5 Un choque entre M_1 y M_2 no necesita confinarse a una sola dimensión. En el sistema del laboratorio M_2 está en reposo antes del choque.

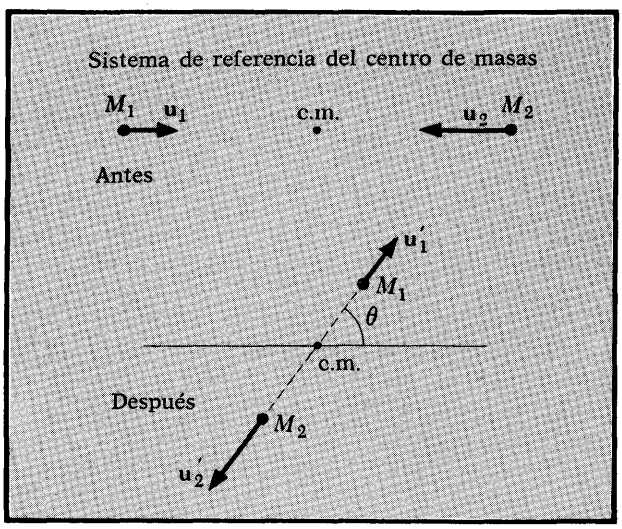


FIG. 6.6 En el sistema del centro de masas M_1 y M_2 deben salir despedidas en sentidos opuestos después del choque. Son posibles todos los ángulos $0 \leqq \theta \leqq \pi$ y $|\mathbf{u}'_1| = |\mathbf{u}_1|$, $|\mathbf{u}'_2| = |\mathbf{u}_2|$.

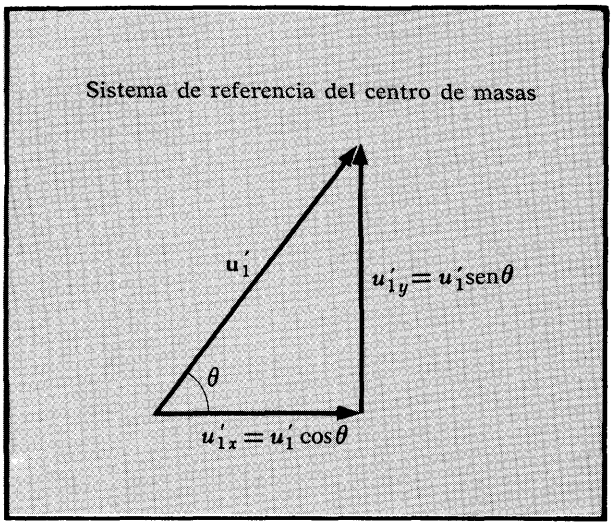


FIG. 6.7. *a*) La velocidad final $\mathbf{u}'_1$ de M_1 en el sistema del centro de masas se descompone en la figura en sus componentes *x* e *y*.

$$M_1 v_1 = M_1 v'_1 \cos\theta_1 + M_2 v'_2 \cos\theta_2 \tag{6.13}$$

El fenómeno completo del choque puede considerarse en el plano *xy*, con tal de que intervengan sólo dos partículas. La ley de la conservación de la cantidad de movimiento aplicada a la componente *y* de la misma exige que

$$0 = M_1 v'_1 \operatorname{sen}\theta_1 - M_2 v'_2 \operatorname{sen}\theta_2 \tag{6.14}$$

ya que inicialmente la componente *y* de la cantidad de movimiento era cero.

Es perfectamente posible, pero un poco molesto, resolver simultáneamente (6.12) y (6.14) para cualquier magnitud que nos interese. Estas ecuaciones expresan el contenido completo de las leyes de la conservación. Pero es mucho más claro e informativo observar la colisión en el sistema de referencia del centro de masas. Primero encontramos la velocidad **V** del centro de masas respecto al sistema del laboratorio. La posición del centro de masas se define por

$$\mathbf{R}_{\text{c.m.}} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}$$

como vimos antes en la ecuación (6.3). Derivando se obtiene la velocidad **V** del centro de masas:

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}} = \frac{M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{M_1 + M_2} \qquad \mathbf{V} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \mathbf{v}_1 \tag{6.15}$$

en donde hemos expresado el resultado en función de las velocidades $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ antes del choque, con $\mathbf{v}_2 = 0$. [Obsérvese que ésta es la misma que (6.4) pero escrita para las condiciones actuales.]

Llamemos $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ a las velocidades iniciales en el sistema de referencia en el que el centro de masas está en reposo; las velocidades finales en este sistema de referencia son $\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$. Tenemos las siguientes relaciones entre las velocidades en los sistemas del laboratorio y del centro de masas (fig. 6.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{V} \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{V} \\ \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{u}'_1 + \mathbf{V} \qquad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{u}'_2 + \mathbf{V} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Las leyes de la conservación nos permiten comprender inmediatamente ciertas características del choque. La conservación de la cantidad de movimiento en el sistema del centro de masas requiere que el ángulo de difusión de la partícula 1 sea igual al de la partícula 2, es decir, las trayectorias de ambas partículas han de ser colineales lo mismo antes como después del choque. Si estos ángulos de difusión (como se ve desde el sistema centro de masas) no fueran iguales, entonces el centro de masas no podría estar en reposo después del choque. Pero sabemos que el centro de masas permanece en reposo si no actúan fuerzas exteriores. Además si la energía cinética se conserva, las velocidades en el sistema del centro de masas no deben variar; de modo que $u'_1 = u_1$ y $u'_2 = u_2$ en una colisión elástica. La cinemática del choque en el sistema del centro de masas resulta extraordinariamente sencilla. Las leyes de conservación permiten todos los ángulos de difusión $\theta_{\text{c.m.}}$. (Esto no es cierto generalmente para θ_1, θ_2 en el sistema del laboratorio.)

Volvamos al sistema del laboratorio. Pongamos, escribiendo sólo θ en lugar de $\theta_{\text{c.m.}}$ para mayor comodidad,

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{\text{sen } \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{v_1' \text{sen } \theta_1}{v_1' \cos \theta_1} = \frac{u_1' \text{sen } \theta}{u_1' \cos \theta + V}$$

en donde hemos utilizado el hecho de que la componente y de la velocidad final de la partícula 1 es idéntica en los dos sistemas de referencia. Además, $u_1 = u'_1$ por la hipótesis del choque elástico, de modo que

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + V/u_1} \tag{6.17}$$

Ahora pueden combinarse (6.15) y (6.16) para dar las relaciones

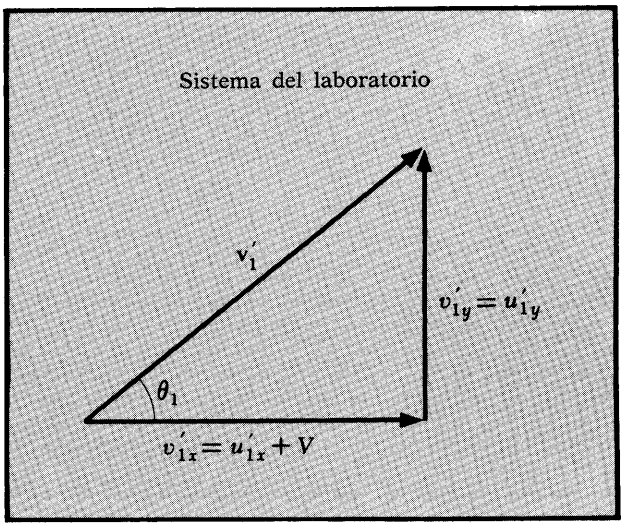
$$\mathbf{V} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{V}) \qquad \mathbf{V} = \frac{M_1}{M_2}\mathbf{u}_1$$

de donde (6.17) se transforma en

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + M_1/M_2} \tag{6.18}$$

En la figura 6.7 *a* y *b* se ve el proceso.

Deseamos saber el valor de $(\theta_1)_{\max}$, el cual puede calcularse gráficamente a partir de (6.18) si $M_1 > M_2$ o utilizando el cálculo para determinar el máximo de tg θ_1 como una función de θ. Vemos, inspeccionando la fórmula, que para $M_1 > M_2$ el denominador nunca puede ser cero y $(\theta_1)_{\max}$ debe ser menor que $\frac{1}{2}\pi$. Si $M_1 = M_2$, entonces $(\theta_1)_{\max} = \frac{1}{2}\pi$. Si $M_1 < M_2$, está permitido cualquier valor de θ_1. Las figs. 6.8 *a* a *c* muestran estas relaciones gráficamente.



b) En el sistema del laboratorio las componentes x e y de $\mathbf{v}'_1$ son las indicadas. Evidentemente,

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + V/u_1} = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + M_1/M_2}$$

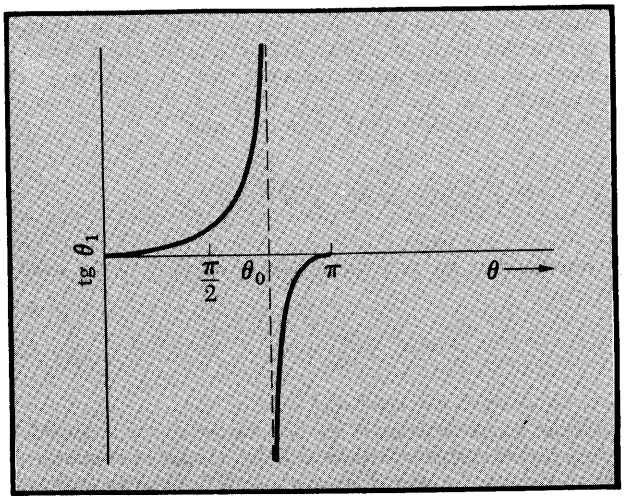
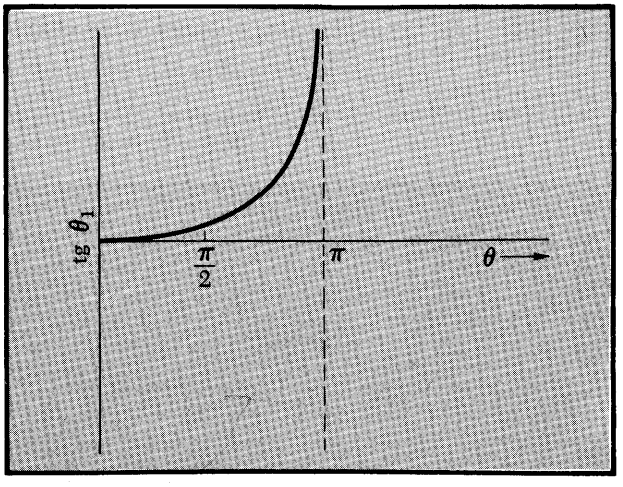
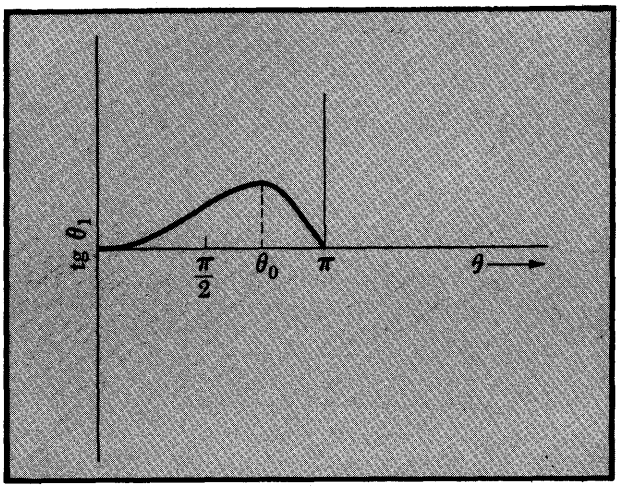


FIG. 6.8 *a)* Para $M_1 < M_2$ tg $\theta_1 = \text{sen } \theta/(\cos \theta + M_1/M_2)$ tiende a infinito para $\theta = \theta_0 = \text{arc cos } (-M_1/M_2)$. Son posibles todos los ángulos $0 \leq \theta_1 \leq \pi$.



b) Para $M_1 = M_2$, tg θ_1 tiende a infinito para $\theta = \pi$. Así, pues, son posibles todos los ángulos $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ como raíces de la ecuación para tg θ_1.



c) Para $M_1 > M_2$, tg θ_1 no tiende a infinito. Así, pues, $0 \leq \theta_1 \leq \text{arc sen } (M_2/M_1) < \pi/2$.

SISTEMAS CON MASA VARIABLE

En el Cap. 3 expresamos la segunda ley de Newton en la forma

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

en donde $\mathbf{p}$ es la cantidad de movimiento $M\mathbf{v}$. Para objetos de masa constante, esto se convierte en la fórmula familiar $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$, pero existe un tipo de problemas de mecánica en los cuales la masa de un objeto móvil puede no ser constante y es necesario conocer la dependencia de M con el tiempo al expresar $d\mathbf{p}/dt$. La segunda ley se convierte en

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{dM}{dt}\mathbf{v} + M\frac{d\mathbf{v}}{dt}} \qquad (6.19)$$

Numerosos e interesantes problemas pueden abordarse con la Ec. (6.19), incluyendo el movimiento de los cohetes, el movimiento de interacción de un satélite con la atmósfera y los movimientos de objetos como cadenas cuya posición en movimiento puede variar con el tiempo. Veamos unos pocos ejemplos.

EJEMPLO

Satélite en el polvo interplanetario. Un satélite en un espacio libre de fuerzas recoge residuos interplanetarios estacionarios en una proporción $dM/dt = cv$, en donde M es la masa, v la velocidad del satélite y c una constante. ¿Cuál es la deceleración?

Consideremos este problema desde un sistema de referencia con el polvo interplanetario en reposo (véase fig. 6.9). La cantidad de movimiento del sistema total formado por el satélite y el polvo es constante, ya que no existe ninguna fuerza presente en el problema. La ecuación (6.19) requiere que

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) = \dot{M}\mathbf{v} + M\dot{\mathbf{v}} = 0$$

o, para el movimiento en una dimensión, con $\dot{M} = cv$, la deceleración es

$$\dot{v} = -\frac{cv^2}{M}$$

(Véase Prob. 16 al final del capítulo.)

Este problema puede abordarse en una forma distinta considerando que una fuerza resistiva debida al polvo actúa constantemente frenando al satélite. La fuerza resistiva será la opuesta (tercera ley de Newton) a la fuerza ejercida por el satélite sobre el polvo al moverse a su través. En cualquier instante la fuerza ejercida sobre el medio será la variación de la cantidad de movimiento impartida a las partículas de polvo, que es vdM/dt o cv^2. La fuerza

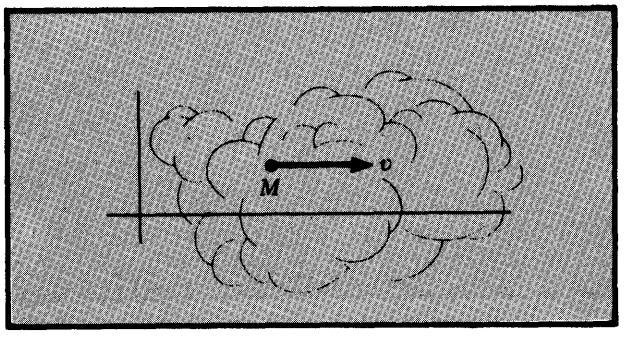


FIG. 6.9 Objeto que se mueve a través de una nube de polvo con referencia al sistema del polvo.

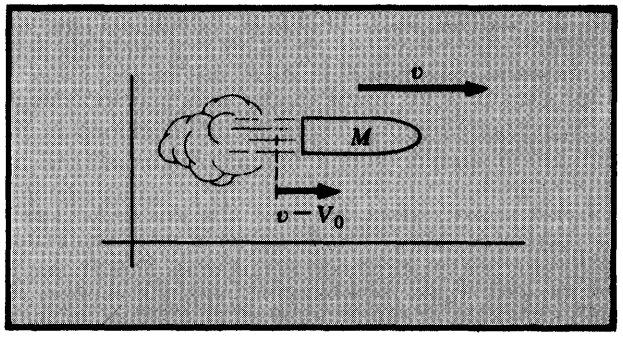


FIG. 6.10 El vehículo se mueve con velocidad v en un sistema inercial; el gas expulsado con velocidad de escape V_0 se mueve con velocidad $v - V_0$.

resistiva sobre el satélite será $-cv^2$ y la deceleración será la obtenida de la segunda ley de Newton utilizada en la forma usual:

$$M\dot{v} = f_{\text{resist}} = -cv^2 \qquad \dot{v} = -\frac{cv^2}{M}$$

EJEMPLO

Problema del vehículo espacial. Un vehículo espacial arroja gases con una velocidad $\mathbf{V}_0$ respecto al vehículo; la variación de la masa del vehículo por unidad de tiempo es $M = -\alpha$, constante. Plantear y resolver la ecuación del movimiento del vehículo espacial, despreciando la gravedad.

Sea $\mathbf{v}$ la velocidad del vehículo en el instante t. La velocidad de los gases vista desde el sistema del laboratorio (*no* desde el vehículo), que es inercial, es $-\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}$. Supongamos que $\mathbf{V}_0$ y $\mathbf{v}$ son opuestas, de modo que el problema se convierte en monodimensional, como indica la fig. 6.10.

En ausencia de cualquier fuerza externa, la cantidad de movimiento del sistema total formado por el vehículo más los gases de escape es constante. Así, $F = dp/dt = 0$, y puede escribirse

$$\frac{dp}{dt} = M\dot{v} - v\alpha + (v - V_0)\alpha = 0 \tag{6.20}$$

en donde los términos tienen el siguiente significado:

$M\dot{v}$ = ganancia de variación respecto al tiempo de la cantidad de movimiento, debida a la aceleración.

$-v\alpha$ = pérdida de variación respecto al tiempo de la cantidad de movimiento del vehículo.

$(v - V_0)\alpha$ = variación respecto al tiempo (incremento) de la cantidad de movimiento de la nube de gases escapados.

La ecuación (6.20) se simplifica dando

$$M\dot{v} = \alpha V_0 \tag{6.21}$$

Como la pérdida de masa viene dada por una constante $-\alpha$, la masa del vehículo en el tiempo t será

$$M = M_0 - \alpha t$$

en donde M_0 es la masa inicial del vehículo en el tiempo $t = 0$. La ecuación (6.21) se convierte en

$$(M_0 - \alpha t)\dot{v} = \alpha V_0$$

A fin de obtener la velocidad del vehículo en función del tiempo integraremos la expresión

$$\dot{v} = \frac{\alpha V_0/M_0}{1 - \alpha t/M_0}$$

con la hipótesis $v = v_0$ para $t = 0$, resultando

$$v = v_0 + V_0 \ln \frac{M_0}{M_0 - \alpha t} \tag{6.22}$$

El término αt nunca puede ser igual a M_0, ya que no todo el vehículo es combustible; pero puede alcanzar hasta el 90 % de

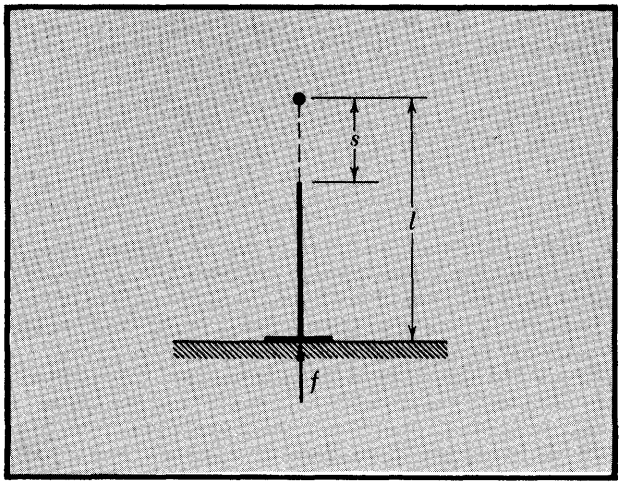


FIG. 6.11 Cadena que cae de densidad lineal ρ. En el intervalo de tiempo dt se produce un incremento de masa $\rho\, ds$, moviéndose con velocidad $\dot{s}$. La variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento de la cadena en el colapso sobre la plataforma es $\rho(ds/dt) \cdot \dot{s}$ o $\rho\, \dot{s}^2$. La plataforma debe soportar el peso $\rho\, gs$ de la porción de cadena que ha llegado.

combustible. La ecuación (6.22) ilustra la ventaja del gas de escape propulsor de alta velocidad. El máximo de eficiencia propulsora se obtendría con fotones, es decir, con luz, ya que entonces $v_0 = c$. ¡Pero es difícil lanzar mucha masa de esta forma!

EJEMPLO

Fuerza debida a una cadena que cae. Una ilustración familiar viene proporcionada por la fuerza que actúa sobre una plataforma estacionaria al caer sobre ella una cadená flexible desde la posición en que cuelga. Consideremos que inicialmente la cadena está suspendida de un extremo y el extremo inferior justamente toca la plataforma. En la fig. 6.11 se muestra la cadena un instante después de ser liberada, es decir, cuando ha caído una distancia s y esta longitud de cadena se ha depositado sobre la plataforma.

La fuerza total ejercida hacia arriba por la plataforma sobre la cadena debe soportar la longitud de cadena que está en reposo y, además, reducir a cero la cantidad de movimiento de los elementos de cadena que van llegando. Estas dos contribuciones vienen dadas por la expresión *

$$f = \rho g s + \rho \dot{s}^2$$

en donde ρ es la densidad lineal (es decir, la masa por unidad de longitud) de la cadena. Como la parte de cadena que cae libremente tiene la aceleración g, resulta $\dot{s}^2 = 2gs$. Por tanto,

$$f = 3\rho g s$$

Así en cualquier instante, la plataforma ejerce una fuerza que es igual a tres veces el peso de la cantidad de cadena que se ha depositado.

(Pueden ser interesantes algunas variantes de este problema, tales como considerar la aceleración del centro de masas de la cadena bajo la influencia de la gravedad y de la fuerza de la plataforma sobre la cadena. El resultado anterior se obtiene fácilmente.)

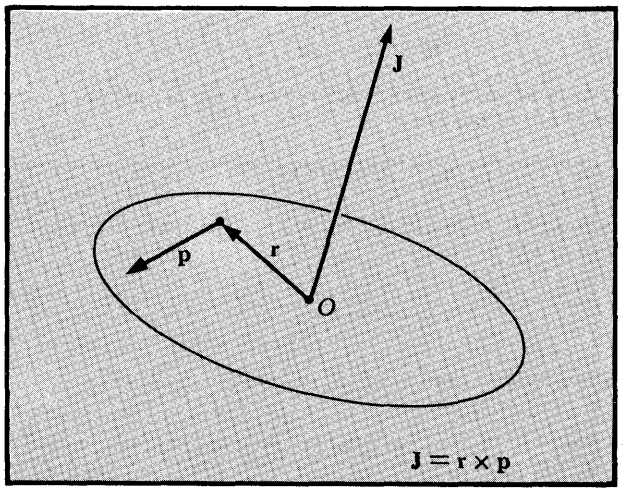


FIG. 6.12 *a*) El momento cinético **J** *respecto al punto O* se define mediante la figura.

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO

Volvamos ahora al importante concepto del *momento cinético.* El momento cinético o angular **J** de una sola partícula referido a un punto fijo arbitrario (fijo en un sistema de referencia *inercial*) como origen se define en la forma

$$\boxed{\mathbf{J} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{M}\mathbf{v}} \qquad (6.23)$$

en donde **p** es la cantidad de movimiento lineal (véase fig. 6.12 *a* y *b*). Las unidades de momento cinético son

(*) $(\rho\, ds)\ ds/dt$ es la cantidad de movimiento de la masa $\rho\, ds$ que se reduce a 0 en el tiempo dt. Así, la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento es $(\rho\, ds/dt)\ (ds/dt) = \rho \dot{s}^2$.

g-cm²/s o erg-s. La componente **J** a lo largo de cualquier línea (o eje) que pase por el punto fijo de referencia se denomina con frecuencia momento cinético de la partícula respecto a este eje.

Si la fuerza **F** actúa sobre la partícula, definimos el *momento* (*momento de una fuerza*) **N** respecto del mismo punto fijo como

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \tag{6.24}$$

(Este resultado ya apareció en el Cap. 2.) Las unidades del momento son dina-cm (fig. 6.13). Diferenciando ahora (6.23) tendremos

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

pero

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times M\mathbf{v} = 0$$

y según la segunda ley de Newton en un sistema de referencia inercial,

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N}$$

Por consiguiente, obtenemos el importante resultado

$$\boxed{\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N}} \tag{6.25}$$

La variación del momento cinético por unidad de tiempo es igual al momento.

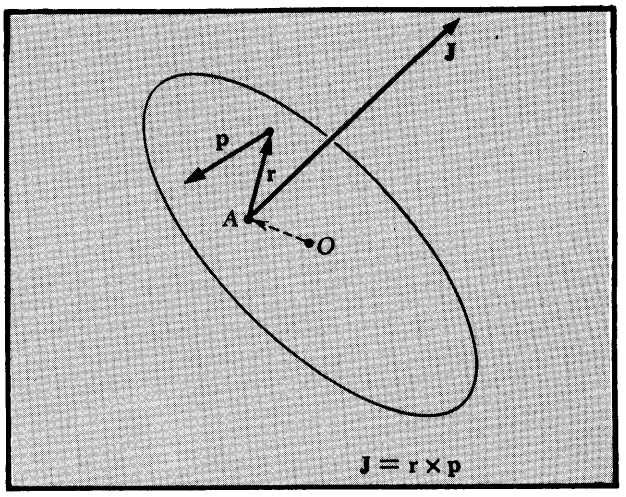
Si el momento $\mathbf{N} = 0$, entonces $\mathbf{J} = \text{Cte}$. *El momento cinético es constante en ausencia del momento externo;* esta es una forma de enunciar *la ley de la conservación del momento cinético.* Obsérvese que la ley de la conservación del momento cinético no se refiere únicamente a partículas en órbitas cerradas. Se aplica igualmente bien a órbitas abiertas y a procesos de choque (fig. 6.14).

Consideremos una partícula sometida a una fuerza central de la forma

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} f(r)$$

Una fuerza *central* es aquella que está siempre dirigida hacia (o alejándose de) un punto particular. El momento de la fuerza respecto de ese punto es

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} f(r) = 0$$



b) El momento cinético *respecto a otro punto P* es diferente incluso para la *misma* partícula cuando posee la misma cantidad de movimiento **p**.

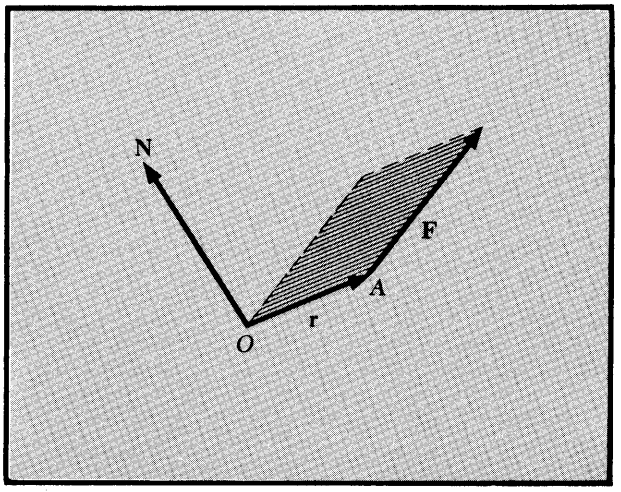


FIG. 6.13 El momento efectivo **N** en el punto *O* debido a la fuerza **F** aplicada al punto *O* en la posición **r** es $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. **N** es normal al plano definido por **r** y **F**.

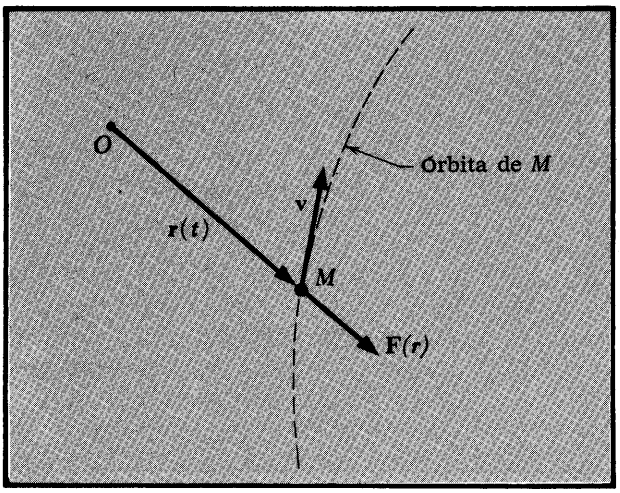


FIG. 6.14 Partícula M sometida a una fuerza central repulsiva $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ centrada en O. Como el momento $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$, tendremos que $\mathbf{J}$ = constante, siendo $\mathbf{J}$ un vector que sale del papel.

de modo que para fuerzas centrales

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \tag{6.26}$$

y el momento cinético es constante. En tal caso el movimiento de la partícula estará confinado en el plano normal del vector constante $\mathbf{J}$. En la próxima sección se demuestra que este resultado puede obtenerse como una consecuencia directa de la invariancia de la función energía potencial $U(\mathbf{r})$ bajo rotaciones del sistema de referencia. Sin embargo, consideraremos primeramente la ampliación de la ecuación del momento a un sistema de N partículas interaccionantes.

Los momentos debidos a fuerzas internas tienen una resultante nula. Las interacciones que pueden presentar entre sí las partículas dan lugar a momentos internos. Demostraremos que *la suma de todos los momentos internos es cero,* de tal modo que sólo los momentos debidos a las fuerzas externas pueden cambiar el momento cinético de un sistema de partículas.

Incluyendo todas las fuerzas podemos escribir para el momento total

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \tag{6.27}$$

en donde el índice i corresponde a una partícula y n es el número total de partículas que comprende el sistema. Sin embargo, la fuerza $\mathbf{F}_i$ sobre la partícula i es debida parcialmente a los agentes externos del sistema y parcialmente a sus interacciones con otras partículas; así,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \sum_{j=1}^{n}{}' \mathbf{f}_{ij}$$

en donde $\mathbf{f}_i$ representa la fuerza externa y $\mathbf{f}_{ij}$ la fuerza ejercida sobre la partícula i por la partícula j. $\sum'$ significa que el término $j = i$ se excluye porque la fuerza de una partícula sobre sí misma no tiene significado. Esto nos permite escribir la Ec. (6.27) en la forma

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{f}_i + \sum_j{}' \mathbf{f}_{ij}\right) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i + \sum_i \sum_j{}' \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$$

en donde el último término con el doble sumatorio es el vector suma $\mathbf{N}_{\text{int}}$ de los momentos debidos a fuerzas internas del sistema.

Un examen detallado de esta expresión para $\mathbf{N}_{\text{int}}$ muestra que puede descomponerse en un doble sumatorio de pares de términos

$$\mathbf{N}_{\text{int}} = \sum_i \left[\sum_j{}' \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} \right) \right] \tag{6.28}$$

en donde para cada valor de i sumamos todos los valores de j, excepto $j = i$. (Esta descomposión se reconoce fácilmente tratando un sistema formado por un número pequeño de partículas; véase Prob. 5.) Ahora bien, de acuerdo con la tercera ley de Newton, $\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$ y la Ec. (6.28) se convierte en

$$\mathbf{N}_{\text{int}} = \sum_i \left[\sum_j{}' \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \right) \times \mathbf{f}_{ij} \right]$$

Y si las fuerzas ejercidas entre las partículas están dirigidas a lo largo de las líneas que unen los pares que interactúan, es decir, si son fuerzas centrales, esta expresión será nula, ya que $\mathbf{f}_{ij}$ será paralela a $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Así, pues,

$$\mathbf{N}_{\text{int}} = 0 \tag{6.29}$$

El resultado es también cierto para fuerzas de interacción no centrales; sin embargo, no podemos demostrar aquí este hecho.

Momento debido a la gravedad. Una cuestión de importancia en los problemas del movimiento sobre la superficie de la Tierra es la siguiente: ¿Podemos encontrar un punto en un cuerpo extenso (es decir, un cuerpo formado por masas puntuales o por una distribución continua de masas), de tal modo que el momento respecto a este punto originado por todas las fuerzas gravitatorias sea nulo? Por ejemplo, si se mantiene un bastón por un extremo la gravedad ejercerá un momento sobre él a menos que el bastón esté vertical. ¿Cómo podemos sostener el bastón sin que exista momento? Naturalmente, puede sostenerse por el centro, pero tratemos el problema de un modo general.

Tomemos un punto O como en la fig. 6.15:

$$\mathbf{N}_0 = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}$$

Como $\mathbf{g}$, la aceleración de la gravedad, es constante, puede escribirse esta fórmula en la forma

$$\mathbf{N}_0 = \left(\sum m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g}$$

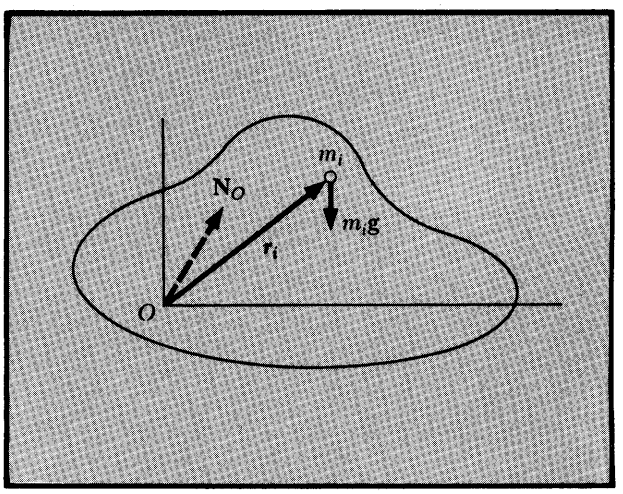


FIG. 6.15 El momento debido a la acción de la gravedad, $m_i\mathbf{g}$, alrededor de O es $\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g}$.

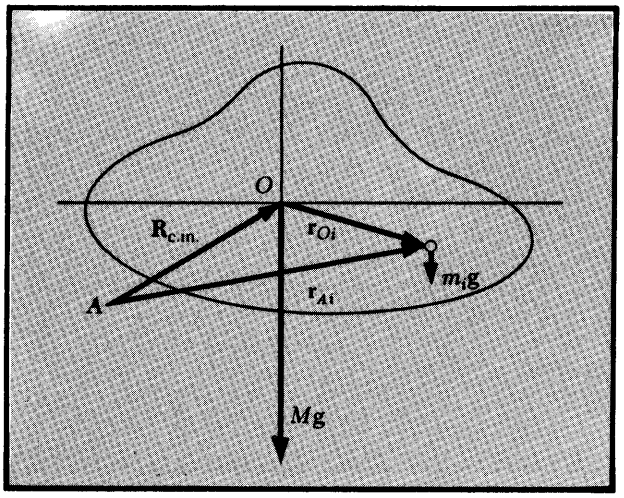


FIG. 6.16 El momento debido a las fuerzas de gravedad alrededor de A puede expresarse por la fórmula $\mathbf{R}_{c.m.} \times M\mathbf{g}$, en donde O es el centro de masas.

Pero

$$\sum m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{c.m.} \sum m_i$$

Por tanto, si O es el centro de masas

$$\sum m_i\mathbf{r}_i = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{N}_0 = 0$$

Este punto se denomina a veces *centro de gravedad,* el cual es idéntico al centro de masas siempre que $\mathbf{g}$ sea constante en todo el cuerpo.

Si el punto no es el centro de masas, ¿cuál será el valor de $\mathbf{N}$? Sabemos que

$$\sum \mathbf{F}_i = \sum m_i\mathbf{g} = M\mathbf{g} = \mathbf{F}_{grav} \tag{6.30}$$

en donde M es la masa total. ¿El momento alrededor de un punto A en la fig. 6.16 viene relacionado simplemente con esta fuerza $M\mathbf{g}$?

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_A &= \sum \mathbf{r}_{Ai} \times m_i\mathbf{g} = \sum (\mathbf{R}_{AO} + \mathbf{r}_{Oi}) \times m_i\mathbf{g} \\ &= \mathbf{R}_{AO} \times \sum m_i\mathbf{g} = \mathbf{R}_{AO} \times M\mathbf{g} = \mathbf{R}_{c.m.} \times M\mathbf{g} \end{aligned} \tag{6.31}$$

en donde hemos utilizado el hecho de que $\Sigma m_i\mathbf{r}_{oi} = 0$, ya que el punto O es el centro de masas. Así vemos que el efecto total de las fuerzas de la gravedad puede reemplazarse por el de una simple fuerza $M\mathbf{g}$ que actúa sobre el centro de masas (véase Prob. 6).

Momento cinético alrededor del centro de masas. El momento cinético total de un sistema de partículas referido a un punto arbitrario fijo en un sistema inercial de referencia como origen es, según la Ec. (6.23),

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} M_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \tag{6.32}$$

Lo mismo que en el caso de una sola partícula el valor de $\mathbf{J}$ depende del punto que elegimos como origen. Si $\mathbf{R}_{c\text{-}m.}$ es el vector trazado desde el origen a la posición del centro de masas podemos escribir $\mathbf{J}$ de nuevo en una forma conveniente e importante, restando y sumando la magnitud

$$\sum_i M_i\mathbf{R}_{c.m.} \times \mathbf{v}_i$$

a la expresión (6.32). Así resulta

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} M_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{\text{c.m.}}) \times \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{N} M_i \mathbf{R}_{\text{c.m.}} \times \mathbf{v}_i$$

$$= \mathbf{J}_{\text{c.m.}} + \mathbf{R}_{\text{c.m.}} \times \mathbf{P} \tag{6.33}$$

en donde $\mathbf{J}_{\text{c-m.}}$ es el momento cinético *respecto* al centro de masas y $\mathbf{P} \equiv \Sigma M_i \mathbf{v}_i$ es la cantidad de movimiento total lineal. El término $\mathbf{R}_{\text{c-m.}} \times \mathbf{P}$ es el momento cinético del centro de masas respecto al origen arbitrario. Este término depende de la elección del origen; el término $\mathbf{J}_{\text{c-m.}}$ no. En la física aplicada a una molécula, un átomo o una partícula fundamental, es útil llamar *momento cinético de spin* o simplemente spin a $\mathbf{J}_{\text{c-m.}}$.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{N}_{\text{int}} = 0$ resulta de las ecuaciones (6.25) y (6.33)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{N}_{\text{ext}}} \tag{6.34}$$

$$\boxed{\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J}_{\text{c.m.}} + \mathbf{R}_{\text{c.m.}} \times \mathbf{P}} \tag{6.35}$$

Aquí $\mathbf{J}_{\text{c-m.}}$ es el momento cinético respecto al centro de masas, mientras que $\mathbf{R}_{\text{c-m.}} \times \mathbf{P}$ es el momento cinético del centro de masas respecto al origen arbitrario. Normalmente es acertado escoger el origen en el centro de masas. Entonces (6.34) puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}_{\text{c.m.}} = \mathbf{N}_{\text{ext}}$$

Si no actúan fuerzas externas, entonces $\mathbf{N}_{\text{ext}} = 0$ y $\mathbf{J}_{\text{c-m.}}$ es constante.

Ya vimos que el movimiento del centro de masas estaba determinado por la fuerza total exterior que actuaba sobre el cuerpo. Vemos ahora que la rotación alrededor del centro de masas queda determinada por el momento externo total (Cap. 8).

En la fig. 6.17 se sugiere el significado geométrico del momento cinético de una partícula en una órbita que rodea el origen. El vector área $\Delta\mathbf{S}$ del triángulo viene dado por

$$\Delta\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}$$

Entonces

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2M}\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{1}{2M}\mathbf{J} \tag{6.36}$$

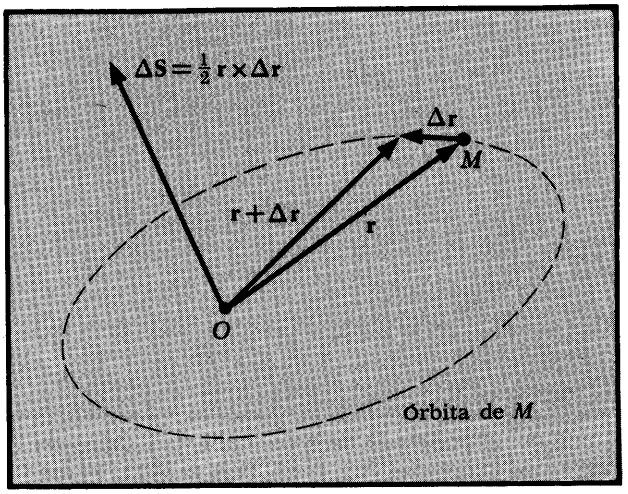


FIG. 6.17 Significado geométrico del momento cinético, en función del área barrida por unidad de tiempo.

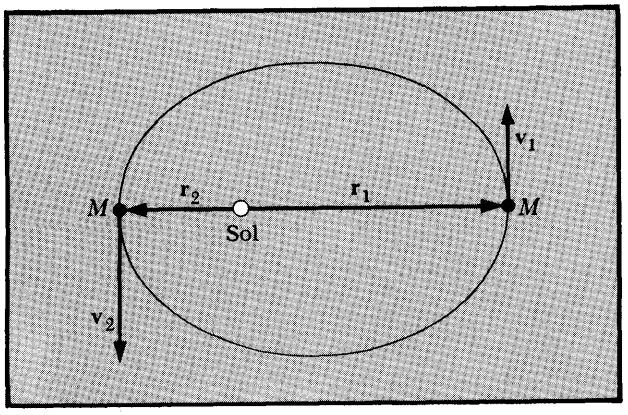


FIG. 6.18 El planeta M tiene un momento cinético constante respecto al Sol. Así, pues, $Mr_2v_2 = Mr_1v_1$, en donde r_1 = la distancia mayor al Sol y r_2 = la menor distancia al Sol. Todas las órbitas de los planetas tienen mucha menor excentricidad que la indicada aquí. La figura se ha exagerado para mayor claridad.

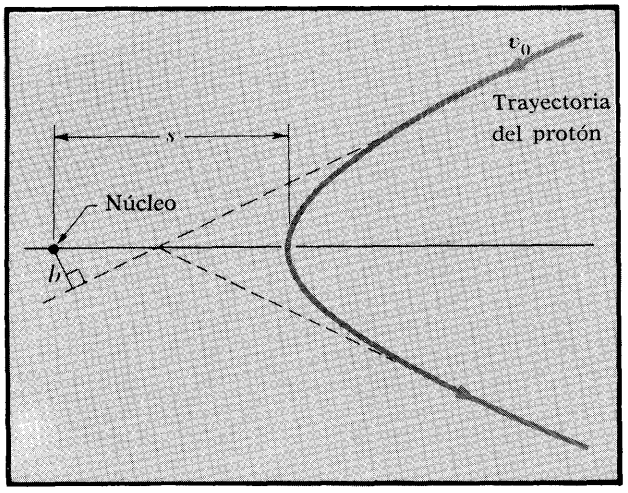


FIG. 6.19 Movimiento de un protón en el campo coulombiano de un núcleo pesado. La trayectoria es una hipérbola (Cap. 9). La distancia de máxima aproximación es s. El parámetro de impacto b es la distancia perpendicular desde el núcleo hasta la extrapolación en línea recta de la parte inicial de la trayectoria.

Hemos visto que, mediante la selección adecuada del origen, $\mathbf{J}$ = constante para las fuerzas centrales.

Si en un problema sobre planetas se toma el Sol como origen, el momento cinético de un planeta es constante, prescindiendo de las perturbaciones producidas por los demás planetas. En el caso de fuerzas centrales, según (6.26) y (6.36) resulta que:

1.° La órbita está contenida en un plano.

2.° **El área barrida por unidad de tiempo es una constante — este enunciado constituye una de las tres leyes de Kepler (que se estudiarán en el Cap. 9).**

El primer resultado es una consecuencia de estar $\mathbf{r}$ e $\Delta\mathbf{r}$ en un plano perpendicular a $\mathbf{J}$ y este vector ser constante en módulo, dirección y sentido en un campo central.

Los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol que ocupa uno de sus focos. Con objeto de conservar el momento cinético, todos los planetas deben moverse más rápidamente en el punto de máxima aproximación que en aquel en el que están más alejados del Sol. Esto se obtiene como consecuencia de que en estos puntos $\mathbf{r}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y el momento cinético en ellos es Mvr. Según la conservación del momento cinético, los valores de Mvr en estos puntos deben ser iguales, de modo que al valor de r más corto le corresponde la mayor v (véase fig. 6.18).

Para una partícula que se mueve en una circunferencia, la velocidad $\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$, de modo que

$$J = Mvr = M\omega r^2 \tag{6.37}$$

Si la partícula se mueve a lo largo de una línea recta que dista b del origen, el alumno podrá comprobar que

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times M\mathbf{v} = Mvb\hat{\mathbf{u}}$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ es un vector unitario perpendicular al plano definido por la línea de movimiento y el punto origen.

EJEMPLO

Difusión de un protón por un núcleo pesado. Un protón se acerca a un núcleo de gran masa y de carga Ze. Para una separación infinita la energía del protón es $\frac{1}{2}M_p v_0^2$. Si la trayectoria que sigue el protón a gran distancia del núcleo se *extrapola linealmente,* prolongándola hasta las proximidades del núcleo, se obtiene una recta que pasa a una distancia mínima b del mismo, como indica la fig. 6.19. Esta distancia se denomina *parámetro de impacto.* ¿Cuál es la distancia de máxima aproximación de la órbita real? (Consideremos que la masa del núcleo pesado es

infinita de modo que pueda despreciarse su retroceso, es decir, pueda considerarse estacionario.)

El momento cinético inicial del protón tomado respecto al núcleo pesado es $M_p v_0 b$; en donde v_0 es la velocidad inicial del protón. A la distancia de máxima aproximación, que llamaremos s, el momento cinético es $M_p v_s s$, siendo v_s la velocidad en este punto. La fuerza es central, de modo que se conserva el momento cinético y, por consiguiente,

$$M_p v_0 b = M_p v_s s \qquad v_s = \frac{v_0 b}{s}$$

Obsérvese que hemos considerado que el núcleo pesado permanece en reposo.

La energía del protón se conserva también en el choque. Su energía inicial es toda cinética y vale $\frac{1}{2} M_p v_0^2$. La energía en el punto de máxima aproximación es

$$\tfrac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{Ze^2}{s}$$

en donde el primer término es la energía cinética y el segundo la potencial. Así, pues, la ley de la conservación de la energía nos dice que

$$\tfrac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{Ze^2}{s} = \tfrac{1}{2} M_p v_0^2$$

Eliminando v_s resulta

$$\frac{Ze^2}{s} = \tfrac{1}{2} M_p v_0^2 \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^2\right]$$

De esta ecuación puede deducirse el valor de s. (Obsérvese que las leyes de conservación constituyen una fuente eficaz de información sobre los procesos de choque.) Si se utilizan unidades SI, estas tres últimas expresiones se convierten en

$$\tfrac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{kZe^2}{s} \qquad \tfrac{1}{2} M_p v_s^2 + \frac{kZe^2}{s} = \tfrac{1}{2} M_p v_0^2$$

y

$$\frac{kZe^2}{s} = \tfrac{1}{2} M_p v_0^2 \left[1 - \left(\frac{b}{s}\right)^2\right]$$

(Los métodos del Cap. 9 nos dan la solución completa a este problema.)

Invariancia en la rotación. Del mismo modo que encontramos que la conservación de la cantidad de movimiento lineal era una consecuencia de la invariancia de Galileo y de la conservación de la energía, podemos deducir que la conservación del momento cinético es una consecuencia de la invariancia de la energía potencial bajo una rotación del sistema de referencia (o del propio sistema). Si existe un momento externo, al girar el sistema, deberemos en general realizar un trabajo contra este momento. Esto lleva consigo un cambio de energía

potencial. Si la energía potencial U no varía durante la rotación, es porque no existe momento externo. Un momento externo nulo quiere decir que se conserva el momento cinético.

El razonamiento puede proseguirse analíticamente. Consideremos el efecto de un desplazamiento rotacional de un sistema de partículas por el cual el vector posición $\mathbf{r}$ de una partícula se convierte en $\mathbf{r}'$. Su longitud es, naturalmente, invariable. Afirmamos que la conservación del momento cinético resulta de

$$U(\mathbf{r}'_1,\mathbf{r}'_2,\ldots,\mathbf{r}'_N) = U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N)$$

Esta relación implica restricciones sobre la dependencia de U respecto a los vectores $\mathbf{r}$. Una forma que puede satisfacer la relación es la que depende sólo de las diferencias vectoriales entre los vectores $\mathbf{r}$, de modo que para un sistema simple de sólo dos partículas podemos escribir

$$U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

La operación de rotación cambia la dirección de $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, pero no su magnitud. U será invariante si depende sólo de la magnitud, es decir, de la distancia que separa las partículas y no de la dirección del vector separación; así

$$U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$$

Esto es equivalente a una afirmación de homogeneidad e isotropía del espacio.

Para una función de energía potencial de esta forma forzosamente $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ y estas fuerzas están dirigidas a lo largo de la línea $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Así la fuerza es central y el momento se anula. Esto asegura que el momento cinético se conserva. Para N partículas se asegura la invariancia rotacional del potencial si U depende únicamente del módulo de la separación entre las diversas partículas.

El potencial considerado desde el punto de vista de un electrón o ion individual en un cristal no es invariante en la rotación, porque el campo eléctrico debido a los demás iones en un cristal es altamente no uniforme o heterogéneo. Por consiguiente, no será lógico en general esperar encontrar una ley de conservación para el momento cinético de las capas electrónicas de un ion en un cristal, aunque se conserve el momento cinético del mismo ion en el espacio libre. La no conservación del momento cinético electrónico de los iones en los cristales se ha observado en los estudios de los iones paramagnéticos

de los cristales, denominándose a este efecto *extinción* del momento cinético orbital.

El momento cinético **J** de la Tierra es constante respecto al Sol como origen por ser $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ para cada masa puntual en la Tierra, siendo **F** la fuerza gravitatoria que actúa entre el Sol y la masa puntual.

EJEMPLO

Aceleración angular que acompaña a una contracción. Se sujeta a una cuerda (fig. 6.20) una partícula de masa M; la partícula gira siempre en un mismo plano con velocidad v_0 cuando la longitud de la cuerda es r_0. ¿Qué trabajo ha de realizarse para acortar la cuerda hasta r?

La fuerza sobre la partícula debida a la cuerda es radial, de modo que el *momento es cero* cuando se acorta la cuerda. Por lo tanto, el momento cinético debe permanecer constante cuando se acorta la cuerda:

$$Mv_0r_0 = Mvr \tag{6.38}$$

La energía cinética en r_0 es $\frac{1}{2}Mv_0^2$; en r ha aumentado hasta

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \tag{6.39}$$

porque $v = v_0 r_0/r$, según hemos visto. Así resulta que el trabajo W realizado desde el exterior al acortar la cuerda de r_0 a r es

$$W = \frac{1}{2}Mv_0^2\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right]$$

Esto también puede calcularse directamente en la forma

$$\int_{r_0}^{r} \mathbf{F}_{\text{centrip}} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_0}^{r} F_{\text{centrip}}\, dr$$

Vemos que el momento cinético actúa sobre el movimiento radial como una energía potencial repulsiva efectiva: tendremos que realizar un trabajo *extra* sobre la partícula al llevarla desde distancias grandes hasta otras más pequeñas si se exige la conservación del momento cinético en el proceso.

Compárese este comportamiento con el de una partícula que gira mediante una cuerda que se arrolla libremente sobre una varilla fija sin rozamiento de diámetro finito. ¿Por qué es ahora constante la energía cinética cuando se arrolla la cuerda? (Véase Prob. 12 al final del capítulo.)

EJEMPLO

Forma de la galaxia. El resultado del ejemplo precedente tiene una probable relación con la forma de la galaxia. Consideremos una masa muy grande M de gas provista inicialmente de un momento cinético determinado *. (Fig. 6.21*a*.) El gas se contrae bajo

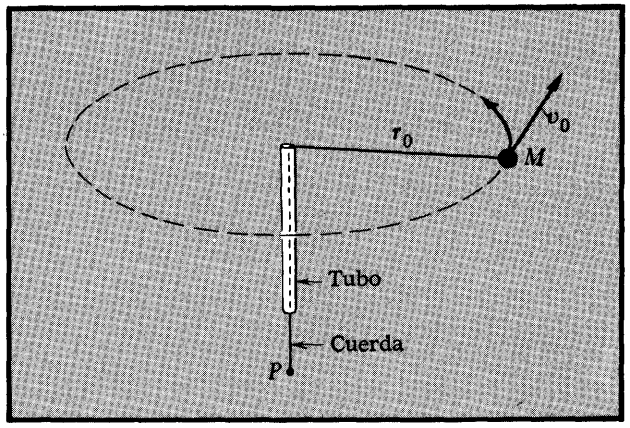


FIG. 6.20 La masa M describe un movimiento circular de radio r_0 y velocidad v_0. Está unida a una cuerda que pasa por un tubo. La distancia r_0 puede acortarse tirando de la cuerda en P.

(*) No es posible en el estado actual de nuestros conocimientos decir de dónde provino en primer lugar el gas ni por qué una masa determinada de gas deberá tener un momento cinético. Las masas que no posean momento cinético se condensarán como esferas.

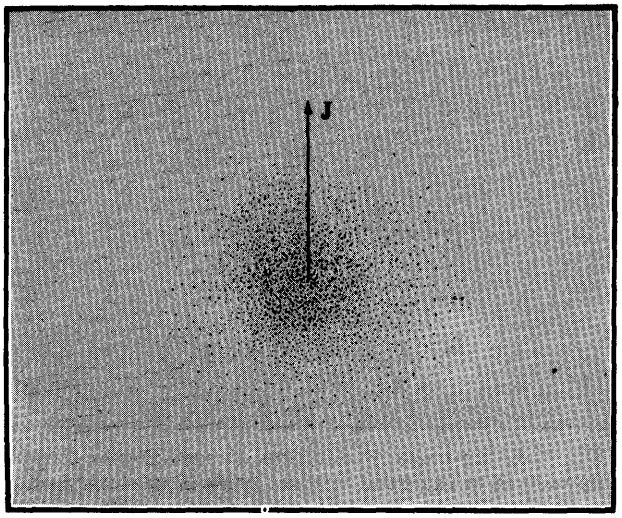
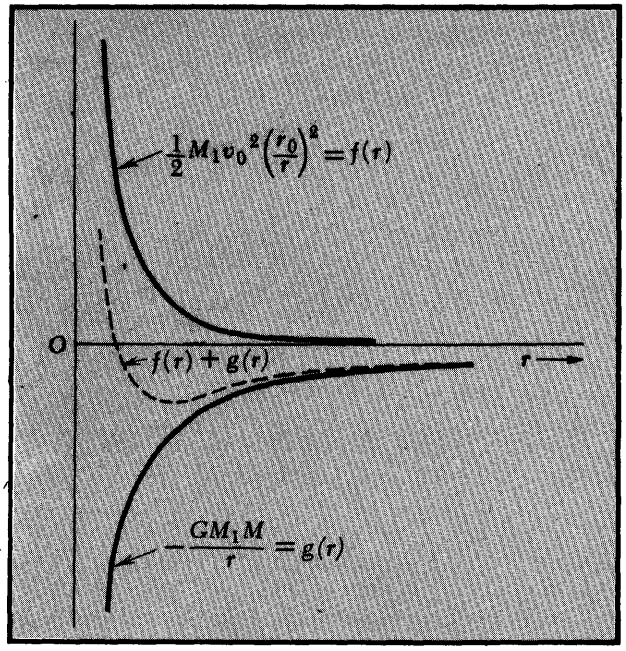


FIG. 6.21 *a)* **Nube difusa de gas provista originalmente de cierto momento cinético.**



b) La contracción de la galaxia en el plano normal a **J** está limitada porque la «energía potencial centrífuga» $f(r)$ aumenta muy rápidamente cuando $r \to 0$. Así, pues, $f(r) + g(r)$ tiene un mínimo para un valor finito de r, como está indicado.

su propia interacción gravitatoria. Cuando el volumen ocupado por el gas se hace más pequeño, la conservación del momento cinético exige un aumento en la velocidad angular y su energía cinética crece. Pero acabamos de ver que se necesita trabajo para producir el aumento en la velocidad angular. ¿De dónde procede la energía cinética? Sólo puede provenir de la energía gravitatoria del gas.

Para resolver problemas como éste deben utilizarse consideraciones energéticas. Una partícula de masa M_1 en las regiones exteriores de la galaxia tendrá una energía potencial gravitatoria, debida a su interacción con la galaxia, del orden de magnitud de

$$-\frac{GM_1M}{r} \tag{6.40}$$

siendo r su distancia al centro de la galaxia y M la masa de ésta. A medida que r se hace más pequeña, esta energía potencial gravitatoria se hace más negativa, pero la energía cinética de la ecuación (6.39) se hace cada vez más positiva; en realidad se hace positiva con mayor rapidez que la ecuación (6.40) se hace negativa. Trataremos esta dependencia con el radio de la energía como si fuera una contribución a la energía potencial y la llamaremos *energía potencial centrífuga* (véase Prob. 13). La condición de equilibrio es el valor mínimo de la suma de las dos como indica la fig. 6.21 *b*. En el Cap. 5 vimos que la derivada de una energía es una fuerza y, por tanto, el mínimo de la suma de estas dos energías corresponde al valor cero de la suma de las dos fuerzas. Esta condición es

$$\frac{d}{dr}\left[-\frac{GM_1M}{r} + \frac{1}{2}M_1v_0^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] = 0$$

$$\frac{GM_1M}{r^2} - M_1v_0^2\frac{r_0^2}{r^3} = 0$$

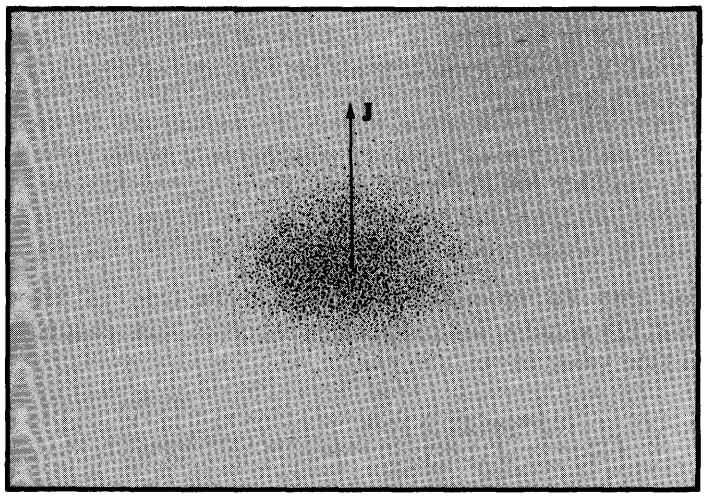
lo cual es equivalente a

$$\frac{GM_1M}{r^2} = M_1\frac{v^2}{r} \tag{6.41}$$

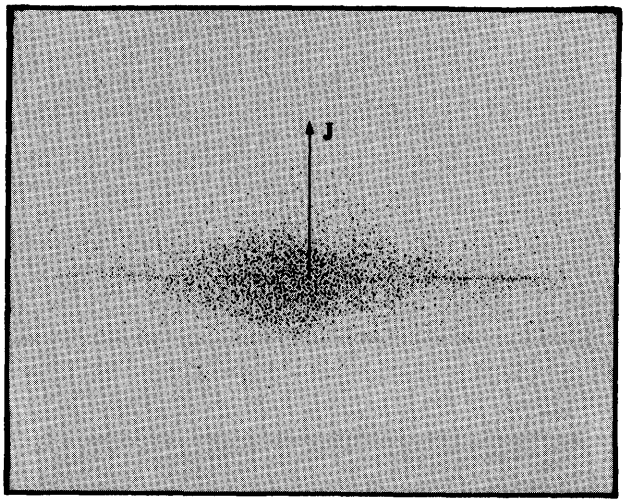
cuando reemplazamos v_0r_0/r por v en la ecuación (6.38). En la ecuación (6.41) reconocemos justamente la condición de que la fuerza centrípeta debida a la gravedad es igual al producto de la masa por la aceleración centrípeta.

Pero la nube de gas o de estrellas es capaz de aplastarse en dirección paralela al eje del momento cinético total sin cambiar el valor del momento cinético. La contracción es estimulada por la atracción gravitatoria; la energía adquirida en la contracción debe disiparse de algún modo, posiblemente por radiación. Por consiguiente, la nube puede aplastarse casi completamente en dirección paralela a **J**, pero queda restringida la contracción en el plano ecuatorial (véanse figs. 6.21 *c* y *d*). Este modelo de evolución galáctica está muy simplificado; sin embargo, no existe un modelo generalmente aceptado.

El diámetro de nuestra galaxia es del orden de 3×10^4 parsecs ó 10^{23} cm (1 parsec = $3{,}084 \times 10^{18}$ cm = $3{,}084 \times 10^{16}$ m). El espesor de la galaxia en la vecindad del Sol depende realmente de la definición del espesor, pero la gran mayoría de estrellas se agrupan alrededor del plano medio en un espesor de varios centenares de parsecs. Así, pues, la galaxia está muy aplastada. La



c) La galaxia empieza a aplastarse a medida que se contrae y gira más deprisa.



d) **Finalmente adquiere su forma característica con un** núcleo central más o menos esférico.

masa de la galaxia se considera que es del orden de 2×10^{11} veces la masa del Sol, o

$$(2 \times 10^{11})(2 \times 10^{33}) \approx 4 \times 10^{44}\,\text{g} \qquad \text{ó} \qquad 4 \times 10^{41}\,\text{kg}$$

Puede hacerse una estimación de la masa mediante (6.41) sustituyendo los valores conocidos de v y r para el Sol. El Sol está próximo al borde exterior de la galaxia a unos 10^4 parsecs $\approx 3 \times \times 10^{22}$ cm $\approx 3 \times 10^{20}$ m del eje de la galaxia. La velocidad orbital del Sol alrededor del centro de la galaxia es aproximadamente 3×10^7 cm/s $\approx 3 \times 10^5$ m/s, de modo que podemos deducir mediante (6.41) como valor estimado de la masa de la galaxia

$$M = \frac{v^2 r}{G} \approx \frac{(10^{15})(3 \times 10^{22})}{7 \times 10^{-8}} \approx 4 \times 10^{44}\,\text{g}$$

o en unidades SI

$$M = \frac{v^2 r}{G} \approx \frac{(10^{11})(3 \times 10^{20})}{7 \times 10^{-11}} \approx 4 \times 10^{41}\,\text{kg}$$

Hemos despreciado el efecto de la masa que está más alejada del centro de la galaxia que el Sol.

Momento cinético del sistema solar. La figura 6.22 muestra el momento cinético de los diversos componentes del sistema solar. Estimemos por nuestra cuenta y como comprobación uno de los valores dados. Consideremos el planeta Neptuno cuya órbita es casi circular. La distancia medida de Neptuno al Sol viene dada en la bibliografía y es $\approx 5 \times 10^9$ km $\approx 5 \times 10^{14}$ cm. El período de revolución de Neptuno alrededor del Sol es 165 años $\approx$

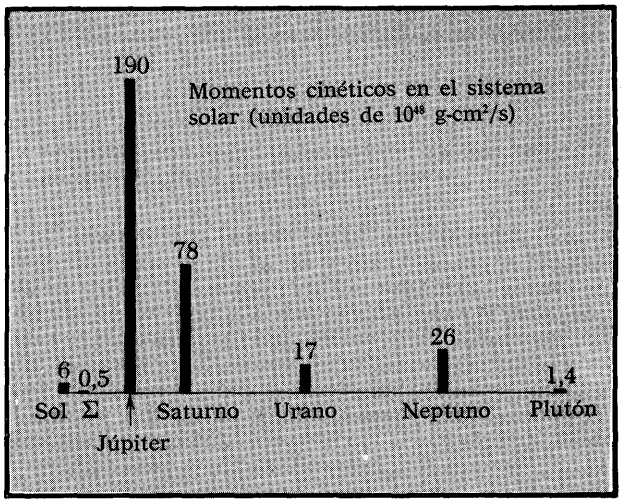


FIG. 6.22 Distribución del momento cinético respecto al centro del Sol en el sistema solar. El símbolo Σ indica la suma debida a los cuatro planetas Mercurio, Venus, la Tierra y Marte. Obsérvese la contribución relativamente pequeña de la rotación del Sol sobre su propio eje.

$\approx 5 \times 10^9$ s. La masa de Neptuno es aproximadamente 1×10^{29} g. El momento cinético de Neptuno alrededor del Sol es, por tanto,

$$J = Mvr = M\frac{2\pi r}{T}r \approx \frac{(10^{29})(6)(25 \times 10^{28})}{5 \times 10^9}$$
$$\approx 30 \times 10^{48}\ \text{g-cm}^2/\text{s}$$

que está de acuerdo aproximadamente con el valor 26×10^{48} g-cm^2/s indicado en la fig. 6.22. En unidades SI este valor es

$$J \approx \frac{(10^{26})(6)(25 \times 10^{24})}{5 \times 10^9} \approx 30 \times 10^{41}\ \text{kg-m}^2/\text{s}$$

La dirección de **J** es aproximadamente la misma para todos los planetas principales.

El momento cinético de Neptuno *alrededor de su propio centro de masas* es mucho menor. El momento cinético de una esfera uniforme en rotación es del orden de MvR, en donde v es la velocidad superficial de rotación y R el radio. Realmente, como la masa de una esfera no está concentrada a una distancia R del eje, sino que está distribuida, este resultado debe reducirse para una distribución uniforme aplicando un factor numérico que, como se verá en el Cap. 8, vale 2/5. Así, pues,

$$J_{\text{c.m.}} = \frac{2}{5}\frac{2\pi MR^2}{T}$$

en donde $T \equiv 2\pi R/v$ designa el período de rotación del planeta sobre su propio eje. Para Neptuno $T \approx 16\,\text{h} \approx$ $\approx 6 \times 10^4$ s y $r \approx 2{,}4 \times 10^9$ cm, de donde

$$J_{\text{c.m.}} \approx \frac{(0{,}4)(6)(10^{29})(6 \times 10^{18})}{6 \times 10^4} \approx 2 \times 10^{43}\ \text{g-cm}^2/\text{s}$$

o sea,

$$J_{\text{c.m.}} \approx \frac{(0{,}4)(6)(10^{26})(6 \times 10^{14})}{6 \times 10^4} \approx 2 \times 10^{36}\ \text{kg-m}^2/\text{s}$$

que es despreciable comparado con el momento cinético orbital alrededor del Sol.

Una estimación semejante de $J_{\text{c-m.}}$ para el Sol da 6×10^{48} g-cm^2/s (6×10^{41} kg-m^2/s). La rotación del Sol alrededor de un eje que pasa por su centro equivale sólo a un 2 por ciento del momento cinético total del sistema

solar. Una estrella típica muy caliente puede poseer alrededor de 100 veces más momento cinético que el Sol. Parece, pues, que la formación de un sistema planetario es un mecanismo eficaz para la disminución del momento cinético de una estrella que se está enfriando. Si cada estrella forma un sistema planetario al pasar a través de una fase de su historia semejante a la del Sol, entonces pueden existir hasta 10^{10} estrellas con planetas en nuestra galaxia.

PROBLEMAS

1. *Momento cinético de un satélite*

(*a*) ¿Cuál es el momento cinético (referido al centro de la órbita) de un satélite de masa M_s que se mueve en una órbita circular de radio r? El resultado ha de expresarse solo en función de r, G, M_s, M_t (masa de la Tierra). *Sol.* $J = (GM_tM_s^2r)^{2/1}$.

(*b*) Para $M_s = 100$ kg, ¿cuál es el valor numérico (en unidades CGS) del momento cinético para una órbita cuyo radio es el doble del de la Tierra?

2. *Efectos del rozamiento sobre el movimiento de un satélite*

(*a*) ¿Cuál es la influencia del rozamiento atmosférico sobre el movimiento de un satélite en una órbita circular (o casi circular)? ¿Por qué el rozamiento aumenta la velocidad del satélite?

(*b*) El rozamiento ¿aumenta o disminuye el momento cinético del satélite, medido respecto al centro de la Tierra? ¿Por qué?

3. *Relación energía-momento cinético de un satélite.* Expresar en función del momento cinético J la energía cinética, potencial y total de un satélite de masa M en una órbita circular de radio r.

Sol. $Ec = J^2/2Mr^2$; $U = -J^2/Mr^2$; $E = -J^2/2Mr^2$.

4. *Electrón ligado a un protón.* Un electrón se mueve alrededor de un protón en una órbita circular de radio $0{,}5\ \text{Å} \equiv 0{,}5 \times 10^{-8}$ cm.

(*a*) ¿Cuál es el momento cinético orbital del electrón alrededor del protón? *Sol.* 1×10^{-27} erg-s.

(*b*) ¿Cuál es la energía total, expresada en ergs y en electrón-volts?

(*c*) ¿Cuál es la energía de ionización, es decir, la energía que debe darse al electrón para separarlo del protón?

5. *Momentos internos que suman cero.* Consideremos el sistema aislado de tres partículas, 1, 2, 3 (indicado en la fig. 6.23) que interaccionan entre sí con fuerzas *centrales* $F_{12} = 1$ dina, $F_{13} = 0{,}6$ dinas y $F_{23} = 0{,}75$ dinas, en donde F_{ij} designa la fuerza ejercida sobre la partícula i cuando interacciona con la partícula j. Escoger dos puntos diferentes y demostrar que para cada uno de ellos la suma de los momentos respecto a este punto es cero.

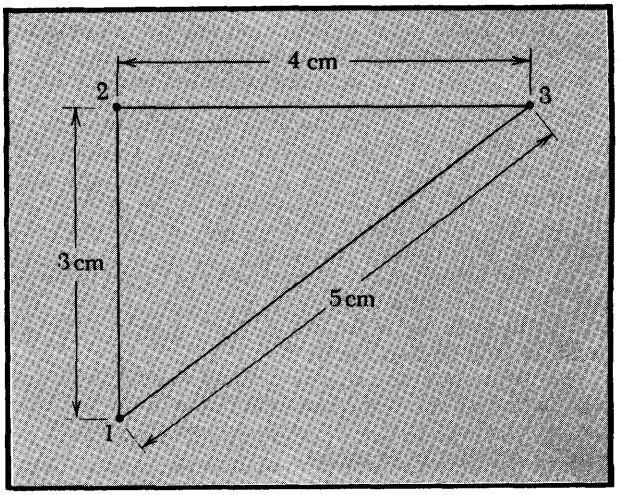


FIG. 6.23

6. *Fuerzas que actúan sobre una escalera.* Una escalera de mano de 20 kg de masa y 10 m de longitud se apoya sobre una pared vertical deslizante formando un ángulo de 30° con ella. La escalera, de construcción uniforme, no puede resbalar debido a su rozamiento con el suelo. ¿Cuál es el módulo en dinas de la fuerza ejercida por la escalera sobre la pared? (*Indicación:* Utilícese el hecho de que los momentos deben sumar cero para una escalera en reposo.) *Sol.* $5{,}6 \times 10^5$ dinas.

7. *Energía cinética del centro de masas.* En una colisión de una partícula de masa m_1 que se mueve con velocidad v_1 contra otra estacionaria de masa m_2 no toda la energía cinética original puede convertirse en calor o energía interna. ¿Qué fracción se convertirá? Demostrar que esta energía es exactamente igual a la energía cinética en el sistema del centro de masas.

8. *Cadena que cae.* Una cadena de masa M y longitud l es arrollada en el borde de una mesa. Una longitud muy pequeña de uno de sus extremos se deja deslizar por el borde y comienza a caer bajo la acción de la gravedad, arrastrando al resto de la cadena. Suponer que la velocidad de cada elemento es nula hasta que se pone en movimiento con la velocidad de la sección que cae. Determinar la velocidad cuando ha caído una longitud x.

Sol. $v^2 = 2/3\, gx$.

Cuando la longitud completa l está fuera de la mesa, ¿qué fracción de la energía potencial original se ha convertido en energía cinética de traslación de la cadena?

9. *Momento cinético durante la colisión de dos partículas.* Un neutrón de 1 MeV de energía se acerca a un protón hasta una distancia tal que el momento cinético del neutrón respecto al protón es igual aproximadamente a 10^{-26} erg-s. ¿Cuál es la distancia de máxima aproximación? (Despréciese la energía de interacción entre las dos partículas.) *Sol.* Aproximadamente 4×10^{-12} cm.

10. *Coeficiente de restitución.* El coeficiente de restitución r se define como el cociente entre la velocidad de separación de dos cuerpos y la velocidad con que se aproximan, $0 \leq r \leq 1$. Puede utilizarse en problemas de choque para suministrar la solución que de otro modo requeriría una relación energética.

(*a*) Demostrar que si el coeficiente de restitución entre una bola y una mesa horizontal es r, la altura que alcanza la bola después de n rebotes es $h_0 r^{2n}$, siendo h_0 la altura desde la cual se deja caer.

(*b*) Demostrar que en una colisión frontal de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 con coeficiente r, la pérdida de energía cinética es $(1 - r^2)$ veces la energía cinética en el sistema del centro de masas.

11. *Choque entre una partícula y una molécula biatómica del tipo «pesa de gimnasia».* Dos masas iguales M están unidas mediante una varilla de masa despreciable y longitud a. El centro de masas de este sistema del tipo «pesa de gimnasia» es estacionario en un espacio libre de gravitación y el sistema gira alrededor de dicho centro con velocidad angular ω. Una de las masas en rotación choca contra una tercera masa estacionaria M, adhiriéndose ambas.

(*a*) Localizar el centro de masas del sistema de las tres partículas en el instante anterior al choque. ¿Cuál es la velocidad del centro de masas? (*Nota:* No es la velocidad del punto sobre el cuerpo rígido que instantáneamente coincide con el centro de masas.)

(*b*) ¿Cuál es el momento cinético del sistema de tres masas respecto a su centro de masas en el instante anterior al choque? ¿Y en el instante posterior al mismo?

(*c*) ¿Cuál es la velocidad angular del sistema respecto al centro de masas después del choque?

(*d*) ¿Cuáles son las energías cinéticas inicial y final?

12. *Momento cinético del juego de pelota ligada al poste* («*tetherball*»). El objeto de este juego (fig. 6.24) consiste en golpear la pelota lo bastante fuerte y aprisa para que se vaya enrollando la cuerda, a la que está sujeta la pelota, en un sentido determinado alrededor de un poste vertical al que está atada, antes de que el jugador contrario pueda arrollarla en sentido opuesto. El juego es divertido y la dinámica del movimiento de la pelota es complicada. Examinemos un tipo sencillo de movimiento en el que la pelota se mueve en un plano horizontal en una espiral de radio decreciente a medida que la cuerda se arrolla alrededor del poste después de imprimir a la pelota, mediante un único golpe, una velocidad inicial v_0. La longitud de la cuerda es l y el radio del poste es $a \ll l$ (véase el diagrama).

(*a*) ¿Cuál es el centro de rotación instantáneo?

(*b*) ¿Existe un momento respecto del eje que pase por el centro del poste? ¿Se conserva el momento cinético?

(*c*) Suponer que se conserva la energía cinética y calcular la velocidad en función del tiempo.

(*d*) ¿Cuál es la velocidad angular después que la pelota ha realizado cinco revoluciones completas?

Sol. $\omega = (l - 10\pi a)v_0/[a^2 + (l - 10\pi a)^2]$.

13. *Energía potencial centrífuga efectiva.* Es conveniente utilizar coordenadas polares planas r, θ para el movimiento en un plano perpendicular a un eje de rotación (véase fig. 2.21).

(*a*) Demostrar que la velocidad en dicho sistema de coordenadas puede escribirse

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

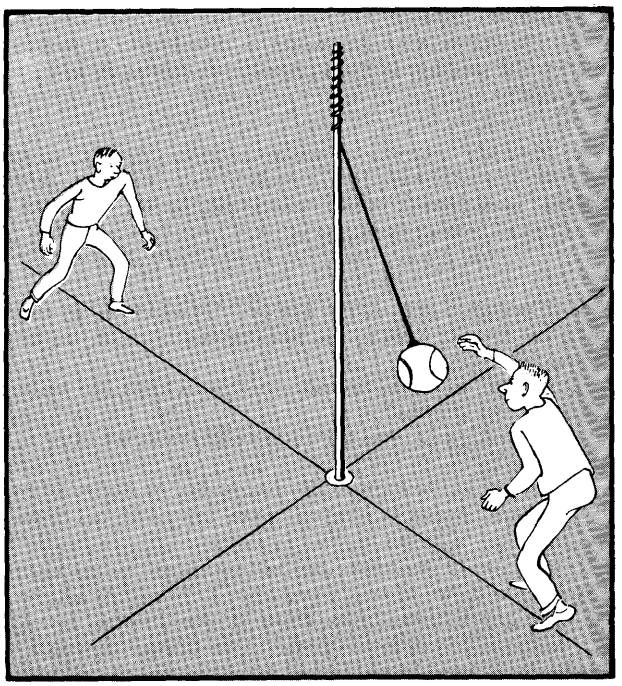


FIG. 6.24

siendo v_r precisamente dr/dt, la variación de la longitud r por unidad de tiempo, y

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

(*b*) Demostrar que la energía cinética de una partícula en este sistema de coordenadas es

$$Ec = \tfrac{1}{2}M(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$$

en donde $\omega = d\theta/dt$.

(*c*) Demostrar que la energía total es

$$E = U(r) + \tfrac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2Mr^2}$$

en donde J es el momento cinético de la partícula alrededor de un eje fijo normal al plano del movimiento. *Indicación:* Recuérdese la ecuación (6.37).

(*d*) Como la fuerza es central, no actúa ningún momento sobre la partícula y J es una constante del movimiento. Al término $J^2/2Mr^2$ se le da a veces el nombre de energía potencial centrífuga. Demostrar que esta energía se asocia a una fuerza radial hacia el exterior igual a J^2/Mr^3.

(*e*) Si $U(r) = \frac{1}{2}Cr^2$, demostrar que $U(r)$ corresponde a una fuerza radial hacia el eje igual a $-Cr$.

(*f*) Demostrar a partir de (*d*) y (*e*) que la condición de equilibrio de estas fuerzas es equivalente a $\omega^2 = C/M$.

14. *Cohete en el campo terrestre.* Un cohete de masa inicial M_0 consume una cantidad regulable de combustible β g/s. Este combustible se lanza verticalmente hacia abajo con una velocidad V_0.

(*a*) Determinar β en función del tiempo para que el cohete pueda permanecer estacionario en el espacio a corta distancia del suelo.

(*b*) Suponiendo que la cantidad de combustible utilizada por segundo sea constante un valor α mayor que en (*a*), determinar la velocidad del cohete hacia arriba en función del tiempo.

Sol. Con $M = M_0 - \alpha t$ y $\alpha = dM/dt$, resulta $v = -gt + V_0 \ln[M_0/(M_0 - \alpha t)]$.

(*c*) Comparar esta velocidad para el caso de $M = 3/4\,M_0$ con la dada por la ecuación (6.22). Calcular estas dos velocidades si $V_0 = 1{,}65 \times 10^5$ cm/s (cinco veces la velocidad del sonido).

15. *Patinadores de hielo girando en los extremos de una cuerda.* Dos patinadores de hielo, pesando cada uno 70 kg se desplazan en direcciones opuestas con una velocidad de 650 cm/s, separados una distancia de 1 000 cm perpendicularmente a sus velocidades. Cuando están en oposición, cada uno de ellos empuña el extremo de una cuerda de 1 000 cm de longitud.

(*a*) ¿Cuál es su momento cinético alrededor del centro de la cuerda antes de que agarren sus extremos? ¿Y después?

(*b*) Cada uno de ellos tira de su extremo de la cuerda hasta que la longitud de ésta es de 500 cm. ¿Cuál es la velocidad de cada patinador?

(*c*) Si la cuerda se rompe justamente cuando están separados 500 cm, ¿qué masa sostendría en contra de la fuerza de la gravedad?

(*d*) Calcular el trabajo realizado por cada patinador al disminuir su separación y demostrar que es igual a su cambio de energía cinética.

16. *Enfrenamiento de un vehículo espacial.* Un vehículo espacial tiene una masa de 200 kg y un área transversal de 2×10^4 cm^2. Se desplaza en una región sin campo gravitatorio apreciable a través de una atmósfera enrarecida cuya densidad es de 2×10^{-15} g/cc, con una velocidad inicial de $7{,}6 \times 10^5$ cm/s. (Estos valores serían aproximados para un satélite a 500 km por encima de la superficie de la Tierra.) Suponer que las condiciones del ejemplo del «satélite en el polvo interplanetario» del Cap. 6 se aplican también aquí, es decir, que todo el gas con el cual choca el satélite se adhiere a él.

(*a*) Determinar el valor de c. Considerar la masa de gas recogida en 1 s. *Sol.* $c = 4 \times 10^{-11}$ g/cm.

(*b*) A partir de la conservación de la cantidad de movimiento $Mv = M_0v_0$, determinar la ecuación diferencial de v en función de t y otras constantes.

Sol. $dv/dt = -cv^3/M_0v_0$.

(*c*) Determinar v y el tiempo requerido para que el satélite se enfrene hasta 0,9 de su velocidad inicial.

Sol. $t \approx 24$ años.

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

PSSC, *Física*, cap. 22, Ed. Reverté.

HPP, *Project Physics Course*, cap. 9, Holt, Rinehart and Winston, Inc., Nueva York, 1970.

Contenido

MASA SUJETA A UN MUELLE
PÉNDULO SIMPLE
CIRCUITO *LC*
MOVIMIENTO DE SISTEMAS DESPLAZADOS DESDE UNA POSICIÓN DE EQUILIBRIO ESTABLE
ENERGÍA POTENCIAL Y CINÉTICA MEDIA
ROZAMIENTO
Velocidad límite
OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO
Ejemplo. Disipación de potencia
Factor de calidad *Q*
OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO
PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN
Problemas
Temas avanzados:
Oscilador anarmónico
Oscilador armónico forzado con fuerza de amortiguamiento
Ejemplo. Estudio numérico de un oscilador armónico
Problema
Notas matemáticas:
Fuerza resistente
Velocidad límite
Fuerza del muelle
Fuerza del muelle y fuerza resistente
Los números complejos y el oscilador armónico forzado
Lecturas suplementarias

7

Oscilador armónico: propiedades y ejemplos

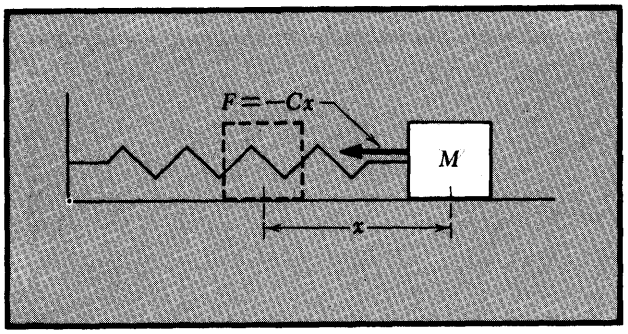


FIG. 7.1 Muelle tenso actuando sobre una masa *M*. En la posición marcada por una línea de puntos el muelle no está sometido a tensión alguna.

El oscilador armónico es un ejemplo de excepcional importancia del movimiento periódico porque sirve de modelo exacto o aproximado para muchos problemas en física clásica y cuántica. Los sistemas clásicos que son casos reales de un oscilador armónico incluyen cualquier sistema estable que se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, como por ejemplo:

1. Un péndulo simple, en el límite correspondiente de ángulos de oscilación pequeños.

2. Una masa sujeta a un muelle, en el límite de amplitudes de oscilación pequeñas.

3. Un circuito eléctrico compuesto de una inductancia y una capacitancia, para corrientes o voltajes lo suficientemente pequeños para que los elementos del circuito sean lineales.

Un elemento de un circuito eléctrico o mecánico se dice que es lineal si la respuesta es directamente proporcional a la solicitud. La mayoría de los fenómenos (pero no todos aquellos que son de interés) en física son lineales, si el intervalo que se considera es suficientemente pequeño, del mismo modo que la mayor parte de las curvas que nos encontramos pueden considerarse que son líneas rectas para un intervalo suficientemente pequeño de valores.

Las propiedades más importantes del oscilador armónico son las siguientes:

1. La frecuencia del movimiento es independiente de la amplitud de la oscilación dentro de las restricciones de linealidad.
2. Los efectos de varias solicitudes pueden superponerse linealmente.

En este capítulo estudiaremos estas propiedades del oscilador armónico. Consideraremos tanto el movimiento libre como el forzado, con y sin amortiguamiento, aunque los principales elementos del movimiento forzado se exponen en el Tema Avanzado al final de este capítulo. También trataremos como Tema Avanzado los efectos de las interacciones no lineales, pues resulta útil tener conocimiento de tales tipos de movimiento.

MASA SUJETA A UN MUELLE

En el Cap. 5 considerábamos la energía potencial de un muelle estirado o comprimido en el cual la fuerza es directamente proporcional a la tensión o compresión

$$\mathbf{F} = -Cx\hat{\mathbf{x}}$$

en donde x es positivo para una tensión y negativo para una compresión. ¿Cuál es el movimiento de una masa M sometida a tal fuerza? Idealmente podemos imaginar, como en la fig. 7.1, una masa que se mueve sobre una mesa sin rozamiento:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Cx \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Cx}{M} \tag{7.1}$$

(Esta ecuación se discute en las Notas Matemáticas al final de este capítulo. Aquellos alumnos poco familiarizados con la solución deben estudiar estas notas antes de seguir.)

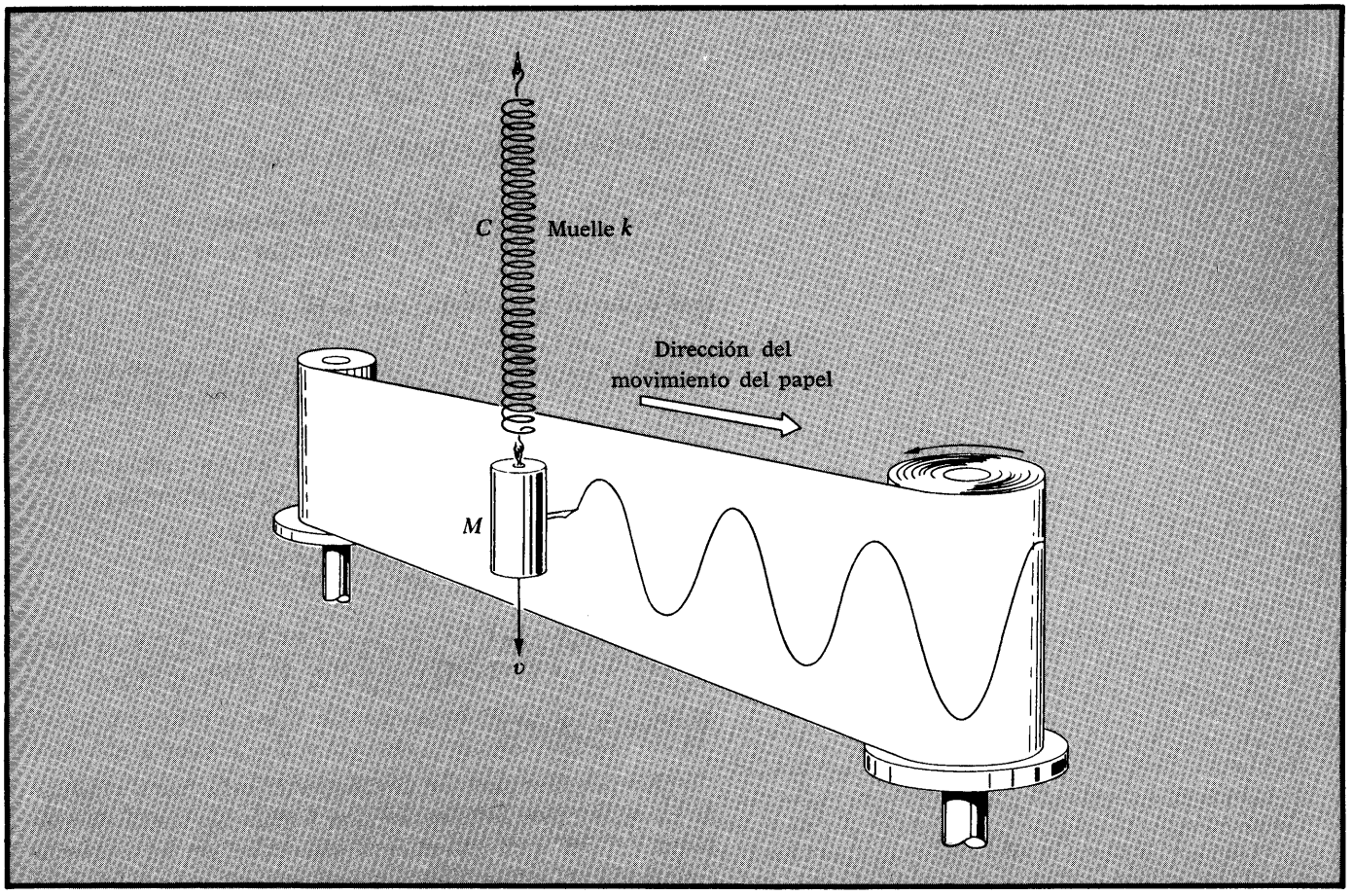
La solución puede expresarse en la forma

$$\boxed{x = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi)} \tag{7.2}$$

donde

$$\omega_0 = \left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.3}$$

FIG. 7.2 Oscilador armónico simple que se compone de una masa M y un muelle sin peso de constante de fuerza o rigidez C. Una plumilla sujeta a M dibujará una sinusoide sobre una cinta de papel que pase frente a M a velocidad constante.



Para $t = 0$, $x = x_0 = A \operatorname{sen} \phi$ y $dx/dt = v_0 = \omega_0 A \cos \phi$, a partir de lo cual pueden determinarse A y ϕ. La fig. 7.2 ilustra el movimiento. A se denomina *amplitud* y ϕ *fase.* La frecuencia y período vienen dados por

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad T = \frac{1}{f_0} = 2\pi\left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{7.4}$$

El resultado esperado es el siguiente: Cuanto más rígido es el muelle, es decir, mayor C, mayor resulta la frecuencia; cuanto mayor la masa, menor es la frecuencia.

También podemos enfocar este problema desde el punto de vista de la conservación de la energía [véase Ec. (5.21)]:

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}Cx^2 = \tfrac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}Cx^2 = E \tag{7.5}$$

Utilizando A como valor de x para $dx/dt = 0$, resulta $E = \frac{1}{2}CA^2$ y

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}}(A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \tag{7.6}$$

La solución de esta ecuación es

$$\left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}} t = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{A} + \text{const}$$

que coincide justamente con la Ec. (7.2)

$$x = A \operatorname{sen}\left[\left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}} t + \phi\right]$$

si la constante se hace igual a $-\phi$. Alternativamente podríamos haber derivado la Ec. (7.5) obteniendo

$$M\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + Cx\frac{dx}{dt} = 0$$

que se reduce a la Ec. (7.1). (Los Problemas 2 a 4, al final del capítulo, son ejemplos del uso de estas ideas.)

PÉNDULO SIMPLE

El péndulo simple se compone de una masa puntual M en el extremo inferior de una varilla sin masa de longitud L, que gira libremente alrededor de su extremo superior y se mueve en un plano vertical como indica la

fig. 7.3. Sabemos que el movimiento es semejante al de la masa sobre un muelle. Surge la pregunta: ¿Cuál es su frecuencia? La forma más directa de resolver este problema es escribir la forma apropiada de $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$. Con referencia a la fig. 7.3 vemos que la distancia s, según el arco, la velocidad y la aceleración de M son

$$s = L\theta \qquad v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\dot{\theta} \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Existen dos fuerzas en el problema: la fuerza de gravedad y la fuerza ejercida por la barra o la cuerda. Sin embargo, la barra no ejerce fuerza alguna a lo largo de s y, por tanto, sólo necesitamos considerar la componente de mg a lo largo de s. Según la fig. 7.3 vemos que esta componente es mg sen θ en la dirección en que decrece θ. Por tanto, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se reduce para esta dimensión en

$$mg \operatorname{sen}\theta = -mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{7.7}$$

Pero el desarrollo en serie de sen θ es

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdots \tag{7.8}$$

y para valores pequeños de θ puede escribirse

$$mg \operatorname{sen}\theta = mg\,\theta$$

y la Ec. (7.7) se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{7.9}$$

Esta ecuación es idéntica a la (7.1) con g/L en lugar de C/M y θ en lugar de x. Por tanto,

$$\boxed{\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)} \tag{7.10}$$

en donde

$$\boxed{\omega_0 = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{7.11}$$

y la frecuencia que buscábamos, de acuerdo con las Ecs. (7.4) y (7.11) es $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{g/L}$.

La amplitud o valor máximo de θ es θ_0; θ_0 sen ϕ es el valor de θ para $t = 0$ y $\omega_0\theta_0 \cos\phi$ es el valor de $d\theta/dt$. ¿Hasta qué valor de θ_0 es todavía válida nuestra hipótesis sen $\theta = \theta$? La Tabla 7.1 nos da algunos valores del período para diversas amplitudes. Evidentemente la amplitud puede alcanzar hasta 20° antes de que el valor real

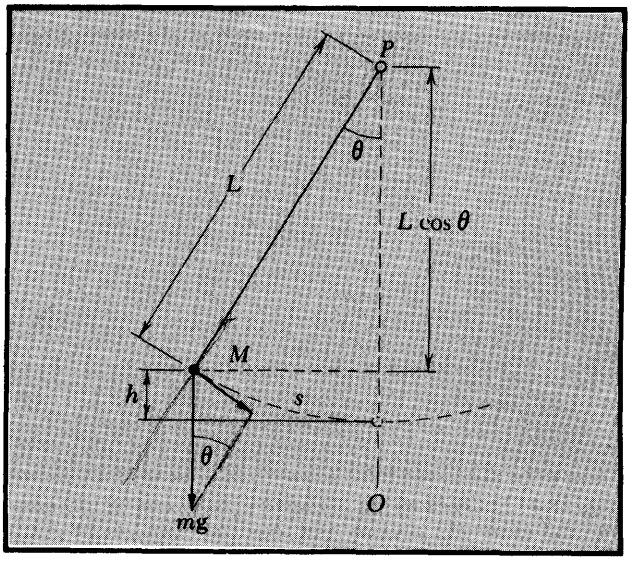


FIG. 7.3 El péndulo simple se compone de una masa puntual M en el extremo de una varilla sin masa L. El péndulo gira alrededor de un eje que pasa por P y es perpendicular al papel. La línea OP es vertical. s es la longitud de arco entre O y la posición de M.

TABLA 7.1

Amplitud, °	*Período* $\div 2\pi\sqrt{l/g}$
0	1,0000
5	1,0005
10	1,0019
15	1,0043
20	1,0077
30	1,0174
45	1,0396
60	1,0719

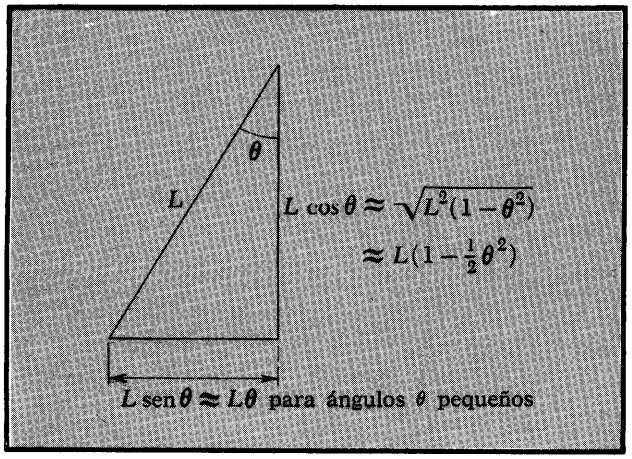


FIG. 7.4 El teorema de Pitágoras junto con el desarrollo del binomio, revelan por qué $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ para $\theta \ll 1$ radián.

del período sobrepase el 1 por ciento del resultado que se obtiene con la aproximación de pequeña amplitud.

Veamos también el método de conservación de la energía para la resolución del problema. Cuando la varilla se desvía el ángulo θ, la masa M se eleva la distancia

$$h = L - L\cos\theta$$

como puede verse en las figuras de referencia (7.3 y 7.4). La energía potencial de la masa M en el campo gravitatorio terrestre es

$$U(h) = Mgh = MgL(1 - \cos\theta)$$

referida a la posición sin desviar (vertical) que se toma como origen de energía potencial. La energía cinética del péndulo es

$$Ec = \tfrac{1}{2}Mv^2 = \tfrac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2$$

en donde $v = L\dot{\theta}$ relaciona la velocidad y la variación del ángulo de desviación por unidad de tiempo. La energía total es

$$E = Ec + Ep = Ec + U = \tfrac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + MgL(1 - \cos\theta) \quad (7.12)$$

Por la ley de la conservación de la energía sabemos que esta suma debe ser constante. Utilizaremos este hecho, así como la pequeñez del ángulo θ para obtener una solución de la frecuencia del movimiento. Ahora bien,

$$\cos\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 + \tfrac{1}{24}\theta^4 \cdots$$

y, por tanto, para $\theta \ll 1$ rad, despreciamos los términos en θ^4 y potencias superiores, y la energía puede aproximarse, según la Ec. (7.12) por

$$E = \tfrac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}MgL\theta^2 \quad (7.13)$$

Resolviendo la Ec. (7.13) para $\dot{\theta}$ resulta

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{2E - MgL\theta^2}{ML^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2E}{MgL} - \theta^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.14)$$

Designaremos los puntos extremos del movimiento por θ_0 y $-\theta_0$; la amplitud de la oscilación es θ_0. En estos puntos el péndulo está momentáneamente en reposo y su energía cinética es cero (fig. 7.5). Según la Ec. (7.13) con $\dot{\theta} = 0$, tendremos

$$E = \tfrac{1}{2}MgL{\theta_0}^2 \qquad {\theta_0}^2 = \frac{2E}{MgL}$$

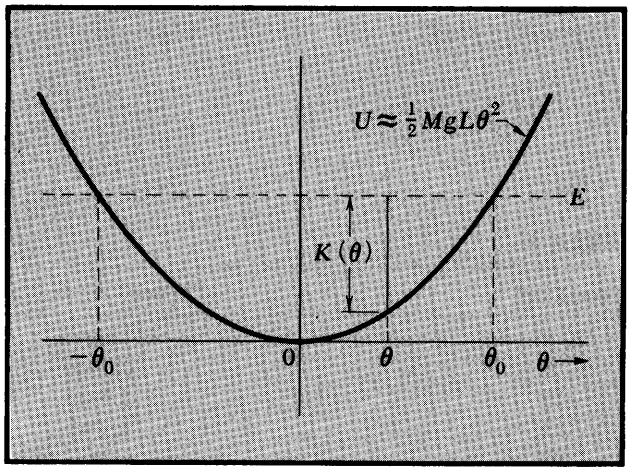


FIG. 7.5 Gráfica de la energía potencial en función de θ. El péndulo oscila entre los límites θ_0 y $-\theta_0$. En estos «puntos de retroceso», $Ec = 0$ y $U = E$. Para $\theta = 0$, $U = 0$ y $Ec = E$. Para $\theta \ll 1$ radián, $U \approx \frac{1}{2}MgL\theta^2$.

Así, pues, podemos escribir (7.14) en la forma

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} (\theta_0{}^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}$$

o

$$\frac{d\theta}{(\theta_0{}^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

Esta ecuación es idéntica a la (7.6) y a continuación damos algunos detalles de su solución.

Si la condición inicial o la fase del movimiento es tal que θ tiene el valor θ_1 para $t = 0$, entonces

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_0{}^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t dt$$

La integral de la izquierda es elemental (Dwight 320.01):

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{(\theta_0{}^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = \left[\text{sen}^{-1}\frac{\theta}{\theta_0}\right]_{\theta_1}^{\theta} = \text{sen}^{-1}\frac{\theta}{\theta_0} - \text{sen}^{-1}\frac{\theta_1}{\theta_0} \quad (7.15)$$

$$= \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} t$$

Sabemos que sen arc sen $(\theta/\theta_0) = \theta/\theta_0$, de modo que (7.15) puede volverse a escribir como

o

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \text{sen}\left[\left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} t + \text{sen}^{-1}\frac{\theta_1}{\theta_0}\right]$$

$$\theta = \theta_0 \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

en donde podemos identificar la pulsación ω_0 y la fase inicial ϕ con

$$\omega_0 = \left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \phi = \text{sen}^{-1}\frac{\theta_1}{\theta_0}$$

de acuerdo con los resultados dados por las Ecs. (7.10) y (7.11).

Aunque ϕ en las Ecs. (7.2) o (7.10) tiene las dimensiones de un ángulo, no es fácil de visualizar como tal ángulo. Es importante entender las magnitudes A y ϕ para el caso de la masa del muelle, así como θ_0 y ϕ en el caso del péndulo. Las figs. 7.6 y 7.7 ilustran el significado de estos dos casos. Todos los ejemplos de oscilación libre tendrán el mismo tipo de constantes, aunque con

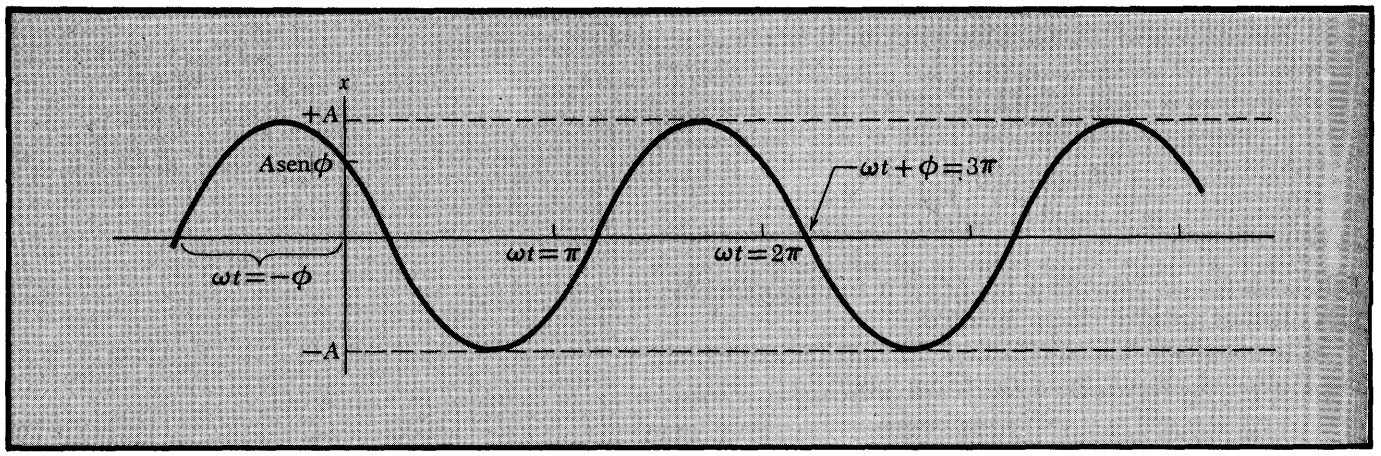


FIG. 7.6 La función $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ representada en función de ωt; $\phi \approx 3\pi/4$. Para $t = 0$, $x = A \operatorname{sen} \phi$ y $dx/dt = \omega A \cos \phi$ negativa). (Nota: Por conveniencia hemos quitado el subíndice de ω_0.)

frecuencia podemos elegir el momento en que $t = 0$ para que ϕ sea cero o $\pi/2$.

1. A y θ_0 son las amplitudes máximas de oscilación; es decir, el movimiento se dirige de $+A$ a $-A$ o de $+\theta_0$ a $-\theta_0$.

2. En función del ángulo $\omega_0 t$, ϕ es el ángulo tal que para $\omega_0 t = -\phi$, x o θ serían cero y crecerían desde valores negativos a positivos. Naturalmente, ésta es otra forma de decir que para $t = 0$, $x = A \operatorname{sen} \phi$, o sea, $\theta = \theta_0 \operatorname{sen} \phi$. Obsérvese cuidadosamente que en las figs. 7.6 y 7.7 el eje horizontal mide $\omega_0 t$ y no t.

3. Las condiciones iniciales determinan A y ϕ o θ_0 y ϕ aun en el caso de que los valores de las condiciones iniciales no sean ninguna de estas dos magnitudes.

El símbolo ω_0 se emplea con frecuencia para designar la frecuencia angular del movimiento natural o libre de un sistema oscilante. El subíndice «cero» en ω no tiene nada que ver con $t = 0$. La frecuencia angular * ω_0 está relacionada con la frecuencia f_0 de la oscilación libre del péndulo, como en la Ec. (7.11):

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{(g/L)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \tag{7.16}$$

(*) Con frecuencia nos referimos a la pulsación ω, como frecuencia angular o simplemente frecuencia. Muchos físicos lo hacen así y no se produce ninguna confusión particular. El empleo del símbolo ω en lugar de f o ν servirá normalmente para identificar una magnitud como una frecuencia angular. En cuanto a los valores numéricos, ν y f vienen dados normalmente en ciclos por segundo (cps) o Hz; ω se da en radianes por segundo o simplemente en s^{-1}, sobreentendiéndose los radianes. Un radián carece de dimensiones. También es bastante común distinguirlos entre sí expresando la frecuencia ν en vibraciones/s o revoluciones/s y la frecuencia angular ω en radianes/s. Ambas tienen dimensiones de s^{-1}.

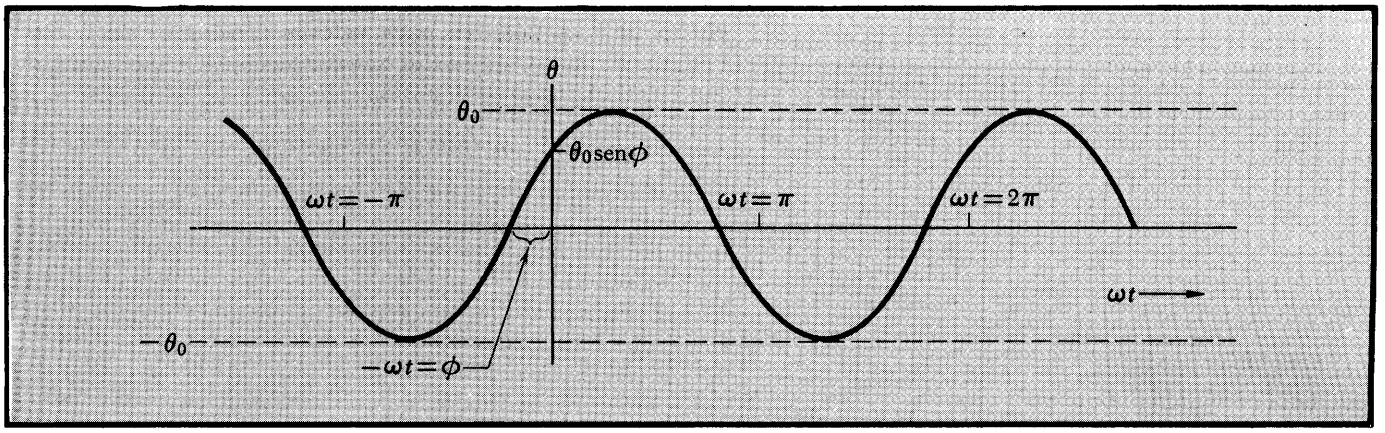


FIG. 7.7 La función $\theta = \theta_0$ sen $(\omega t + \phi)$ representada en función de ωt; $\phi \approx \pi/4$. Para $t = 0$, $\theta = \theta_0$ sen ϕ y $d\theta/dt = \omega\theta_0 \cos \phi$ (positiva). (El valor de ω_0 en el texto se escribe aquí simplemente ω.)

Si $L = 100$ cm, tendremos $\omega_0 \approx (980/100)^{\frac{1}{2}} \approx 3$ rad/s, o $L = 1{,}0$ m, $\omega_0 \approx (9{,}8/1{,}0)^{\frac{1}{2}} \approx 3$ rad/s. La frecuencia es independiente de la masa M y de la amplitud θ_0 del movimiento, con tal que $\theta_0 \ll 1$. Obsérvese que no hay modo de que pueda entrar la masa en el segundo miembro de la Ec. (7.16) y siga tratándose de una magnitud con las dimensiones de una frecuencia.

Al establecer las Ecs. (7.5) y (7.13) hemos utilizado la ley de conservación de la energía. Obsérvese que cada una de éstas es una ecuación diferencial de primer orden y que hemos llevado a cabo una sola integración respecto al tiempo para obtener el resultado. La ecuación del movimiento [Ecs. (7.1) o (7.9)] es una ecuación diferencial de segundo orden como veremos a continuación. Para obtener el ángulo de desviación habremos de integrar dos veces con respecto al tiempo. Es conveniente recordar que el empleo explícito de la conservación de la energía puede ahorrarnos a veces trabajo matemático eliminando una integración.

Un tercer método de establecer la ecuación del movimiento para el péndulo es utilizar la igualdad entre el momento y la variación con el tiempo del momento cinético.

Tomemos el eje x normal al plano del movimiento (fig. 7.8). El momento respecto a este eje N_x debido a la gravedad, haciendo $F = Mg$,

$$N_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x = LMg \operatorname{sen} \theta$$

El momento cinético J_x respecto al mismo punto es, con la cantidad de movimiento $p = ML\,\dot{\theta}$,

$$J_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_x = -ML^2\dot{\theta}$$

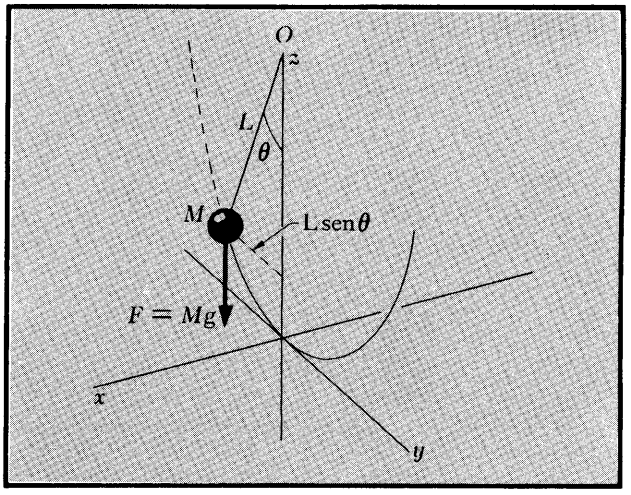


FIG. 7.8 El péndulo oscila en el plano yz. La fuerza debida a la gravedad sobre M es $F = Mg$, en la dirección $-z$. El momento N_x que aparece debido a esta fuerza es MgL sen θ, en la dirección $+x$, evaluada en el punto O.

en donde $\dot{\theta}$ es positivo para valores crecientes de θ. Sabemos que la variación del momento cinético por unidad de tiempo es proporcional al momento de la fuerza:

$$ML^2\ddot{\theta} = -LMg\text{sen}\theta$$

de modo que la ecuación del movimiento del péndulo es

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen}\theta = 0$$

En el límite $\theta \ll 1$, podemos aproximar sustituyendo sen θ por θ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

que es justamente la Ec. (7.9).

CIRCUITO *LC*

Algunos de los ejemplos más importantes de sistemas oscilantes tienen lugar en electricidad. La familiaridad de la expresión *corriente alterna* (ca), que es una corriente eléctrica oscilante, muestra la importancia de este ejemplo. Aquellos alumnos que tengan conocimiento de los circuitos eléctricos, comprenderán fácilmente su relación con los sistemas mecánicos; los demás pueden omitir esta sección y quizás volver a ella cuando hayan estudiado el Cap. 8 del Vol. 2.

El voltaje en bornes de la capacidad C es

$$V_C = \frac{Q}{C}$$

en donde Q es la carga sobre la capacidad. La corriente en un circuito en serie con esta capacidad es

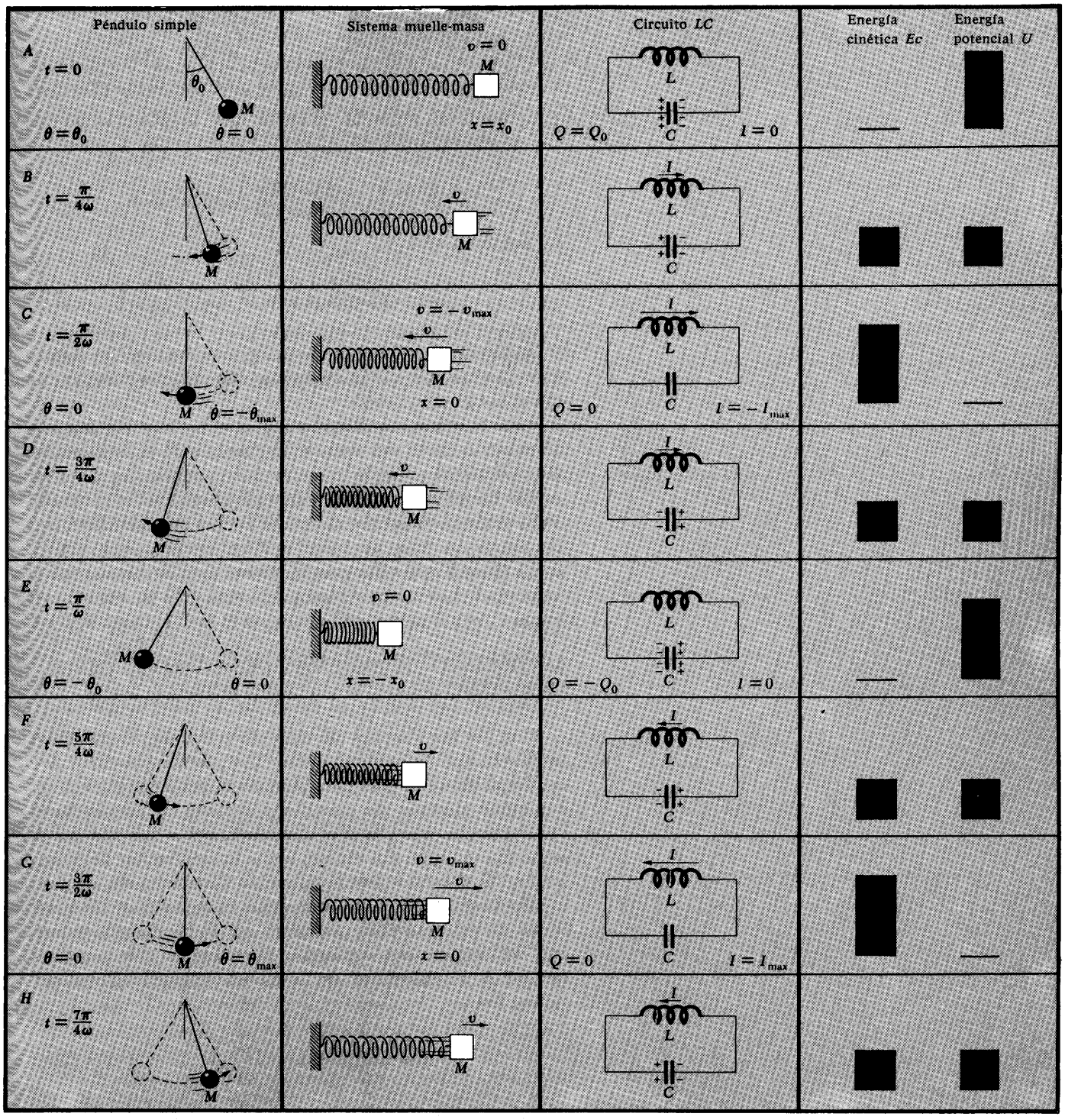
$$I = \frac{-dQ}{dt} \quad \text{o} \quad Q = -\int I\,dt$$

en donde el signo menos indica que la corriente fluye en aquella dirección en que disminuye la carga depositada sobre la capacidad. El voltaje en los extremos de la inducción L es

$$V_L = -L\frac{dI}{dt}$$

Si consideramos un circuito en el que hay sólo una capacidad y una inducción, como en la tercera columna de la fig. 7.9, y se

FIG. 7.9 Tres osciladores armónicos con el mismo período: un péndulo simple, un sistema muelle-masa y un circuito *LC*. El tiempo crece desde la figura *A* a la figura *H*; el ciclo siguiente empieza nuevamente en la situación *A*.


Péndulo simple
Sistema muelle-masa
Circuito LC
Energía cinética Ec
Energía potencial U
A
t = 0
θ = θ0
θ̇ = 0
v = 0
x = x0
Q = Q0
I = 0
B
t = π/4ω
C
t = π/2ω
θ = 0
θ̇ = −θ̇max
v = −vmax
x = 0
Q = 0
I = −Imax
D
t = 3π/4ω
E
t = π/ω
θ = −θ0
θ̇ = 0
x = −x0
Q = −Q0
F
t = 5π/4ω
G
t = 3π/2ω
θ̇ = θ̇max
vmax
Imax
H
t = 7π/4ω
M
L
C

recuerda que la suma de los voltajes a través del circuito es cero, resulta

$$-L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 = L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C}$$

Esta es justamente la ecuación del desplazamiento de un muelle con

$$Q \leftrightarrow x \qquad L \leftrightarrow M \qquad \frac{1}{C} \leftrightarrow C_{\text{muelle}}$$

La solución será

$$Q = Q_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) \qquad \omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.17}$$

y la corriente se deduce de la misma. La fig. 7.9 ilustra estas relaciones y las compara con un péndulo y una masa sobre un muelle.

Los alumnos familiarizados con la electricidad observarán la falta del voltaje RI, siendo R la resistencia. $RI = R\,dQ/dt$ y según nuestra correspondencia anterior ocuparán el lugar de una fuerza proporcional a dx/dt. Pero éste es justamente el tipo de fuerza de rozamiento que discutiremos más adelante y R se corresponde con el coeficiente b que relaciona la fuerza de rozamiento con la velocidad. Los casos de circuitos con L y R, con C y R y con L, R y C serán discutidos en el Vol. 2, Caps. 4, 7 y 8.

MOVIMIENTO DE SISTEMAS DESPLAZADOS DESDE UNA POSICIÓN DE EQUILIBRIO ESTABLE

Una de las razones de que el *movimiento armónico simple* (como se denomina este tipo de movimiento) sea tan importante es que para pequeños desplazamientos de cualquier sistema en equilibrio estable, el movimiento resultante, excepto en el caso de fuerzas de rozamiento, es armónico simple. En efecto, sea α la desviación del equilibrio, en donde α puede ser una distancia, un ángulo u otra coordenada más compleja. La condición de equilibrio estable requiere que para $\alpha = 0$, la energía potencial del sistema sea mínima y la fuerza (si α es una distancia) o el momento (si α es un ángulo) deben ser nulos. Así

$$F(\alpha = 0) = 0 = -\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \tag{7.18}$$

donde U es la energía potencial.

Desarrollando en serie de Taylor,

$$U(\alpha) = U_0 + \left(\frac{dU}{d\alpha}\right)_0 \alpha + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{d^3U}{d\alpha^3}\right)_0 \alpha^3 \cdots \tag{7.19}$$

en donde el subíndice 0 se refiere a $\alpha = 0$. Utilizando las Ecs. (7.18) y (7.19) y despreciando los términos en α^3 y superiores, ya que α es un número pequeño, resulta

$$U(\alpha) = U_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha^2$$

y

$$F(\alpha) = -\frac{dU}{d\alpha} = -\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha \tag{7.20}$$

Naturalmente, no es necesario que F sea una fuerza, sino que puede ser un par u otra magnitud más complicada. Ahora, la condición de equilibrio estable es que

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} > 0$$

En la Ec. (7.20) esto significa que la fuerza tiende a volver el sistema a la condición $\alpha = 0$. La ecuación del movimiento del sistema será entonces

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha \tag{7.21}$$

en donde M es un término equivalente a la masa. La Ec. (7.21) indica que α describirá un movimiento armónico simple. Naturalmente, en la práctica es importante el rozamiento, pero en su ausencia el análisis anterior se aplica a un puente, un edificio, etc; ciertamente se aplica a todo sistema para el cual existe una función de energía potencial que posee un mínimo y es derivable.

ENERGÍA POTENCIAL Y CINÉTICA MEDIA

Vamos ahora a demostrar una característica importante del oscilador armónico relacionada con la media respecto al tiempo de las energías cinética y potencial. El valor medio respecto al tiempo de una magnitud K en el intervalo T es

$$\boxed{\langle Ec \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T K(t)\,dt} \tag{7.22}$$

Como el movimiento de un oscilador es repetitivo, el valor medio respecto al tiempo es el mismo en un período que en muchos períodos y es único. Utilizando el

período $T = 2\pi/\omega_0$, escribiremos para el valor medio de la energía cinética de un oscilador cuyo movimiento obedece a la ecuación $x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)$

$$\langle Ec \rangle = \frac{\int_0^T \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \, dt}{T} = \frac{1}{2} M \omega_0^2 A^2 \frac{\int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \phi) \, dt}{2\pi/\omega_0}$$

Como la integral se extiende a un período completo, no tiene importancia el valor que tenga la fase ϕ y puede convenientemente ponerse $\phi = 0$. Entonces, si escribimos $y = \omega_0 t$, tendremos

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2 \omega_0 t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 y \, dy = \frac{1}{2}$$

utilizando las relaciones

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 y \, dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 y \, dy$$

y

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y) \, dy = 2\pi$$

Por tanto, se tiene para el valor medio de la energía cinética

$$\langle Ec \rangle = \tfrac{1}{4} M \omega_0^2 A^2 \tag{7.23}$$

La energía potencial es (de nuevo con $\phi = 0$, ya que su valor no importa)

$$U = \tfrac{1}{2} C x^2 = \tfrac{1}{2} C A^2 \operatorname{sen}^2 \omega_0 t$$

Como el valor medio del cuadrado del seno es el mismo que el del cuadrado del coseno en un período * y como $\omega_0^2 = C/M$,

$$\langle U \rangle = \tfrac{1}{4} C A^2 = \tfrac{1}{4} M \omega_0^2 A^2 \tag{7.24}$$

Así, pues, $\langle U \rangle = \langle Ec \rangle$ y la energía total del oscilador armónico es

$$E = \langle Ec \rangle + \langle U \rangle = \tfrac{1}{2} M \omega_0^2 A^2$$

(*) Esto puede verse fácilmente dibujando las dos curvas y observando que son idénticas cuando se defasan un cuarto de período. Este tipo de razonamiento puede aplicarse también al valor medio de $\langle x^2 \rangle$ en la superficie de una esfera. Si $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ entonces $\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = R^2$. Como la esfera es simétrica respecto a x, y, z, se deberá tener $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} R^2$. Este resultado puede confirmarse por cálculo directo.

Obsérvese que $E = \langle E \rangle$ porque la energía total es una constante del movimiento.

La igualdad de la energía cinética y potencial medias es una propiedad especial del oscilador armónico. Esta propiedad no se mantiene en general para los osciladores anarmónicos. Se demostrará más adelante que la poseen los osciladores débilmente amortiguados.

ROZAMIENTO

Hasta aquí hemos despreciado los efectos del rozamiento sobre el oscilador armónico. El rozamiento fue discutido en el Cap. 3, incluyendo sólo el caso de una fuerza de rozamiento constante. Trataremos ahora el caso de una fuerza que es proporcional a la primera potencia de la velocidad. Para pequeñas velocidades esto supone en muchos casos una buena aproximación y así encontramos que la solución para este tipo de fuerza retardatriz es realista. Sin embargo, consideremos en primer lugar algunos casos en los cuales sólo actúa esta fuerza. Así tenemos

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_{roz.} = -b\frac{dx}{dt} = -b\dot{x} \tag{7.25}$$

en donde b es una constante positiva llamada *coeficiente de amortiguamiento.* El signo negativo describe el hecho de que se trata de una fuerza siempre opuesta a la velocidad. A veces es útil definir una constante τ, llamada *tiempo de relajación,* por la relación

$$\tau = \frac{M}{b}$$

Según esto la Ec. (7.25) se transforma en

$$M\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

Vemos que τ tiene las dimensiones de un tiempo, ya que b posee las dimensiones de una fuerza dividida por una velocidad o simplemente masa dividida por tiempo. La razón del nombre *tiempo de relajación* la veremos más adelante.

En función de la velocidad $v = dx/dt = \dot{x}$, esta ecuación se reduce a

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau}v = 0$$

La solución viene dada al final del capítulo (pág. 241). Es

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \tag{7.26}$$

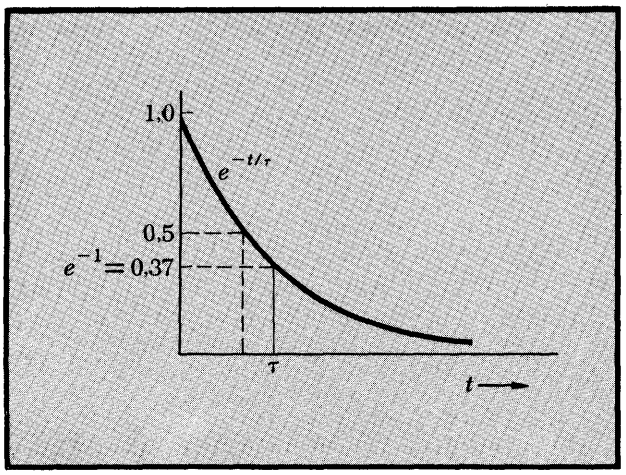


FIG. 7.10 La función $e^{-t/\tau}$ representada en función de t. Obsérvese que $e^{-0{,}69} = 0{,}5$ y, por tanto, la función decrece a la mitad de su valor inicial para $t = 0{,}69\tau$.

en donde v_0 es la velocidad para $t = 0$. La velocidad disminuye exponencialmente con el tiempo; diremos que la velocidad está amortiguada con una constante de tiempo τ. El comportamiento está representado en la figura 7.10.

La disminución de la energía cinética Ec de una partícula libre viene dada según la Ec. (7.26) por

$$Ec = \tfrac{1}{2}Mv^2 = \tfrac{1}{2}Mv_0{}^2e^{-2t/\tau} = Ec_0\, e^{-2t/\tau} \qquad (7.27)$$

Vemos al diferenciar (7.27) que

$$\dot{Ec} = -\frac{2}{\tau}Ec$$

El tiempo de relajación efectivo para la energía cinética es la mitad que para la velocidad.

¿Qué clase de mecanismo conduce a una fuerza amortiguadora de la forma $-b\dot{x}$? El caso de una esfera que se mueve lentamente a través de un medio viscoso fue resuelto por vez primera por G. G. Stokes y la expresión de la fuerza

$$F_{roz} = -6\pi\eta rv \qquad (7.28)$$

en donde r es el radio de la esfera y η el coeficiente de viscosidad se denomina *ley de Stokes.*

Una buena representación de la fuerza amortiguadora $F_{roz} = -b\dot{x}$ es la que corresponde a una lámina plana que se mueve en dirección normal a su plano a través de un gas a presión muy baja, como indica la fig. 7.11, con tal que la velocidad V de la placa sea mucho menor que la velocidad media v de las moléculas del gas. La presión debe ser lo suficientemente baja para que podamos despreciar los choques de las moléculas entre sí. El número de moléculas que por unidad de tiempo golpean la placa es proporcional a la velocidad relativa a la placa de las moléculas que inciden sobre aquélla. Supongamos que las moléculas se mueven únicamente en una dirección. Respecto a una de las caras de la placa la velocidad relativa es $v + V$; respecto a la otra, es $v - V$. La presión es proporcional al número de moléculas que por unidad de tiempo golpean multiplicado por la transferencia media de cantidad de movimiento por molécula. Esta transferencia es por sí misma proporcional a la velocidad relativa, de modo que las presiones P_1, P_2 sobre las dos caras de la placa son

$$P_1 \propto (v + V)^2 \qquad P_2 \propto (v - V)^2$$

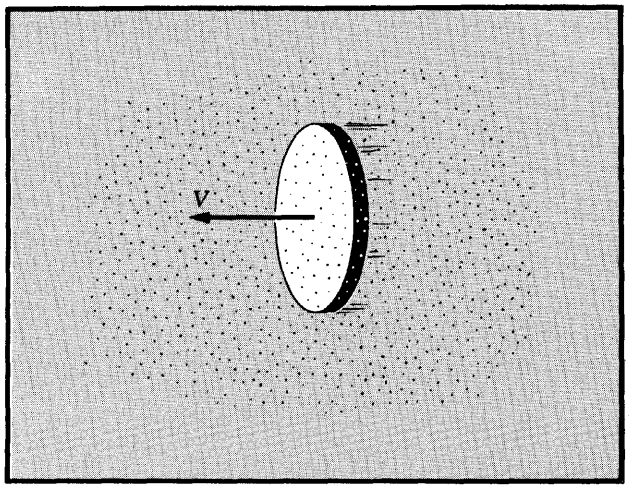


FIG. 7.11 Una placa plana que se mueve normalmente a su plano a través de un gas que está a presión muy baja, está sometida a una fuerza retardadora proporcional a su velocidad V, si ésta es mucho menor que la velocidad media de las moléculas del gas.

La presión resultante es la diferencia de presiones sobre las caras opuestas de la placa

$$P = P_1 - P_2 \propto 4vV$$

de modo que la resistencia al avance (fuerza neta sobre la placa móvil) es directamente proporcional a la velocidad V de la misma. Puede verse que dicha resistencia se opone al movimiento de la placa.

Velocidad límite. Si una fuerza constante tal como la gravedad se aplica a una partícula bajo la acción de una fuerza de rozamiento como la discutida anteriormente, la velocidad se incrementará si la partícula parte del reposo (o con pequeña velocidad) o decrecerá si parte a velocidad muy grande hasta que la aceleración se anula. Esta condición es

$$F_{\text{const}} = b\dot{x} \qquad \text{o} \qquad \dot{x} = v = \frac{F_{\text{const}}}{b} \tag{7.29}$$

y la velocidad así alcanzada se denomina *velocidad límite.* Por ejemplo, si una partícula de masa M cae bajo la acción de la gravedad y de una fuerza que sigue la ley de Stokes, la velocidad límite es

$$v = \frac{Mg}{6\pi\eta r}$$

(Véanse Probs. 10 y 11 al final del capítulo.)

El concepto de velocidad límite es aplicable a problemas que incluyen fuerzas de rozamiento proporcionales a otras potencias de la velocidad que, a menudo, ocurren a velocidades más elevadas. Si la fuerza de rozamiento viene dada por

$$F_{roz} = -c\dot{x}^n$$

en donde c es una constante y n positivo, la velocidad límite será

$$v = \left(\frac{F_{\text{const}}}{c}\right)^{1/n}$$

OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO

Volvamos ahora al oscilador, al que incluimos la fuerza amortiguadora $-b\dot{x}$. Este tipo de movimiento se indica en la fig. 7.12. La ecuación del movimiento es

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = 0$$

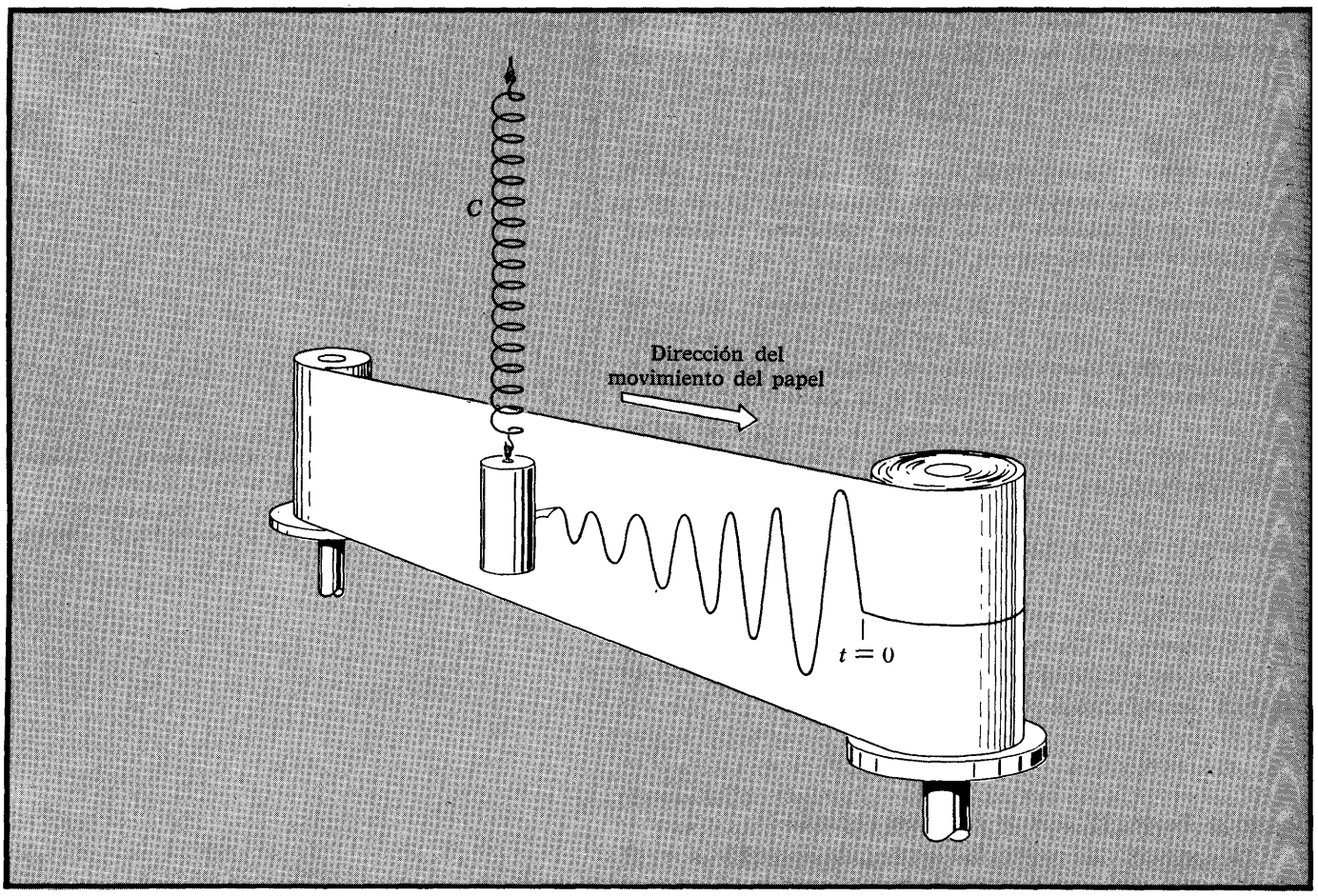


FIG. 7.12 Todos los osciladores armónicos reales están amortiguados por fuerzas de rozamiento, como la resistencia del aire. Un sistema muelle-masa con un amortiguamiento débil describe una curva de este tipo sobre la cinta de papel que se mueve a velocidad constante si el sistema muelle-masa estaba oscilando originalmente en $t = 0$.

Esta es todavía una solución lineal, que puede escribirse en la forma

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0 \tag{7.30}$$

en donde

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{M} \qquad \omega_0{}^2 = \frac{C}{M}$$

Busquemos soluciones a la Ec. (7.30) en la forma de oscilaciones sinusoidales amortiguadas.

$$x = x_0 e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{7.31}$$

en donde han de determinarse β y ω, siendo x_0 y ϕ las constantes que han de determinarse por las condiciones

iniciales *. Esta solución resulta de combinar las ecuaciones (7.2) y (7.26). Los detalles de la solución vienen dados en las Notas Matemáticas al final de este capítulo, en donde se demuestra que

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \tag{7.32}$$

y

$$\omega = \left[\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \omega_0\left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.33}$$

El rozamiento disminuye la frecuencia, de modo que ω es igual a ω_0 únicamente si el tiempo de relajación es infinito (sin amortiguamiento).

Introduciendo estos valores de β y ω en la Ec. (7.31) obtenemos

$$x = x_0 e^{-t/2\tau}\operatorname{sen}\left\{\omega_0 t\left[1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \phi\right\}$$

Si $\omega_0\,\tau \gg 1$, tenemos el límite de *amortiguamiento débil*, en el que x puede aproximarse por

$$x \approx x_0 e^{-t/2\tau}\operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) \tag{7.34}$$

en donde ω_0 es la frecuencia natural de las oscilaciones no amortiguadas.

EJEMPLO

Disipación de potencia. Calculemos la energía disipada por unidad de tiempo por un oscilador armónico amortiguado, en el límite de amortiguamiento débil con $\omega_0\,\tau \gg 1$, de modo que $\omega \cong \omega_0$.

La energía cinética es $Ec = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$. A partir de la solución aproximada (7.34) tendremos (haciendo $\phi = 0$)

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\tau}x_0 e^{-t/2\tau}\operatorname{sen}\omega_0 t + \omega_0 x_0 e^{-t/2\tau}\cos\omega_0 t \tag{7.35}$$

Por tanto,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 x_0^2 e^{-t/\tau}\operatorname{sen}^2\omega_0 t + \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}\cos^2\omega_0 t - \left(\frac{\omega_0}{\tau}\right)x_0^2 e^{-t/\tau}\operatorname{sen}\omega_0 t\cos\omega_0 t \tag{7.36}$$

(*) La solución [Ec. (7.31)] no es válida para todos los valores de ω_0 y τ. En las Notas Matemáticas podrá verse que, bajo ciertas condiciones, la solución no es oscilatoria. Si $\omega_0^2 < (1/2\tau)^2$, la solución es $e^{-t/2\tau}\,(Ae^{gt} + Be^{-gt})$, en donde A y B son constantes arbitrarias y $g = [(1/2\tau)^2 - \omega_0^2]^{\frac{1}{2}}$; mientras que si $\omega_0 = 1/2\tau$, la solución es $Ce^{-t/2\tau} + Dte^{-t/2\tau}$, en donde C y D son constantes arbitrarias. Este último caso es «críticamente amortiguado». Véanse las Ecs. (7.69) y (7.70).

Las integrales que aparecen cuando tomamos la media respecto al tiempo de la ecuación (7.36) vienen dadas por Dwight, 861.13 a 861.15. Pero para $\omega_0\tau \gg 1$, constituye una aproximación bastante aceptable para sacar fuera de los corchetes angulares, que designan la media en el tiempo, el factor $e^{-t/\tau}$. Podemos hacerlo con razonable aproximación si la amplitud de la oscilación $x_0e^{-t/2\tau}$ no cambia mucho en un ciclo del movimiento. Nos aparecen ahora las medias:

$$\langle \cos^2\theta \rangle = \langle \text{sen}^2\theta \rangle = \tfrac{1}{2} \qquad \langle \cos\theta \,\text{sen}\theta \rangle = 0$$

La última media, que es nueva para nosotros, es de considerable importancia:

$$\langle \cos\theta \,\text{sen}\theta \rangle = \langle \tfrac{1}{2}\text{sen}2\theta \rangle = 0$$

porque la media de un seno o coseno es cero. Entonces la energía cinética promediada a lo largo del tiempo de un ciclo es

$$\langle Ec \rangle \approx \frac{1}{2}M\left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 \langle \text{sen}^2\,\omega_0 t\rangle + \omega_0{}^2\langle \cos^2\omega_0 t\rangle - \frac{\omega_0}{\tau}\langle \cos\omega_0 t \,\text{sen}\,\omega_0 t\rangle\right] x_0{}^2 e^{-t/\tau}$$

$$\approx \frac{1}{4}M\left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_0{}^2\right] x_0{}^2 e^{-t/\tau}$$

pero $(1/2\tau)^2$ se supone que es despreciable en comparación con $\omega_0{}^2$, de modo que la energía cinética media es

$$\langle Ec \rangle \approx \tfrac{1}{4}M\omega_0{}^2 x_0{}^2 e^{-t/\tau} \tag{7.37}$$

Vemos que la energía cinética media disminuye exponencialmente. La energía potencial media es (véase fig. 7.13.)

$$\langle U \rangle = \tfrac{1}{2}M\omega_0{}^2 x_0{}^2 \langle e^{-t/\tau}\text{sen}^2\,\omega_0 t\rangle \approx \tfrac{1}{4}M\omega_0{}^2 x_0{}^2 e^{-t/\tau} \tag{7.38}$$

La disipación media de potencia P viene dada por la variación de energía por unidad de tiempo con signo negativo:

$$-\langle P \rangle = \frac{d}{dt}\langle E\rangle \approx \frac{d}{dt}(\langle Ec\rangle + \langle U\rangle) \approx -\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{2}M\omega_0{}^2 x_0{}^2 e^{-t/\tau}\right)$$

o

$$\langle P(t)\rangle = \frac{\langle E(t)\rangle}{\tau} \tag{7.39}$$

Omitiremos normalmente los paréntesis $\langle\,\rangle$ en $P(t)$ cuando su significado sea claro.

El alumno puede sorprenderse de que las medias expresadas en (7.37) y (7.38) contengan el tiempo t, cuando estas medias son respecto al tiempo. Estamos observando el movimiento de un oscilador amortiguado a lo largo de muchos ciclos y lo que tenemos aquí es la *energía* (cinética o potencial) *media* (en un ciclo) *expresada para un tiempo dado t*. Como la energía se está disipando en forma de calor, es de esperar que la energía

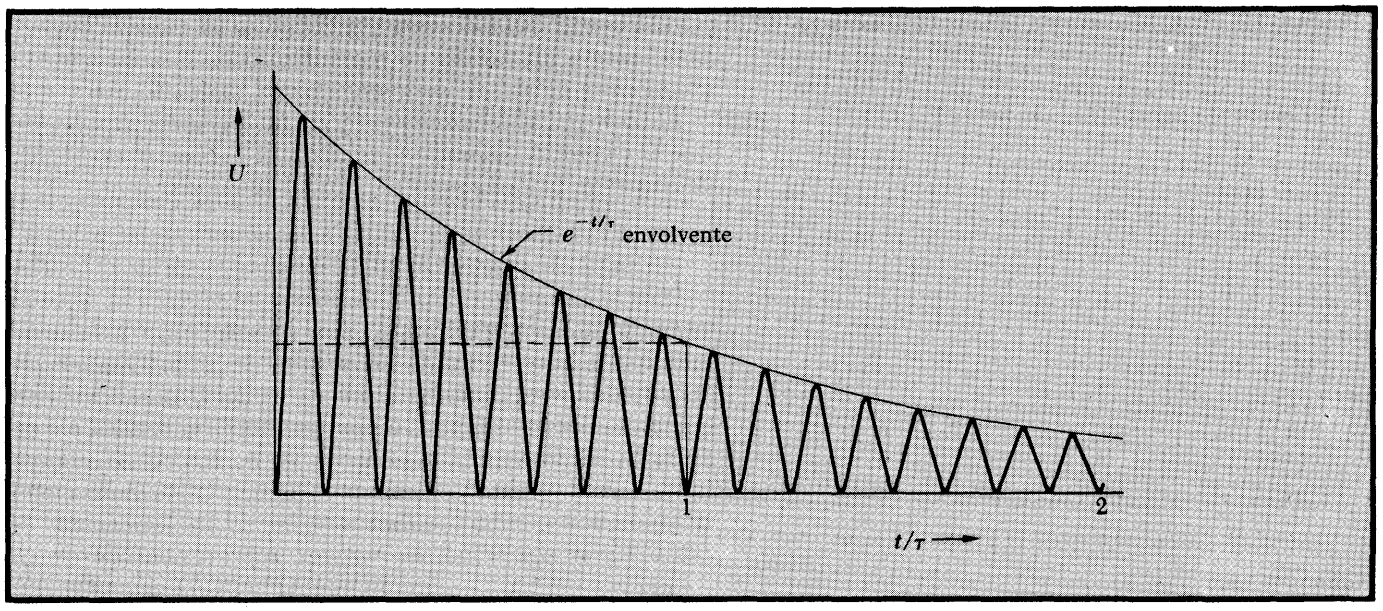


FIG. 7.13 Energía potencial de un oscilador con $\tau = 8\pi/\omega$ y Q de 8π representada en función del tiempo. En el tiempo τ, en el que se verifican cuatro oscilaciones, la envolvente de la oscilación decrece hasta $1/e$ de su valor inicial.

media (en un ciclo) disminuya según se van completando más ciclos.

Es de suponer que la disipación de potencia sea igual al trabajo que en valor medio realiza la fuerza de rozamiento $F_{roz} = -b\dot{x} = -(M/\tau)\,\dot{x}$ [ecuación (7.30)], por unidad de tiempo, con signo menos. Utilizando (7.35) y suponiendo que $\omega_0 \tau \gg 1$, de modo que $e^{-t/\tau}$ puede sacarse fuera de los $\langle\,\rangle$, esta potencia media es

$$\langle F_{roz} v \rangle \approx -\frac{M}{\tau}\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle$$

$$\approx -\frac{1}{2\tau} M\omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \approx -\frac{E(t)}{\tau}$$

de acuerdo con la ecuación (7.39).

Factor de calidad Q. El *factor de calidad* Q de un sistema oscilante es un término que se utiliza muy corrientemente en la terminología de los sistemas eléctricos de corriente alterna, pero se aplica a todos los sistemas oscilantes en tanto el amortiguamiento sea pequeño. Q se define como 2π veces la razón entre la energía almacenada y la pérdida media de energía por período:

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía almacenada}}{\langle\text{pérdida de energía en un período}\rangle} = \frac{2\pi E}{P/f} = \frac{E}{P/\omega} \tag{7.40}$$

TABLA 7.2 Diversos valores de Q. (Lógicamente presenta amplias variaciones)

La Tierra, para ondas sísmicas	250-1 400
Resonador de microondas de cavidad de cobre	10^4
Cuerda de piano o de violín	10^5
Atomo excitado	10^7
Núcleo excitado (Fe^{57})	3×10^{12}

puesto que el período es $1/f$ y $2\pi f = \omega$. El tiempo correspondiente a un radián de movimiento es $1/\omega$. El amortiguamiento debe ser suficientemente pequeño para que E no cambie apreciablemente en un período. Obsérvese que Q carece de dimensiones. Para el oscilador armónico débilmente amortiguado ($\omega_0 \tau \gg 1$) tenemos,

$$Q \approx \frac{E}{E/\omega\tau} \approx \omega_0 \tau \tag{7.41}$$

según la Ec. (7.39). Vemos que el valor $\omega_0 \tau$ es ciertamente una buena medida de la falta de amortiguamiento de un oscilador. Valores altos $\omega_0 \tau$ o de Q quieren decir que el oscilador está poco amortiguado. Obsérvese a partir de la Ec. (7.38) que la energía de un oscilador disminuye hasta e^{-1} de su valor inicial en el tiempo τ; durante dicho tiempo el oscilador realiza $\omega_0 \tau/2\pi$ oscilaciones. En la tabla 7.2 se dan diversos valores representativos de Q.

OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO

El caso de un oscilador armónico forzado por la acción de una fuerza sinusoidalmente variable es de una gran importancia en muchos problemas de física. A causa de la complejidad del problema se trata en los Temas Avanzados (al final del capítulo). Sin embargo, expondremos aquí algunos resultados dignos de mención.

1. Como es lógico, el movimiento estacionario (una vez el rozamiento ha amortiguado todo movimiento correspondiente al período natural del oscilador forzado, $t \gg \tau$) tiene la misma frecuencia que la fuerza impulsora.

2. Como también es lógico, particularmente para el oscilador ligeramente amortiguado, la amplitud del movimiento estacionario depende fundamentalmente de la frecuencia impulsora, siendo grande cuando está próxima a la frecuencia natural. La fig. 7.14 muestra la amplitud como una función de la frecuencia impulsora para valores grandes y medios de Q. Obsérvese que la amplitud máxima tiene lugar a

$$\omega = \left(\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2\omega_0^2\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

que es muy próximo a ω_0 para un oscilador con Q elevada. La máxima absorción de potencia ocurre para

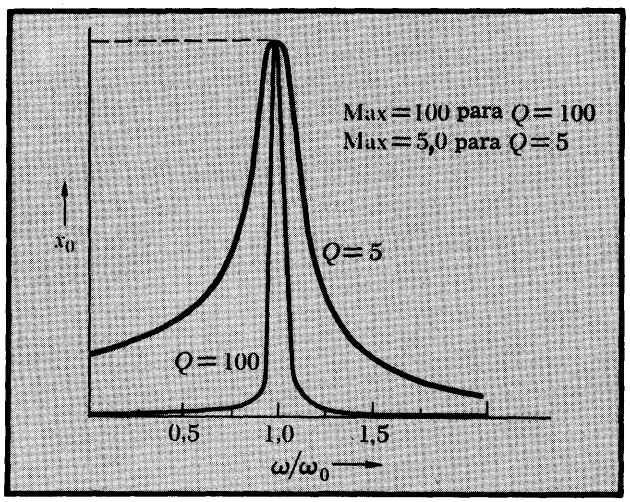


FIG. 7.14 Amplitud del movimiento armónico forzado en función de la frecuencia impulsora. El valor máximo de x_0 tiene lugar para $\omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$ y cae bruscamente para un valor ligeramente inferior a 1,0 de abscisa. La escala de amplitudes es puramente arbitraria y para la misma fuerza impulsora e igual valor de ω_0 la amplitud máxima para $Q = 100$ será 20 veces el valor correspondiente a $Q = 5$.

$\omega = \omega_0$. El tipo de curva indicado se suele denominar *curva de resonancia* *.

3. La deriva en el tiempo, expresada por el ángulo ϕ comprendido entre el desplazamiento $x = x_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ y la fuerza impulsora variable según sen ωt es también una función importante de la frecuencia impulsora, siendo 0 para bajas frecuencias y $-\pi$ para frecuencias elevadas. (Véase fig. 7.15 y el Tema Avanzado al final del capítulo.) El ángulo se define aquí como aquel en el cual el desplazamiento alcanza su máximo antes que la fuerza descrita por $F_0 \operatorname{sen} \omega t$. Los ángulos negativos, por tanto, significan que la oscilación del desplazamiento va retrasada respecto a la oscilación de la fuerza. Obsérvese que cuando $\omega = \omega_0$, $\phi = -\pi/2$, el desplazamiento está retrasado respecto a la fuerza en un cuarto de ciclo. Para más detalles, véanse los Temas Avanzados al final del capítulo.

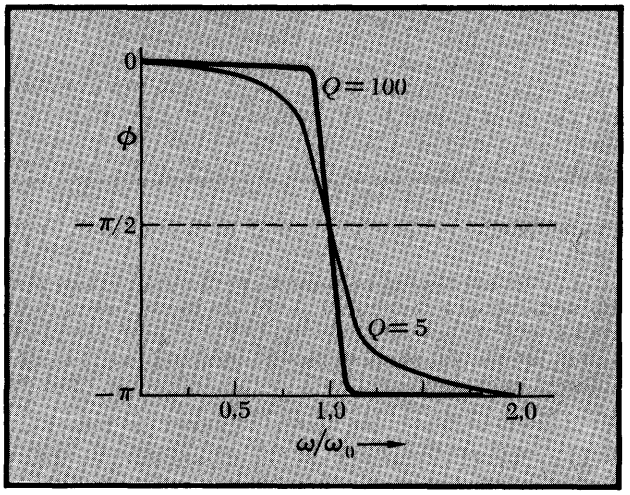


FIG. 7.15 Ángulo ϕ entre el desplazamiento y la fuerza impulsora.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Una propiedad importante del oscilador armónico es que las soluciones son aditivas: Si $x_1(t)$ es el movimiento bajo la acción de la fuerza impulsora $F_1(t)$, y $x_2(t)$ es el movimiento bajo la fuerza impulsora $F_2(t)$, entonces $x_1(t) + x_2(t)$ es el movimiento bajo la fuerza combinada $F_1(t) + F_2(t)$. Esto es, si conocemos el movimiento x_1 bajo la acción únicamente de F_1 y el movimiento x_2 debido a sólo F_2, se obtiene entonces el movimiento bajo la acción de las fuerzas combinadas sumando x_1 y x_2. Esta propiedad se deduce directamente de la ecuación del movimiento

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + {\omega_0}^2\right)(x_1 + x_2)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + {\omega_0}^2\right)x_1 + \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt} + {\omega_0}^2\right)x_2 \quad (7.42)$$

$$= F_1 + F_2$$

La validez del principio de superposición para las soluciones de la ecuación del oscilador armónico es una consecuencia de ser una ecuación lineal; únicamente interviene la primera potencia de x. El resultado es muy diferente cuando se incluyen términos anarmónicos. Un término en x^2 en la ecuación del movimiento interviene mezclando y multiplicando dos frecuencias impulsoras

(*) En algunos campos, la curva de resonancia es estrictamente $f(X) = 1/(1 + X^2)$, que es de apariencia semejante.

simultáneas ω_1 y ω_2, produciendo por ello una serie completa de frecuencias armónicas ($2\omega_1$, $3\omega_1$, ..., $2\omega_2$, $3\omega_2$, ...) y de frecuencias combinadas o «laterales» ($\omega_1 + \omega_2$; $\omega_1 - \omega_2$; $\omega_1 - 2\omega_2$; etc.).

PROBLEMAS

1. *Péndulo simple.* Se construye un péndulo con un hilo de poco peso y longitud $L = 100$ cm y una masa pesada $M = 1 \times 10^3$ g.

(*a*) ¿Cuál es el período del péndulo para desplazamientos pequeños? *Sol.* 2,0 s.

2. *Masa sujeta a un muelle.* Escribir la ecuación del movimiento de una masa M que se mueve en línea vertical bajo la acción de la gravedad y de un muelle de constante C. ¿Cuál es el efecto de la gravedad sobre:

(*a*) El período de oscilación?

(*b*) El centro de oscilación o punto alrededor del cual tiene lugar la oscilación?

3. *Masa sujeta a un muelle.* Se suspende de un muelle longitudinal, cuya constante de fuerza es $C = 1 \times 10^6$ dinas/cm, una masa de $1{,}0 \times 10^3$ g.

(*a*) ¿Cuál es el período para pequeñas oscilaciones?

(*b*) Si para $t = 0$ el desplazamiento del equilibrio es + 0,5 cm y la velocidad + 15 cm/s, determinar el desplazamiento en función de t.

4. *Masa sujeta a un muelle. Datos.* Los datos relacionados a continuación (tablas 7.3 y 7.4) se obtuvieron observando el movimiento de una masa sujeta al extremo de un muelle:

(*a*) Representar el cuadrado del período de oscilación en función de la masa. Los valores tabulados de la masa no tienen en cuenta la masa del muelle. Determinar la masa efectiva del muelle extrapolando adecuadamente el gráfico.

(*b*) Determinar la constante del muelle C.

(*c*) Representar el logaritmo neperiano de la amplitud en función del tiempo y determinar el tiempo de relajación.

(*d*) Determinar el coeficiente de amortiguamiento b.

5. *Masa en un medio fluido.* Un cuerpo parcialmente (o totalmente) sumergido en un líquido es impulsado hacia arriba por la acción de una fuerza igual al peso del líquido desplazado (principio de Arquímedes). Demostrar que un cuerpo de sección transversal horizontal uniforme restringido a moverse verticalmente en un líquido de mayor densidad que la suya experimentará oscilaciones armónicas simples. ¿Cuál es el período de estas oscilaciones? ¿Cuál es el límite de amplitud de las oscilaciones?

6. *Péndulo*

(*a*) Un péndulo de longitud 39,2 cm y masa 500 g se pone en movimiento de modo que para $t = 0$, $\theta = 0{,}1$ y

TABLA 7.3 Período en función de la masa

Masa, g	*Períodos observados, s*
50	0,72
100	0,85
150	0,96
200	1,06
250	1,16
300	1,23

TABLA 7.4 Amplitud de vibración en función del tiempo para una masa de 150 g

Tiempo, s	*Amplitud, cm*
0	4,5
30	4,0
80	3,5
125	3,0
180	2,5
235	2,0
340	1,5
455	1,0

$\dot{\theta} = -0{,}02$/s. Determinar θ en función de t. Utilizar ahora las ecuaciones del movimiento para determinar la fuerza que actúa sobre la masa para $\theta = 0$.

(*b*) El péndulo de Foucault fue montado por Foucault en París el año 1851 para mostrar el efecto de la rotación de la Tierra (véase Cap. 4, pág. 120). Su longitud es de 69 m. Determinar el período. Si la masa es de 28 kg y la oscilación máxima de 10°, calcular la energía total del movimiento.

7. *Energía de una masa sujeta a un muelle.* Una masa de 50 g sujeta al extremo de cierto muelle ejercita un movimiento armónico simple de acuerdo con la ecuación $x = 2 \operatorname{sen} 10\,t$, donde x está expresada en cms. y t en segundos.

(*a*) Determinar la constante C de muelle.

(*b*) Determinar la energía cinética máxima.

(*c*) ¿Cuál es la energía potencial máxima y la energía total?

8. *Oscilador bidimensional.* Una partícula tiene la libertad de moverse en el plano xy bajo la acción de una fuerza dirigida hacia el origen de magnitud $-C(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}) = -C\mathbf{r}$. Llamando M a la masa, determinar las ecuaciones x e y del movimiento y resolverlas.

(*a*) ¿Cuáles son las condiciones para el movimiento en un círculo y cuál es el período?

(*b*) ¿Cuáles son las condiciones para el movimiento a lo largo de la línea de 45° con el eje x y cuál es el período?

9. *Masa en una cápsula esférica.* Una masa se desliza libremente en el fondo de una cápsula esférica de radio 1,0 m. Determinar el período para pequeñas oscilaciones. ¿Cuál es la longitud del péndulo equivalente?

10. *Viscosidad*

(*a*) Buscar en un libro de consulta para dar y explicar la definición de viscosidad.

(*b*) ¿Cuáles son las dimensiones del coeficiente de viscosidad η?

(*c*) ¿Cuál es el valor de la viscosidad del agua a 20° C?

(*d*) Evaluar (*b*) [véase ecuación (7.28)] para una esfera de radio 5 cm en un medio de viscosidad 2,0 centipoises. (Véase Prob. 13.)

(*e*) Si en (*d*) la densidad de la esfera es 2,7 g/cc y la densidad del líquido es 1,1 g/cc, determinar la velocidad límite. Utilizar la fuerza neta vertical, como se explicó en el Prob. 5, y el tiempo de relajación.

11. *Movimiento bajo una fuerza viscosa*

(*a*) Una partícula de masa M sobre la que actúa sólo la fuerza viscosa del medio $-b\mathbf{v}$ es proyectada desde un punto con velocidad v_0. Escribir la velocidad en función del tiempo. Recordar que $v = dx/dt$ y determinar $x(t)$. Si $M = 10$ g, $b = 4{,}0$ din-s/cm y $v_0 = 100$ cm/s, determinar la distancia que recorrerá la masa.

(*b*) En el experimento de la gota de aceite de Millikan, algunas gotas tenían $2{,}0 \times 10^{-4}$ cm de radio. La densidad del aceite era 0,92 g/cc y la viscosidad del aire, $1{,}8 \times 10^{-4}$ centipoises. Determinar el tiempo de relajación y la velocidad límite. Despreciar la corrección por el empuje hidrostático.

12. *Tiempo de relajación.* Un oscilador tiene una masa de $M = 10$ g, $C = 490$ dinas/cm, $b = 1{,}0$ dina-s/cm. Para $t = 0$, $x = 2{,}0$ cm, $\dot{x} = 0$:

(*a*) Determinar x en función de t.

(*b*) ¿Cuál es el tiempo de relajación para x?, ¿y para Ec?

(*c*) ¿Cuánto vale Q?

13. *Oscilador amortiguado.* Una bola esférica de radio 0,30 cm y masa 0,5 g se mueve en agua bajo la acción de un muelle de constante $C = 50$ dinas/cm; η para el agua es $1{,}0 \times 10^{-2}$ dina-s/cm² o *poises*. Determinar el número de oscilaciones que tendrán lugar en el tiempo necesario para que la amplitud descienda a la mitad del valor inicial. (Obsérvese que $e^{-0{,}693} = \frac{1}{2}$). ¿Cuál es el valor Q del oscilador?

TEMAS AVANZADOS

Oscilador anarmónico. Siguiendo la discusión expuesta en páginas anteriores, consideremos ahora un péndulo que está oscilando con una amplitud tan grande que no podemos despreciar el término θ^3 en el desarrollo de $\operatorname{sen}\theta$, como hicimos anteriormente en (7.9) ¿Cuál es el efecto sobre el movimiento del péndulo del término en θ^3? Hemos visto el efecto sobre el período en la Tabla 7.1. Veamos cómo se puede abordar analíticamente este problema.

Los problemas anarmónicos o no lineales son normalmente difíciles de resolver exactamente (a no ser mediante computadores), pero las soluciones aproximadas son con frecuencia suficientes para darnos una buena idea de lo que sucede. La ecuación (7.8) nos da:

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \tfrac{1}{6}\theta^3 + \cdots$$

de modo que la ecuación del movimiento (7.7) hasta este orden se transforma en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta - \frac{\omega_0^2}{6}\theta^3 = 0 \qquad (7.43)$$

en donde la magnitud g/L se ha designado por ω_0^2. Esta es la ecuación del movimiento de un *oscilador anarmónico.*

Veamos si podemos encontrar una solución aproximada a (7.43) de la forma

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}\omega t + \epsilon\theta_0 \operatorname{sen} 3\omega t \tag{7.44}$$

en donde ϵ es una constante adimensional que debe cumplir la condición de ser mucho menor que 1 cuando $\theta_0 \ll 1$. Es decir, veamos si el movimiento puede representarse aproximadamente (o exactamente, ¡no lo sabemos aún!), por la superposición de dos movimientos diferentes, uno en sen ωt y el otro en sen $3\omega t$. La presencia de este último término se sugiere por la identidad trigonométrica (Dwight 403.03):

$$\operatorname{sen}^3 x \equiv \tfrac{3}{4}\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 3x \tag{7.45}$$

Así, pues, el término en θ^3 de la ecuación diferencial (7.43) generará a partir del cubo de sen ωt un término en sen $3\omega t$. Para satisfacer la ecuación diferencial nos vemos obligados a añadir al término sen ωt otro de la forma ϵ sen $3\,\omega t$ que pueda justamente contrarrestar el término en sen $3\,\omega t$ producido por θ^3. Prosiguiendo de este modo, el nuevo término ϵ sen $3\,\omega t$ en la solución de tanteo producirá, al ser elevado al cubo, un término en ϵ^3 sen $9\,\omega t$ y así sucesivamente. No hay ninguna razón aparente por la que deba detenerse el proceso, pero si $\epsilon \ll 1$ puede esperarse que converja rápidamente porque cada vez intervienen potencias más elevadas de ϵ como factores en los términos de frecuencias mayores. Es ahora evidente que (7.44) únicamente puede ser una solución aproximada en el mejor de los casos. Nos falta determinar ϵ y también ω; mientras que ω debe reducirse a ω_0 para pequeñas amplitudes, puede diferirse en el caso de amplitudes mayores. Para mayor sencillez supondremos que $\theta = 0$ para $t = 0$.

Una solución aproximada de este tipo correspondiente a una ecuación diferencial se denomina *solución de perturbación,* porque un término en la ecuación diferencial perturba el movimiento que se tendría sin el citado término. Como hemos visto, llegamos a obtener (7.44) mediante un trabajo de deducción orientado. Es fácil probar con varias soluciones de tanteo semejantes y rechazar las que no resulten.

Tenemos a partir de (7.43)

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0 \operatorname{sen}\omega t - 9\omega^2\epsilon\theta_0 \operatorname{sen} 3\omega t$$
$$\theta^3 = \theta_0{}^3(\operatorname{sen}^3 \omega t + 3\epsilon \operatorname{sen}^2 \omega t \operatorname{sen} 3\omega t + \cdots)$$

en donde hemos descartado los términos de orden ϵ^2 y ϵ^3 porque suponemos que podemos encontrar una solución en la que $\epsilon \ll 1$. Entonces los términos de (7.43) se reducen, utilizando la identidad trigonométrica (7.45), a

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\omega^2\theta_0 \operatorname{sen}\omega t - 9\omega^2\epsilon\theta_0 \operatorname{sen} 3\omega t \\ \omega_0{}^2\theta &= -\omega_0{}^2\theta_0 \operatorname{sen}\omega t + \omega_0{}^2\epsilon\theta_0 \operatorname{sen} 3\omega t \\ -\frac{1}{6}\omega_0{}^2\theta^3 &= -\frac{3\omega_0{}^2}{24}\theta_0{}^3 \operatorname{sen}\omega t + \frac{\omega_0{}^2}{24}\theta_0{}^3 \operatorname{sen} 3\omega t \\ &\quad - \frac{\omega_0{}^2}{2}\theta_0{}^3\epsilon \operatorname{sen}^2 \omega t \operatorname{sen} 3\omega t \end{aligned} \tag{7.46}$$

Sumemos ahora miembro a miembro los términos de (7.46). La suma del primer miembro es igual a cero de acuerdo con (7.43). Si (7.44) ha de ser solución aproximada para cualquier valor del tiempo t, es necesario que los coeficientes de sen ωt y sen $3\omega t$ se anulen separadamente en el miembro de la derecha de (7.46). Pues si suponemos que los coeficientes no se anulan, deberemos tener entonces una expresión de la forma A sen $\omega t + B$ sen $3\omega t = 0$, siendo A y B constantes. Pero una ecuación de este tipo *no puede* satisfacerse para todos los valores de t, de modo que A y B deberán ser nulos. Al limitar nuestra solución supuesta (7.44) a $3\omega t$ no hemos incluido todos los términos o frecuencias que pueden presentarse pero hemos incluido los más importantes.

El requisito de que los coeficientes de sen ωt en (7.46) deben sumar cero es equivalente a

$$\begin{gathered} -\omega^2 + \omega_0{}^2 - \tfrac{3}{24}\omega_0{}^2\theta_0{}^2 = 0 \\ \text{o} \\ \omega^2 = \omega_0{}^2(1 - \tfrac{1}{8}\theta_0{}^2) \qquad \omega \approx \omega_0(1 - \tfrac{1}{16}\theta_0{}^2) \end{gathered} \tag{7.47}$$

utilizando el desarrollo binómico para la raíz cuadrada. (Véase Cap. 2. Notas Matemáticas.) La ecuación (7.47) da la dependencia de ω en función de θ_0. Aquí ω_0 es el límite de ω, cuando $\theta_0 \to 0$; es decir, el límite de amplitud pequeña. Para $\theta_0 = 0{,}3$ radianes, la desviación fraccionaria o unitaria de la frecuencia es $\Delta\omega/\omega \approx -10^{-2}$, en donde $\Delta\omega \equiv \equiv \omega - \omega_0$. Obsérvese que la frecuencia del péndulo para grandes amplitudes depende de la amplitud.

La solución (7.44) también contiene un término en sen $3\omega t$. La amplitud de este término respecto a la amplitud del término en sen ωt es ϵ, que se determina por la condición de que el coeficiente del término en sen $3\omega t$ en la suma de (7.46) se anule:

$$-9\omega^2\epsilon + \omega_0{}^2\epsilon + \frac{\omega_0{}^2}{24}\theta_0{}^2 = 0$$

Si ponemos $\omega^2 \approx \omega_0{}^2$, entonces esta ecuación se reduce a

$$\epsilon \approx \frac{\theta_0{}^2}{192}$$

Consideremos que ϵ nos da el ingrediente fraccionario del término en sen $3\omega t$ en una solución de θ dominada por el término sen ωt. Para $\theta_0 = 0{,}3$ radianes, tendremos $\epsilon \approx 10^{-3}$ que es muy pequeño. El coeficiente del término sen^2 ωt sen $3\omega t$ en (7.46) es pequeño en un factor $O(\epsilon)$ u $O(\theta_0{}^2)$, comparado con los términos que hemos utilizado. Hemos despreciado dicho término en nuestra aproximación.

¿Por qué no hemos incluido en (7.44) un término en sen $2\omega t$? Pruebe el lector una solución de la forma

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}\omega t + \eta\theta_0 \operatorname{sen} 2\omega t$$

y veamos qué sucede. Se encontrará que $\eta = 0$. En la ecuación que describe el movimiento del péndulo aparece principalmente el tercer armónico, o sea, un término en sen $3\omega t$ y no sen $2\omega t$. En tal caso la solución sería diferente

para un dispositivo en el cual la ecuación del movimiento incluyera un término en θ^2, pues entonces la solución tendría un término en sen $2\omega t$ y podría usarse la misma técnica. Existen muchos problemas (por ejemplo, la dilatación térmica de sólidos) en los que la fuerza es más intensa para un valor positivo (negativo) del desplazamiento que para un valor igual negativo (positivo).

¿Cuál es la frecuencia del péndulo para grandes amplitudes? No existe una frecuencia única en el movimiento. Hemos visto que el término más importante (el componente mayor) es función de sen ωt, y diremos que ω es la *frecuencia fundamental* del péndulo. En nuestra aproximación ω viene dada por la ecuación (7.47). El término en sen $3\omega t$ se denomina *tercer armónico* de la frecuencia **fundamental. El razonamiento que siguió a (7.44) sugiere que** están presentes un número infinito de armónicos en el movimiento exacto, pero la mayoría de ellos son muy pequeños. La amplitud en (7.44) del componente fundamental del movimiento es θ_0; la amplitud del componente tercer armónico es $\epsilon\,\theta_0$.

Oscilador armónico forzado con fuerza de amortiguamiento. Consideremos con detalle el movimiento forzado de un oscilador armónico amortiguado. Este es un problema de la máxima importancia. Si además del rozamiento existe una fuerza externa $F(t)$ aplicada al oscilador, la ecuación del movimiento es

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = F(t)$$

o, con una notación más compacta, haciendo $\tau \equiv M/b$ y $\omega_0^2 \equiv C/M$,

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{M} \tag{7.48}$$

Aquí ω_0 es la *frecuencia natural* del sistema en ausencia de rozamiento y en ausencia de cualquier otra fuerza exterior impulsora. Cuando al sistema se le impone una fuerza con una frecuencia diferente $\omega\,(\neq \omega_0)$, veremos que la respuesta vendrá dada con la frecuencia impulsora y no con la frecuencia natural. Pero, si la fuerza impuesta se elimina repentinamente, el sistema vuelve a una oscilación amortiguada, cuya frecuencia coincide aproximadamente con la frecuencia natural, con tal que el amortiguamiento sea bajo.

Supongamos en (7.48) que

$$\frac{F(t)}{M} = \frac{F_0 \operatorname{sen}\omega t}{M} \equiv \alpha_0 \operatorname{sen}\omega t \qquad \alpha_0 \equiv \frac{F_0}{M} \tag{7.49}$$

de modo que la fuerza impulsora es sinusoidal con frecuencia ω. Esta relación define la magnitud α_0. La frecuencia del sistema en el *estado estacionario* (aquel estado del sistema que se mantiene después que ha desaparecido cualquier efecto transitorio) será precisamente la frecuencia impuesta. De otra forma, la fase relativa entre la fuerza y la respuesta variaría con el tiempo. Esta es una característica importante del resultado —la respuesta del estado estacionario de un oscilador armónico forzado (incluso con amortiguamiento) se presenta con la *frecuencia impuesta* y no con la frecuencia natural ω_0. Ninguna otra frecuencia distinta de la impuesta satisfará la ecuación del movimiento. Por respuesta queremos indicar el desplazamiento x o la velocidad $\dot{x}$. Consideremos aquí que la respuesta es x.

Busquemos una solución de (7.48) de la forma

$$x = x_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{7.50}$$

en donde, a partir de la ecuación del movimiento, hemos de encontrar los valores de la amplitud x_0 y del ángulo de diferencia de fase* ϕ. En (7.50) ω es la frecuencia de la fuerza impulsora, *no* la frecuencia natural del oscilador, y ϕ da la diferencia de fase entre la fuerza impulsora y el desplazamiento del oscilador. Así pues, ϕ tiene aquí un significado completamente diferente del que tenía en el oscilador armónico no amortiguado libre, en el que ϕ se relacionaba con las condiciones iniciales. En el caso del oscilador forzado no interesan las condiciones iniciales si únicamente se considera el estado estacionario.

Es interesante definir con precisión lo que queremos significar por diferencia de fase ϕ entre el desplazamiento y la fuerza impulsora. Tanto uno como la otra varían según una ley de oscilación armónica simple. El ciclo desde un máximo a otro de la fuerza o del desplazamiento equivale a 360° ó 2π radianes. *La diferencia de fase ϕ nos dice en qué ángulo el desplazamiento alcanza su máximo antes que la fuerza.* Por ejemplo, supongamos que la fuerza alcanza su valor positivo mayor en el instante en que el desplazamiento es cero y tiende a aumentar en el sentido positivo. Entonces el desplazamiento estará retrasado respecto a la fuerza en $\pi/2$ radianes. Pero ϕ se define como el ángulo en el que x *adelanta a* F, de modo que en este ejemplo ϕ es igual a $-\pi/2$.

Hallemos las derivadas

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega t + \phi) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Entonces la ecuación del movimiento (7.48) es

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + \frac{\omega}{\tau}x_0 \cos(\omega t + \phi) = \alpha_0 \operatorname{sen}\omega t \tag{7.51}$$

Simplificaremos esta expresión mediante las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \operatorname{sen}\omega t \cos\phi + \cos\omega t \operatorname{sen}\phi$$
$$\cos(\omega t + \phi) = \cos\omega t \cos\phi - \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\phi$$

(*) Es necesario que introduzcamos un ángulo ϕ (denominado de fase de x respecto a la fuerza F) que sea diferente de cero. No puede obtenerse ninguna solución si se suprime ϕ. Al hablar de un ángulo de fase hay que asegurarse de referirse al ángulo de fase de algo respecto a algo. En los problemas de electricidad es costumbre hablar de la fase de la corriente referida a la tensión. Aquí hablamos de la fase del desplazamiento x referida a la fuerza impulsora. Las dos fases no son equivalentes, porque la magnitud análoga a una corriente es dx/dt, y no x.

Así, pues, (7.51) se transforma en

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\phi - \frac{\omega}{\tau}\operatorname{sen}\phi\right]x_0 \operatorname{sen}\omega t + \left[(\omega_0^2 - \omega^2)\operatorname{sen}\phi + \frac{\omega}{\tau}\cos\phi\right]x_0\cos\omega t = \alpha_0 \operatorname{sen}\omega t \quad (7.52)$$

La ecuación (7.52) puede satisfacerse únicamente si es cero el coeficiente de cos ωt. Esta condición puede escribirse como

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7.53)$$

También es necesario que el coeficiente de sen ωt, sea igual a α_0:

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\phi - (\omega/\tau)\operatorname{sen}\phi} \quad (7.54)$$

A partir de (7.53) se deduce que

$$\cos\phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{-\omega/\tau}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.55)$$

y de aquí (7.54) se reduce a

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.56)$$

Esta es la amplitud del movimiento.

Las ecuaciones (7.55) y (7.56) nos dan la solución deseada. Conocemos ahora la amplitud x_0 y la fase ϕ de la respuesta del sistema bajo la fuerza impulsora $F = M\alpha_0 \operatorname{sen}\omega t$:

$$x = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \operatorname{arc\,tg}^1 \frac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \quad (7.57)$$

La amplitud de la ecuación (7.57) viene representada en función de ω en la fig. 7.14 y el ángulo de la fase en la figura 7.15. Obsérvese en el gráfico que el ángulo de fase es siempre negativo. Esto puede entenderse analizando la ecuación (7.53), ya que $\phi = 0$ para $\omega = 0$, $0 > \phi > -\pi/2$ para $\omega < \omega_0$ y $-\pi/2 > \phi > -\pi$ para $\omega > \omega_0$.

Podemos apreciar el significado de esta ecuación si examinamos casos límites. En nuestra discusión suponemos siempre que el amortiguamiento es pequeño, de modo que $\omega_0\tau \gg 1$.

Frecuencia impulsora baja, $\omega \ll \omega_0$. Vemos aquí a partir de (7.55) que

$$\cos\phi \to 1 \qquad \operatorname{sen}\phi \to -0$$

por lo tanto, $\phi \to 0$. Esta respuesta a baja frecuencia se dice que está *en fase* con la fuerza impulsora. A partir de (7.56) vemos que

$$x_0 \to \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} = \frac{M\alpha_0}{C} = \frac{F_0}{C} \quad (7.58)$$

El *muelle* (y no la masa ni el rozamiento) condiciona la respuesta en este límite; la masa se desplaza simplemente adelante y atrás por acción de la fuerza contra la tendencia del muelle a recuperar su posición.

Respuesta de resonancia, $\omega = \omega_0$. La respuesta puede ser muy grande en la resonancia. La resonancia se utiliza en muchas aplicaciones, de modo que es preciso estudiarla cuidadosamente. Para $\omega = \omega_0$ la frecuencia impuesta se hace igual a la frecuencia natural del sistema en ausencia del rozamiento. Tenemos

$$\cos\phi \to \pm 0 \qquad \operatorname{sen}\phi \to -1 \qquad \phi \to -\frac{\pi}{2}$$

La amplitud para $\omega = \omega_0$ viene dada por

$$x_0 = \frac{\alpha_0\tau}{\omega_0} \quad (7.59)$$

Cuanto más bajo es el amortiguamiento mayores son τ y x_0. Manteniendo F_0 constante, la relación entre la respuesta en la resonancia y la respuesta a la frecuencia cero viene dada según (7.58) y (7.59) como

$$\frac{x_0(\omega = \omega_0)}{x_0(\omega = 0)} = \frac{\alpha_0\tau/\omega_0}{\alpha_0/\omega_0^2} = \omega_0\tau = Q$$

con el coeficiente Q que definimos por la ecuación (7.41). Este puede ser muy grande, ¡es normal 10^4 o más! Puede decirse que el amortiguamiento condiciona la respuesta en la resonancia.

La respuesta máxima x_0 no se presenta exactamente cuando $\omega_0 = \omega$. Observemos que la derivada de la ecuación (7.56) tiene un cero en

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right] = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + \frac{2\omega}{\tau^2} = 0$$

o sea,

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}$$

Esta es la posición de respuesta máxima de la curva de x_0 en función de ω. Si $\omega_0\tau \gg 1$, el máximo está muy cerca de $\omega = \omega_0$.

Puede parecer extraño que la respuesta máxima se obtenga con el ángulo de diferencia de fase igual a $-\pi/2$, es decir, cuando la fuerza está desfasada exactamente 90° respecto al desplazamiento. Podría parecer lógico que la resonancia se presentara cuando $\phi = 0$ y no cuando $\phi = -\pi/2$. Pero el secreto está en que la potencia absorbida por el oscilador no depende directamente de la fase entre la fuerza impulsora y el desplazamiento, sino más

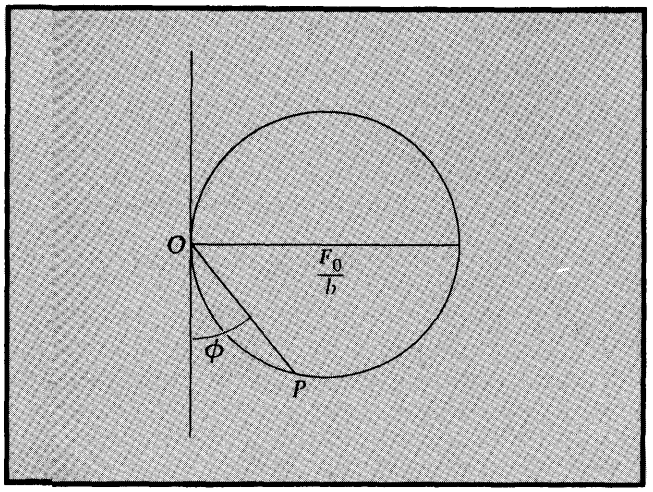
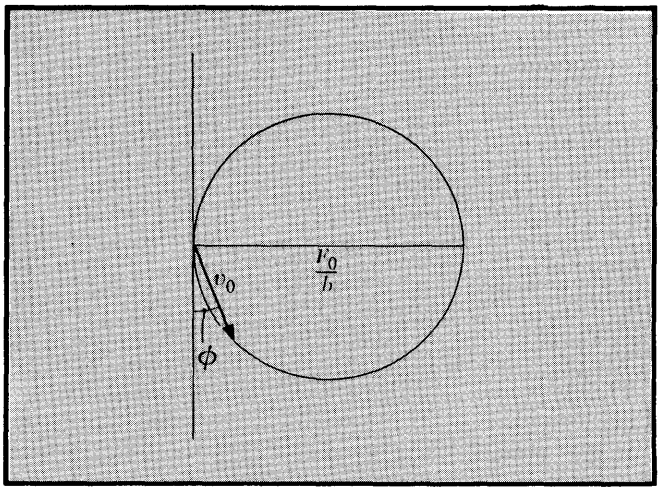
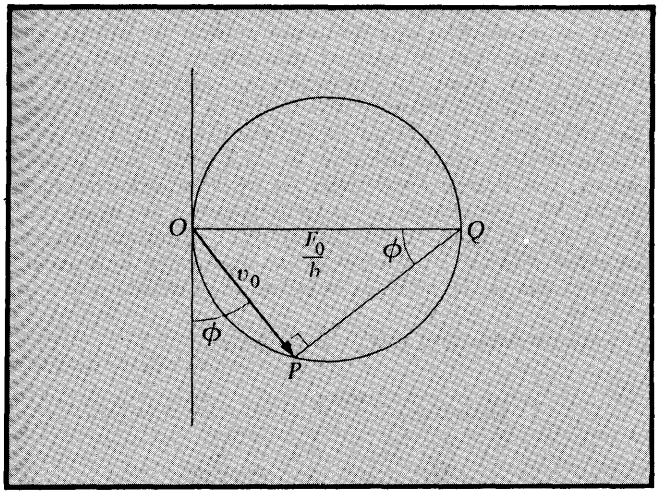


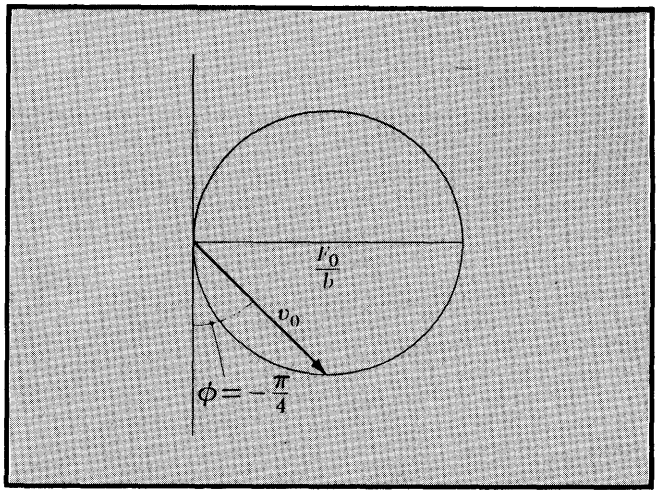
FIG. 7.16 *a*) «Gráfica polar» de una representación sencilla del oscilador armónico impulsado o forzado. Se construye una circunferencia con diámetro F_0/b y se dibuja un segmento de recta OP que forme un ángulo ϕ con el eje de ordenadas.



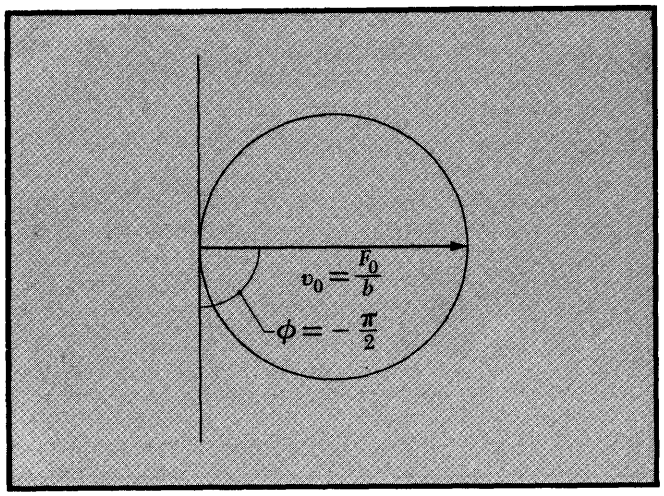
c) Para $\omega \ll \omega_0$, $\phi \approx 0$ y $v_0 \ll F_0/b$. La respuesta es muy pequeña en este límite.



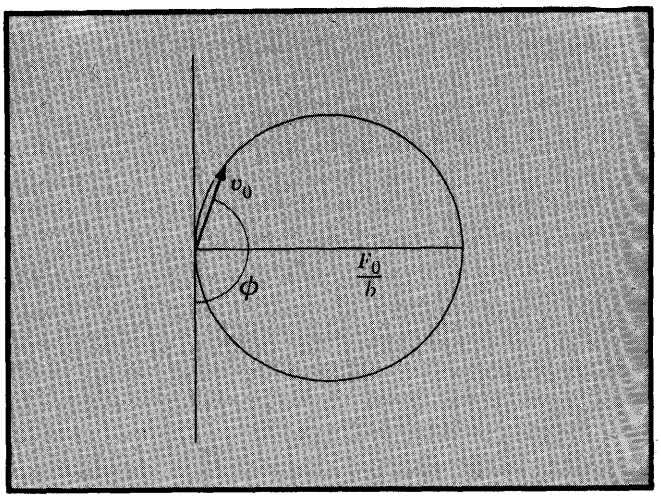
b) Sea cualquiera el ángulo ϕ, el triángulo OPQ es rectángulo. Así, pues, el segmento $OP = -(F_0/b)$ sen ϕ. A partir de las ecuaciones (7.55) a (7.57) vemos que el segmento $OP = \omega x_0 = v_0$, es la amplitud de la velocidad.



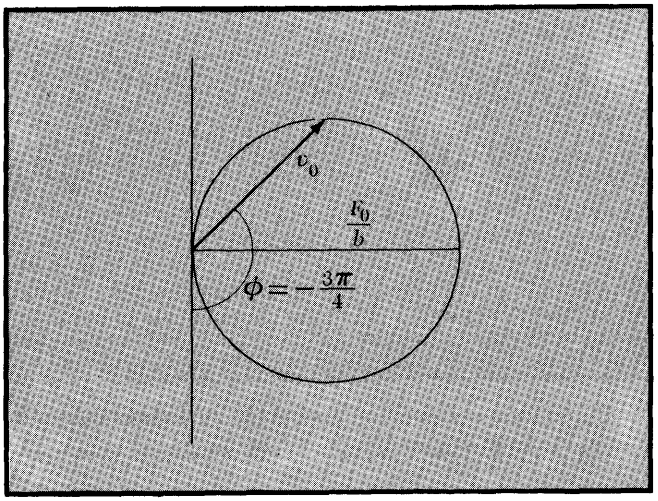
d) Cuando ω crece, $|\phi|$ aumenta y lo mismo ocurre a v_0. Para $\phi = -\pi/4$, $v_0 = F_0/\sqrt{2}b$.



e) Para $\phi = -\pi/2$, $\omega = \omega_0$ y $v_0 = F_0/b$. La amplitud de la velocidad es *máxima en la resonancia.*



g) Para $\omega \gg \omega_0$, $v_0 \ll F_0/b$ nuevamente, y $\phi \approx -\pi$.



f) Para $\omega > \omega_0$, v_0 disminuye de nuevo. Para $\phi = -3\pi/4$, $v_0 = F_0/\sqrt{2}b$ nuevamente.

bien de la fase entre la fuerza y la *velocidad.* Sólo hay que reflexionar un momento para ver que obtendremos **las mayores desviaciones cuando la velocidad esté exactamente en fase con las fuerzas impulsoras. De este modo** la masa resulta empujada con el lugar y momento precisos. Cuando el desplazamiento es cero, la velocidad tiene su máximo valor. Si en este punto se está moviendo en el sentido positivo, nos conviene que la fuerza alcance en ese instante su mayor valor con objeto de obtener el movimiento máximo. En los puntos extremos en los que la velocidad cambia de sentido conviene, para que se presente la resonancia, que la fuerza cambie de sentido del mismo modo que lo hace el movimiento en ese mismo instante. Así, pues, la resonancia se entiende mejor en función de la fase entre la velocidad y la fuerza impulsora. Sabemos que la velocidad de un oscilador adelanta a su desplazamiento exactamente en 90°. Así, pues, para la resonancia, con fuerza y velocidad en fase, debemos tener la fuerza 90° adelantada al desplazamiento, de modo que $\phi = -\pi/2$. Aunque, como hemos dicho anteriormente, la amplitud máxima tiene lugar a una frecuencia ligeramente inferior que ω_0, la potencia máxima corresponde a $\omega = \omega_0$.

Frecuencia impulsora alta, $\omega \gg \omega_0$. Aquí

$$\cos\phi \to -1 \qquad \text{sen}\,\phi \to 0 \qquad \phi \to -\pi$$

y

$$x_0 \to \frac{\alpha_0}{\omega^2} = \frac{M\alpha_0}{M\omega^2} = \frac{F_0}{M\omega^2}$$

En este límite, la respuesta disminuye como $1/\omega^2$. La inercia de la masa condiciona la respuesta en el límite de altas frecuencias y la masa responde esencialmente como un objeto libre, siendo sacudida atrás y adelante por la fuerza. Obsérvese que la fase ϕ del desplazamiento x respecto a la fuerza impulsora F empieza en cero a frecuen-

cias bajas, pasa por $-\frac{1}{2}\pi$ en la resonancia y llega a $-\pi$ a frecuencias elevadas. *El desplazamiento siempre se retrasa respecto a la fuerza impulsora.*

Un procedimiento geométrico interesante para entender estos fenómenos viene indicado en la fig. 7.16. En lugar de representar la respuesta x_0 o quizás la potencia en función de ω, utilizamos el ángulo ϕ como variable. De las ecuaciones (7.55) y (7.56) resulta que

$$\omega x_0 = \frac{F_0}{b}\operatorname{sen}(-\phi) = v_0$$

en donde b es el coeficiente de amortiguamiento (M/τ) en la ecuación (7.30). El producto ωx_0 es justamente el valor máximo de la velocidad $\dot{x}$, o amplitud de la velocidad que llamaremos v_0. Si hacemos ahora la representación polar como en la fig. 7.16, la longitud de la línea OP es justamente esta velocidad máxima v_0 con el diámetro escogido F_0/b para estar de acuerdo con la ecuación anterior. Debemos recordar que ϕ es realmente un ángulo negativo, pero como en el dibujo estamos interesados sólo en la magnitud de v_0, trataremos a ϕ como si fuera un ángulo positivo, ya que

$$\operatorname{sen}(-\phi) = -\operatorname{sen}\phi \qquad |\operatorname{sen}-(-\phi)| = |\operatorname{sen}\phi|$$

Los valores del ángulo ϕ dados en las leyendas de la fig. 7.16 son los valores negativos correctos.

En esta gráfica polar podemos ver que cuando ϕ varía, la longitud de OP parte de un valor pequeño (fig. 7.16 *c*), crece hasta el valor máximo del diámetro del círculo cuando $\phi = -\pi/2$ (fig. 7.16 *e*) y luego decrece nuevamente cuando ϕ se aproxima a $-\pi$ (figs. 7.16 *f* y *g*). La potencia, como veremos luego, es el valor medio en un círculo de $F\dot{x}$ [véanse ecuaciones (7.60) y (7.62)] y tiene su valor máximo para $\phi = -\pi/2$.

Absorción de potencia. La media en el tiempo del trabajo realizado por unidad de tiempo sobre el sistema oscilante por la fuerza impulsora viene dada, haciendo uso de (7.49) y de la derivada respecto del tiempo de (7.57) por

$$P = \langle F\dot{x}\rangle = \frac{M\alpha_0{}^2\omega}{[(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}}\langle \operatorname{sen}\omega t \cos(\omega t + \phi)\rangle \tag{7.60}$$

Empleando la identidad

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos\omega t\cos\phi - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi$$

tendremos

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{sen}\omega t[\cos\omega t\cos\phi - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi]\rangle &= -\operatorname{sen}\phi\langle\operatorname{sen}^2\omega t\rangle \\ &= -\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\phi \end{aligned}\tag{7.61}$$

en donde hemos utilizado el hecho de que $\langle \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\rangle = 0$. Vemos que la fase tiene su importancia (véase figura 7.17 *a* y *b*). Con la ecuación (7.55) para sen ϕ podemos escribir (7.60) como

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}M\alpha_0{}^2\frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \\ &= \frac{1}{2}M\alpha_0{}^2\tau\left[\left(\frac{\omega_0{}^2 - \omega^2}{\omega/\tau}\right)^2 + 1\right]^{-1}\end{aligned}\tag{7.62}$$

Este resultado es muy importante y viene ilustrado en la fig. 7.17.

La absorción de potencia en la resonancia para $\omega = \omega_0$ es

$$P_{\text{res}} = \tfrac{1}{2}M\alpha_0{}^2\tau$$

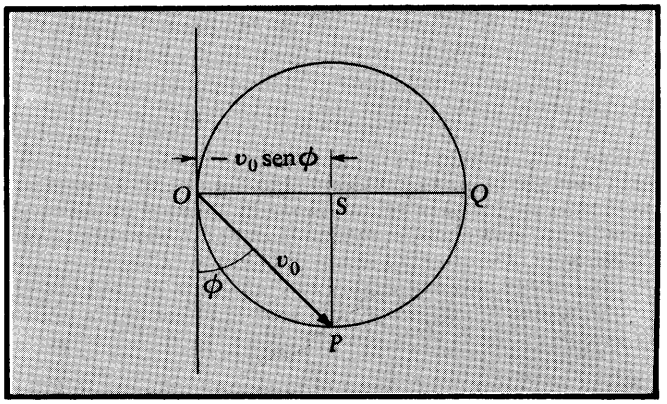
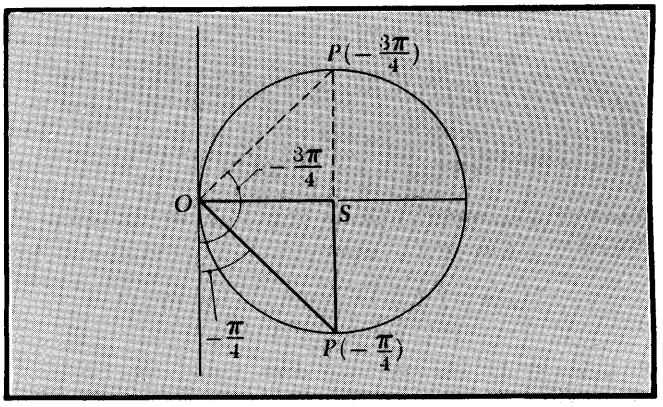


FIG. 7.17 *a*) El segmento $OS = -v_0\operatorname{sen}\phi$ está indicado. A partir de las ecuaciones (7.60) a (7.62) vemos que la potencia absorbida es proporcional a $-v_0\operatorname{sen}\phi$ o al segmento OS.



b) Para los ángulos de fase $\phi = -\pi/4$ y $\phi = -3\pi/4$, el segmento $OS = \frac{1}{2}OS_{\max}$. Así, pues, la absorción de potencia *mitad* de la máxima ocurre en estos puntos. Naturalmente la absorción *máxima* se verifica para $\phi = -\pi/2$ (resonancia).

La absorción de potencia (7.62) se reduce a la mitad del valor en la resonancia cuando ω varía en $\pm\ (\Delta\omega)_{1/2}$ de modo que

$$\frac{\omega}{\tau} = \omega_0^2 - \omega^2 \equiv (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}} \quad (7.63)$$

Así, pues, la anchura completa $2\,(\Delta\omega)_{1/2}$ de la resonancia en donde la potencia es mitad de la máxima es igual a $1/\tau$. Se ve, utilizando la expresión para Q encontrada en (7.41), que

$$Q = \omega_0\tau = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\text{Frecuencia en la resonancia}}{\text{anchura completa a la mitad de la potencia máxima}}$$

Por consiguiente, Q mide la agudeza del ajuste o sintonía. (fig. 7.18).

EJEMPLO

Estudio numérico de un problema sobre oscilador armónico. Sea la masa $M = 1\,\text{g} = 0{,}001$ kg, la constante de la fuerza $C = 10^4$ dinas/cm $= 10$ N/m, y el tiempo de relajación $\tau = \frac{1}{2}$ s. Entonces, según la ecuación (7.3):

$$\omega_0 = \left(\frac{C}{M}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10^4}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10}{10^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^2\ \text{s}^{-1}$$

mientras que, según (7.33), la frecuencia de oscilación libre es

$$\left[\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = [10^4 - 1]^{\frac{1}{2}} \approx 10^2\ \text{s}^{-1}$$

El factor Q del sistema viene dado según (7.41) por

$$Q \approx \omega_0\tau = (10^2)(\tfrac{1}{2}) = 50$$

El tiempo para que la amplitud se amortigüe hasta e^{-1} de su valor inicial (para el sistema libre) es

$$2\tau = 1\ \text{s}$$

utilizando (7.32). La constante de amortiguamiento $b = M/\tau = 1\,\frac{1}{2} = 2$ g/s, o

$$\frac{0{,}001}{\frac{1}{2}} = 2 \times 10^{-3}\ \text{kg/s}$$

Hagamos ahora que el sistema sea impulsado por la fuerza

$$F = Mx_0 \operatorname{sen} \omega t = 10 \operatorname{sen} 90t \text{ dinas.}$$

Vemos que $\alpha_0 = F_0/M = 10$ dinas/g y la frecuencia impuesta es $\omega = 90\ \text{s}^{-1}$. La amplitud viene dada por la ecuación (7.56):

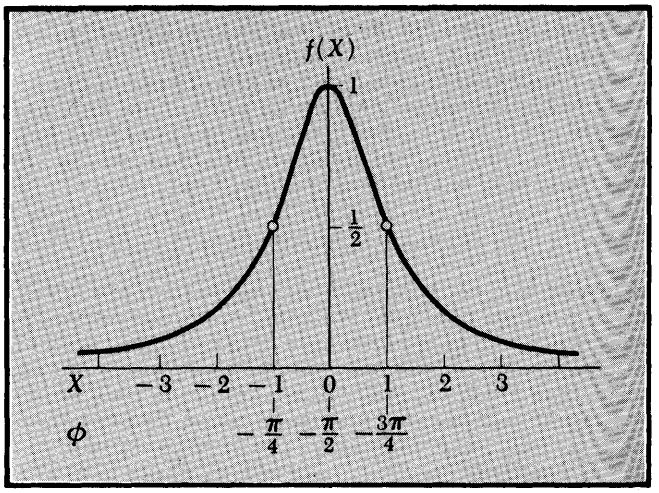


FIG. 7.18 La absorción de potencia es proporcional a $f(X) = 1/(1 + X^2)$, en donde

$$X = \frac{-(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega/\tau} = \cot\phi$$

de acuerdo con la ecuación (7.62). Para $\phi \approx 0$, $X = \cot\phi$ es grande y negativa. Para $\phi = -\pi/2$, $X = \cot\phi = 0$ y la absorción de potencia es un máximo. Se pueden ver también los puntos de mitad de potencia $X = \pm 1$. La función $f(X) = 1/(1 + X^2)$ se conoce como función de Lorentz.

$$x_0 \approx \frac{10}{[4 \times 10^6 + 4 \times 10^4]^{\frac{1}{2}}} \approx 5 \times 10^{-3}\ \text{cm}$$

y la fase viene dada por (7.53):

$$\text{tg}\ \phi \approx -\frac{180}{1{,}9 \times 10^3} \approx -0{,}1$$

o bien $\phi \cong -0{,}1$ rad $\cong -6°$. Así, pues, en cada ciclo el máximo del desplazamiento se verifica a 0,1 rad/90 rad por segundo $\approx 10^{-3}$ segundos después del máximo de la fuerza.

Podemos comparar la amplitud anterior con la que existe en el límite $\omega \to 0$ y con la que se presenta en la resonancia. Según la ecuación (7.58) tenemos $x_0\,(\omega = 0) = \alpha_0/\omega_0^2 = 10/10^4 = 10^{-3}$ cm. En la resonancia tendremos, según las ecuaciones (7.59) y (7.41), que

$$x_0(\omega = \omega_0) = Qx_0(\omega = 0) = (50)(10^{-3}) = 5 \times 10^{-2}\ \text{cm}$$

La anchura completa de la curva de resonancia entre los puntos de mitad de la potencia máxima es según (7.63):

$$2(\Delta\omega)_{\frac{1}{2}} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{100}{50} = 2\ \text{s}^{-1}$$

Obsérvese que en este ejemplo hemos empleado siempre «frecuencia» queriendo significar «frecuencia angular». Para obtener las frecuencias normales en oscilaciones o ciclos por segundo, debemos dividir por 2π.

NOTAS MATEMÁTICAS

Investigaremos ahora algunas ecuaciones más complicadas que surgen en el estudio de la mecánica. En el Cap. 3 hemos resuelto los dos tipos de ecuaciones que corresponden a los casos en que *no existe fuerza* o que *ésta es constante*. Desde el punto de vista de la facilidad de resolverla, consideremos la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} = bt$$

en donde b es una constante y t el tiempo. Si se deriva t^3 dos veces se obtiene $6t$, de modo que la solución de esta ecuación será

$$x = \tfrac{1}{6}bt^3 + c_0t + d_0$$

en donde c_0 y d_0 son las constantes arbitrarias del mismo tipo que las encontradas en las soluciones de las ecuaciones (3.52) y (3.54). Para $t = 0$, $x = d_0$ y $dx/dt = c_0$. En una forma semejante, si $d^2x/dt^2 = bt^2$ o ft^3, o así sucesivamente, podemos fácilmente encontrar una solución. Desgraciadamente los problemas de este tipo son escasos y, por ello, continuaremos con otros que se encuentran más a menudo en la física.

Fuerza resistente. Un problema bastante común en mecánica corresponde al caso de una fuerza resistente directamente proporcional a la velocidad. (Esta ecuación aparece también en el caso de la desintegración de las sustancias radiactivas.) En este caso la segunda ley de Newton nos da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -bv = -b\frac{dx}{dt} \tag{7.64}$$

El signo menos indica que la fuerza tiende a reducir o disminuir la velocidad. Esta ecuación puede simplificarse recordando que la aceleración d^2x/dt^2 es igual a dv/dt, con lo cual (7.64) se convierte en

$$m\frac{dv}{dt} = -bv$$

o

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b\,dt}{m}$$

Esta ecuación puede integrarse por los métodos clásicos:

$$\int\frac{dv}{v} = \log_e v = -\int\frac{b\,dt}{m} = -\frac{bt}{m} + \text{const}$$

$$v = Ae^{-bt/m} \tag{7.65}$$

Aquí e representa la base de los logaritmos neperianos o naturales y tiene el valor 2,718.... Las propiedades de estos logaritmos son semejantes a las de los logaritmos decimales y sus valores se encuentran en muchas tablas matemáticas. Un número que vale la pena recordar es $e^{-0,693} = \frac{1}{2} = 0{,}500$.

¿Cuánto vale la constante A en la ecuación (7.65)? Para $t = 0$, $e^{-0} = 1$, de modo que $v = A$. Por tanto, ésta es una constante arbitraria que podemos utilizar para ajustar las condiciones iniciales. Sin embargo, previamente teníamos dos constantes arbitrarias; aquí tenemos sólo una constante. Pero la ecuación que hemos resuelto es de primer orden y así tenemos sólo una constante. Podemos ahora volver a $v = dx/dt$ y escribir

$$dx/dt = v_0e^{-bt/m} \tag{7.66}$$

en donde v_0 es la velocidad correspondiente para $t = 0$. Ensayemos una solución de la forma

$$x = B + Ce^{-bt/m}$$

Ponemos la forma exponencial porque la derivada de e^{-t} es e^{-t}. Sustituyendo en la ecuación (7.66) resulta

$$-b/mCe^{-bt/m} = v_0e^{-bt/m}$$

Por tanto, $C = -mv_0b$. ¿Y la constante B? Sospechamos que será x_0, la condición inicial; sin embargo, cuando introducimos $t = 0$ en la solución encontramos que

$$x = B + C = B - \frac{mv_0}{b}$$

Por consiguiente, si $x = x_0$ para $t = 0$, $B = x_0 + mv_0/b$. Nuestra solución es entonces

$$x = x_0 + \frac{v_0m}{b}(1 - e^{-bt/m})$$

Como ejemplo, supongamos una partícula de masa 25 g sobre la cual actúa una fuerza $-5v$ dinas y parte de $x = -10$ con velocidad de 40 en la dirección positiva de x. Utilizando las expresiones anteriores resulta

$$x = -10 + 40 \times \tfrac{25}{5}(1 - e^{-5/25t}) = -10 + 200(1 - e^{-t/5})$$

$$t = 0 \qquad x = -10$$

$$\frac{dx}{dt} = -200(-\tfrac{1}{5})e^{-t/5} = +40 \text{ para } t = 0$$

Obsérvese que cuando $t \to \infty$, $x \to 190$ y $v \to 0$.

Velocidad límite. Procedemos ahora al estudio de algunas ecuaciones más complicadas, tales como

$$m\frac{dv}{dt} = F - bv \tag{7.67}$$

en donde F es una constante.

La solución final en estado estacionario resulta ser

$$\frac{dv}{dt} = 0 \qquad F = bv \qquad v = \frac{F}{b}$$

Esta velocidad se denomina normalmente velocidad límite. Como solución ensayemos

$$v = \frac{F}{b}(1 - e^{-bt/m})$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}e^{-bt/m} = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{b}{F}v\right) = \frac{F}{m} - \frac{b}{m}v$$

que concuerda con la ecuación (7.67). De esta solución resulta que para $t = 0$, $v = 0$. Por tanto, si hay otras condiciones iniciales, deben satisfacer esta ecuación. Observemos que para $t \to \infty$, $v \to F/b$.

Supongamos que para $t = 0$, $v = v_0$. Ensayemos

$$v = \frac{F}{b}(1 - e^{-bt/m}) + v_0 e^{-bt/m} \qquad (7.68)$$

Derivando podemos comprobar que esta solución satisface la ecuación original.

Es interesante que la solución general (7.68) anterior es la suma de la solución de la ecuación (7.67) que hemos ensayado anteriormente, más la solución dada por la ecuación (7.66) para $m\,dv/dt = -bv$. Desde otro punto de vista consideremos la solución de $m\,dv/dt + bv = F$. Si encontramos una solución a esta ecuación, podemos añadirle una solución de $m\,dv/dt + bv = 0$ y seguirá siendo solución de la primera.

Fuerza del muelle. Vamos ahora a resolver la ecuación del movimiento de una fuerza *tipo-muelle*, dirigida siempre hacia el origen (o hacia algún punto convenientemente elegido como origen), que crece directamente con la distancia a dicho punto. Matemáticamente esto significa que $F = -Cx$; si x es positivo, la fuerza es negativa; si x es negativo, la fuerza es positiva. C es una constante positiva llamada *constante del muelle*. Nuestra ecuación es ahora

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Cx \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Cx}{m}$$

Como solución de ensayo, sea $x = \cos \omega t$. Derivando tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \operatorname{sen}\omega t \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$$

Comparando esto con la ecuación original, veremos que si $\omega^2 = C/m$, nuestra solución es válida. También es claro que la solución $x = \operatorname{sen} \omega t$ es válida. Pero, ¿dónde están nuestras constantes para las condiciones iniciales? Ensayemos

$$x = A' \operatorname{sen}\omega t + B' \cos \omega t$$

Esta es todavía una solución y observemos que para $t = 0$, $x = B'$. Por tanto, B' es el valor de x_0 que hemos usado antes. Derivando y haciendo $t = 0$ resulta $dx/dt = \omega A'$. Este es el valor de v_0 que hemos usado antes. Obsérvese que A' no es la velocidad inicial. Una forma alternativa de escribir esta solución es

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Para $t = 0$, $x = A \operatorname{sen} \phi$ y para $t = 0$, $dx/dt = A\omega \cos \phi$. Así las dos constantes A y ϕ han reemplazado a A' y B'. Con mayor frecuencia este segundo tipo de solución es de uso conveniente, aunque también es útil resolver problemas con el primer tipo. Unos ejemplos son convenientes. Supongamos que $C/m = 25$, de modo que $\omega = 5$.

1. La partícula parte del origen para $t = 0$ con una velocidad en dirección negativa de x de 10 cm/s. Suponiendo que $x = A \operatorname{sen}(5t + \phi)$, $x = A \operatorname{sen} \phi$ para $t = 0$. Por tanto, ϕ es cero o π, $dx/dt = +5A \cos \phi = -10$. Vemos, pues, que ϕ debe ser igual a π y A debe ser 2. Nuestra solución es

$$x = 2\operatorname{sen}(5t + \pi) = -2\operatorname{sen}5t$$

2. Para $t = 0$ la partícula está en $x = +5$ en reposo. Por tanto, $+5 = A \operatorname{sen} \phi$ y $dx/dt = \omega A \cos \phi = 0$. Es decir, $A = 5$ y $\phi = \pi/2$ y nuestra solución es

$$x = 5\operatorname{sen}\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos 5t$$

3. Para $t = 0$, $x = -5$ y la velocidad es -25. Esta vez $-5 = A \operatorname{sen} \phi$ y $-25 = +A\omega \cos \phi = +5A \cos \phi$. Dividiendo resulta $\operatorname{tg} \phi = +1$. Por tanto, $\phi = \pi/4$ ó $5\pi/4$. Pero $\cos 5\pi/4 = -1/\sqrt{2}$ mientras que $\cos \pi/4 = +1/\sqrt{2}$. Por tanto, $\phi = 5\pi/4$. Sustituyendo en la primera ecuación resulta $A = \sqrt{2} \times 5$. Alternativamente se puede elegir $A = -5\sqrt{2}$ y $\phi = \pi/4$:

$$x = 5\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(5t + \frac{5\pi}{4}\right) \qquad \text{o} \qquad -5\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Fuerza del muelle y fuerza resistente. Una ecuación más difícil surge en el caso de un oscilador armónico amortiguado. La fuerza vale ahora $-bv$ más la fuerza $-Cx$.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -bv - Cx, \quad \text{donde } v = \frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + Cx = 0$$

Ensayar una solución de la forma $x = A e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

$$b\frac{dx}{dt} = -\beta bAe^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega t + \phi) + b\omega Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2m\omega\beta Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$+ \beta^2 mAe^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega t + \phi) - m\omega^2 Ae^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Entonces

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + Cx$$
$$= Ae^{-\beta t}\,\text{sen}(\omega t + \phi)[C - \beta b - m\omega^2 + \beta^2 m]$$
$$+ Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi)[b\omega - 2m\omega\beta] = 0$$

La única forma en que esta ecuación puede satisfacerse para todos los valores de t es hacer que todos los coeficientes entre paréntesis sean iguales a cero

$$b\omega - 2m\omega\beta = 0$$
$$\beta = \frac{b}{2m}$$
$$C - \beta b - m\omega^2 + \beta^2 m = C - \frac{b^2}{2m} - m\omega^2 + \frac{b^2}{4m^2}m = 0$$
$$\omega^2 = \frac{C}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = \frac{C}{m} - \beta^2$$

Obsérvese que A y ϕ son las constantes arbitrarias y no están especificadas por la ecuación diferencial. Sin embargo, la frecuencia ω y la constante de amortiguamiento β están determinadas. Si $\omega_0 = C/m$, $\omega < \omega_0$; pero si β es pequeño, es decir, si el decrecimiento de la amplitud $A\,e^{-\beta t}$ es lento, $\omega \approx \omega_0$.

La forma de esta solución puede verse en la fig. 7.19 para la cual $\omega/\beta \approx 5$.

Hay que observar que si b es grande, ω puede ser cero o $C = b^2/4m$. ¿Cuál es la solución en este caso?

$A\,e^{-bt/2m}\,\text{sen}\,\phi = A'\,e^{-bt/2m}$ es una solución que puede comprobarse por ensayo. Pero también $Bt\,e^{-bt/2m}$ es una solución. Por tanto, la solución general es

$$x = A'e^{-bt/2m} + Bte^{-bt/2m} \qquad (7.69)$$

en donde A' y B son las constantes arbitrarias necesarias para cumplir las condiciones iniciales. Esta solución se llama *solución críticamente amortiguada.* x disminuye a cero más deprisa que si

$$C < \frac{b^2}{4m} \quad \text{o} \quad C > \frac{b^2}{4m}$$

Si $C < b^2/4m$, la solución es *supercrítica* y vale

$$x = e^{-bt/2m}\left[A\exp\left(\sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{C}{m}}\,t\right)\right.$$
$$\left. + B\exp -\left(\sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{C}{m}}\,t\right)\right] \qquad (7.70)$$

en donde A y B son las constantes necesarias para el cumplimiento de las condiciones iniciales.

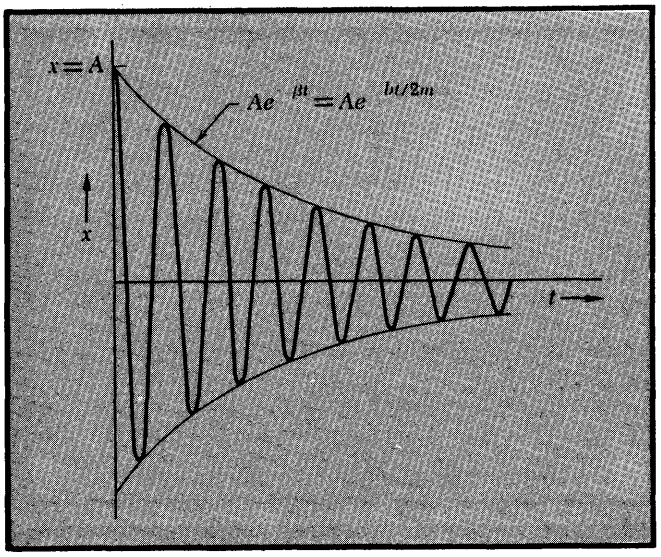


FIG. 7.19 Oscilador armónico amortiguado.

Los números complejos y el oscilador armónico forzado. Los alumnos familiarizados con los números complejos recordarán el teorema de Moivre, el cual establece

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$$

en donde $i = \sqrt{-1}$. Tal expresión $e^{i\alpha}$ se denomina *cantidad compleja.* $\cos\alpha$ es la *parte real* y $\text{sen}\,\alpha$ la *parte imaginaria.* Los números complejos pueden representarse gráficamente tomando la parte real como abscisa y la parte imaginaria como ordenada (fig. 7.20). La longitud de la línea OA es la *magnitud del complejo* o *número.* Su cuadrado se obtiene multiplicando el número por su complejo conjugado; este último se obtiene cambiando el signo de i allí donde aparece. La magnitud del complejo es, naturalmente, un número real y en este caso vale

$$e^{i\alpha} \times e^{-i\alpha} = e^0 = 1$$

Vemos que OA tiene la longitud unidad, pues $\cos\alpha = OB/OA = OB$.

La adición, sustracción y multiplicación de complejos siguen las reglas usuales. Por ejemplo

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$$
$$(a + ib) - (c + id) = a - c + i(b - d)$$
$$(a + ib) \times (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$$

ya que $i^2 = -1$

Para dividir necesitaremos manipular el cociente de tal modo que el denominador sea un número real y así las

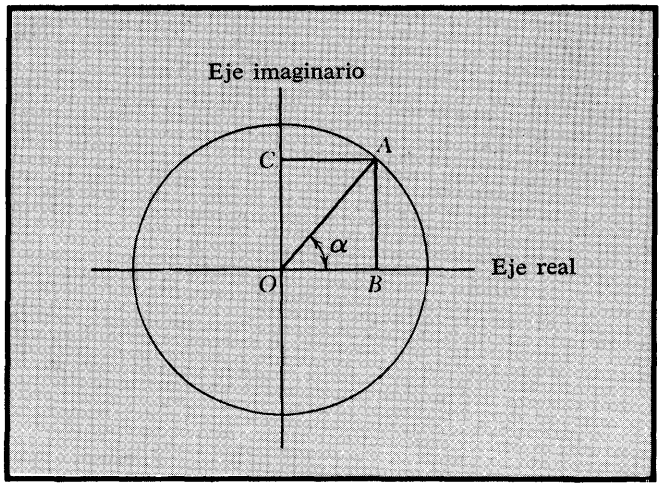


FIG. 7.20 Un número complejo puede representarse disponiendo la parte real *OB* a lo largo de un eje y la parte imaginaria *OC* según un eje perpendicular al anterior. En este caso *OA* representa $e^{i\alpha}$, $OB = \cos\alpha$, $OC = \operatorname{sen}\alpha$. *OA* es la magnitud de la cantidad compleja.

partes real e imaginaria del cociente serán fácilmente reconocibles:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)\times(c-id)}{(c+id)\times(c-id)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

Finalmente debe observarse que cualquier número complejo puede escribirse en la forma $\rho e^{i\phi}$. Para determinar ρ y ϕ en función de las partes real e imaginaria estableceremos que

$$\begin{gathered}\rho e^{i\phi} = \rho\cos\phi + i\rho\operatorname{sen}\phi = a + ib \\ \rho e^{i\phi}\times\rho e^{-i\phi} = \rho^2 = (a+ib)\times(a-ib) = a^2+b^2 \qquad (7.71) \\ \operatorname{tg}\phi = \frac{b}{a} \qquad \phi = \operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{a}\end{gathered}$$

Daremos ahora una solución muy clara del problema del oscilador armónico impulsado, utilizando el esquema sobre números complejos. La ecuación del movimiento [ecuaciones (7.48) y (7.49)] es (escribir $\cos\omega t$ por conveniencia en lugar de $\operatorname{sen}\omega t$),

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0{}^2 x = \alpha_0\cos\omega t \qquad (7.72)$$

Reemplacemos el término correspondiente a la fuerza por

$$\alpha_0 e^{i\omega t} \equiv \alpha_0(\cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t)$$

Al final de los cálculos tendremos que considerar que la respuesta es la parte real de x si la fuerza impulsora es $\alpha_0\cos\omega t$ (siendo α_0 real).

Busquemos para (7.72) una solución de la forma

$$x = X_0 e^{i\omega t} \qquad (7.73)$$

en donde X_0 puede ser un número complejo. Sustituyendo (7.73) en (7.72) tendremos

$$\left(-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} + \omega_0{}^2\right)X_0 e^{i\omega t} = \alpha_0 e^{i\omega t}$$

de donde,

$$X_0 = \frac{\alpha_0}{\omega_0{}^2 - \omega^2 + i(\omega/\tau)} \qquad (7.74)$$

Es de utilidad considerar separadamente las partes real e imaginaria de X_0. Tendremos

$$\begin{aligned}X_0 &= \left[\frac{\alpha_0}{\omega_0{}^2 - \omega^2 + i(\omega/\tau)}\right]\left[\frac{\omega_0{}^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}{\omega_0{}^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}\right] \\ &= \alpha_0\frac{\omega_0{}^2 - \omega^2 - i(\omega/\tau)}{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}\end{aligned}$$

de aquí que

$$Re\,(X_0) = \frac{(\omega_0{}^2 - \omega^2)\alpha_0}{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

$$\operatorname{Im}(X_0) = \frac{-(\omega/\tau)\alpha_0}{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

En el límite, cuando $|\omega_0{}^2 - \omega^2| \gg \omega/\tau$ se tendrá que

$$\operatorname{Re}(X_0) \approx \frac{\alpha_0}{\omega_0{}^2 - \omega^2} \qquad \operatorname{Im}(X_0) \approx 0$$

Esta condición se denomina *fuera de resonancia*, y aquí la parte real de X_0 es mucho más importante que la parte imaginaria.

En el límite $|\omega_0{}^2 - \omega^2| \ll \omega/\tau$ diremos que se está *cerca de la resonancia*, y para $\omega_0 = \omega$ se está *en resonancia* o en el centro de la resonancia. Para $\omega_0 = \omega$,

$$\operatorname{Re}(X_0) = 0$$

$$\operatorname{Im}(X_0) = \alpha_0\frac{\tau}{\omega}$$

Cuanto mayor sea τ, más débil será el amortiguamiento y mayor la parte imaginaria de la respuesta en la resonancia.

Si recordamos que *fuera de la resonancia* el ángulo de fase ϕ es próximo a 0 o a $-\pi$, comprenderemos por qué la amplitud tiene una parte imaginaria muy pequeña; mientras que cuando $\omega = \omega_0$, $\phi = -\pi/2$ y el desplazamiento está desfasado con la fuerza, la parte imaginaria de la amplitud, correlacionada con la amplitud de la velocidad, será grande y la parte real de la amplitud será nula.

Escribamos X_0 en forma $\rho e^{i\phi}$, como en la ecuación (7.71). Entonces a partir de (7.71) y (7.74) tendremos para la amplitud de la respuesta

$$\rho = (X_0 X_0{}^*)^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

X_0^* es el complejo conjugado de X_0, de modo que $X_0X_0^*$ es real. También tendremos para el ángulo de fase de x respecto a F,

$$\text{tg } \phi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La absorción media de potencia viene dada por

$$\begin{aligned}\langle P\rangle &= \langle F\dot{x}\rangle = \langle \text{Re}\,(F)\text{Re}\,(\dot{x})\rangle \\ &= \langle [M\alpha_0 \cos\omega t][-\rho\omega \,\text{sen}(\omega t + \phi)]\rangle \qquad (7.75)\end{aligned}$$

Hemos tomado la parte real de x para corresponder a la realidad física si la fuerza físicamente real es la parte real de F. Existen otras formulaciones válidas para la media respecto al tiempo; lo que adquiere importancia es considerar la parte de x que está en fase con F. Empleando la ecuación equivalente a (7.61) y la relación $\rho \,\text{sen}\,\phi = \text{Im}\,(X_0)$, tendremos a partir de la ecuación (7.75)

$$\begin{aligned}\langle P\rangle &= -M\alpha_0\rho\omega\,\langle\cos^2\omega t\rangle \,\text{sen}\phi = -\tfrac{1}{2}M\alpha_0\omega\text{Im}\,(X_0) \\ &= \tfrac{1}{2}M\alpha_0{}^2\frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2}\end{aligned}$$

Este resultado es idéntico al obtenido anteriormente en la ecuación (7.62).

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

PSSC, *Física*. Caps. 20 (sec. 8) y 24 (sec. 12). Editorial Reverté.

Y. Rocard, *General Dynamics of Vibrations*, Frederic Ungar Publishing Co., Nueva York, 1960. Un libro simple y claro escrito con un amplio alcance de aplicaciones.

B. L. Walsh, Parametric Amplification, *International Science and Technology*, núm. 17, pág. 75, mayo 1963. Una discusión elemental de los amplificadores paramétricos y su propiedad de bajo ruido.

Para ejemplo del tratamiento de oscilaciones armónicas, libres, amortiguadas y forzadas, en un libro de texto familiar, a nivel intermedio, véase John L. Synge y Byron A. Griffith, *Principles of Mechanics*, sec. 6.3, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959.

Contenido

LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO
MOMENTO CINÉTICO Y ENERGÍA CINÉTICA
MOMENTOS DE INERCIA
Teorema de los ejes paralelos
Teorema de los ejes perpendiculares
Algunos casos especiales
ROTACIONES ALREDEDOR DE EJES FIJOS:
DEPENDENCIA DEL MOVIMIENTO CON EL TIEMPO
Ejemplo. Aceleración angular de un cilindro sólido sometido a un momento
Giro sin deslizamiento
Rotación alrededor del punto instantáneo de contacto
Aceleración del centro de masas y aceleración angular alrededor del centro de masas
Momentos alrededor del centro de masas
Ejemplo. Cilindro sobre un plano rugoso acelerado
Péndulo compuesto
ROTACIÓN ALREDEDOR DE EJES FIJOS:
COMPORTAMIENTO DEL VECTOR MOMENTO CINÉTICO
MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA: EJES PRINCIPALES Y ECUACIONES DE EULER
Algunas aplicaciones simples de las ecuaciones de Euler
Problemas
Lecturas suplementarias



Dinámica elemental de los cuerpos rígidos

La dinámica de los cuerpos sólidos rígidos es un tema complicado y fascinante, que quizás constituya la cima de la mecánica clásica y su parte más difícil. El prototipo de problemas de este tema es el del giróscopo o peonza cuya conducta sutil e intrigante ha desafiado siempre su comprensión. El desarrollo completo de la descripción del movimiento de los cuerpos rígidos alcanza algunos aspectos sorprendentes de simplicidad y belleza, si bien pueden no ser aparentes al nivel introductivo aquí requerido. Gran parte de la teoría del giróscopo ha sido cubierta en el tratado de cuatro volúmenes, *Theorie des Kreisels*, de F. Klein y A. Sommerfeld.

Por *cuerpo rígido* entendemos un conjunto de partículas con distancias fijas entre ellas; excluiremos la consideración de vibraciones o deformaciones que afecten al movimiento. Nos concentraremos especialmente en el movimiento de rotación alrededor de un eje que puede ser fijo o variable con el tiempo. Su análisis tiene aplicaciones que abarcan desde el *spin* del electrón y el giro de átomos y moléculas hasta la maquinaria de rotación, giróscopos, planetas y guías de inercia.

Existe una división fundamental en el tema según que el eje de rotación se mantenga en una dirección fija en el espacio inercial o cambie su dirección con el tiempo. El tratamiento con eje fijo es notablemente más simple que el caso más general y muchos sistemas importantes son de este tipo. En consecuencia, un tratamiento reducido de la dinámica de los cuerpos rígidos a este nivel viene a veces limitado al caso de ejes con dirección fija. Sin embargo, comenzaremos nuestro estudio con el caso general; a continuación veremos varios casos especiales importantes con indicación clara de las condiciones especiales o propiedades del cuerpo y su movimiento en cada caso.

LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

Hemos ya deducido (Cap. 6) de la segunda ley de Newton la relación

$$\boxed{\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N}} \tag{8.1}$$

para el movimiento de un sistema de partículas en un sistema de referencia inercial, en donde $\mathbf{J}$ es el vector momento cinético referido a un punto origen determinado y $\mathbf{N}$ el momento de la fuerza vector, evaluado en el punto origen, debido a todas las fuerzas externas

efectivas que actúan sobre las partículas del sistema. Las fuerzas internas del sistema no producen un momento resultante, como vimos en el Cap. 6.

La Ec. (8.1) contiene esencialmente todo lo que necesitamos saber respecto al movimiento: es la *ecuación del movimiento.* Nuestro problema es su aplicación correcta a los objetos y situaciones de interés. Con este objeto debemos saber expresar **J** para un cuerpo rígido. También necesitaremos conocer la expresión de la energía cinética asociada a su movimiento.

MOMENTO CINÉTICO Y ENERGÍA CINÉTICA

Consideremos un cuerpo rígido moviéndose de tal forma que uno de sus puntos permanece constantemente en un punto fijo del espacio. El movimiento en cualquier instante debe entonces ser una rotación alrededor de un eje que pase por dicho punto. Elegiremos el punto fijo, en la fig. 8.1 el punto O, como origen de nuestro sistema de referencia y describiremos el movimiento mediante un vector velocidad angular ω a lo largo del eje instantáneo de rotación. De acuerdo con las normas habituales el vector ω apunta en el sentido de avance que un tornillo tendría si girase con el cuerpo y la longitud ω es numéricamente igual a su magnitud en rad/s en las unidades elegidas.

El vector velocidad instantánea $\mathbf{v}$ de un punto P en la posición $\mathbf{r}$ del cuerpo será

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{8.2}$$

como fácilmente se reconoce en la fig. 8.1 y su leyenda. Si P es la localización de una partícula constituyente del sólido de masa m, contribuirá con el momento cinético $\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m(\omega \times \mathbf{r})$ al momento cinético total del cuerpo.

Expresaremos ahora el momento cinético total como el vector suma de tales magnitudes contribuidas por todas las partículas o elementos de masa que componen el cuerpo:

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \tag{8.3}$$

en donde $\mathbf{r}_i$ es el vector posición para el elemento m_i, y la suma se extiende a todos estos elementos.

La energía cinética total del cuerpo rotatorio en el instante representado se obtiene sumando las contribuciones $\frac{1}{2}mv^2$ para todos los elementos de masa. Recordemos que $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, de modo que

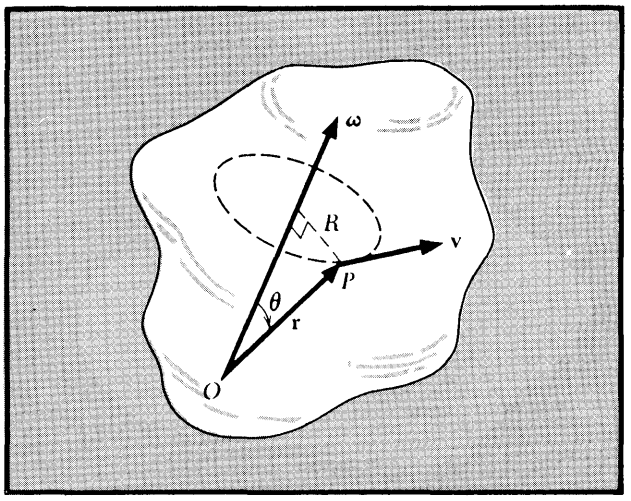


FIG. 8.1 En el momento representado, la rotación del cuerpo hace que P se mueva en un círculo de radio $R = r \operatorname{sen} \theta$, en un plano perpendicular a ω. La magnitud de $\mathbf{v}$ es $v = \omega R = \omega r \operatorname{sen} \theta$ y su dirección es normal al plano definido por ω y $\mathbf{r}$. Así $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$.

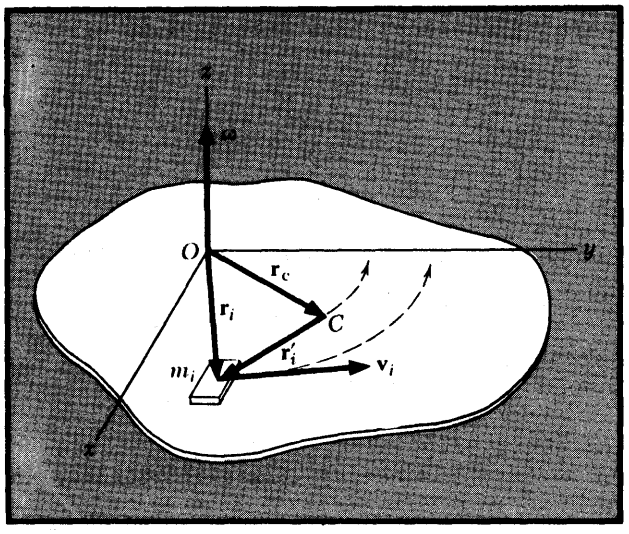


FIG. 8.2 La lámina gira en su propio plano (*xy*) alrededor de *O*. Cada punto describe un círculo alrededor de *O* con velocidad $v_i = \omega r_i$. *C* es el centro de masas.

$$Ec = \sum \tfrac{1}{2} m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \tfrac{1}{2} \sum m_i |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|^2 \quad (8.4)$$

Las formulaciones generales anteriores de la ecuación del movimiento, del momento cinético y de la energía cinética se aplicarán ahora a ciertos casos de importancia en la rotación del cuerpo rígido.

MOMENTOS DE INERCIA

Consideremos la delgada lámina ilustrada en la figura 8.2 o una distribución plana de materia situada en el plano *xy* capaz de girar alrededor del eje *z* con velocidad angular ω. Este vector ω es constante en dirección. El elemento de masa m_i se mueve con velocidad $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ y en este caso su velocidad es simplemente $v_i = \omega r_i$, ya que ω y $\mathbf{r}_i$ son perpendiculares. La energía cinética de la lámina es entonces

$$Ec = \tfrac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \tfrac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (8.5)$$

en donde hemos definido la magnitud I_z, llamada *momento de inercia* para la lámina respecto al eje *z*.

$$\boxed{I_z = \sum m_i r_i^2} \quad (8.6)$$

Teorema de los ejes paralelos. Un avance importante se obtiene introduciendo el centro de masas en la representación, como indica la fig. 8.2. Sustituyendo

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$$

se obtiene para I_z

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_i r_i^2 \\ &= \sum m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i \\ &= \sum m_i (\mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i) \cdot (\mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i) \\ &= \sum m_i (r_c^2 + 2\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}'_i + r_i'^2) \end{aligned}$$

Como $\Sigma m_i = M$, masa total de la lámina, resulta,

$$I_z = M r_c^2 + 2\mathbf{r}_c \cdot \sum m_i \mathbf{r}'_i + \sum m_i r_i'^2$$

Obsérvese ahora que el término central es igual a cero, ya que $\mathbf{r}'_i$ es el vector posición de m_i respecto al centro de masas y la suma $\Sigma m_i \mathbf{r}'_i = 0$. Además, el último término es simplemente el momento de inercia respecto a un eje normal que pasa por el centro de masas en *C*. Por tanto, se obtiene

$$I_z = I_{cz} + M r_c^2 \quad (8.7)$$

Este resultado, Ec. (8.7), es el *teorema de los ejes paralelos* deducido aquí para el sistema particular de una distribución plana de materia con ejes normales. Puede demostrarse como teorema general para cualquier distribución. Dice lo siguiente:

> El momento de inercia respecto a cualquier eje es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de masas, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia que separa los dos ejes. Así

$$\boxed{I = I_c + Ml^2} \tag{8.8}$$

en donde l es la separación de los ejes.

Este es un resultado extraordinariamente útil, como veremos.

Teniendo en cuenta (8.7), la expresión (8.5) se convierte en

$$\boxed{Ec = \tfrac{1}{2}I_{cz}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mr_c^2\omega^2} \tag{8.9}$$

la cual puede interpretarse inmediatamente estableciendo que la energía cinética total de la lámina rotatoria está compuesta por la energía debida a la rotación alrededor de su centro de masas (primer término), más la energía debida al movimiento de traslación del centro de masas alrededor del eje de rotación (segundo término). Este resultado es también completamente general, aunque se ha demostrado sólo para el caso de una lámina que gira en su propio plano.

El momento cinético para nuestra lámina rotatoria se obtiene de la Ec. (8.3) aplicada a este caso en que $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_i$ son perpendiculares. El resultado se encuentra fácilmente

$$\mathbf{J} = \sum m_i r_i^2 \omega \hat{\mathbf{z}} = I_z \omega \hat{\mathbf{z}} \tag{8.10}$$

en donde entra de nuevo el momento de inercia. Si como antes introducimos el centro de masas escribiendo $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$, la Ec. (8.10) se convierte en

$$\boxed{\mathbf{J} = \sum m_i r_i'^2 \omega \hat{\mathbf{z}} + Mr_c^2 \omega \hat{\mathbf{z}} = I_{cz}\omega \hat{\mathbf{z}} + Mr_c^2 \omega \hat{\mathbf{z}}} \tag{8.11}$$

De nuevo tenemos un teorema demostrado para un caso especial y que puede probarse en general:

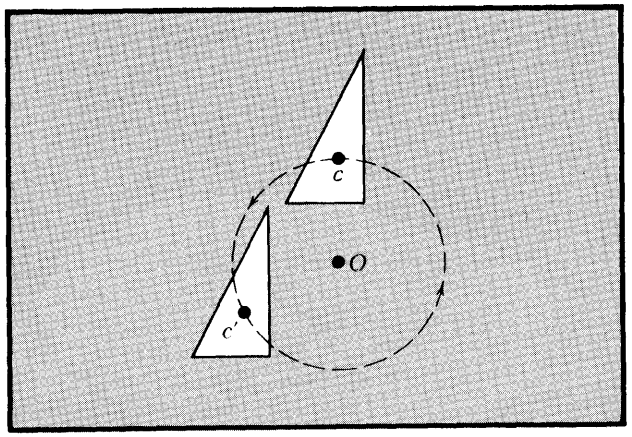
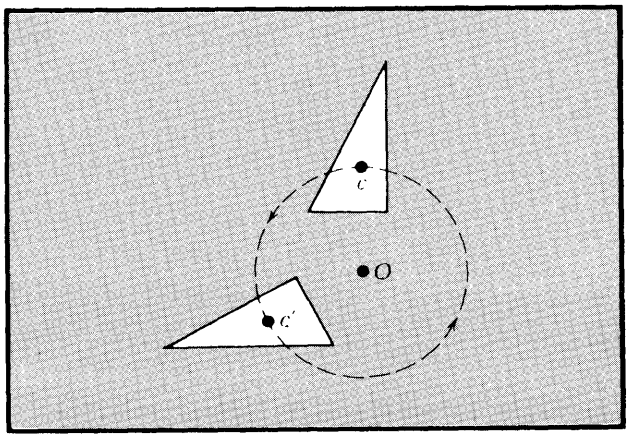


FIG. 8.3 *a*) El centro de masas de una lámina triangular se traslada, según un círculo, alrededor de *O*, pero no hay rotación. Sólo está presente el segundo término de las Ecs. (8.9) y (8.11).



b) Ambos términos de las Ecs. (8.9) y (8.11) contribuyen.

El momento cinético alrededor de cualquier punto es igual al momento cinético respecto al centro de masas más el momento cinético debido a la traslación del centro de masas respecto a dicho punto.

La fig. 8.3 ilustra la diferencia de los dos términos presentes en los teoremas.

Estos teoremas que se han establecido para una lámina o distribución plana de materia se aplican también a un sistema formado por apilamiento de elementos en láminas delgadas para formar un cuerpo rígido prismático o cilíndrico restringido a girar alrededor de un eje fijo perpendicular a los elementos siempre que interpretemos r_i como la distancia media desde el eje de rotación. Cierto número de ejemplos se exponen a continuación para ilustrar estas materias.

Teorema de los ejes perpendiculares. Antes de resolver algunos ejemplos conviene que demostremos un teorema útil relacionado con los momentos de inercia de objetos delgados en forma de láminas. Nos referiremos a la fig. 8.2, que ilustra la lámina rotatoria, y su elemento de masa representativo m_i. La contribución de m_i al momento de inercia I_z respecto al eje z es $m_i r_i^2$, es decir, la masa de la partícula multiplicada por el cuadrado de su distancia al eje de rotación. Si consideramos la rotación alrededor del eje x, el elemento de masa m_i contribuirá con el término $m_i y_i^2$ al momento de inercia respecto al eje x; de igual modo, resultaría $m_i x_i^2$ respecto al eje y. Así,

$$I_x = \sum m_i y_i^2$$
$$I_y = \sum m_i x_i^2$$

Sumando se obtiene

$$I_x + I_y = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i r_i^2 = I_z$$

Este es el teorema de los *ejes perpendiculares*, válido para cuerpos rígidos, delgados y planos, el cual dice

El momento de inercia de una lámina rígida y plana respecto a un eje normal a su plano es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares situados en el plano que se cortan en el eje normal.

Algunos casos especiales

Anillo delgado. Un anillo de masa M, radio R y anchura radial despreciable posee todos sus elementos de

masa a la misma distancia R de un eje normal que pasa por el centro. El momento de inercia alrededor de este eje es $I = MR^2$. Evidentemente el mismo resultado se aplica a un cilindro circular de paredes delgadas que gira alrededor de su eje geométrico. Para un eje paralelo, localizado en la pared del cilindro, $I = 2MR^2$, como puede deducirse inmediatamente del teorema de los ejes paralelos.

El teorema de los ejes perpendiculares aplicado a un anillo plano y estrecho nos dice que el momento de inercia alrededor de un eje situado en el plano del anillo que pasa por su centro es $\frac{1}{2}MR^2$.

Barra delgada uniforme. En la fig. 8.4 representamos una barra de longitud L y masa M, de anchura y espesor muy pequeño comparado con L, de modo que la barra puede considerarse como una línea dotada de peso y densidad uniforme. Consideremos un eje de rotación perpendicular a la barra en un extremo. Un elemento de longitud Δx poseerá la masa $\Delta M = (\Delta x/L)M$ y si está localizado a la distancia x del eje contribuirá al momento de inercia en la proporción $\Delta I = (\Delta x/L)Mx^2$. Considerando que Δx es un elemento diferencial dx, podemos sumar las contribuciones de todos los elementos por integración. Así resulta

$$I = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\,dx = \tfrac{1}{3}ML^2$$

para el momento de inercia de una barra uniforme alrededor de un eje perpendicular de rotación en su extremo.

Aplicando el teorema de los ejes paralelos se obtiene el momento de inercia para un eje que pasa por el centro perpendicular a la barra. Así resulta

$$I_c = I - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{12}ML^2 \qquad (8.12)$$

Disco circular. Como se ilustra en la fig. 8.5 un elemento en forma de anillo de anchura Δr y de radio r poseerá una masa

$$\Delta M = \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\pi R^2}M \approx \frac{2r\,\Delta r}{R^2}M$$

donde en la aproximación final hemos despreciado el pequeño término que incluye $(\Delta r)^2$. La contribución de este elemento al momento de inercia del disco respecto a un eje normal que pasa por el centro es

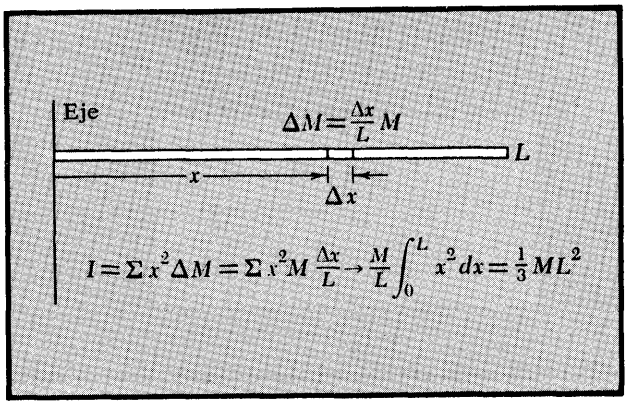


FIG. 8.4 Barra delgada. Eje en un extremo.

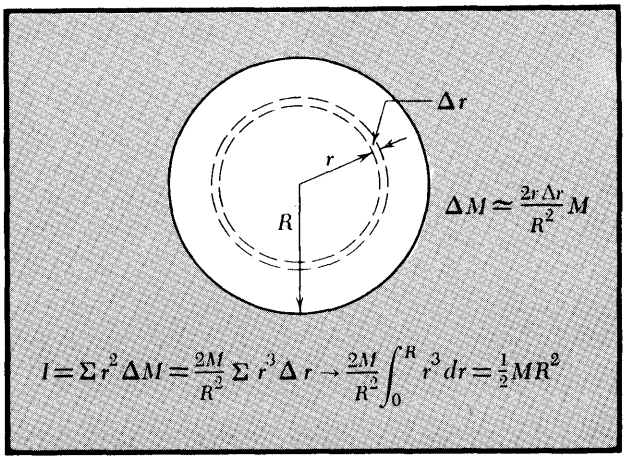


FIG. 8.5 Disco. Eje normal al plano del disco que pasa por el centro.

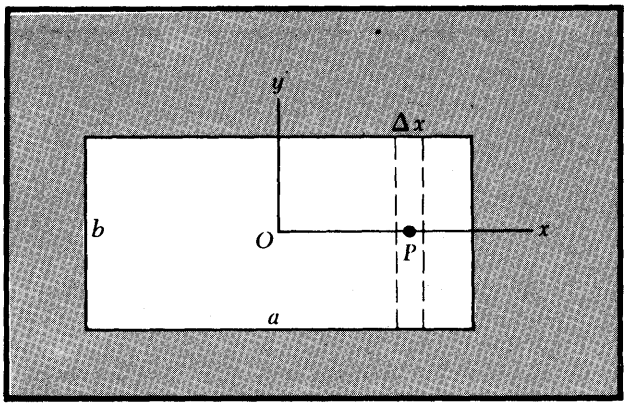


FIG. 8.6 Placa rectangular. Eje normal en el centro.

$$\Delta I = r^2\,\Delta M \approx \frac{2M}{R^2} r^3\,\Delta r$$

Realizando la integración que suma todas las contribuciones de los elementos que forman el anillo se obtiene

$$I = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3\,dr = \tfrac{1}{2}MR^2 \qquad (8.13)$$

Como un cilindro sólido de densidad uniforme puede considerarse como una pila de discos, es evidente que el momento de inercia de un cilindro sólido circular alrededor de su eje es $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Volviendo de nuevo al disco delgado, reconocemos por el teorema de los ejes perpendiculares que el momento de inercia alrededor de un eje diametral en su plano es

$$I = \tfrac{1}{4}MR^2 \qquad (8.14)$$

Placa rectangular. En la fig. 8.6 representamos una placa de longitud a y anchura b y deseamos calcular el momento de inercia respecto al eje z normal a la placa que pasa por su centro de masas. Consideremos la placa descompuesta en bandas estrechas, de las cuales se representa una de anchura Δx localizada a la distancia x del centro; para obtener el momento total de inercia respecto a O, sumemos las contribuciones de todas las bandas tratando cada una de ellas como si fuera una barra delgada.

La banda dibujada tendrá una masa $(\Delta x/a)M$ y un momento de inercia respecto a un eje normal que pase por su propio centro P igual a $1/12\ (\Delta x/a)Mb^2$, como se demostró en el caso 2, Ec. (8.12). La contribución de esta banda al momento de inercia respecto al eje normal que pasa por O se obtiene entonces a partir del teorema de los ejes paralelos, Ec. (8.8),

$$\Delta I = \frac{\Delta x}{a} M\left(\frac{b^2}{12} + x^2\right)$$

Sumando todas las contribuciones se obtiene por integración

$$I = \frac{M}{a}\int_{-a/2}^{+a/2}\left(\frac{b^2}{12} + x^2\right)dx = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \qquad (8.15)$$

Como este cálculo viene relacionado con la rotación alrededor del eje z, podemos llamarle I_z. Los valores I_x e I_y serán, por tanto [utilizando de nuevo la Ec. (8.12)],

$$I_x = \frac{M}{12}b^2 \qquad \text{y} \qquad I_y = \frac{M}{12}a^2$$

El teorema de los ejes perpendiculares $I_z = I_x + I_y$ se cumple evidentemente.

Estos casos ilustran la forma de calcular momentos de inercia. En los problemas al final del capítulo pueden verse otros ejemplos; entre ellos está el caso importante de una esfera uniforme sólida respecto a un eje que pasa por su centro. El resultado es

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2 \tag{8.16}$$

Muchos objetos pueden tratarse por superposición, es decir, sumando o restando los momentos de inercia de formas simples. Por ejemplo, el valor de un cilindro hueco de paredes gruesas se obtiene restando los momentos de inercia de dos cilindros sólidos de radios aproximados.

ROTACIONES ALREDEDOR DE EJES FIJOS: DEPENDENCIA DEL MOVIMIENTO CON EL TIEMPO

Ahora estamos en condiciones de aplicar la Ec. (8.1) o ecuación del movimiento $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}$ a los problemas que tratan de cuerpos rígidos girando sobre ejes fijos con el fin de conocer la dependencia con el tiempo de la rotación en respuesta a determinados momentos de fuerza.

Como la dirección del eje de rotación queda fija en el espacio y fija con relación al cuerpo, las propiedades inerciales de éste serán constantes en relación con el eje. Al deducir el movimiento nos referiremos sólo a la componente del momento cinético respecto a este eje. Igualmente sólo se necesita considerar aquella componente del momento aplicado **N**. En consecuencia, la ecuación del movimiento puede tratarse simplemente como una ecuación escalar $dJ_a/dt = N_a$, en donde J_a y N_a se refieren a las componentes de **J** y **N** paralelas al eje. En muchos problemas importantes sólo existe esta componente, siendo los propios vectores paralelos al eje, pero esto no es siempre el caso, como veremos más adelante.

La formulación general de la ecuación escalar del movimiento en componentes axiales se obtiene fácilmente proyectando simplemente la ecuación vectorial general en la dirección axial. La dirección axial se denota por el vector unitario $\boldsymbol{\omega}/\omega$. La componente axial del momento cinético viene dada por [con referencia a la ecuación (8.3)]

$$J_a = \mathbf{J} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left[\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)\right] \cdot \boldsymbol{\omega}$$

La última expresión puede simplificarse del modo siguiente

$$\frac{1}{\omega}\sum_i \left[m_i\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)\right] \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\omega}\sum_i m_i|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|^2$$
$$= \frac{1}{\omega}\sum_i m_i(\omega_i r_i \operatorname{sen}\theta_i)^2$$

en donde en el primer paso hemos utilizado la Ec. (2.56) y el hecho de que

$$r_i^2\omega^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})^2 = r_i^2\omega^2 - r_i^2\omega^2 \cos^2\theta_i$$

Así

$$J_a = \sum_i m_i R_i^2 \omega$$

en donde, como en la fig. 8.1, $R_i = r_i \operatorname{sen}\theta_i$ es la distancia de la partícula i al eje de rotación.

Pero, como en el caso de la Ec. (8.5), introducimos el momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación

$$I_a = \sum_i m_i R_i^2$$

Así la expresión para J_a se ha reducido simplemente a

$$J_a = I_a\omega \tag{8.17}$$

De igual modo, la componente axial del momento se obtiene de

$$N_a = \mathbf{N} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$$

Así, la ecuación del movimiento en función de las componentes axiales se convierte en

$$\boxed{I_a\frac{d\omega}{dt} = N_a} \tag{8.18}$$

En aquellas circunstancias en que no hay ambigüedad se omiten los subíndices.

Según estas consideraciones resulta que la energía cinética de rotación alrededor de un eje fijo es

$$\boxed{Ec_a = \tfrac{1}{2}I_a\omega^2} \tag{8.19}$$

Las Ecs. (8.17) y (8.19) corresponden, respectivamente, a las Ecs. (8.10) y (8.5) de la lámina en rotación alrededor

del eje z, pero se aplican a un cuerpo de cualquier forma que gira alrededor de un eje fijo.

EJEMPLO

Aceleración angular de un cilindro sólido sujeto a un momento. Un ejemplo típico simple es el correspondiente a un cilindro sólido, capaz de girar libremente alrededor de un eje fijo que coincide con su eje geométrico, sujeto a un momento aplicado. Este caso viene representado en la fig. 8.7, en donde el eje de rotación es horizontal y el momento viene proporcionado por una masa que cuelga de una cuerda arrollada alrededor del cilindro.

El momento de inercia del cilindro es, según la Ec. (8.13), $I = \frac{1}{2}MR^2$. Su momento cinético en el instante en que su velocidad angular es ω será $J = I\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega$. El momento se debe a la tensión T en la cuerda y, por tanto, $N = TR = (mg - ma)R$, en donde a es la aceleración en el movimiento descendente de la masa m. La ecuación del movimiento, según la Ec. (8.18) será

$$\frac{MR^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = m(g - a)R \qquad (8.20)$$

La geometría del sistema requiere que

$$R\omega = v \qquad R\frac{d\omega}{dt} = a$$

y esto, junto con la Ec. (8.20) nos da, para la aceleración angular del cilindro,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{M/2 + m}\frac{g}{R}$$

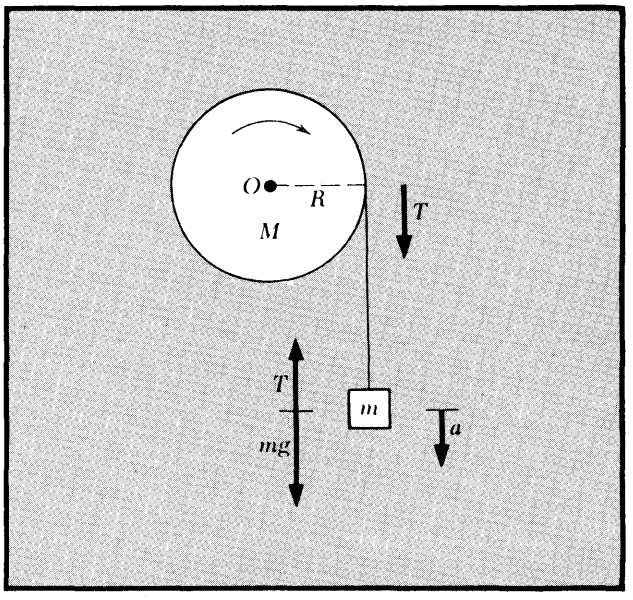


FIG. 8.7 El cilindro gira libremente alrededor del eje horizontal en *O*. Está sometido al momento *TR* proporcionado por la tensión de la cuerda que soporta la masa *m*.

Giro sin deslizamiento. Consideremos ahora, como indica la fig 8.8, el giro hacia abajo por un plano inclinado de un objeto de periferia circular y una distribución simétrica de masa alrededor de su centro. (Puede tratarse de un cilindro sólido, un cilindro hueco, una esfera, etc.) Determinaremos la aceleración de traslación de su movimiento de descenso por el plano de tres formas distintas, ilustrando así la consistencia de estos diferentes puntos de vista al tratar el problema.

Rotación alrededor del punto instantáneo de contacto. En cualquier instante el movimiento consiste en una rotación alrededor de P, punto de contacto con la superficie inclinada. La *dirección* del eje de rotación es constante, aunque su posición avanza a lo largo del plano. La aceleración en el movimiento del cuerpo que rueda se calcula teniendo en cuenta que *instantáneamente* el movimiento es simplemente una rotación alrededor de un punto en la periferia del objeto. El momento de la fuerza respecto de P debe ser igual a la variación respecto al tiempo del momento cinético alrededor de P (véase figura 8.8).

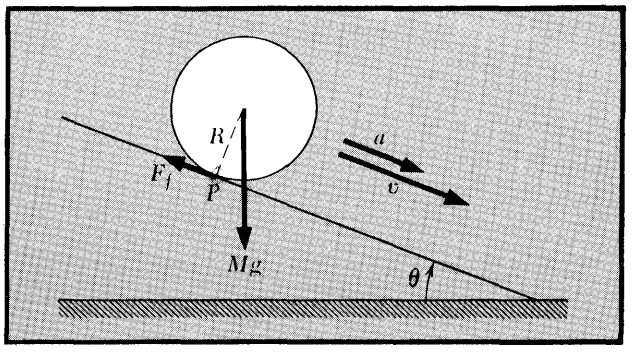


FIG. 8.8 El carácter del movimiento de un cuerpo rodando es, en cualquier instante, la rotación alrededor del punto *instantáneo* de contacto *P*.

Si I representa el momento de inercia del objeto respecto a un eje que pasa por su centro paralelo al eje de rotación en P, podemos evaluar el momento de inercia requerido respecto a P usando el teorema de los ejes paralelos [Ec. (8.7)]

$$I_p = I + MR^2$$

La velocidad angular de la rotación instantánea alrededor de P es $\omega = v/r$, en donde v es la velocidad momentánea de traslación del centro. Así, el momento cinético respecto a P en cualquier instante es

$$J_P = (I + MR^2)\frac{v}{R} \tag{8.21}$$

El momento de la fuerza en P viene proporcionado por la fuerza gravitatoria efectiva que actúa sobre el centro de masas. Así,

$$N_P = MgR\,\text{sen}\theta \tag{8.22}$$

Teniendo en cuenta (8.21) y (8.22), la ecuación del movimiento $N = dJ/dt$ se convierte en

$$MgR\,\text{sen}\,\theta = (I + MR^2)\frac{a}{R}$$

en donde hemos escrito a en lugar de dv/dt.

La aceleración de traslación al rodar por el plano es, pues,

$$a = \frac{1}{1 + I/MR^2}g\ \text{sen}\ \theta \tag{8.23}$$

Para un cilindro sólido $I = \frac{1}{2}MR^2$; de modo que $a = 2/3$ g sen θ. Para una esfera sólida, $I = 2/5\ MR^2$ y, por tanto, $a = 5/7$ g sen θ, y así podríamos citar otros objetos simétricos. Se dan otros casos, como el problema 6.

Consideraciones energéticas. Como un segundo método de determinar la aceleración de traslación utilizaremos el principio de conservación de la energía. La energía total en cualquier instante consta de tres contribuciones:

1. Ec de traslación del centro de masas $= \frac{1}{2}Mv^2$
2. Ec de rotación alrededor del centro de masas $= \frac{1}{2}Iw^2 = \frac{1}{2}Iv^2/R^2$
3. Ep debida a la elevación del centro de masas $= Mgh$

en donde h es la altura por encima de cierto nivel, en el que se considera nula la Ep.

Con muy buena aproximación la energía total se conserva. El rozamiento en el punto de contacto produce rodadura en lugar de deslizamiento, pero esta fuerza de rozamiento no produce trabajo y no altera la conservación de la energía total:

$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v^2 + Mgh$$

Como E es constante, podemos hacer su derivada respecto al tiempo igual a cero:

$$\frac{dE}{dt} = \left(M + \frac{I}{R^2}\right)v\frac{dv}{dt} + Mg\frac{dh}{dt} = 0$$

Pero $dh/dt = -v \operatorname{sen}\theta$ y $dv/dt = a$; por lo tanto,

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)va - Mgv \operatorname{sen}\theta = 0$$

Dividiendo por el factor común v y despejando a se obtiene

$$a = \frac{1}{1 + I/MR^2}\, g \operatorname{sen}\theta$$

de acuerdo con la Ec. (8.23).

Aceleración del centro de masas y aceleración angular alrededor del centro de masas. Como tercer método consideremos la aceleración del centro de masas y la aceleración angular alrededor del mismo.

$$Ma_c = \sum F$$
$$I\frac{d\omega}{dt} = \sum N_c$$

en donde a_c es la aceleración del centro de masas y ΣF incluye todas las fuerzas externas. La segunda ecuación supone que la dirección del eje de rotación es fija de modo que $d\mathbf{J}/dt = I\, d\boldsymbol{\omega}/dt$, siendo $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular alrededor del centro de masas.

Con referencia a la fig. 8.8 vemos que hay dos fuerzas paralelas al plano: $Mg \operatorname{sen}\theta$ según el plano hacia abajo y F_{roz} la fuerza de rozamiento según el plano hacia arriba. Por tanto,

$$Ma_c = M\frac{dv}{dt} = Mg \operatorname{sen}\theta - F_{roz}$$

Tomando ahora momentos alrededor del centro de masas, vemos que sólo F_{roz} contribuye con un momento, de modo que

$$N_c = F_{roz}R = I\frac{d\omega}{dt}$$

Como estamos considerando el giro sin deslizamiento

$$\omega R = v \qquad \text{o} \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{1}{R}$$

y así, combinando las tres ecuaciones anteriores, resulta que

$$M\frac{dv}{dt} = Mg \operatorname{sen}\theta - \frac{I}{R^2}\frac{dv}{dt}$$

y

$$\frac{dv}{dt} = a_c = \frac{Mg \operatorname{sen}\theta}{M + I/R^2} = \frac{1}{1 + I/MR^2}\, g \operatorname{sen}\theta$$

que coincide de nuevo con la Ec. (8.23), ya que a_c es igual a la a utilizada aquí.

Este análisis muestra claramente cuál es la fuerza que «frena» la aceleración. Puede utilizarse junto con la definición del coeficiente de rozamiento para determinar el ángulo requerido para un coeficiente determinado y un momento de inercia I que obligue al cuerpo a deslizar y rodar en lugar de rodar sin deslizamiento. (Véase Prob. 19 al final del capítulo.)

Momentos alrededor del centro de masas. En nuestras discusiones generales previas no hemos analizado qué punto debe usarse para calcular el momento cinético y tomar momentos a su alrededor. En el ejemplo anterior de un objeto que rueda tratamos ciertamente el problema a partir de puntos distintos de vista utilizando dos centros de rotación distintos. Sin embargo, se necesita alguna precaución al elegir el centro de rotación que ha de emplearse en la evaluación de los momentos y en el cálculo del movimiento. Ciertamente podemos utilizar un punto fijo en el espacio inercial. En el Cap. 6 deducíamos también

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{c.m.}}$$

$$\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{J}_{\text{c.m.}}}{dt} = \sum \mathbf{N}$$

en donde los momentos se tomaron alrededor del centro de masas. Estos dos puntos, el punto fijo y el centro de masas, pueden usarse *siempre*. Los demás, particularmente los puntos acelerados, pueden usarse sólo con gran cuidado y, a veces, debe introducirse una «fuerza ficticia». El ejemplo siguiente ilustra esto, lo mismo que el Prob. 18.

EJEMPLO

Cilindro sobre un plano rugoso acelerado. La fig. 8.9 muestra un cilindro que descansa sobre un plano horizontal rugoso que es impulsado con una aceleración a perpendicular al eje del cilindro. ¿Cuál será el movimiento del cilindro suponiendo que no deslice?

La única fuerza horizontal sobre el cilindro es el rozamiento en P. Por tanto, consideremos los momentos alrededor de P. Las fuerzas de gravedad y de reacción en la superficie pasan por **el punto P, lo mismo que la fuerza de rozamiento, de modo que el** momento neto alrededor de P es igual a cero. Por tanto, podemos decir

$$\frac{dJ_p}{dt} = 0 \qquad I_p\omega = \text{const} = (MR^2 + I_c)\omega$$

Evidentemente esto es falso: el movimiento ciertamente no se verifica con ω constante. Así, tomemos el centro de masas, **punto O, para evaluar los momentos y el momento cinético:**

$$M\frac{dv_c}{dt} = F_{roz}$$

$$F_{roz}\,R = I_c\frac{d\omega}{dt} = \tfrac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt}$$

Como la rotación se verifica sin deslizamiento, la aceleración del punto de contacto es

$$\frac{dv_c}{dt} + R\frac{d\omega}{dt} = a$$

de modo que a partir de

$$M\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{2}MR\frac{d\omega}{dt}$$

obtenemos

$$\frac{3}{2}R\frac{d\omega}{dt} = a$$

resultando

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{a}{3} \qquad \text{y} \qquad F_{roz} = M\frac{a}{3}$$

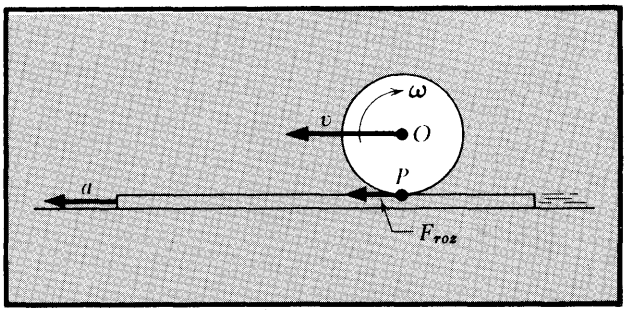


FIG. 8.9 El cilindro se acelera cuando la superficie rugosa sobre la que descansa, se acelera.

Péndulo compuesto. El péndulo simple que hemos tratado en el Cap. 7 está formado por una masa puntual suspendida de una cuerda sin peso, que oscila en un plano. El péndulo compuesto es un cuerpo rígido que posee una distribución de masa libre de girar y oscilar alrededor de un eje horizontal fijo dispuesto rígidamente respecto al cuerpo, pero que no pasa por su centro de masas. Este péndulo se muestra en la fig. 8.10, en un instante de su movimiento cuando un plano de referencia definido por el eje que pasa por P y por el centro de masas C forma un ángulo θ con la vertical y oscila con un valor positivo de $d\theta/dt$.

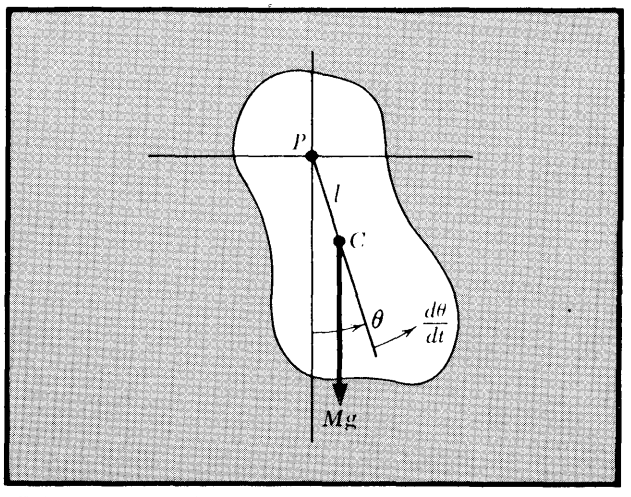


FIG. 8.10 Péndulo compuesto; C es el centro de masas; el eje de rotación es horizontal y pasa por P.

Como su movimiento está restringido a la rotación oscilatoria alrededor del eje fijo, podemos estudiar la dependencia con el tiempo de θ, considerando la componente del momento cinético paralela al eje y las componentes correspondientes de los momentos aplicados al cuerpo.

Según el teorema de los ejes paralelos [Ec. (8.8)] es evidente que el momento de inercia respecto al eje de rotación es

$$I = I_c + Ml^2$$

en donde l es la distancia PC. El momento cinético respecto al eje en el instante representado es, por tanto,

$$J = I\omega = (I_c + Ml^2)\frac{d\theta}{dt} \tag{8.24}$$

El momento respecto a P viene proporcionado por la fuerza de la gravedad Mg, aplicada al centro de masas C (como se vio en el Cap. 6). El momento respecto al eje es

$$N = -Mgl \operatorname{sen}\theta \tag{8.25}$$

en donde el signo negativo es debido a que su efecto se verifica en el sentido negativo del ángulo θ. La ecuación del movimiento $dJ/dt = N$, teniendo en cuenta (8.24) y (8.25), es entonces

$$(I_c + Ml^2)\ddot{\theta} + Mgl \operatorname{sen}\theta = 0$$

Si restringimos ahora nuestra consideración a las pequeñas oscilaciones y aceptamos la conocida aproximación de los ángulos pequeños, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, después de reajustar términos y factores, resulta

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\frac{1}{1 + I_c/ML^2}\right)\theta = 0$$

Esta es, naturalmente, la ecuación diferencial del movimiento armónico simple, y si el factor entre paréntesis fuera la unidad, resultaría la ecuación del péndulo simple de longitud l. Este factor tiene en cuenta el efecto de la distribución de masa del cuerpo rígido, resultando la frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\frac{1}{1 + I_c/Ml^2}\right)} \tag{8.26}$$

Podríamos discutir muchas aplicaciones interesantes y prácticas; algunas de ellas se presentan en forma de

problemas al final del capítulo. Ilustraremos aquí un solo ejemplo, muy simple. Consideremos un anillo circular o aro de masa M y radio r, suspendido de un punto fijo, como un pequeño clavo en la pared. ¿Cuál será la frecuencia de las pequeñas oscilaciones y cuál será la longitud de un péndulo simple que tenga la misma frecuencia?

El parámetro l es aquí igual a r y el valor de I_c es Mr^2. En consecuencia, la Ec. (8.26) nos da

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2r}}$$

Un péndulo simple de longitud $2r$ tiene su misma frecuencia. Es decir, un aro y un péndulo simple de longitud igual al diámetro del aro se moverán al unísono si se inician con la misma fase una serie de pequeñas oscilaciones.

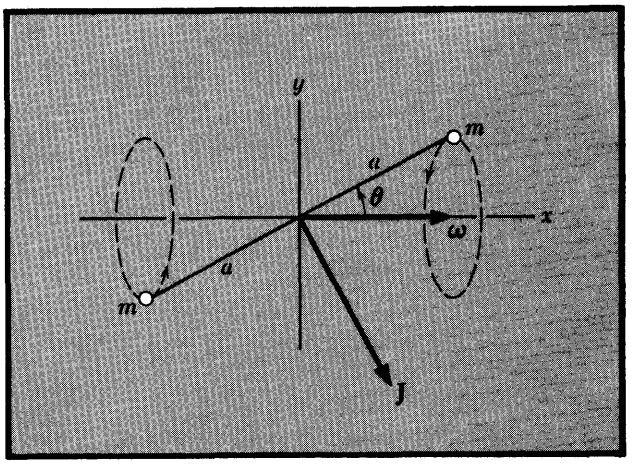


FIG. 8.11 Velocidad angular y vectores del momento cinético de una barra ligera con masas en sus extremos.

ROTACIÓN ALREDEDOR DE EJES FIJOS: COMPORTAMIENTO DEL VECTOR MOMENTO CINÉTICO

En la sección anterior enfocamos nuestra atención en la dependencia con el tiempo de la rotación alrededor de un eje cuya dirección estaba fija en el espacio y fija respecto a un cuerpo rígido. Por esta razón necesitábamos sólo tratar con la componente de **J** a lo largo del eje y la componente correspondiente del momento de la fuerza aplicado, **N**. Nuestra ecuación del movimiento era simplemente la expresión escalar $dJ_a/dt = N_a$ en estas componentes. Debemos reconocer ahora que el vector momento cinético **J** no será paralelo al eje de rotación a menos que este último esté relacionado de algún modo con las propiedades de simetría del cuerpo rígido. Cuando **J** no coincide con el eje, su derivada respecto al tiempo $d\mathbf{J}/dt$ puede originar un cambio de dirección y de magnitud del vector **J**. Como la rotación respecto a un eje fijo supone un movimiento circular de todas las características del cuerpo, podemos anticipar que la dirección variable de **J** tendrá la naturaleza de una rotación del vector **J** respecto al eje fijo.

La ilustración más simple de este problema general viene dada por un cuerpo rígido formado por dos masas puntuales iguales unidas por una barra sin peso que giran alrededor de un eje fijo, que pasa por el centro de masas y forma un ángulo θ con la barra. Este sistema viene representado en la fig. 8.11 en un instante de su rotación cuando la barra coincide con el plano xy. La barra tiene de longitud $2a$ y su velocidad angular repre-

sentada por ω tiene la dirección del eje x *. El momento cinético, por su definición general (8.3), es

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}_1 \times m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_2 \times m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2)$$

Llamemos partícula 1 a la que está en el primer cuadrante, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= a\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + a\ \text{sen}\ \theta\hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{r}_2 &= -a\cos\theta\hat{\mathbf{x}} - a\ \text{sen}\ \theta\hat{\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{8.27}$$

Nuestra expresión de $\mathbf{J}$ se convierte en

$$\mathbf{J} = 2m\omega a^2 \text{sen}\theta(\hat{\mathbf{x}}\ \text{sen}\ \theta - \hat{\mathbf{y}}\cos\theta) \tag{8.28}$$

Este vector es perpendicular a la barra, con la orientación indicada en la figura. Gira alrededor del eje x manteniendo la misma relación respecto a la barra y al eje de rotación.

Ahora bien, cuando $\mathbf{J}$ gira de este modo, su derivada respecto al tiempo $d\mathbf{J}/dt$ no es cero. En efecto, en este caso

$$\boxed{\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}} \tag{8.29}$$

por la misma razón habíamos escrito

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

en la Ec. (8.2) con referencia a la fig. 8.1. Teniendo en cuenta las Ecs. (8.27) y (8.28), el producto vectorial en la Ec. (8.29) nos da

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = -2m\omega^2 a^2 \text{sen}\theta\cos\theta\hat{\mathbf{z}}$$

en donde $\hat{\mathbf{z}}$ apunta hacia fuera del plano del diagrama.

Sin embargo, si $d\mathbf{J}/dt$ no es cero, la ecuación general del movimiento, Ec. (8.1), nos dice que debe existir un momento capaz de variar el vector momento cinético. En efecto

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = -2m\omega^2 a^2 \text{sen}\theta\cos\theta\hat{\mathbf{z}} \tag{8.30}$$

Este vector momento (no indicado en la fig. 8.11) gira también con la barra, como lo hace $\mathbf{J}$. El momento de

(*) Obsérvese que en este caso ω está dirigida a lo largo del eje x, mientras que en la fig. 8.2 estaba dirigida a lo largo del eje z.

rotación se crea en los rodamientos (no indicados) que mantienen la barra y la restringen a girar el ángulo θ alrededor del eje x.

Realmente es fácil de ver la razón de este momento si reconocemos las fuerzas centrípetas $m\omega^2 a \operatorname{sen}\theta$ requeridas para mantener las dos partículas en sus movimientos circulares alrededor del eje x. Estas dos fuerzas centrípetas iguales y opuestas multiplicadas por la distancia $2a\cos\theta$ entre ellas constituyen el momento de la fuerza **N**. Han de transmitirse a las partículas a lo largo de la barra rígida desde los rodamientos.

Observemos que si el ángulo θ es de 90°, $\boldsymbol{\omega}$ está dirigida según la línea de simetría de esta simple distribución de masa y **J** coincide con la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. Entonces si $\boldsymbol{\omega}$ es constante, **J** también lo será, y ningún momento de rotación se requiere para satisfacer el movivimiento.

Un conocimiento cualitativo claro de estas materias se obtiene a menudo inventando un modelo real de un sistema como éste y realizando en él rotaciones.

MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA: EJES PRINCIPALES Y ECUACIONES DE EULER *

De esta simple ilustración de una situación en la que cambiaba la dirección de **J** volvamos a la definición general [Ec. (8.3)] del momento cinético de un cuerpo rígido

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

y desarrollemos la expresión de **J** utilizando las expresiones generales para r_i y $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{x}} + y_i\hat{\mathbf{y}} + z_i\hat{\mathbf{z}}$$
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\hat{\mathbf{x}} + \omega_y\hat{\mathbf{y}} + \omega_z\hat{\mathbf{z}}$$

y *consideramos fijos los ejes x, y, z con relación al cuerpo rígido.* Esta operación es válida para las componentes x, y, z de **J**, resultando

$$J_x = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)\omega_x - \sum_i m_i x_i y_i \omega_y - \sum_i m_i x_i z_i \omega_z$$

$$J_y = -\sum_i m_i y_i x_i \omega_x + \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2)\omega_y - \sum_i m_i y_i z_i \omega_z \qquad (8.31)$$

(*) En un curso de introducción, la materia aquí expuesta hasta la Ec. (8.42) puede omitirse perfectamente.

$$J_z = -\sum_i m_i z_i x_i \omega_x - \sum_i m_i z_i y_i \omega_y + \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)\omega_z \tag{8.31}$$

Para mayor claridad es conveniente escribir de nuevo (8.31) en la forma

$$\begin{aligned} J_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ J_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ J_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \tag{8.32}$$

en que los I_{xx}, etc., están definidos comparando los correspondientes términos de las Ecs. (8.31) y (8.32).

El examen de los coeficientes I revela que los miembros de la diagonal son simplemente los momentos de inercia respecto a los ejes correspondientes; por ejemplo, I_{zz} es el momento de inercia respecto al eje z, ya que $x_i^2 + y_i^2$ es simplemente el cuadrado de la distancia de la partícula i al eje z. Los miembros fuera de la diagonal se llaman *productos de inercia*; ocurren en pares simétricos; por ejemplo, $I_{yx} = I_{xy}$.

Un hecho notable, no inmediatamente claro, es que siempre es posible establecer un sistema de coordenadas fijo en relación con un cuerpo rígido de tal forma que los productos de inercia se anulan. Para cuerpos con formas obvias de simetría (cilindros y prismas rectangulares), es fácil de ver esto, pero es cierto para *todo* cuerpo rígido y para cualquier punto del cuerpo elegido como origen. Aquellos ejes coordenados para los cuales los productos de inercia se anulan, se denominan *ejes principales* del cuerpo rígido.

Nos gustaría expresar las componentes del momento cinético y la energía cinética con relación a los ejes principales para una mayor simplicidad, pero debemos reconocer que los ejes principales están fijos respecto al cuerpo y por esta razón no constituyen en general un sistema de referencia inercial. En efecto, giran con el cuerpo o, al menos, mantienen con él tal relación que las propiedades inerciales del cuerpo son constantes cuando se refieren a estos ejes.

Supongamos que una serie de ejes principales ha sido identificada en el cuerpo, girando con él, y que expresamos el vector velocidad angular en la forma

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{\mathbf{x}} + \omega_y \hat{\mathbf{y}} + \omega_z \hat{\mathbf{z}}$$

en donde los vectores unitarios están dirigidos según los ejes principales y los valores componentes de $\boldsymbol{\omega}$ se refieren a estos ejes. El vector momento cinético en fun-

ción de las componentes que pertenecen a estos ejes será simplemente

$$\mathbf{J} = I_{xx}\omega_x\hat{\mathbf{x}} + I_{yy}\omega_y\hat{\mathbf{y}} + I_{zz}\omega_z\hat{\mathbf{y}}$$

ya que los productos de inercia correspondientes a estos ejes se anulan. No es necesario mantener los subíndices dobles en los coeficientes inerciales, ya que sólo permanecen los momentos de inercia respecto a los tres ejes principales. Así, escribiremos $I_{xx} = I_x$, etc., y la expresión de **J** se convierte en

$$\mathbf{J} = I_x\omega_x\hat{\mathbf{x}} + I_y\omega_y\hat{\mathbf{y}} + I_z\omega_z\hat{\mathbf{z}} \tag{8.33}$$

Ahora necesitamos expresar la derivada de **J** respecto al tiempo, a fin de utilizar la ecuación del movimiento $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}$. Los momentos de inercia son constantes, pero las componentes de la velocidad angular ω_x, ω_y y ω_z pueden variar, así como los vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$, ya que giran con el cuerpo y, por tanto, varían con el tiempo. Tomando la derivada respecto al tiempo de (8.33) resulta

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = I_x\frac{d\omega_x}{dt}\hat{\mathbf{x}} + I_y\frac{d\omega_y}{dt}\hat{\mathbf{y}} + I_z\frac{d\omega_z}{dt}\hat{\mathbf{z}} + I_z\omega_x\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} + I_y\omega_y\frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt} + I_z\omega_z\frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt}$$

Los vectores unitarios varían sólo porque giran con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, de modo que se verificará [véase Ec. (8.29) u (8.2)]

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}} \qquad \frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{y}} \qquad \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}$$

Estas relaciones nos permiten escribir la ecuación precedente en la forma

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d'\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \tag{8.34}$$

en donde $d'\mathbf{J}/dt$ significa la contribución a la variación de **J** que resulta de la variación de las componentes de la velocidad angular y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}$ es la contribución debida a la rotación de los ejes principales a los cuales se refiere **J**. En el caso particular en que **J** es constante con respecto a los ejes principales, su derivada respecto al tiempo en un sistema inercial surge solamente del último término, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}$ (como en el problema de la fig. 8.11, que se trata de nuevo a continuación).

Refiriendo el vector momento **N** a los ejes principales, de modo que sus componentes sean los momentos

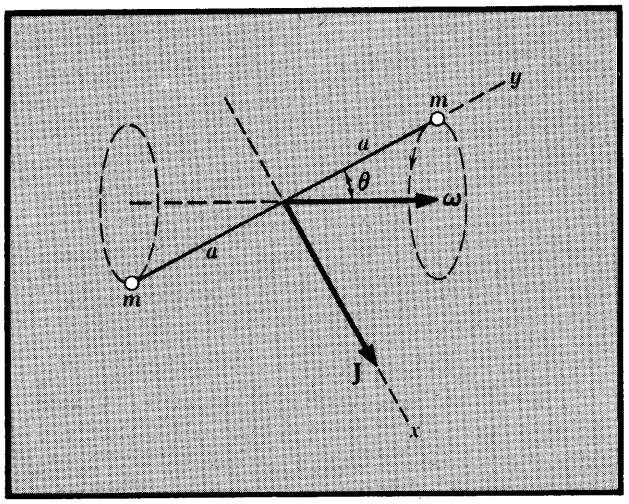


FIG. 8.12 Rotor rígido de dos partículas: ejes principales. Comparar con la fig. 8.11.

de fuerza respecto a estos ejes, podemos establecer la ecuación del movimiento en la forma

$$\frac{d'\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} = \mathbf{N} \tag{8.35}$$

y en función de las componentes del eje principal

$$\begin{aligned} I_x\frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z &= N_x \\ I_y\frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x &= N_y \\ I_z\frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y &= N_z \end{aligned} \tag{8.36}$$

en donde hemos prescindido de la prima. Esta serie de tres ecuaciones se denomina *ecuaciones de Euler del movimiento de un cuerpo rígido.*

La energía cinética, expresada fundamentalmente por la Ec. (8.4), toma la forma

$$Ec = \tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2)$$

cuando se formula en función de los momentos de inercia y las componentes de la velocidad angular pertenecientes a los ejes principales.

Algunas aplicaciones simples de las ecuaciones de Euler

Rotor rígido de dos partículas. Ejes fijos. Volvamos al sistema de dos masas puntuales unidas por una barra sin peso, que giran alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masas, según un ángulo arbitrario, tal como vimos en la fig. 8.11. Ahora consideraremos el problema usando los ejes principales con referencia a la fig. 8.12. Elegiremos el eje y que coincida con la barra y orgien en el centro de masas. El eje x es perpendicular a la barra en el plano determinado por la barra y $\boldsymbol{\omega}$. El eje z (no indicado) en el instante representado está dirigido hacia el observador. Con esta elección de ejes (obsérvense las diferencias entre las figuras 8.11 y 8.12) resulta

$$\begin{array}{lll} I_x = 2ma^2 & I_y = 0 & I_z = 2ma^2 \\ \omega_x = \omega\,\mathrm{sen}\theta & \omega_y = \omega\cos\theta & \omega_z = 0 \end{array}$$

Además, según la Ec. (8.33), $\mathbf{J} = 2ma^2\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{x}}$. Este es perpendicular a la barra como se determinó en la ecuación (8.28) y gira con la barra a lo largo del eje x. Deter-

minamos el momento necesario para impedir que gire alrededor de este eje con referencia a las ecuaciones de Euler [Ec. (8.36)] y como ω se considera constante, resulta

$$N_z = -2ma^2\omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

de acuerdo con la Ec. (8.30). Tiene sólo una componente z y gira con la barra.

Disco circular, eje fijo inclinado respecto a la normal. Ahora consideremos un disco (fig. 8.13) de masa m y radio a restringido a girar alrededor de un punto fijo bajo un ángulo θ respecto al eje normal. Elegimos los ejes principales, como se indica con el eje z normal, y el eje x en el plano determinado por $\boldsymbol{\omega}$ y $\hat{\mathbf{z}}$. Aplicando las Ecs. (8.13) y (8.14) resulta

$$I_x = I_y = \frac{ma^2}{4} \qquad I_z = \frac{ma^2}{2}$$

$$\omega_x = -\omega \operatorname{sen}\theta \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega \cos\theta$$

de modo que el momento cinético será

$$\mathbf{J} = -\tfrac{1}{4}ma^2\,\omega \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2}ma^2\,\omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

El ángulo α entre $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{J}$ puede determinarse a partir del producto escalar entre estos vectores

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}}{\omega J} = \frac{1+\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta}$$

A medida que progresa el movimiento, $\mathbf{J}$ gira alrededor de $\boldsymbol{\omega}$, engendrando un cono como el representado.

El momento de rotación requerido para mantener el disco en rotación alrededor de esta dirección inclinada de $\boldsymbol{\omega}$ es, según la Ec. (8.35),

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} = \tfrac{1}{4}ma^2\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

Los ejemplos de los Probs. 13 y 14 pertenecen a una clase de sistemas rotatorios que no están «dinámicamente equilibrados». El hecho de que $\mathbf{J}$ no coincida en dirección con $\boldsymbol{\omega}$ significa que un par de rotación es necesario para que el cuerpo gire. El equilibrio dinámico de cigüeñales, ruedas, etc., es la operación de ajustar las distribuciones de masa de modo que el eje requerido de rotación sea un eje principal, haciendo así que $\mathbf{J}$ coincida en dirección con $\boldsymbol{\omega}$ y se eliminen de este modo pares de rotación indeseables.

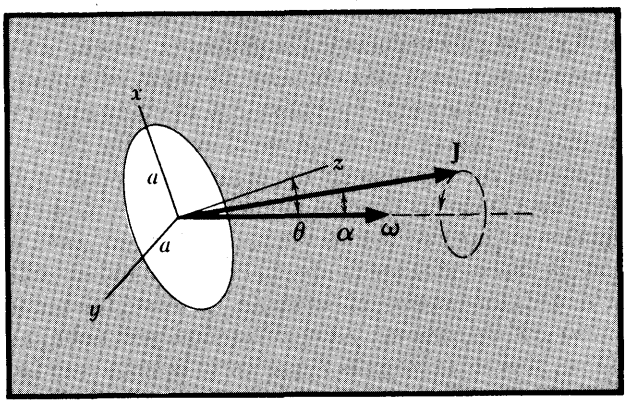


FIG. 8.13 Disco circular que gira alrededor de un eje inclinado respecto a la normal que pasa por el centro.

Trompo o giroscopio — Tratamiento aproximado. En la fig. 8.14 representamos una forma simple de trompo formado por un disco circular de masa M y radio a con un vástago sin peso. La punta del vástago está en O y el centro de masas del disco en C está a la distancia l de la punta. Se representa un sistema inercial XYZ y un sistema giratorio de ejes principales xyz. Los ejes principales se mueven con el vástago del tropo, pero *no* giran con el disco alrededor de su vástago móvil. El eje Oz está dirigido según el vástago, Ox está siempre en el plano XY horizontal y Oy se inclina por debajo de este plano, según un ángulo θ que es el mismo que forma Oz con OZ. La proyección del centro de masas sobre el plano XY cae en C', y OC' forma el ángulo φ con el eje X en el plano horizontal. Este ángulo es el mismo que forman Ox y el sentido negativo del eje Y. De este modo la orientación del vástago viene especificada por el ángulo polar θ y el ángulo azimutal φ y el movimiento del vástago viene descrito por las variaciones de estos ángulos. Los ejes principales siguen este movimiento.

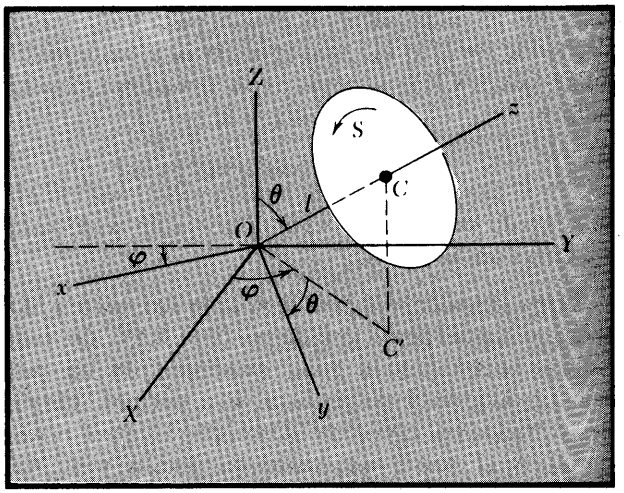


FIG. 8.14 Trompo. Ejes y ángulos utilizados en la descripción del movimiento. También se muestra la velocidad angular S del trompo.

El disco gira alrededor de su vástago con la velocidad de S rad/s desde el punto de vista del sistema xyz, pero la velocidad angular total del trompo depende también de las variaciones de φ y θ, de modo que el vector velocidad angular total será la suma

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{x}} + \dot{\varphi}\hat{\mathbf{Z}} + S\hat{\mathbf{z}} \tag{8.37}$$

Para expresar esto enteramente en función de las componentes de los ejes principales, observemos que

$$\hat{\mathbf{Z}} = -\text{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}$$

de modo que la Ec. (8.37) se convierte en

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{x}} - \dot{\varphi}\text{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + (\dot{\varphi}\cos\theta + S)\hat{\mathbf{z}}$$

Los momentos de inercia respecto a los ejes principales son [Ecs. (8.13) y (8.14)]

$$I_z = \tfrac{1}{2}Ma^2 \qquad I_x = \tfrac{1}{4}Ma^2 + Ml^2 = I_y$$

en donde al expresar I_x e I_y hemos empleado el teorema de los ejes paralelos. Utilizando la Ec. (8.33) escribamos ahora el vector momento cinético respecto a O:

$$\mathbf{J} = (\tfrac{1}{4}Ma^2 + Ml^2)(-\dot{\theta}\hat{\mathbf{x}} - \dot{\varphi}\text{sen}\theta\hat{\mathbf{y}}) + \tfrac{1}{2}Ma^2(\dot{\varphi}\cos\theta + S)\hat{\mathbf{z}} \tag{8.38}$$

Con esta ecuación terminamos el estudio del caso general del movimiento complejo y fascinante del trom-

po y limitaremos nuestra atención al caso especial de la precesión uniforme bajo el ángulo θ. Así, $\theta = 0$; $\dot{\varphi}$ y S serán constantes al no haber momentos que actúen sobre OZ y Oz. Además, de acuerdo con nuestras situaciones reales familiares, podemos hacer la aproximación $S \gg \dot{\varphi}$ y, en consecuencia, despreciar los términos en $\dot{\varphi}$ en la expresión de **J**. Bajo estas condiciones, la Ec. (8.38) se reduce a

$$\mathbf{J} = \tfrac{1}{2}Ma^2S\hat{\mathbf{z}}$$

Y la velocidad angular de los ejes coordenados que *no* giran con movimiento $S\hat{\mathbf{z}}$ es simplemente (haciendo $\dot{\theta}=0$)

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{Z}}$$

La derivada de **J** respecto al tiempo, deducida de (8.34) es simplemente $\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{J}$ a causa de la constancia de $\dot{\varphi}$ y S. Así, de las dos últimas ecuaciones resulta

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{J} = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{Z}} \times \tfrac{1}{2}Ma^2S\hat{\mathbf{z}} = \tfrac{1}{2}Ma^2\dot{\varphi}S(\hat{\mathbf{Z}} \times \hat{\mathbf{z}})$$
$$= -\tfrac{1}{2}Ma^2S\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} \qquad (8.39)$$

El par efectivo sobre el trompo alrededor de O es debido a la fuerza de la gravedad que actúa en C; la otra única fuerza es la fuerza de reacción que actúa en O. El resultado es

$$\mathbf{N} = -Mgl\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} \qquad (8.40)$$

Igualando las Ecs. (8.39) y (8.40) de acuerdo con la ecuación fundamental del movimiento (8.1) resulta para la velocidad de precesión el valor

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgl}{\tfrac{1}{2}Ma^2S} \qquad (8.41)$$

que, como puede observarse, es independiente de la inclinación θ.

El factor $\frac{1}{2}Ma^2$, valor de I_z para el disco, aparece en el denominador de la Ec. (8.41). En el caso especial de la precesión uniforme y con la aproximación $S \gg \dot{\varphi}$ podemos correctamente generalizar la Ec. (8.41) resultando

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgl}{I_zS} \qquad (8.42)$$

que incluye las formas de trompos y giroscopios distintos a los de simples discos.

Este resultado aproximado * expresa la velocidad de la precesión uniforme, cuando la velocidad de rotación

S es grande comparada con la velocidad angular de precesión $\dot{\varphi}$ y puede obtenerse directamente por aplicación fundamental de la ecuación del movimiento (8.1). Procederemos del modo siguiente.

Cuando S es grande, el momento cinético del trompo viene casi completamente determinado por

$$\mathbf{J} = I_z S\hat{\mathbf{z}}$$

La variación de $\mathbf{J}$ con el tiempo es debida a la rotación uniforme alrededor de la dirección vertical $\hat{\mathbf{Z}}$ con la velocidad angular de precesión $\dot{\varphi}$. Así (véase fig. 8.14)

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{Z}} \times I_z S\hat{\mathbf{z}} = -I_z S\dot{\varphi}\ \text{sen}\theta\hat{\mathbf{x}}$$

El momento del par viene dado por (8.40), e igualando esta ecuación con la presente expresión para $d\mathbf{J}/dt$ se obtiene otra vez el resultado de la Ec. (8.42):

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgl}{I_z S}$$

Debe destacarse que este tratamiento del problema del giroscopio implica sólo un caso simple, aunque importante. Los aspectos más generales del movimiento pueden demostrarse con giroscopios en la clase y todos ellos están sujetos al análisis por medio de las ecuaciones de Euler [Ec. (8.36)]. Esta área de estudio es de capital importancia en la tecnología de la navegación inercial y estabilización giroscópica. Tiene también aplicaciones (con modificaciones) en el estudio del spin molecular, núcleos atómicos y partículas elementales, sujetos a pares de fuerzas en campos magnéticos creados por sus momentos magnéticos intrínsecos.

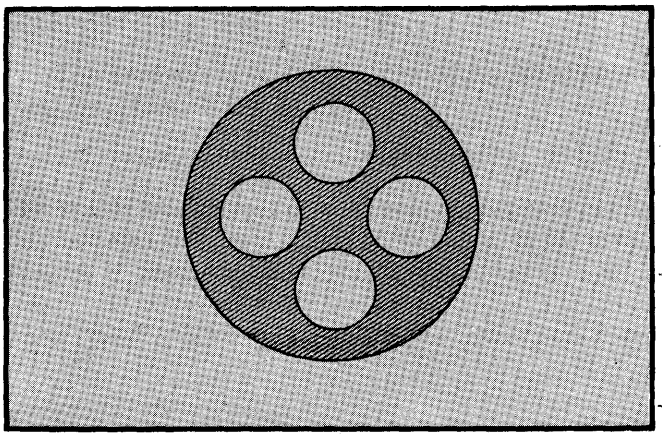


FIG. 8.15

PROBLEMAS

1. *Teorema de los ejes paralelos.* Partiendo del hecho de que el momento de inercia de un disco delgado alrededor de un eje diametral es $\frac{1}{4}ma^2$, utilizar el teorema de los ejes paralelos para demostrar que en el caso de un cilindro circular sólido de masa M, radio a y longitud L, el momento de inercia alrededor de un eje transversal que pasa por el centro de masas es $Ma^2/4 + ML^2/12$.

2. *Aditividad de los momentos de inercia.* Utilizando el principio de que los momentos de inercia son simplemente aditivos, calcular el momento de inercia respecto al eje central del objeto cilíndrico de la fig. 8.5 si su masa

(*) Aquellos que omitieran la discusión de las ecuaciones de Euler, pueden utilizar el simple tratamiento del giroscopio, que comienza aquí.

es M, su radio a, el radio de cada uno de los cuatro huecos cilíndricos es $a/3$ y el eje de cada cilindro está a la distancia $a/2$ del eje central. *Sol.* $\frac{59}{90}Ma^2$.

3. *Momento de inercia de la esfera sólida.* Demostrar que el momento de inercia alrededor de un diámetro de una esfera sólida es $2/5\,Mr^2$. Esto puede hacerse simplemente considerando que la esfera está formada por una pila de discos circulares de espesor infinitesimal que ajustan dentro de una superficie límite esférica.

4. *Momento de inercia del triángulo.* Tres masas puntuales iguales en los vértices de un triángulo equilátero (véase fig. 8.16) están unidos por una lámina triangular rígida de masa despreciable.

(*a*) Determinar el momento de inercia I_z respecto al eje normal que pasa por el centro C.

(*b*) Evaluar I_y para el eje y representado.

(*c*) Teniendo en cuenta el teorema de los ejes perpendiculares, evaluar I_x.

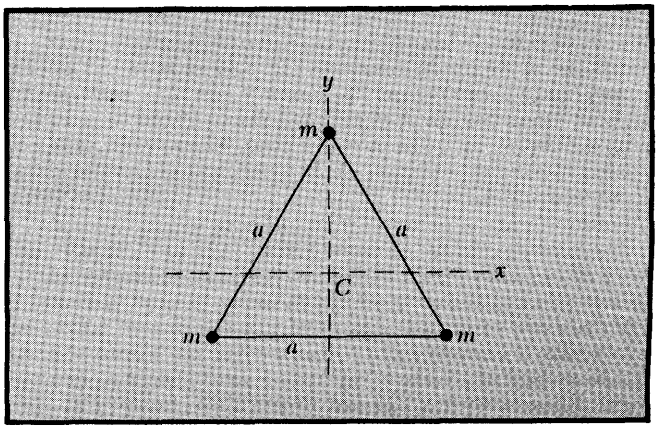


FIG. 8.16

5. *Placa cuadrada: igualdad de momentos.* Demostrar que el momento de inercia de una placa cuadrada rígida alrededor de un eje diagonal en su plano es el mismo que alrededor de un eje en el plano que pasa por el centro paralelamente a los bordes de la placa. (El teorema de los ejes perpendiculares, junto con la simetría, nos permite probar esto sin otro cálculo.)

6. *Cuerpos rígidos que ruedan.* Un cilindro sólido, un cilindro hueco de paredes delgadas, una esfera sólida y una esfera hueca de paredes delgadas ruedan hacia abajo por un plano inclinado un ángulo θ. Todos los objetos tienen el mismo radio R. Calcular la aceleración de cada uno de ellos.

7. *Esfera hueca que rueda.* Una esfera hueca de radio interior R_1 y radio exterior R_2 rueda sin deslizamiento por un plano inclinado un ángulo θ con la horizontal.

(*a*) Determinar sus aceleraciones angular y lineal

$$\textit{Sol. } \alpha = \frac{a}{R_2} \qquad a = \frac{g \operatorname{sen} \theta}{1 + \frac{2}{5}(1 - R_1{}^5/R_2{}^5)/(1 - R_1{}^3/R_2{}^3)}$$

(*b*) Al final del plano, éste inicia una transición curvada que finalmente se convierte en un plano horizontal. ¿Con qué velocidad se moverá el objeto en el plano horizontal final si partió del reposo sobre el plano inclinado con su centro a la altura h por encima del plano final horizontal? (Utilizar el principio de conservación de la energía.)

$$\textit{Sol.. } v^2 = \frac{2g(h - R_2)}{1 + \frac{2}{5}(1 - R_1{}^5/R_2{}^5)/(1 - R_1{}^3/R_2{}^3)}$$

8. *Momento de rozamiento.* **Un volante pesado en forma de cilindro sólido de radio 50 cm, espesor 20 cm y masa** 1200 kg, gira libremente sobre rodamientos con una velocidad inicial de 150 rps. Por la acción de un freno de fricción el volante es llevado al reposo; la zapata del freno presiona contra la periferia del volante con una fuerza equivalente a un peso de 40 kg. El coeficiente de rozamiento entre las superficies de frenado es 0,4 y se supone que es independiente de la velocidad relativa entre las superficies.

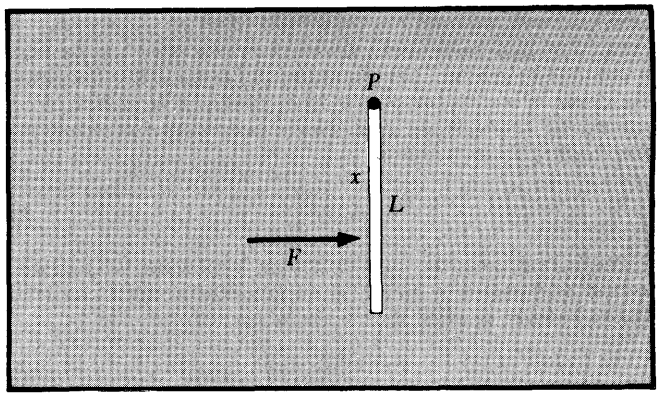


FIG. 8.17

(*a*) ¿Qué ángulo habrá girado el volante antes de alcanzar el reposo si el freno se aplica uniformemente?

Sol. $8{,}5 \times 10^5$ rad o 135 000 rev. (aproximadamente)

(*b*) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar el reposo?

Sol. 1800 s.

9. *Péndulo compuesto: longitud equivalente.* Probar que una barra uniforme de longitud L, colgando como un péndulo compuesto de un pivote en un extremo posee la misma frecuencia para pequeñas oscilaciones que un péndulo simple de longitud $2L/3$.

10. *Centro de percusión.* Consideremos una barra rígida de longitud L suspendida de un extremo por un pivote en P. Una fuerza F, actuando durante un breve período (es decir, una fuerza impulsiva) se aplica para iniciar en la barra un movimiento pendular, como indica la fig. 8.17. El soporte en P es muy frágil y es necesario aplicar F a tal distancia x que no tenga lugar ninguna fuerza de reac-

ción en P. Determinar el valor de x que cumple este requisito. Esta posición se denomina *centro de percusión*, correspondiente al punto de suspensión P. (*Sugerencia:* El efecto F será acelerar el centro de masas y dar una aceleración angular alrededor de P por su momento respecto a P. La compatibilidad de estas aceleraciones, suponiendo que no existen fuerzas de reacción en P, especificarán el valor de x en función de L.) *Sol.* $x = 2L/3$.

11. *Cuerpo rígido no equilibrado.* Un aro delgado de masa M y radio R, dotado de radios sin peso gira libremente en un plano vertical alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro. Una partícula de masa m adherida a la periferia hace que el sistema cuelgue en reposo con m en la parte más baja. Determinar la frecuencia de las oscilaciones pequeñas del aro. Determinar también la velocidad angular máxima del sistema si se deja en libertad desde una condición estacionaria con m en la parte más alta.

12. *Péndulo reversible.* Demostrar que para un péndulo compuesto existen dos distancias de soporte l_1 y l_2 contadas desde el centro de masas que producen la misma frecuencia de oscilaciones pequeñas y que estas distancias se relacionan por la ecuación

$$l_1 l_2 = \frac{I_c}{M}$$

Demostrar, además, que si hemos localizado tal par de puntos conjugados y medimos su frecuencia común ω, podemos obtener el valor de g a partir de

$$g = \omega^2(l_1 + l_2)$$

(Esta es la técnica o método del *péndulo reversible* para la medida de g. Los puntos de soporte están sobre una línea recta que pasa por el centro de masas a ambos lados de él; así, $l_1 + l_2$ es simplemente la distancia entre los puntos de soporte. La posición del centro de masas no es, por tanto, necesaria.)

13. *Momento de rotación.* Una placa rectangular de masa M con lados a y b gira con velocidad angular ω alrededor de un eje fijo según una diagonal. Evaluar el vector momento del par de rotación que los rodamientos deben aplicar a la placa para mantenerla en este modo de rotación. Dibujar un buen diagrama que muestre el vector momento cinético. Expresarlo en forma de vector.

Sol. parcial: Magnitud del par $= \frac{1}{12}Mab\omega^2(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$.

14. *Falta de equilibrio dinámico.* Una barra delgada uniforme de masa M y longitud L gira alrededor de un eje transversal que pasa por su centro. El eje se supone perpendicular a la barra, pero a causa de una imperfección se desvía de aquélla un pequeño ángulo δ. Determinar el vector momento del par de rotación necesario para una velocidad angular ω. Expresar el vector momento cinético y mostrarlo en un diagrama.

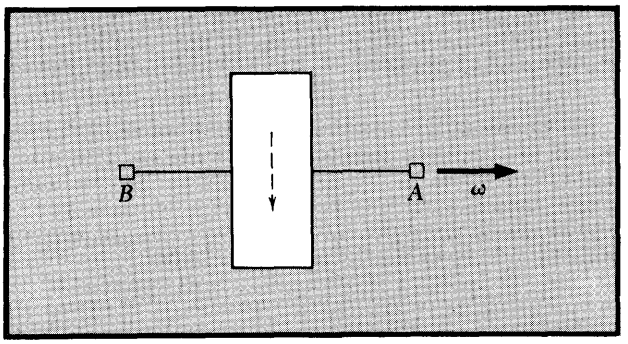


FIG. 8.18

15. *Giroscopio.* Cierto giroscopio está formado por un cilindro sólido con radio $a = 4$ cm. Está soportado por un vástago sin peso, cuya punta pivota libremente en un punto situado a 5 cm del centro de masas del cilindro. Se observa moviéndose en precesión uniforme bajo un ángulo de inclinación con la vertical y la precesión tiene lugar en una vuelta circular completa cada 3 s. Evaluar la velocidad de rotación del giroscopio sobre su propio eje.
Sol. 293 rad/s.

16. *Aceleración angular.* Un cilindro sólido de masa 2,0 kg y radio 4,0 cm está restringido a girar alrededor de su eje que es horizontal. A su alrededor se arrolla una cuerda y del extremo libre se cuelga una masa de 150 g (véase fig. 8.7). Determinar la aceleración lineal de la masa, la aceleración angular del cilindro, la tensión de la cuerda y la fuerza vertical que actúa sobre el cilindro hacia arriba.

17. *Rotación del giroscopio.* La fig. 8.18 representa una rueda giroscópica vista lateralmente con su eje montado sobre los rodamientos A y B. Está girando en el sentido de la velocidad angular que se indica. Las fuerzas sobre el soporte hacia arriba existen igualmente en A y en B.
(*a*) Se desea ahora reorientar el volante hasta situar A directamente por encima de B sin mover el centro de masas del sistema. Describir las fuerzas adicionales (aparte las del soporte) que han de aplicarse en A y B.
(*b*) Describir las fuerzas que habría habido de aplicarse en A y en B, si en vez de colocar A sobre B se hubiera querido llevar A hacia el observador y B detrás de A.

18. *Momentos alrededor del centro de masas.* Un cilindro de masa M_1 y radio R_1 con eje horizontal está restringido a girar alrededor de su eje. Una cuerda arrollada alrededor de este cilindro está arrollada también alrededor de otro cilindro de masa M_2 y radio R_2 que se desenrrolla libremente y cae con su eje horizontal, como indica la figura 8.19. Determinar en la proximidad de la cuerda vertical

(*a*) La aceleración del centro de masas de M_2.
Sol. $a = (M_1 + M_2)g/(\frac{3}{2}M_1 + M_2)$
(*b*) La aceleración angular de M_2.
(*c*) La aceleración angular de M_1.
(*d*) La tensión de la cuerda.

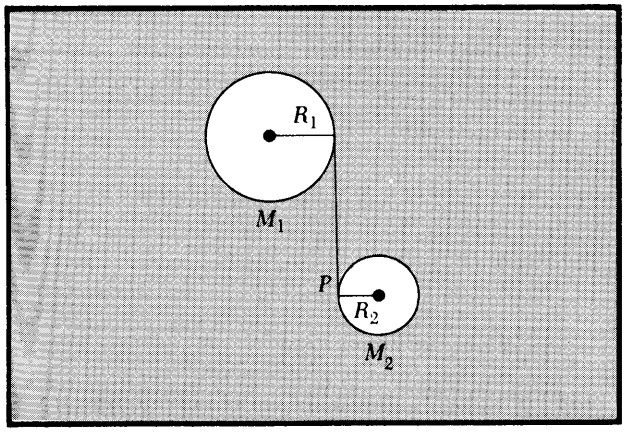


FIG. 8.19

Si se toman momentos alrededor del punto P de la figura, ¿cuál será la «fuerza ficticia» en el centro de masas del segundo cilindro?

19. *Coeficiente mínimo de rozamiento.* Demostrar que para un cuerpo simétrico que ruede sin deslizamiento hacia abajo en un plano inclinado se cumple

$$\mu \geq \frac{\operatorname{tg} \theta}{MR^2/I_c + 1}$$

donde los símbolos tienen el significado usual.

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

Un tratamiento claro, interesante y extenso sobre el movimiento de los cuerpos rígidos y de los giroscopios en particular se encuentra en algunos de los más viejos tratados, como el de Arthur Gordon Webster, «La dinámica de las partículas y de los cuerpos rígidos, elásticos y fluidos», por B. G. Teubner, Leipzig, 1904 (Stechert-Hafner, Inc., Nueva York, 1920).

Un tratamiento más contemporáneo a nivel intermedio es el de John L. Synge y Byron A. Griffith, «Principles of Mechanics», cap. 14, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959.

Contenido

ENERGÍA POTENCIAL Y FUERZA ENTRE UNA MASA PUNTUAL Y UNA CORTEZA ESFÉRICA
ENERGÍA POTENCIAL Y FUERZA ENTRE UNA MASA PUNTUAL Y UNA ESFERA MACIZA
AUTO-ENERGÍA GRAVITATORIA Y ELECTROSTÁTICA
Ejemplo. Energía gravitatoria de una galaxia
Ejemplo. Energía gravitatoria de una esfera uniforme
Ejemplo. Radio del electrón
Fuerzas que siguen la ley del inverso del cuadrado de la distancia y equilibrio estático
ÓRBITAS: ECUACIÓN Y EXCENTRICIDAD
Orbita circular
Leyes de Kepler
Problema de los dos cuerpos: Masa reducida
Ejemplo. Vibración de una molécula diatónica
Problemas
Tema avanzado. Otro modo de integrar la ecuación $1/r$
Lecturas suplementarias



Fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

Los módulos de las fuerzas gravitatorias y electrostáticas que se ejercen entre dos partículas puntuales en reposo vienen dadas por

$$F = \frac{C}{r^2}$$

siendo C una constante. Estas fuerzas son *centrales e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia* que separa ambas partículas. La palabra *central* quiere decir que la fuerza está dirigida a lo largo de la línea que conecta ambas partículas. Si una de ellas está en el origen y la segunda está en una posición **r**, la fuerza sobre la segunda partícula vendrá dada por

$$\mathbf{F} = \frac{C}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{9.1}$$

en donde, para la fuerza gravitatoria entre las masas puntuales M_1 y M_2,

$$C = -GM_1M_2$$

$$G = 6{,}67 \times 10^{-8}\ \text{cm}^3/\text{g-s}^2 = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg-s}^2 \tag{9.2}$$

y para la fuerza electrostática entre las cargas puntuales q_1 y q_2

$$C = q_1q_2 \tag{9.3}$$

siempre que la carga se exprese en unidades cgs gaussianas o

$$C = 9{,}0 \times 10^9 q_1q_2 \tag{9.3a}$$

si la carga, las longitudes y las fuerzas se expresan en unidades SI (véase Cap. 3, págs. 72 a 78). La fuerza gravitatoria es siempre atractiva. La electrostática (de Coulomb) es atractiva si las cargas q_1 y q_2 tienen signo opuesto y repulsiva si q_1 y q_2 tienen el mismo signo.

Se sabe experimentalmente con mucha exactitud que el exponente de r en (9.1) es igual a 2,000...; en el caso de las fuerzas electrostáticas esto se ha comprobado hasta distancias del orden de 10^{-13} cm. Se dispone de una gran variedad de resultados experimentales que serían muy sensibles a pequeñas desviaciones respecto a la ley en la que la fuerza es exactamente proporcional al inverso del cuadrado de la distancia. Las experiencias fundamentales se tratarán en el Vol. 2, Cap. 1, refiriéndose especialmente a las fuerzas electrostáticas. En cuanto a las fuerzas gravitatorias recurriremos como apoyo experimental, principalmente, al excelente acuerdo existente entre los movimientos planetarios predichos y los observados en el sistema solar.

La ley de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia puede expresarse también como una ley de energía potencial inversamente proporcional a la distancia. Como vimos en el Cap. 5, F es igual a $-\partial U/\partial r$. A partir de la Ec. (9.1) entonces

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{C}{r^2}$$

y

$$U(r) = \frac{C}{r} + \text{const}$$

Si damos a $U(r)$ el valor cero cuando las partículas están infinitamente alejadas, la constante de integración será también cero y tendremos

$$U(r) = \frac{C}{r}$$

en donde C viene dada por las Ecs. (9.2), (9.3) o (9.3*a*) para las fuerzas gravitatorias o electrostáticas en los sistemas cgs o SI. Así, pues,

$$U(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} \quad \text{o} \quad U(r) = \frac{q_1q_2}{r} \tag{9.4}$$

Alternativamente

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} \tag{9.4a}$$

La ley de fuerzas entre dos protones o dos neutrones o un protón y un neutrón se desvía fuertemente de la ley de gravitación o de la ley Coulomb. La fuerza es intensamente atractiva cuando las partículas están muy próximas (menos de 2×10^{-13} cm) y despreciable para distancias mayores. Estas fuerzas se explican en los libros de física nuclear. La fuerza eléctrica entre dos electrones es exactamente coulombiana hasta las menores distancias conocidas, pero los electrones poseen un momento dipolar magnético además de su carga, y los momentos magnéticos de los electrones dan lugar a una ley de la fuerza que no es central y que depende de la inversa del cubo de la distancia (Vol. 2, Cap. 10).

Dada una ley de fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, ¿qué características especiales se deducen de la misma? ¿En qué consideraciones vitales refleja el universo una ley de este tipo? Volveremos a continuación sobre estas importantes cuestiones. Con frecuencia estudiaremos la energía potencial en lugar de la fuerza. Al resolver problemas sobre potencias o fuerzas, el alumno encontrará casi siempre más sencillo razonar primeramente sobre la energía potencial y luego

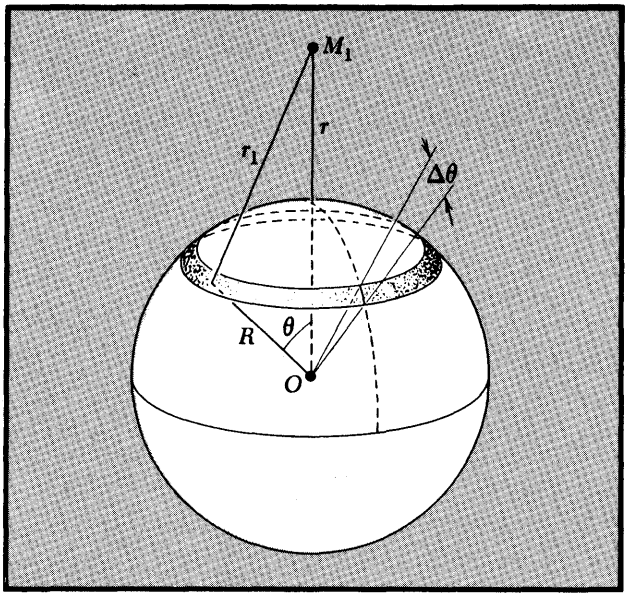


FIG. 9.1 Dibujo en perspectiva de la corteza esférica y de la masa puntual M_1, mostrando cómo se divide en anillos dicha capa esférica. La corteza tiene una densidad de masa σ por unidad de área.

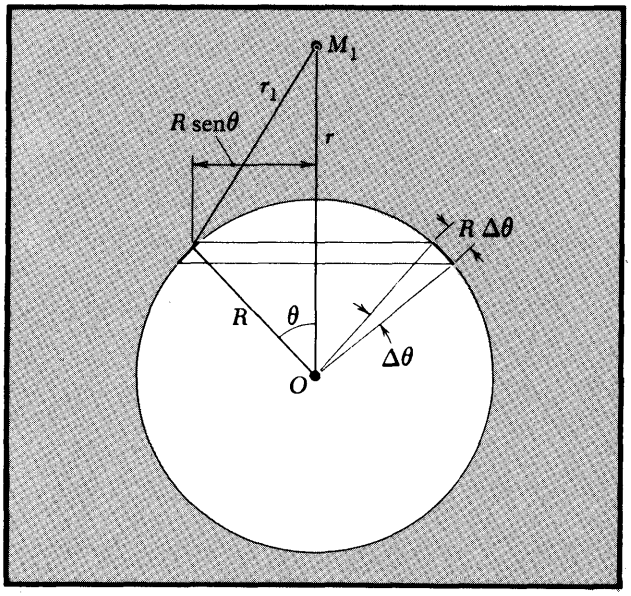


FIG. 9.2 Sección de la misma esfera en la que se ve el anillo de área total $2\pi R^2 \,\mathrm{sen}\,\theta\,\Delta\theta$.

obtener la fuerza o sus componentes derivando el potencial respecto a la distancia y a menudo usar la energía potencial en una ecuación energética. La energía potencial es un escalar; la fuerza es un vector.

ENERGÍA POTENCIAL Y FUERZA ENTRE UNA MASA PUNTUAL Y UNA CORTEZA ESFÉRICA

Una consecuencia importante de la ley de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia es que la fuerza que actúa sobre una masa puntual de prueba M_1 distante r del centro de una capa esférica delgada y uniforme de radio R es exactamente la misma en puntos exteriores a la corteza, o sea para $r > R$, como si la masa completa de la capa estuviese concentrada en su centro. Una segunda consecuencia es que para puntos interiores a la corteza, en los que $r < R$, la fuerza sobre la masa puntual es *cero*. Estas consecuencias son tan importantes que las deduciremos con todo detalle. Seguiremos un método especial de resolución que se beneficia de la simetría geométrica del problema.

Consideremos primeramente un anillo o zona esférica sobre la corteza que tenga una anchura angular de $\Delta\theta$ o bien una anchura de $R\Delta\theta$, como en la fig. 9.1. Sea σ la masa por unidad de área de la superficie. El anillo está a una distancia r_1 de la masa de prueba M_1. El radio del mismo es $R\,\mathrm{sen}\,\theta$ y su circunferencia vale $2\pi R\,\mathrm{sen}\,\theta$. El área del anillo viene dada entonces por (véase fig. 9.2)

$$(2\pi R\,\mathrm{sen}\theta)(R\,\Delta\theta) = 2\pi R^2 \mathrm{sen}\theta\,\Delta\theta$$

La masa del anillo vendrá dada por el producto del área por la masa por unidad de área σ:

$$M_{\text{anillo}} = (2\pi R^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\Delta\theta)\sigma \tag{9.5}$$

La energía potencia U_{anillo} de la masa de prueba en el campo gravitatorio del anillo es, a partir de (9.5) y (9.4) para la energía potencial gravitatoria entre dos masas,

$$U_{\text{anillo}} = -\frac{GM_1(2\pi R^2 \mathrm{sen}\theta\,\Delta\theta)\sigma}{r_1} \tag{9.6}$$

Aquí r_1 es la distancia de la masa de prueba al anillo.

Todos los elementos del anillo son equidistantes de la masa de prueba. Mediante la ley del coseno [Ec. (2.8)] aplicada al triángulo formado por R, r y r_1 tendremos

$$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta \tag{9.7}$$

Para el anillo, R y r son constantes porque R es el radio de la corteza y r la distancia desde su centro a la masa de prueba M_1. En estas condiciones, al determinar el cambio de r_1, Δr_1 en función del cambio en θ, $\Delta\theta$ resulta

$$2r_1\,\Delta r_1 = -2rR\,\Delta(\cos\theta) = 2rR\operatorname{sen}\theta\,\Delta\theta$$

Esta útil relación permite volver a escribir (9.6) para obtener

$$U_{\text{anillo}} = -\frac{GM_1(2\pi R\,\Delta r_1)\sigma}{r} \tag{9.8}$$

Obsérvese que en el denominador se encuentra ahora la distancia r de la masa de prueba al centro de la esfera.

Ahora bien, la energía potencial total U_{corteza} de la masa de prueba en el campo gravitatorio de la corteza esférica viene dada por la suma U_{anillo} respecto a todos los anillos en que hemos descompuesto la corteza. Al totalizar, tendremos que sumar únicamente respecto a Δr_1. Cuando la masa de prueba es exterior a la corteza, el intervalo de valores de r_1 se extiende desde $r - R$ hasta $r + R$, de modo que (véase fig. 9.3)

$$\sum \Delta r_1 = (r + R) - (r - R) = 2R \tag{9.9}$$

Es realmente una gran suerte que el problema pueda reducirse a una suma tan sencilla. Empleando (9.9) para realizar la suma correspondiente a (9.8) tendremos

$$U_{\text{corteza}} = \sum U_{\text{anillo}} = -\frac{GM_1 2\pi R\sigma}{r}\sum \Delta r_1 = -\frac{GM_1 4\pi R^2\sigma}{r} \tag{9.10}$$

Pero $4\pi R^2$ es el área de la superficie de la corteza esférica y $4\pi R^2\sigma$ es la masa M_s de la corteza. Podemos por tanto expresar (9.10) como

$$U_{\text{corteza}} = -\frac{GM_1M_s}{r} \qquad (r > R) \tag{9.11}$$

siendo r la distancia entre la masa de prueba y el centro de la corteza esférica. Hemos demostrado que *la corteza esférica actúa sobre puntos exteriores como si toda su masa M_s estuviese concentrada en su centro.*

Si la masa de prueba está en cualquier punto *dentro* de la corteza, el intervalo de la suma de Δr_1 en $\Sigma\, U_{\text{anillo}}$ es de $R - r$ hasta $R + r$ (véase fig. 9.4), de modo que ahora

$$\sum \Delta r_1 = (R + r) - (R - r) = 2r \tag{9.12}$$

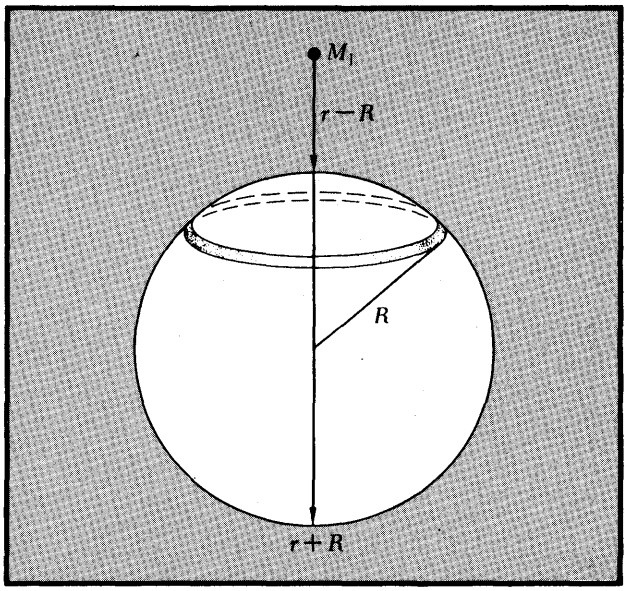


FIG. 9.3 Límites de la suma para $r > R$; la masa de prueba M_1 está fuera de la corteza esférica.

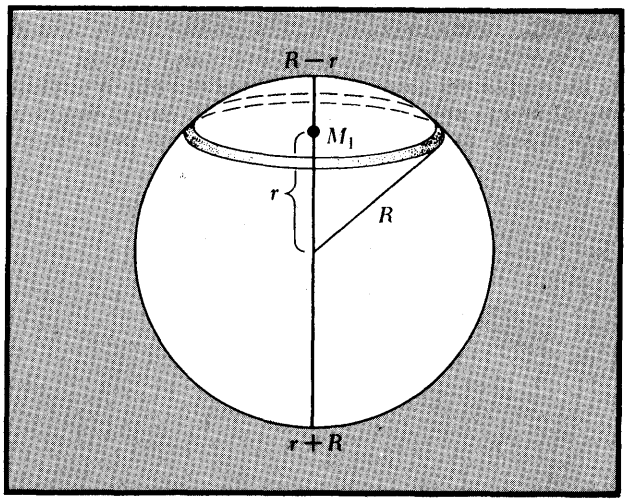


FIG. 9.4 Límites de la suma para $r < R$; la masa de prueba M está dentro de la corteza esférica.

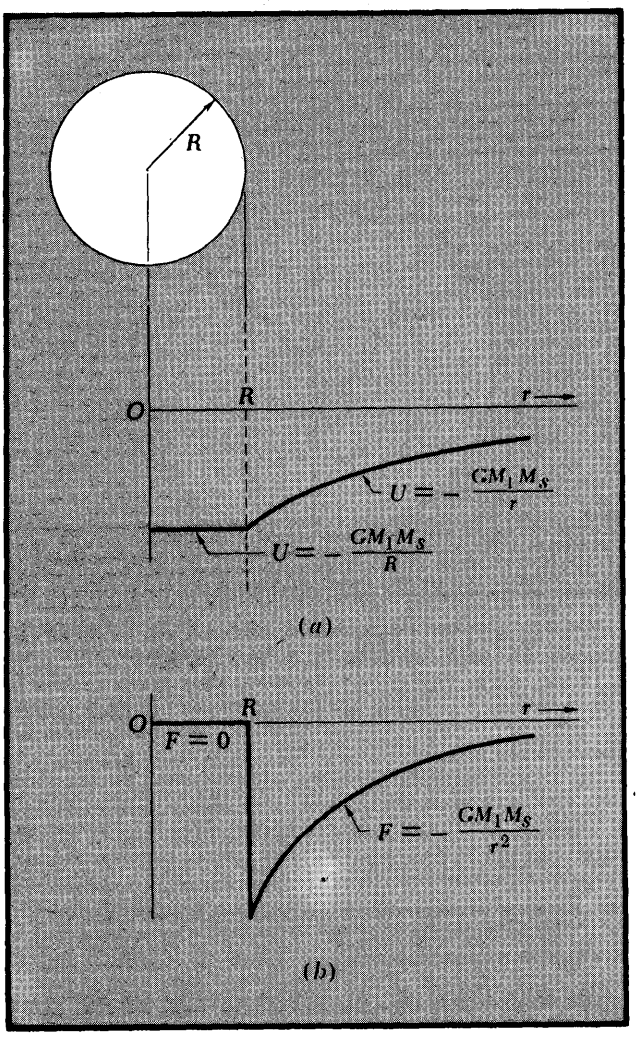


FIG. 9.5 *a*) Energía potencial de la masa puntual M_1 a la distancia r del centro de la corteza de radio R y masa M_s. *b*) Fuerza sobre la masa puntual M_1 (signo negativo para indicar atracción). La fuerza es cero para $r < R$.

Empleando (9.12) para realizar la suma correspondiente a (9.8) se obtiene

$$U_{\text{corteza}} = \sum U_{\text{anillo}} = -\frac{GM_1 2\pi R\sigma}{r} \sum \Delta r_1$$

$$= -GM_1 4\pi R\sigma = -\frac{GM_1 4\pi R^2\sigma}{R}$$

$$= -\frac{GM_1M_s}{R} \qquad (r < R) \tag{9.13}$$

El potencial (9.13) es constante en todos los puntos interiores de la corteza y es igual a (9.11) calculado para $r = R$. La fig. 9.5*a* muestra U dentro y fuera de la corteza.

Vimos anteriormente [Ecs. (5.28) y (5.29)] que el módulo de la fuerza F sobre la masa de prueba M_1 es igual a $-\partial U/\partial r$, porque la fuerza actúa en dirección radial. A partir de (9.11) y (9.13) tenemos para la fuerza debida a la corteza:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \begin{cases} -\dfrac{GM_1M_s}{r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \tag{9.14}$$

No actúa fuerza sobre una masa de prueba situada en el interior de la corteza. Esta es una propiedad muy característica de las fuerzas que siguen la ley del inverso del cuadrado. Fuera de la corteza la fuerza varía proporcionalmente a $1/r^2$, en donde r ha de medirse a partir del centro de la misma. La fig. 9.5*b* muestra la fuerza en función de r.

ENERGÍA POTENCIAL Y FUERZA ENTRE UNA MASA PUNTUAL Y UNA ESFERA MACIZA

Podemos construir una esfera maciza de masa M y radio R_0 agrupando una serie de capas concéntricas. Para puntos r exteriores a la esfera tendremos, utilizando (9.11), el siguiente resultado para la energía potencial de la masa de prueba M_1 en el campo gravitatorio de la esfera maciza

$$U_{\text{esfera}} = \sum U_{\text{anillo}} = -\frac{GM_1}{r} \sum M_c = -\frac{GM_1M}{r}$$

Recuérdese que r es la distancia desde la masa de prueba hasta el centro de la esfera.

El módulo de la fuerza sobre M_1 es, para $r > R_0$,

$$\boxed{F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GM_1M}{r^2}} \tag{9.15}$$

Este es el resultado central de nuestro análisis. También podría haberse obtenido por una integración directa de las componentes de la fuerza sobre la corteza (véase Prob. 13), pero el método matemático que hemos seguido es más breve. Mediante una sencilla aplicación de la Ec. (9.15) vemos que la fuerza entre dos esferas uniformes de masas M_1 y M_2 es igual a la fuerza entre dos masas puntuales M_1, M_2 en sus centros respectivos. Habiendo reemplazado una esfera por una masa puntual, podemos entonces reemplazar a su vez la segunda esfera por otra masa puntual. Este afortunado resultado simplifica muchos cálculos.

Si una masa puntual está *dentro* de una esfera sólida, la fuerza estará dirigida hacia el centro de aquélla y valdrá

$$\frac{-GM_1 M_{\text{dentro}}}{r^2}$$

Si la esfera es de densidad uniforme ρ, entonces

$$M_{\text{dentro}} = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \qquad \text{donde } M = \frac{4\pi}{3} R_0{}^3 \rho$$

y así

$$F = -\frac{GM_1 \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} = -\tfrac{4}{3}\pi G M_1 \rho r$$

o

$$F = -\frac{GM_1 M r}{R_0{}^3} \tag{9.16}$$

La energía potencial para $r < R_0$ se obtiene sumando a $-(GM_1M)/R_0$ la energía requerida para mover la masa M_1 desde R_0 a r. Utilizando la Ec. (9.16) para la fuerza, tenemos para esta energía

$$\int_{R_0}^{r} \frac{GM_1 M r\, dr}{R_0{}^3} = -\frac{GM_1 M}{2R_0{}^3}(R_0{}^2 - r^2)$$

Sumando el término $-(GM_1M)/R_0$ a esta energía resulta para la energía potencial para $r < R_0$

$$U(r) = -\frac{GM_1 M}{R_0} - \frac{GM_1 M}{2R_0{}^3}(R_0{}^2 - r^2)$$

$$= -\frac{GM_1 M}{R_0}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_0{}^2}\right)$$

Cuando $r = 0$ tenemos

$$U(0) = -\frac{3}{2}\frac{GM_1 M}{R_0}$$

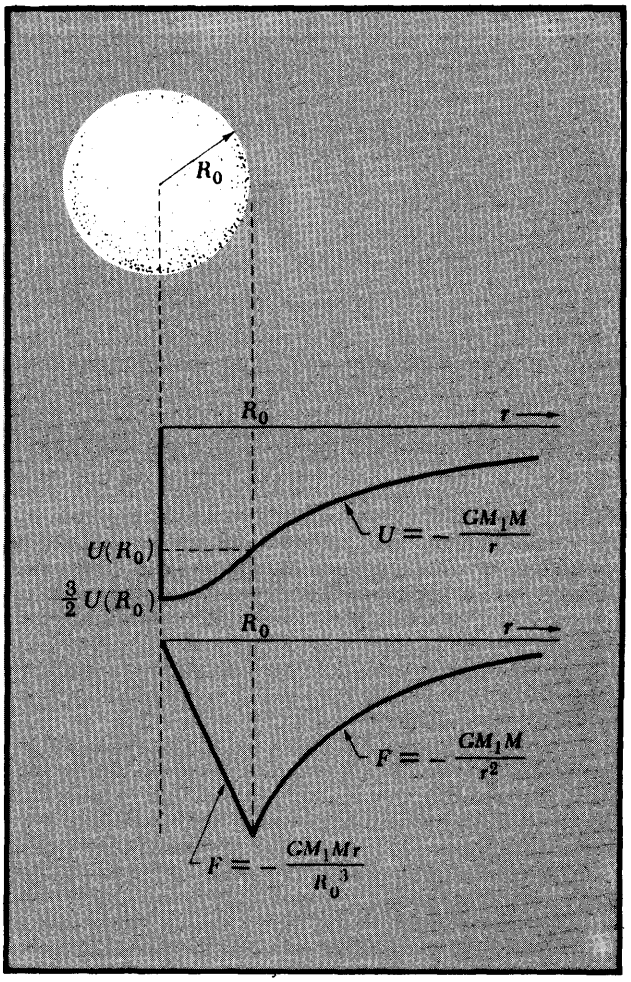


FIG. 9.6 *a*) Energía potencial de la masa puntual M_1 a la distancia r del centro de la esfera maciza de radio R_0 y masa M. *b*) Fuerza sobre la masa puntual M_1. La fuerza es lineal en r para $r < R_0$.

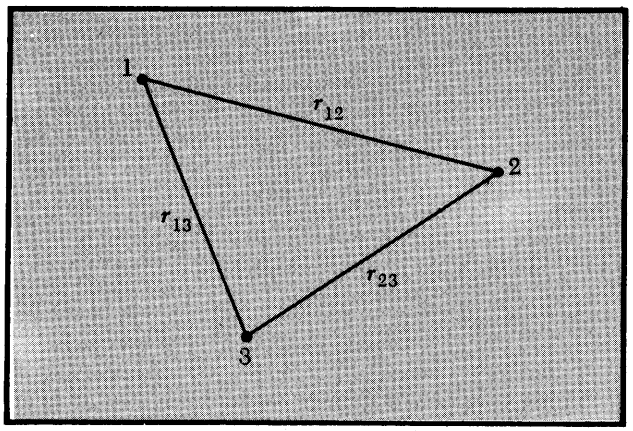


FIG. 9.7 La energía potencial gravitatoria de tres átomos de masas M_1, M_2, M_3 es

$$U = -G\left(\frac{M_1M_2}{r_{12}} + \frac{M_1M_3}{r_{13}} + \frac{M_2M_3}{r_{23}}\right)$$

Ambos $U(r)$ y $F(r)$ se representan en la fig. 9.6 para $0 \leqslant r \leqslant R_0$ y para $R_0 \leqslant r$.

AUTOENERGÍA GRAVITATORIA Y ELECTROSTÁTICA

Se define la autoenergía de un cuerpo como el trabajo realizado al formar el cuerpo a partir de elementos infinitesimales que están inicialmente a un distancia infinita entre sí. Consideremos la autoenergía gravitatoria; tendrá signo negativo, porque la fuerza gravitatoria es atractiva. (Tenemos que hacer un trabajo positivo contra la gravitación para separar los átomos de una estrella, llevando cada uno de ellos al infinito.) Es necesario considerar la auto-energía gravitatoria normalmente en los problemas galácticos y estelares. La autoenergía electrostática se calcula con frecuencia para los cristales, tanto de metales como de sustancias aislantes.

La energía potencial de N masas discretas debida a su atracción gravitatoria mutua es igual a la suma de la energía potencial de todos los pares de masas:

$$U_s = -G \sum_{\substack{\text{Todos los} \\ \text{pares} \\ i \neq j}} \frac{M_iM_j}{r_{ij}} \tag{9.17}$$

en donde M_i y M_j son las masas individuales y r_{ij} es la distancia que separa estas masas individuales. El caso $i = j$ se excluye porque no determina una pareja. La auto-energía de la masa individual m_i se omite también, ya que sólo se consideran las interacciones mutuas de las masas. A continuación se da un método para evaluar la auto-energía de una masa individual.

EJEMPLO

Energía gravitatoria de una galaxia. Estimemos la energía gravitatoria de la galaxia. Si omitimos del cálculo la autoenergía gravitatoria de las estrellas individuales, entonces necesitamos únicamente estimar el valor de la expresión (9.17).

Consideremos que la galaxia está compuesta globalmente por N estrellas, cada una de ellas de masa M, y estando entre sí cada par de ellas a una distancia mutua del orden de R. Entonces (9.17) se reduce a

$$U \approx -\frac{1}{2}G(N-1)N\frac{M^2}{R}$$

[Al sumar todos los pares tomamos cada vez una de las N estrellas y sumamos para las N-1 restantes que pueden emparejarse con ella. Al hacer esto contamos cada par dos veces (véase fig. 9.7 para $N = 3$.)] Si $N \approx 1{,}6 \times 10^{11}$; $R \approx 10^{23}$ cm y $M \approx 2 \times 10^{33}$ g (como para el Sol), entonces

$$U \approx -\frac{1}{2}\frac{(7\times 10^{-8})(1{,}6\times 10^{11})^2(2\times 10^{33})^2}{10^{23}}$$
$$\approx -4\times 10^{58}\ \text{ergs}$$

En unidades SI

$$U \approx -\frac{1}{2}\frac{(7\times 10^{-11})(1{,}6\times 10^{11})^2(2\times 10^{30})^2}{10^{21}}$$
$$\approx -4\times 10^{51}\ \text{J}$$

EJEMPLO

Energía gravitatoria de una esfera uniforme. No es difícil calcular la auto-energía U_s de una esfera uniforme de masa M y radio R. Convirtamos el sumatorio múltiple de la Ec. (9.17) en integrales y luego llevemos a cabo las integraciones. Pero primero intentemos conjeturar la respuesta. ¿Cómo debemos esperar que sea? En la respuesta deben intervenir a G, M y R con sus dimensiones correctas. ¿Por qué no

$$U_s \approx -\frac{GM^2}{R}\ ?$$

Esta expresión es, en efecto, correcta, excepto en un factor numérico del orden de la unidad.

Para calcular exactamente este factor debemos construir la esfera maciza de un modo especial. Primero consideremos (véase fig. 9.8) la energía de interacción entre un núcleo esférico macizo de radio r y una corteza esférica de espesor dr que lo envuelve. Si designamos la densidad por ρ, la masa del núcleo es $(4\pi/3)r^3\rho$ y la masa de la corteza es $(4\pi r^2)(dr)\rho$. Así, pues, la energía potencial gravitatoria de la corteza debida a la presencia del núcleo es, según la Ec. (9.11),

$$\frac{-G\left(\frac{4\pi}{3}r^3\rho\right)\left(4\pi r^2\,dr\,\rho\right)}{r} = -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2r^4\,dr \qquad (9.18)$$

La auto-energía de la esfera maciza viene dada por la integral (9.18) extendida entre $r = 0$ y $r = R$. La integración equivale a añadir sucesivas capas al núcleo hasta que éste adquiere el radio R. Inicialmente el núcleo tiene radio cero. La simetría de la esfera permite reducir la suma múltiple a una integral simple. Al integrar (9.18) se obtiene el resultado

$$U_s = -\tfrac{1}{3}G(4\pi\rho)^2\tfrac{1}{5}R^5 = -\frac{3}{5}G\left(\frac{4\pi}{3}\rho R^3\right)^2\frac{1}{R}$$
$$= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \qquad (9.19)$$

porque la masa está dada por

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$

La auto-energía gravitatoria del Sol, es según (9.19) con $M_s \approx 2\times 10^{33}$ g y $R_s \approx 7\times 10^{10}$ cm,

$$U_s \approx -\frac{(3)(7\times 10^{-8})(2\times 10^{33})^2}{(5)(7\times 10^{10})} \approx -2\times 10^{48}\ \text{ergs}$$
$$\approx -2\times 10^{41}\ \text{J}$$

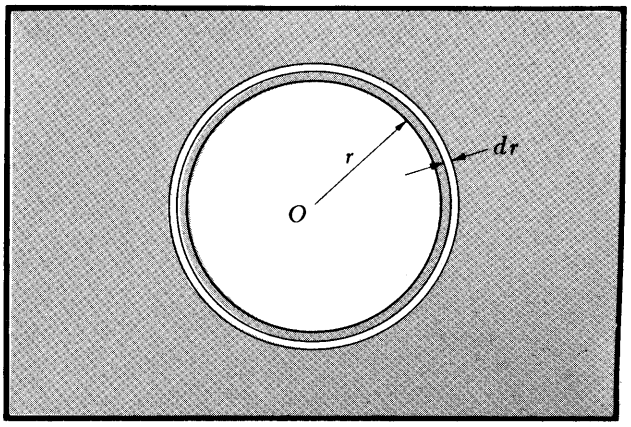


FIG. 9.8 Corteza esférica de espesor dr rodeando a un núcleo esférico macizo de radio r. Añadiendo capas sucesivas se puede construir una esfera maciza de radio R. El área de una de las superficies de la corteza es $4\pi r^2$; su espesor es dr, de modo que el volumen de la misma es $4\pi r^2\,dr$.

¡Esto representa una gran cantidad de energía! Basta recordar que la generación de energía solar es de 4×10^{33} ergs/s (4×10^{26} J/s), de modo que el Sol tardaría $\frac{1}{2} \times 10^{15}$ s, o sea, 2×10^{7} años en irradiar esta energía *. El Sol puede completar su evolución como una estrella blanca enana densa, con un radio aproximadamente igual a 0,1 de su radio actual. Es evidente que puede liberarse una gran cantidad de energía en la contracción. Estas consideraciones son muy importantes en los estudios astrofísicos y pueden aplicarse a la teoría de las estrellas novas. La autoenergía electrostática de una distribución esférica uniforme de carga total q y radio R se obtiene sustituyendo $-GM^2$ por q^2 (o sea, kq^2 por $-GM^2$) en la Ec. (9.19).

EJEMPLO

Radio del electrón. Para obtener un valor estimado de la auto-energía de un electrón necesitamos conocer el radio R. Como no disponemos de ninguna teoría fundamental del electrón, todo lo que podemos hacer es proceder en sentido inverso y estimar el valor del radio a partir de la energía.

Existe una relación famosa debida a Einstein que dice que una masa M está siempre asociada con una energía E de acuerdo con la ecuación

$$E = Mc^2 \tag{9.20}$$

siendo c la velocidad de la luz. (Deduciremos este resultado en el Cap. 12.) Si la energía del electrón fuese enteramente la energía electrostática de una distribución de carga uniforme, entonces tendríamos

$$U_s = \frac{3e^2}{5R} = mc^2$$

que nos determinaría el radio del electrón. Pero no conocemos con detalle la estructura del electrón. El modelo que hemos descrito esquemáticamente no puede ser enteramente satisfactorio, porque ¿qué es lo que mantiene unida la carga del electrón? ¿Por qué no se disgrega bajo la repulsión coulombiana de aquellos elementos que tienen la misma carga? En el momento actual no disponemos de ninguna teoría que explique la existencia del electrón.

Prescindamos del factor 3/5. Mantenerlo sería pura presunción, puesto que sugiere un grado de conocimiento acerca del electrón que realmente no poseemos. Definimos (por convenio universal) una longitud r_0 por la relación

$$\frac{e^2}{r_0} \equiv mc^2 \qquad r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}82 \times 10^{-13}\ \text{cm}$$

Esta longitud se denomina *radio clásico del electrón.* Tiene algo que ver con el electrón, ¡pero no sabemos exactamente qué es! Sin embargo, se le considera una longitud fundamental y aparece en las expresiones de las secciones eficaces de la difusión de rayos X o rayos γ. Realmente conocemos que la fuerza electros-

(*) La energía irradiada por el Sol procede de los procesos nucleares, *no* de los gravitatorios. A comienzos del siglo XX los físicos no tenían conocimiento de estos procesos nucleares y estimaban la edad del sistema solar en unos 10^6 años.

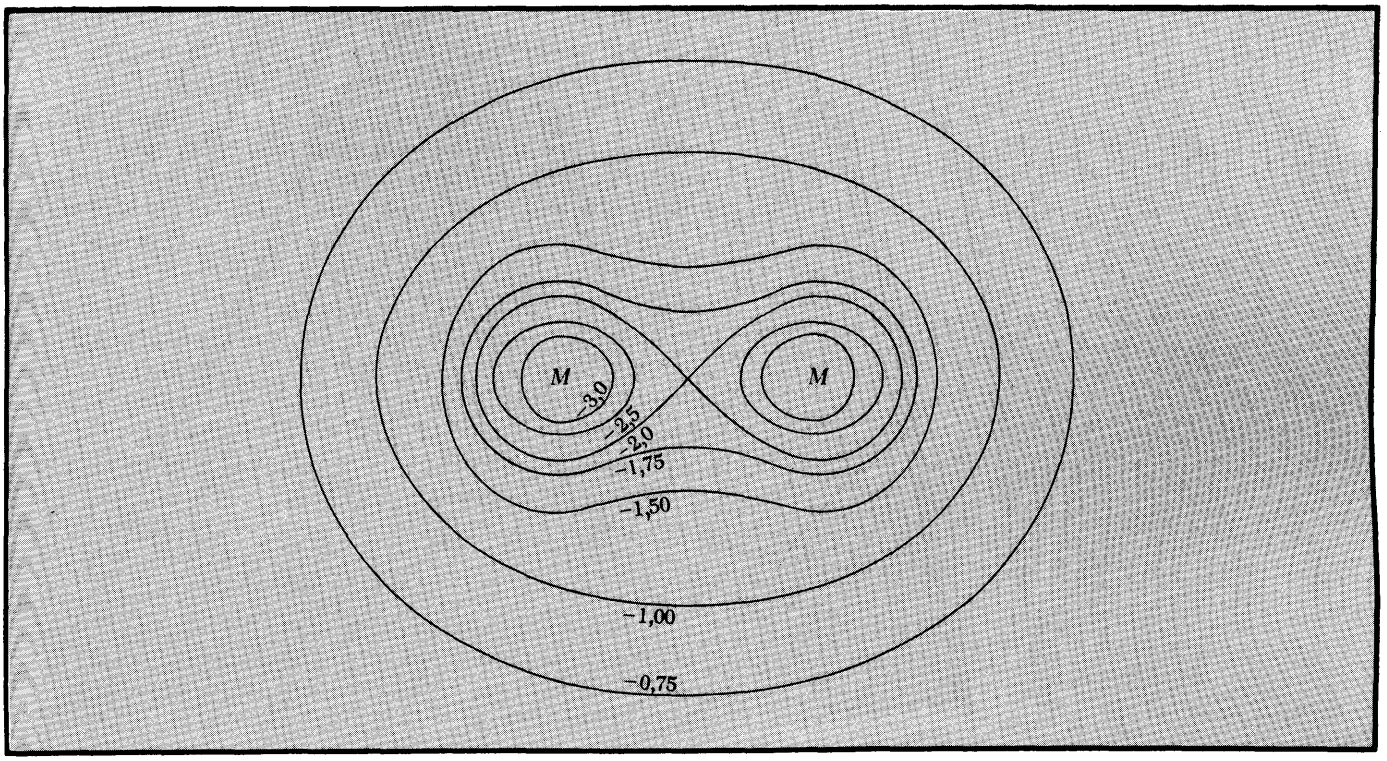


FIG. 9.9 Mapa de las líneas de nivel de las superficies equipotenciales para dos masas iguales.

tática entre electrones es exactamente igual a e^2/r^2 hasta distancias por lo menos de $r = 10^{-15}$ cm.

Fuerzas que siguen la ley del inverso del cuadrado de la distancia y equilibrio estático. En el Vol. 2, Cap. 2, se demostrará que no puede existir un equilibrio *estático* estable entre un grupo de masas puntuales (o cargas puntuales) que interaccionan entre sí con fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. Por estático queremos indicar que todas las masas están en reposo. Este resultado se hace aparente si se estudian las figs. 9.9 y 9.10, que muestran líneas de igual valor de la función potencial debida a dos y cuatro masas iguales en posiciones fijas. La posición donde se cortan las equipotenciales es una posición de equilibrio. Cuando nos desplazamos de esta posición, la fuerza tiene la dirección de la equipotencial inferior, es decir, el potencial más negativo. Obsérvese que en el caso de las dos masas, una masa de prueba desplazada hacia arriba experimentará una fuerza de retroceso hacia el punto de equilibrio, pero cuando se desplace lateralmente experimentará una fuerza que tenderá a alejarla de dicho punto. Para alcanzar el equilibrio estable, la fuerza debe dirigirse hacia el punto de equilibrio independiente de

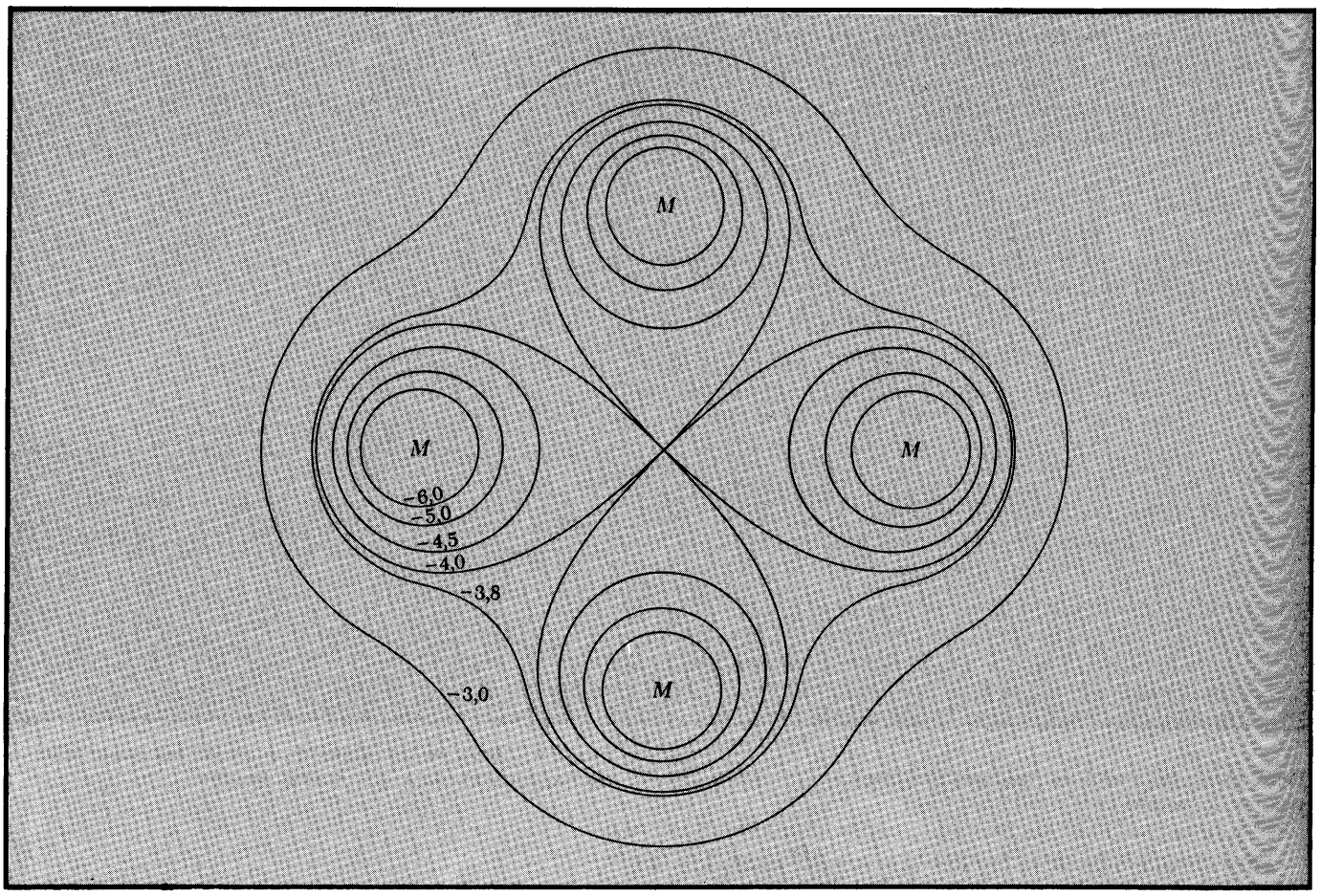


FIG. 9.10 Mapa de las líneas de nivel de las superficies equipotenciales para cuatro masas iguales. Los números son completamente arbitrarios.

la dirección de desplazamiento (véase Cap. 5, pág. 162). La fuerza es inversamente proporcional a la distancia entre equipotenciales y así es de esperar que cuando pasamos de dos a cuatro, a ocho o a un número muy grande de masas sobre una esfera, la fuerza llegaría a ser cero y podría incluso volver hacia el centro. Pero como sabemos, o al menos podemos deducir de la Ec. (9.14), la fuerza justamente se anula y alcanzamos un estado de equilibrio neutro.

ÓRBITAS: ECUACIÓN Y EXCENTRICIDAD

Hemos ya resuelto el problema de una masa que ejecuta una órbita circular en un campo de fuerzas atractivas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. Para esta órbita debe existir una relación especial entre la velocidad y la distancia. En el Cap. 3 (págs. 71 y 72), deducíamos esta relación. Formalmente $-(Mv^2/r)\hat{\mathbf{r}}$ es la fuerza centrípeta y el signo menos indica

que está dirigida hacia el centro del círculo. Esta debe ser igual a la fuerza $(C/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ [Ec. (9.11)] y así vemos que, a menos que C sea negativa (fuerza atractiva) no existirá una órbita circular. Si $C = -GMM_2$, entonces $v = (GM_2/r)^{\frac{1}{2}}$.

¿Cuál es la forma de la órbita si no se cumple esta relación especial? Este problema se denomina frecuentemente *problema de Kepler*, pues fue Kepler quien descubrió que las órbitas de los planetas eran elípticas en el campo de fuerzas del Sol, el cual más tarde Newton descubrió que se trataba de un campo que seguía la ley de la inversa del cuadrado de la distancia. En primer lugar trataremos el caso en que el origen de la fuerza para $r = 0$ está fijo. Este caso es conceptualmente simple, pero como veremos más adelante (pág. 298), el problema real de dos masas cualesquiera puede reducirse a éste. Nuestra ecuación del movimiento es entonces

$$M\mathbf{a} = \frac{C}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Aquí no hemos supuesto el movimiento circular simple y dejamos sin especificar el tipo de fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Observemos el hecho importante de que si C es negativa, la fuerza es atractiva y si C es positiva, la fuerza es repulsiva.

¿Qué coordenadas conviene tomar? En primer lugar, ¿cuántas coordenadas necesitamos? ¿Tres? No, sólo dos, ya que el movimiento se producirá en un plano; el plano está determinado por la velocidad vectorial de la masa y el radio vector $\mathbf{r}$, pues la componente de la velocidad perpendicular a este plano es cero y la fuerza perpendicular es también nula. Por tanto, esta componente de la velocidad debe permanecer nula. Es fácil imaginar que r y θ, como en la fig. 9.11, son más fáciles de usar que x e y. ¿Cuál es la aceleración en función de estas coordenadas y los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$? Según la Ec. (2.30)

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Por tanto, nuestras ecuaciones del movimiento son

$$M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{C}{r^2} \qquad \frac{d}{dt}(Mr^2\dot{\theta}) = 0$$

La segunda es fácil de integrar una vez y nos da

$$Mr^2\dot{\theta} = J \tag{9.21}$$

en donde J es el momento cinético definido en el Cap. 6. Reemplazando $\dot{\theta}$ en la primera ecuación por J/Mr^2 resulta

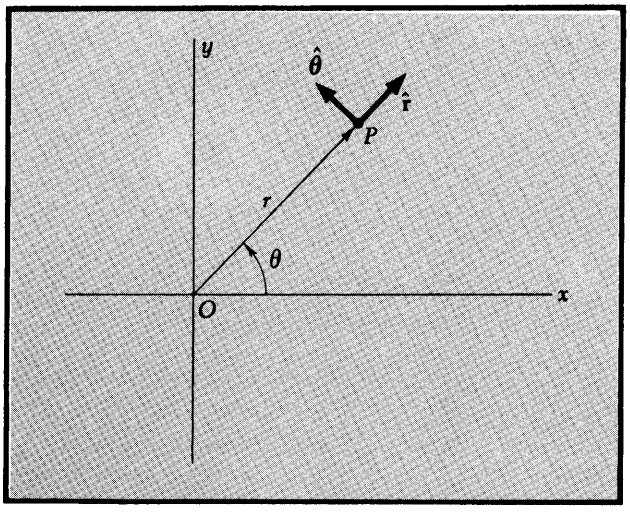


FIG. 9.11 Sistema de coordenadas polares planas adecuado para describir el movimiento de una masa M, en el punto P, alrededor del centro fijo de la fuerza O: $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ son vectores unitarios.

$$\ddot{r} - r\frac{J^2}{M^2r^4} = \ddot{r} - \frac{J^2}{M^2r^3} = \frac{C}{Mr^2} \tag{9.22}$$

Desgraciadamente esta ecuación diferencial no se puede resolver directamente, pero recordemos que estamos interesados en la forma de la órbita con r en función de θ. Así, pues, eliminemos t de las Ecs. (9.21) y (9.22):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{J}{Mr^2}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2}\left(\frac{J}{Mr^2}\right)^2 - \frac{2J}{Mr^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{J}{Mr^2}$$

$$= \frac{J^2}{M^2r^4}\left[\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] \tag{9.23}$$

De nuevo esto no nos proporciona una ecuación familiar y por ello ensayaremos la función

$$w(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

$$\frac{dw}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

Observemos que la combinación de este resultado con la Ec. (9.23) nos da

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{J^2}{M^2r^2}\frac{d^2w}{d\theta^2}$$

de donde, reemplazando $1/r$ por ω y utilizando la ecuación (9.22) se obtiene

$$-\frac{J^2}{M^2}\frac{d^2w}{d\theta^2} - \frac{J^2}{M^2}w = \frac{C}{M} \quad \text{o} \quad \frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{CM}{J^2}$$

Esta ecuación fue encontrada en el Cap. 7, (7.1), y la solución es

$$w = A\cos(\theta + \phi) - \frac{CM}{J^2}$$

(En este caso se acostumbra a usar el coseno en vez del seno.)

Como la orientación de la órbita en el plano $r\theta$ es poco importante, sea $\phi = 0$ y resulta

$$\frac{1}{r} = -\frac{CM}{J^2} + A\cos\theta \tag{9.24}$$

Conviene utilizar la ecuación energética para determinar la constante A, ya que la energía total E es fácil de inter-

pretar en función de los tipos de órbita. La energía total es (véase fig. 9.12)

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{C}{r} = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{C}{r}$$
$$= \frac{1}{2}M\left(\frac{J^2}{M^2r^4}\right)\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] + \frac{C}{r} \qquad (9.25)$$

en donde hemos empleado las Ecs. (9.21) y (9.23) para obtener la segunda línea a partir de la primera. Obsérvese que la energía potencial C/r es positiva para una fuerza respulsiva (C positiva) y negativa para una fuerza atractiva (C negativa). Si ahora utilizamos la Ec. (9.24) y su derivada para sustituir r y $dr/d\theta$ en la Ec. (9.25) obtenemos una ecuación en la que interviene sólo A^2 y otras constantes. Despejando A en función de las otras magnitudes resulta

$$A = \left(\frac{2ME}{J^2} + \frac{C^2M^2}{J^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{CM}{J^2}\left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

de modo que nuestro resultado final para la órbita es

$$\boxed{\frac{1}{r} = -\frac{CM}{J^2}\left[1 - \left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2M}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right]} \qquad (9.26)$$

Si la fuerza es atractiva, C será negativa, como ocurre, por ejemplo, en el caso gravitatorio donde $C = -GMM_2$. Entonces la Ec. (9.26) es

$$\frac{1}{r} = \frac{GM^2M_2}{J^2}\left[1 - \left(1 + \frac{2EJ^2}{G^2M^3M_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right]$$

Ahora (9.26) es precisamente lo que se denomina forma polar de la ecuación de una sección cónica (elipse, circunferencia, parábola o hipérbola). Conviene recordar leyendo un libro de geometría analítica (o el Cap. 2, pág. 57), que la ecuación de una sección cónica general (sección de un cono obtenida mediante un plano) puede escribirse como

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se}(1 - e\cos\theta) \qquad (9.27)$$

La constante e es la denominada *excentricidad*. La constante s determina la escala de la figura. Los cuatro tipos de curvas posibles descritas por (9.27) son

Hipérbola	$e > 1$
Parábola	$e = 1$

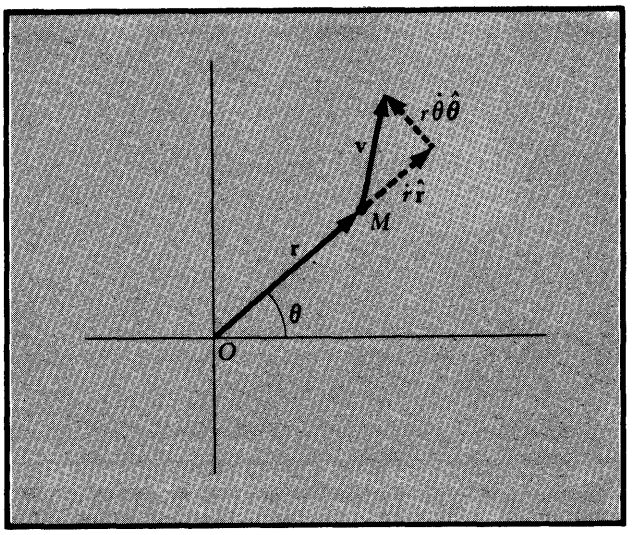


FIG. 9.12 Descomposición de la velocidad **v** de la partícula en componentes radial y angular. La energía cinética es $Ec = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. La energía total es $E = Ec + U = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 + U$.

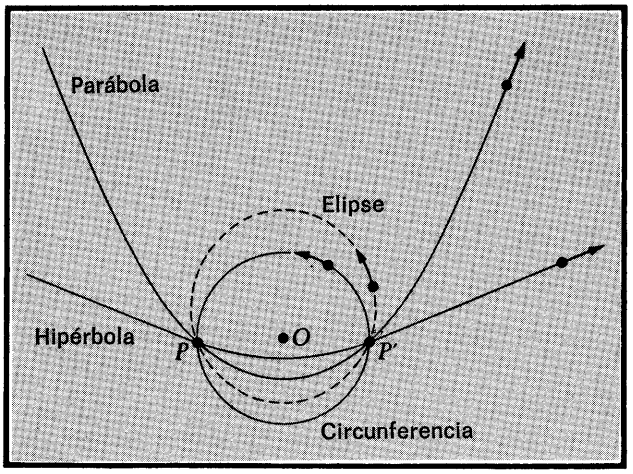


FIG. 9.13 Orbitas de partículas con la misma masa reducida M y momento cinético **J**, pero energías diferentes E, respecto a un centro de fuerzas fijo O. Las órbitas se cortan todas en P y P'.

Orbita	*Excentricidad*	
Circunferencia	$e = 0$	$E < 0$
Elipse	$e = \frac{1}{3}$	
Parábola	$e = 1$,	$E = 0$
Hipérbola	$e = 3$,	$E > 0$

TABLA 9.1

θ	$\cos\theta$	$2(1 - \frac{1}{2}\cos\theta)$	r
0°	1,00	1,00	1,00
20°	0,94	1,06	0,94
40°	0,77	1,23	0,81
60°	0,50	1,50	0,67
80°	0,17	1,83	0,55
90°	0,00	2,00	0,50
100°	−1,17	2,17	0,46
120°	−0,50	2,50	0,40
140°	−0,77	2,77	0,36
160°	−0,94	2,94	0,34
180°	−1,00	3,00	0,33

Elipse $0 < e < 1$
Circunferencia $e = 0$

No es difícil ver las principales características de la órbita a partir de los valores de e. (Véase también figura 9.13.) Si $e = 0$, r es una constante. Si $0 < e < 1$, r debe permanecer finito y varía desde $se/(1 - e)$ a $se/(1 + e)$. Sin embargo, si $e > 1$, existirán dos valores de $\cos\theta$ para los cuales $1 - e\cos\theta$ se hace cero y r tiende a infinito, como corresponde a una hipérbola. La parábola con $e = 1$ hace r infinito sólo para $\theta = 0$, pero lo hace igual para valores tanto positivos como negativos de θ. Según las Ecs. (9.26) y (9.27)

$$e = \left(1 + \frac{2EJ^2}{C^2M}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.28}$$

Por consideraciones energéticas y teniendo en cuenta la Ec. (9.25), resulta que con una fuerza repulsiva $C > 0$, E debe ser positiva, e siempre mayor que 1 y la órbita siempre una hipérbola. Por otra parte, con una fuerza atractiva $C < 0$ (para el caso gravitatorio $C = -GMM_2$, en donde para el sistema solar M_2 es la masa del Sol) E será positiva si la energía cinética es de magnitud mayor que la energía potencial, y la energía cinética será todavía positiva para $r = \infty$; E será negativa en caso contrario y la partícula no podrá alcanzar nunca el infinito. La parábola corresponde al caso en que $E = 0$, en que la partícula puede justamente alcanzar el infinito. Es interesante tener en cuenta que la cuestión de si una órbita es elíptica o hiperbólica, en el caso de una fuerza atractiva, viene determinada solamente por el signo de E y no por el valor de J. Naturalmente, cuanto mayor es J para un valor determinado de r, mayor es la energía cinética y mayor será el valor de E; pero independientemente del valor de J, siempre es posible tener órbitas tales que $E < 0$.

Un procedimiento laborioso pero eficaz de demostrarse uno mismo que esta ecuación puede dar una curva que al menos se parezca a una elipse, consiste en calcular r para una intervalo de valores de θ. Los resultados pueden representarse convenientemente sobre papel gráfico polar, que puede adquirirse fácilmente. Dicho papel está marcado con líneas de radio constante y de ángulo constante. En la Tabla 9.1 se recogen unos cálculos aproximados obtenidos de la Ec. (9.27) para el caso $s = 1$ y $e = 1/2$; el lector puede representar estos valores de r en función de θ en el papel gráfico polar y confirmar que la curva tiene el aspecto de una elipse. Hágase un cálculo análogo para $s = 1$ y $e = 2$; esta curva es una hipérbola.

Una relación que conviene recordar sobre la excentricidad de una elipse se obtiene observando que los valores máximo y mínimo de r se obtienen con $\theta = \pi$ y $\theta = 0$, de modo que

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \tag{9.29}$$

En la fig. 9.14 se recogen algunas relaciones adicionales.

Orbita circular. Hemos deducido ya las condiciones de una órbita circular. Comprobemos que esto conduce a $e = 0$. Consideremos una órbita circular de un planeta de masa M alrededor de una estrella de masa M_2. Igualando la aceleración centrípeta con la fuerza gravitatoria resulta

$$\frac{Mv^2}{r} = \frac{GMM_2}{r^2}$$

El momento cinético es

$$J = Mvr = M\sqrt{\frac{GM_2}{r}}\,r = (GM^2M_2r)^{\frac{1}{2}}$$

y la energía total

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{GMM_2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GMM_2}{r}$$

Por tanto

$$e = \sqrt{1 + \left(-\frac{GMM_2}{r}\frac{M^2GM_2r}{G^2M^2M_2^2M}\right)} = 0$$

Algunos alumnos se inclinan a pensar que todas las órbitas cerradas deberán ser circulares. Para adquirir cierta familiaridad con las órbitas elípticas estúdiese la figura 9.15. En ella puede verse una familia de trayectorias de una partícula atraída hacia el origen O (marcado con una cruz) por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La familia se ha escogido de modo que todas las trayectorias pasan por un punto común P y en él se exige que la velocidad sea perpendicular a la línea OP. Las distintas órbitas vienen caracterizadas por diferentes valores de la velocidad en P. La velocidad general v_P se escribe convenientemente como

$$\frac{v_P}{v_0} \equiv \alpha$$

en donde v_0 es la velocidad correspondiente a la órbita *circular* centrada en O y que pasa por P. Para $\alpha = 1$,

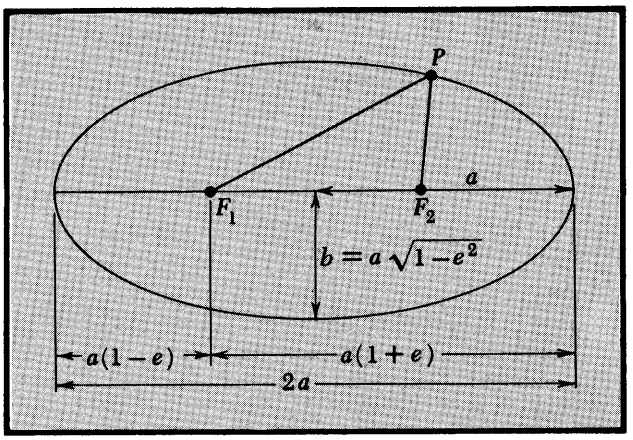


FIG. 9.14 Propiedades de la elipse: Para cualquier punto P, la distancia $F_1P + F_2P = \text{const} = 2a$. La ecuación de la elipse es

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e\cos\theta)} \qquad 0 < e < 1$$

El semieje menor viene dado por $b = a\sqrt{1 - e^2}$. El área de la elipse es πab.

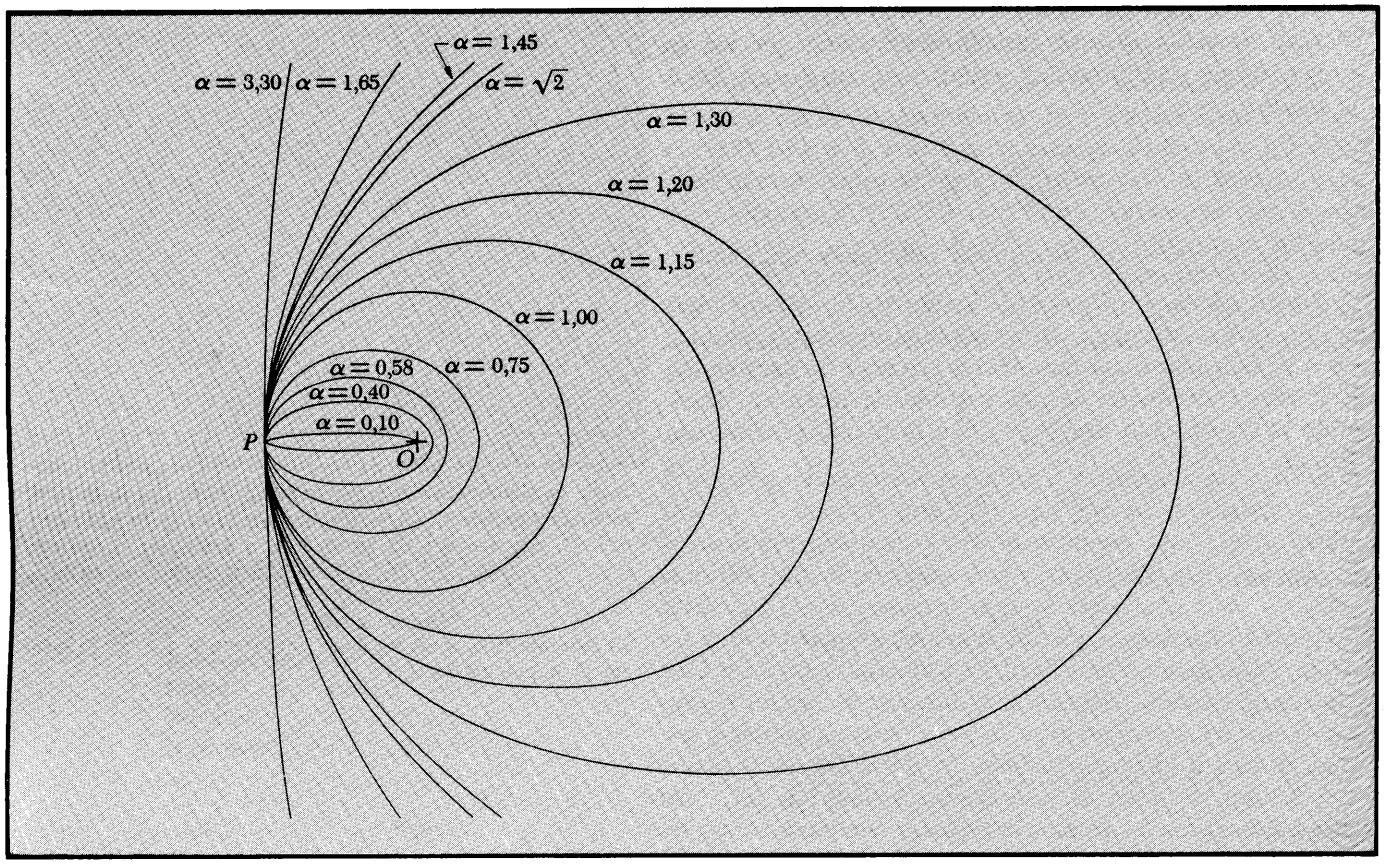


FIG. 9.15 Trayectorias que pasan por un punto común P y son normales a la línea OP trazada por el centro O. Llamando $\mathbf{v}_0$ a la velocidad de la órbita circular, el parámetro α queda definido por $v_P(\alpha) = \alpha v_0$. Se ve en la Ec. (9.31) que $E(\alpha) = (2 - \alpha^2)E_0$.

la órbita es circular; para $\alpha < \sqrt{2}$, es una elipse; para $\alpha = \sqrt{2}$ es una parábola; y para $\alpha > \sqrt{2}$ la órbita es una hipérbola. [Estos resultados se aclararán con la fórmula (9.31) más adelante.]

Mediante el cálculo de la energía, podremos comprobar que la transición entre las trayectorias abiertas y cerradas se verifica para $\alpha = \sqrt{2}$. En el punto P la energía total puede escribirse en la forma

$$E = \tfrac{1}{2}Mv_P^2 - \frac{GMM_2}{r_0} = \tfrac{1}{2}M\alpha^2 v_0^2 - \frac{GMM_2}{r_0}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - 1)Mv_0^2 + \tfrac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{GMM_2}{r_0}$$

$$= E_0 + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - 1)Mv_0^2 \quad (9.30)$$

en donde E_0 y v_0 se refieren a la energía y a la velocidad para la órbita circular y r_0 es la distancia entre P y O. Ahora bien, en la órbita circular

$$\frac{Mv_0^2}{r_0} = \frac{GMM_2}{r_0^2}$$

en donde el primer miembro es el producto de la masa por la aceleración centrípeta y el segundo la fuerza gravitatoria. Utilizando este resultado, podemos escribir la energía en la órbita circular como

$$E_0 = \tfrac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{GMM_2}{r_0} = \tfrac{1}{2}Mv_0^2 - Mv_0^2 = -\tfrac{1}{2}Mv_0^2$$

y la Ec. (9.30) puede escribirse

$$E = E_0 - (\alpha^2 - 1)E_0 = (2 - \alpha^2)E_0 = (\alpha^2 - 2)|E_0| \quad (9.31)$$

Si $\alpha^2 > 2$, la energía total es positiva y la trayectoria es abierta. Si $\alpha^2 < 2$, la energía total es negativa y la órbita es cerrada: la partícula no puede escapar hasta una distancia infinita. Si $\alpha^2 = 2$, la órbita es parabólica.

Leyes de Kepler. La determinación por Kepler de que las órbitas de los planetas eran elipses alrededor del Sol fue uno de los mayores descubrimientos experimentales en la historia de la humanidad. Junto con su formulación de las leyes empíricas del movimiento planetario proporcionó la prueba experimental primera para las leyes de Newton de la mecánica y para la teoría de la atracción gravitatoria. Kepler enunció las tres leyes esencialmente como sigue:

1. Todos los planetas describen en su movimiento órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.
2. Una recta trazada desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los cuadrados de los períodos de revolución de los diversos planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas. (Este enunciado es más general que la formulación original de Kepler.)

En toda nuestra discusión despreciamos la influencia de los demás planetas sobre el que está bajo consideración.

Acabamos de demostrar que las órbitas cerradas son elípticas. La segunda ley de Kepler fue estudiada en el Cap. 6, Ec. (6.36), en donde se demostró que era una simple consecuencia de la conservación del momento cinético.

Vamos a deducir a continuación la tercera ley de Kepler. Si dS es el área barrida en el tiempo dt por el radio vector que une el Sol con el planeta, entonces se encuentra

$$\frac{dS}{dt} = \frac{J}{2M} = \text{const} \quad (9.32)$$

en donde J es el momento cinético y M la masa reducida: Integrando (9.32) a lo largo de un período T del movimiento tendremos

$$S = \frac{JT}{2M} \qquad \text{o} \qquad T = \frac{2SM}{J} = \frac{2\pi abM}{J} \tag{9.33}$$

Aquí $S = \pi ab$ es el área de la elipse, cuyo semieje mayor es a y el menor b.

Ahora bien, $2a = r_{\max} + r_{\min}$ es una propiedad evidente de la elipse; utilizando (9.27) tendremos

$$2a = \frac{se}{1+e} + \frac{se}{1-e} = \frac{2se}{1-e^2}$$

En las Ecs. (9.26) y (9.27) esta ecuación se convierte en

$$2a = \frac{2}{1-e^2} \cdot \frac{J^2}{GM^2M_2} \tag{9.34}$$

Elevando al cuadrado la Ec. (9.33) y teniendo en cuenta (9.34) para J^2 resulta

$$T^2 = \frac{(2\pi abM)^2}{aGMM_2M(1-e^2)} = \frac{4\pi^2ab^2M}{GMM_2(1-e^2)} \tag{9.35}$$

Pero es una propiedad de la excentricidad que (véase figura 9.14)

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

de modo que la Ec. (9.35) se reduce a

$$T^2 = \frac{4\pi^2a^3}{GM_2} \tag{9.36}$$

La Ec. (9.36) debe comprobarse para una órbita circular.

La Tabla 9.2 nos da detalles de las órbitas de los planetas principales. La inclinación dada en la tabla es el ángulo formado entre el plano de la órbita de un planeta y el plano de la órbita terrestre (la elíptica). Obsérvese que la de la Tierra es casi circular. Una *unidad astronómica de longitud* (U.A.) se define como la semisuma de las distancias mayor y menor de la Tierra al Sol.

$$1 \text{ U.A.} = 1{,}495 \times 10^{13} \text{ cm}$$

Esta unidad no debe confundirse con un parsec. Un *parsec* es la distancia a la que una unidad astronómica subtiende un ángulo de un segundo de arco.

$$1 \text{ parsec} = 3{,}084 \times 10^{18} \text{ cm}$$

La distancia del Sol a la estrella más cercana es 1,31 parsecs.

TABLA 9.2

Planeta	*Semieje mayor, U. A.*	*Período s*	*Excentricidad*	*Inclinación*	*Masa (relativa al Sol), g*
Mercurio	0,387	$7{,}60 \times 10^{6}$	0,2056	7°00	$1{,}671 \times 10^{-7}$
Venus	0,723	$1{,}94 \times 10^{7}$	0,0068	3°24′	$2{,}448 \times 10^{-6}$
Tierra	1,000	$3{,}16 \times 10^{7}$	0,0167	···	$3{,}003 \times 10^{-6}$
Marte	1,523	$5{,}94 \times 10^{7}$	0,0934	1°51′	$3{,}227 \times 10^{-7}$
Júpiter	5,202	$3{,}74 \times 10^{8}$	0,0481°	1°18′	$9{,}548 \times 10^{-4}$
Saturno	9,554	$9{,}30 \times 10^{8}$	0,0530°	2°29′	$2{,}858 \times 10^{-4}$
Urano	19,218	$2{,}66 \times 10^{9}$	0,0482°	0°46′	$4{,}361 \times 10^{-5}$
Neptuno	30,109	$5{,}20 \times 10^{9}$	0,0054°	1°46′	$5{,}192 \times 10^{-5}$
Plutón	39,60	$7{,}82 \times 10^{9}$	0,251°	17° 8′	$5{,}519 \times 10^{-7}$

° La excentricidad varía con el tiempo debido a las perturbaciones ocasionadas por otros planetas. Estos son los valores establecidos para 1972.

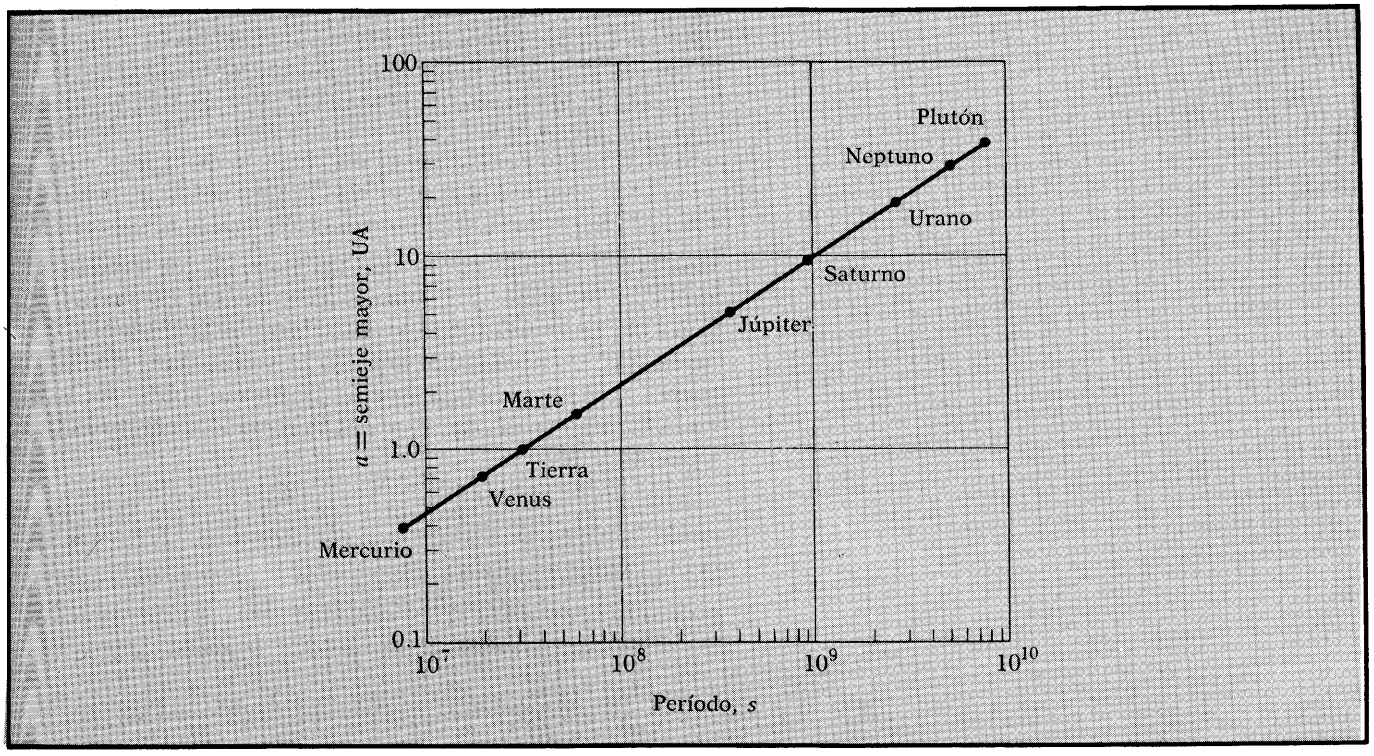
Comprobemos la tercera ley de Kepler para la órbita de Urano comparada con la de la Tierra. El cubo de la razón de las longitudes de los semiejes mayores es

$$\left(\frac{19{,}22}{1}\right)^3 \approx 71{,}0 \times 10^2$$

El cuadrado de la razón de los períodos es

$$(84{,}2)^2 \approx 70{,}9 \times 10^2$$

FIG. 9.16 A partir de la pendiente de esta línea recta podemos ver fácilmente que el período T varía como $a^{3/2}$.



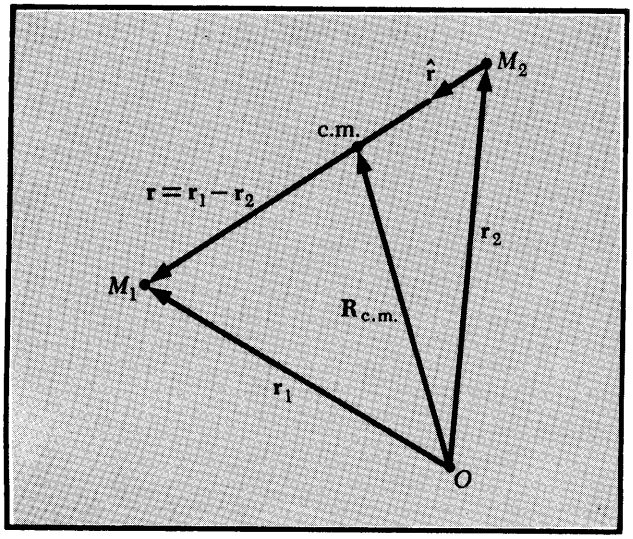


FIG. 9.17 M_1 y M_2 interaccionan entre sí por medio de una fuerza central colineal con el vector $\mathbf{r}$; $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los vectores de posición de M_1 y M_2 referidos a un determinado sistema inercial con origen O. En ausencia de fuerzas externas $\mathbf{R}_{c.m.} = \text{const.}$ (Ver pág. 184.)

que concuerda perfectamente. (Se ha utilizado en las operaciones una regla de cálculo pequeña; el lector deberá realizar la misma comprobación para la órbita de Mercurio comparada con la de la Tierra.) En el gráfico de la fig. 9.16 hemos utilizado un papel doble logarítmico para representar los datos de los planetas; la pendiente de la línea recta nos dará el exponente de la ley. (Comprobarlo.)

Newton comprobó también la tercera ley de Kepler con los períodos de revolución observados de las cuatro lunas mayores de Júpiter, encontrando que el acuerdo era muy bueno.

Problema de los dos cuerpos: masa reducida. Hemos resuelto el problema de una masa que se mueve en el campo de una masa infinitamente grande o estacionaria. Hemos indicado también que esta solución puede aplicarse al caso en que las masas son comparables, es decir, ninguna de las dos es infinitamente grande. Veamos cómo puede hacerse esto. En el proceso introduciremos un nuevo concepto, el de *masa reducida.*

Supongamos que no existen fuerzas externas, de modo que las únicas fuerzas que actúan son las de interacción mutua. Entonces, como se indicó en el Cap. 6, la velocidad del centro de masas es constante y podemos hacer igual a cero esta velocidad mediante una transformación de Galileo apropiada. (Si existieran fuerzas externas, el centro de masas sería acelerado y referiríamos nuestra solución a este punto acelerado.) La fig. 9.17 muestra los vectores utilizados:

$$\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}$$

Obsérvese en este punto que las fuerzas que actúan sobre M_1 y M_2 están dirigidas hacia el centro de masas, ya que éste, necesariamente, se encuentra en la línea que une las masas. Como nuestro análisis es válido para cualquier fuerza central, generalizaremos la fuerza sobre M_1 y M_2 en la forma $F(r_{12})\hat{\mathbf{r}}$, donde r_{12} es la distancia comprendida entre M_1 y M_2:

$$M_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = F(r_{12})\hat{\mathbf{r}} \qquad M_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -F(r_{12})\hat{\mathbf{r}}$$

En lugar de sumar estas dos ecuaciones, lo que conduciría a la constancia de la cantidad total del movimiento, las restamos, después de dividir por la masa :

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{dt^2} = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)F(r_{12})\hat{\mathbf{r}}$$

En la fig. 9.17 vemos que $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, el vector posición de M_1 respecto a M_2 y que el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ está dirigido a lo largo de $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Si ahora introducimos la *masa reducida* μ,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$$

$$\boxed{\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}} \tag{9.37}$$

obtenemos $\mu\, d^2\mathbf{r}/dt^2 = F(r_{12})\hat{\mathbf{r}}$. En el caso de la fuerza gravitatoria,

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{9.38}$$

que ya hemos resuelto.

Utilizaremos las Ecs. (9.37) y (9.38) del siguiente modo: Recuérdese que $\mathbf{r}$ es el vector dirigido de M_2 a M_1. Con la Ec. (9.38) podemos hallar el movimiento de M_1 respecto a M_2 exactamente *como si* M_2 fuese el origen fijo de un sistema inercial, excepto que debemos utilizar μ en lugar de M_1 para la masa. Así, pues, se reduce el problema de dos cuerpos al de uno solo que comprende el movimiento de un cuerpo de masa μ. Pero, ¡obsérvese que la fuerza en (9.38) *no es* $-G\mu M_2/r^2$! Para hallar la órbita del problema de dos cuerpos necesitamos únicamente resolver este problema de un solo cuerpo. La reducción del problema de dos cuerpos al de uno solo puede realizarse del mismo modo para cualquier fuerza central; la masa reducida aparecerá siempre.

¿Cómo se definen ahora las constantes J y E de nuestra solución de un cuerpo? Utilizaremos la fig 9.18 con el origen en el centro de masas, teniendo especial cuidado en advertir que $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son distintos de los utilizados en la fig. 9.17. Como antes, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, pero

$$M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2 = 0$$

y, por tanto,

$$M_1\mathbf{r}_1 = -M_2\mathbf{r}_2 \qquad \text{y} \qquad M_1\dot{\mathbf{r}}_1 = -M_2\dot{\mathbf{r}}_2$$

en virtud de la definición del centro de masas. Ahora bien, el valor de $\mathbf{J}$ alrededor del centro de masas u origen es, de acuerdo con la última relación,

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}_1 \times M_1\dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times M_2\dot{\mathbf{r}}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times M_1\dot{\mathbf{r}}_1$$
$$= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) = \mathbf{r} \times \mu\dot{\mathbf{r}}$$

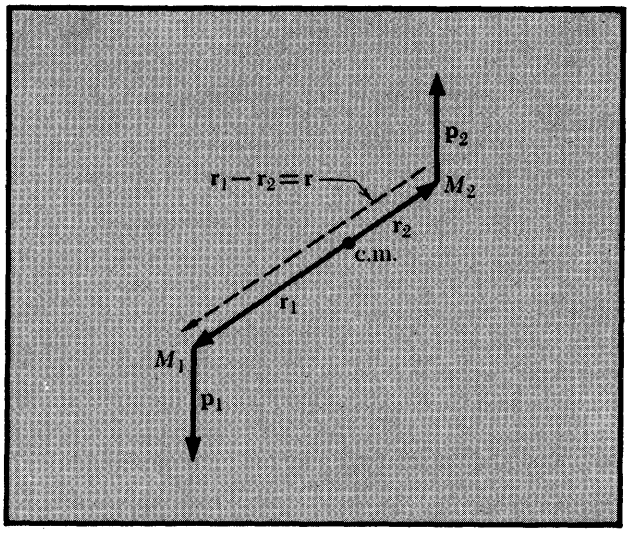


FIG. 9.18 En un sistema inercial con el centro de masas en reposo y en el origen, $M_1\mathbf{r}_1 = -M_2\mathbf{r}_2$. El momento cinético de M_1 alrededor del centro de masas, más el momento cinético de M_2 alrededor del centro de masas es constante, el momento cinético total $\mathbf{J}$. Obsérvese la diferencia de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ de los correspondientes en la figura 9.17.

En la fig. 9.17 vemos que $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, el vector posición de M_1 respecto a M_2 y que el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ está dirigido a lo largo de $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Si ahora introducimos la *masa reducida* μ,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$$

$$\boxed{\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}} \tag{9.37}$$

obtenemos $\mu\, d^2\mathbf{r}/dt^2 = F(r_{12})\hat{\mathbf{r}}$. En el caso de la fuerza gravitatoria,

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{9.38}$$

que ya hemos resuelto.

Utilizaremos las Ecs. (9.37) y (9.38) del siguiente modo: Recuérdese que $\mathbf{r}$ es el vector dirigido de M_2 a M_1. Con la Ec. (9.38) podemos hallar el movimiento de M_1 respecto a M_2 exactamente *como si* M_2 fuese el origen fijo de un sistema inercial, excepto que debemos utilizar μ en lugar de M_1 para la masa. Así, pues, se reduce el problema de dos cuerpos al de uno solo que comprende el movimiento de un cuerpo de masa μ. Pero, ¡obsérvese que la fuerza en (9.38) *no es* $-G\mu M_2/r^2$! Para hallar la órbita del problema de dos cuerpos necesitamos únicamente resolver este problema de un solo cuerpo. La reducción del problema de dos cuerpos al de uno solo puede realizarse del mismo modo para cualquier fuerza central; la masa reducida aparecerá siempre.

¿Cómo se definen ahora las constantes J y E de nuestra solución de un cuerpo? Utilizaremos la fig 9.18 con el origen en el centro de masas, teniendo especial cuidado en advertir que $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son distintos de los utilizados en la fig. 9.17. Como antes, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, pero

$$M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2 = 0$$

y, por tanto,

$$M_1\mathbf{r}_1 = -M_2\mathbf{r}_2 \qquad \text{y} \qquad M_1\dot{\mathbf{r}}_1 = -M_2\dot{\mathbf{r}}_2$$

en virtud de la definición del centro de masas. Ahora bien, el valor de $\mathbf{J}$ alrededor del centro de masas u origen es, de acuerdo con la última relación,

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}_1 \times M_1\dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times M_2\dot{\mathbf{r}}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times M_1\dot{\mathbf{r}}_1$$
$$= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) = \mathbf{r} \times \mu\dot{\mathbf{r}}$$

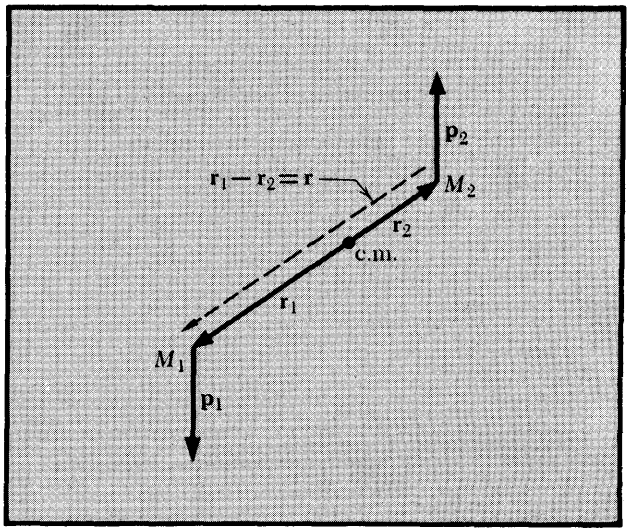


FIG. 9.18 En un sistema inercial con el centro de masas en reposo y en el origen, $M_1\mathbf{r}_1 = -M_2\mathbf{r}_2$. El momento cinético de M_1 alrededor del centro de masas, más el momento cinético de M_2 alrededor del centro de masas es constante, el momento cinético total **J**. Obsérvese la diferencia de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ de los correspondientes en la figura 9.17.

La menor de ambas masas tiende a predominar en el valor de la masa reducida. La discrepancia de μ respecto a m es fácilmente detectable en el espectro del hidrógeno atómico.

El positronio es un átomo semejante al hidrógeno formado por un positrón y un electrón sin ningún protón. Un positrón es una partícula que tiene una masa igual a la del electrón pero con una carga positiva e. El resultado (9.41) sugiere correctamente que puede existir una semejanza entre las líneas espectrales del hidrógeno atómico y las del positronio, con tal que tengamos en cuenta el hecho de que la masa reducida del positronio es aproximadamente la mitad de la del hidrógeno atómico. La interacción coulombiana entre un electrón y un positrón tiene la misma forma que la existente entre un electrón y un protón. Los niveles energéticos del hidrógeno y del positronio se ven en la figura 9.19.

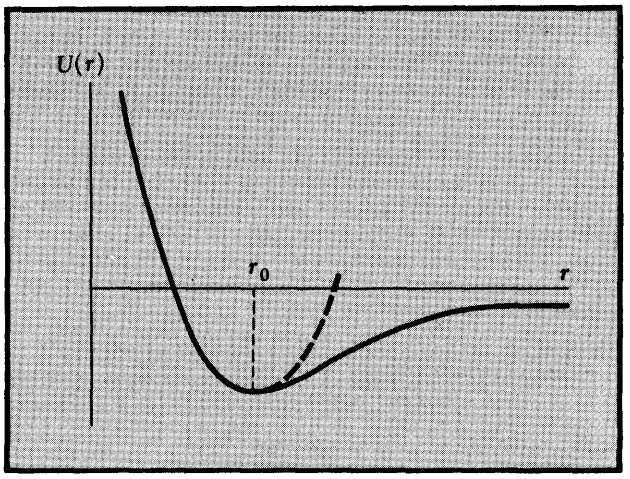


FIG. 9.20 Gráfico de la energía potencial en función de la distancia entre dos átomos combinados para formar una molécula. La posición de equilibrio está en r_0. La curva a trazos es la parábola que corresponde a la función energía potencial cuadrática dada en la ecuación (9.42).

EJEMPLO

Vibración de una molécula diatómica. Dos átomos ligados formando una molécula estable tendrán una energía potencial que es una función cuadrática de la diferencia $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ entre su separación $\mathbf{r}$ y la de equilibrio $\mathbf{r}_0$:

$$U(r) = \tfrac{1}{2}C(r - r_0)^2 \tag{9.42}$$

con tal que $(r - r_0)/r_0 \ll 1$ (fig. 9.20). La fuerza está dirigida a lo largo de la línea que conecta los átomos y viene dada (si la molécula *no* está girando) por

$$F = -\frac{dU}{d(r - r_0)} = -C(r - r_0) \tag{9.43}$$

Esta ecuación describe un oscilador armónico de constante C. Las masas de los átomos son M_1 y M_2. ¿Cuál es la frecuencia de vibración?

En una vibración libre ambos átomos estarán en movimiento mientras que el centro de masas permanecerá en reposo. La ecuación del movimiento viene dada naturalmente por (9.38) en la que ha de sustituirse la fuerza gravitatoria por (9.43):

$$\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -C(r - r_0)\hat{\mathbf{r}} \tag{9.44}$$

Si la molécula no está girando, la dirección de $\hat{\mathbf{r}}$ es fija y, por consiguiente,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{r}}$$

(La derivada de $\mathbf{r}$ no es esta sencilla fórmula si la dirección de $\hat{\mathbf{r}}$ está variando.) Por tanto, podemos volver a escribir (9.44) como una ecuación escalar:

$$\mu\frac{d^2r}{dt^2} = -C(r - r_0)$$

que es la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple de frecuencia angular

$$\omega_0 = \left(\frac{C}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.45}$$

Se sabe a partir de mediciones espectroscópicas que las frecuencias de vibración fundamentales de las moléculas HF y HCl son

$$\omega_0(\mathrm{HF}) = 7{,}55 \times 10^{14}\ \mathrm{rad/s}$$
$$\omega_0(\mathrm{HCl}) = 5{,}47 \times 10^{14}\ \mathrm{rad/s}$$

Utilicemos estos datos para comparar las constantes de las fuerzas C_{HF} y C_{HCl}. La masa reducida del HF es, en unidades de masa atómica

$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{HF}}} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{19} = \frac{20}{19} \qquad \mu_{\mathrm{HF}} \approx 0{,}950$$
$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{HCl}}} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{35} = \frac{36}{35} \qquad \mu_{\mathrm{HCl}} \approx 0{,}973$$

(Se ha utilizado la masa atómica del isótopo más abundante del cloro, Cl^{35}.) Obsérvese que las masas reducidas tienen un valor muy parecido. Ello se debe a que el hidrógeno, por ser más ligero, contribuye en mayor grado a la oscilación.

Ahora, de (9.45) tendremos para la razón de las constantes de la fuerza

$$\frac{C_{\mathrm{HF}}}{C_{\mathrm{HCl}}} = \frac{(\mu\omega_0^2)_{\mathrm{HF}}}{(\mu\omega_0^2)_{\mathrm{HCl}}} \approx \frac{54{,}0 \times 10^{28}}{29{,}0 \times 10^{28}} \approx 1{,}86$$

mientras que para una constante aislada se tiene

$$C_{\mathrm{HF}} \approx (54 \times 10^{28})(1{,}66 \times 10^{-24}) \approx 9{,}0 \times 10^{5}\ \mathrm{dina/cm}$$

Se ha incluido aquí el factor que convierte la masa atómica en gramos.

¿Es razonable este valor de C? Supóngase que deformamos la molécula (cuya longitud es próxima a 1 Å $= 1 \times 10^{-8}$ cm) en 0,5 Å. El trabajo necesario será probablemente el suficiente para romper la molécula en átomos separados de H y F. Según (9.42) el trabajo en deformar 0,5 Å será del orden de magnitud

$$\tfrac{1}{2}C(r - r_0)^2 \approx \tfrac{1}{2}(9 \times 10^{5})(0{,}5 \times 10^{-8})^2 \approx 1 \times 10^{-11}\ \mathrm{erg}$$

o bien $\approx (1 \times 10^{-11})/(1{,}6 \times 10^{-12}) \approx 6$ eV, valor que es razonable para una energía de descomposición en átomos separados. Al hacer esta estimación hemos utilizado la fórmula (9.42) en una región en la que no es válida. La energía potencial intermolecular real tendrá una forma más bien parecida a la que se muestra en la figura 9.20.

PROBLEMAS

1. *Atracción gravitatoria de una línea recta infinita.* Demostrar que $2G\rho M_1/R$ es la fuerza gravitatoria ejercida sobre una masa M_1 situada a una distancia R de una recta de longitud infinita y cuya densidad de masa por unidad de longitud es ρ. (Hay que tener cuidado con la dirección de la fuerza debida a un elemento de recta.)

2. *Atracción gravitatoria de una recta finita.* Sea un punto x sobre la perpendicular media a un segmento rectilíneo de longitud $2L$ y masa M; el origen de coordenadas está sobre la recta.

(*a*) Encontrar una expresión para la energía potencial de una masa puntual m referida a $U = 0$ para $x = \infty$.

Sol. $-(GMm/L) \log \{[L + (x^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}]/x\}$.

(*b*) Hallar una expresión para la fuerza gravitatoria ejercida por la línea sobre una masa puntual m en x. ¿En qué dirección actúa la fuerza?

(*c*) Demostrar que el resultado de la parte (*a*) se reduce a $U \approx -GMm/x$ cuando $x \gg L$.

Considérese un alambre delgado de 2 m de longitud y cuya densidad lineal es 2 g/cm.

(*d*) ¿Cuál es el valor (en dinas) de la fuerza gravitatoria ejercida por el alambre sobre una masa puntual $m = 0{,}5$ g situada sobre el eje longitudinal del alambre a una distancia de 3 m de su centro? *Sol.* $1{,}7 \times 10^{-10}$ dinas.

(*e*) ¿Cuál es la energía potencial (en erg) de la masa puntual en el campo de fuerzas del alambre, en la posición dada en la parte (*d*)? *Sol.* $-4{,}6 \times 10^{-7}$ erg.

3. *Energía potencial gravitatoria de un conjunto de estrellas.* Hallar la energía potencial gravitatoria mutua (en erg) de un sistema de ocho estrellas, todas de masa igual a la del Sol, situadas en los vértices de un cubo cuya arista es 1 parsec. (Omítase la auto-energía de cada estrella.)

Sol. 2×10^{42} erg.

4. ***Agujero a través de la Tierra.*** **Consideremos un agujero taladrado hasta el centro de la Tierra. Demostrar que si se desprecian la rotación de la Tierra y el rozamiento, el movimiento de la partícula será armónico simple. Determinar el período. Comentar la relación que existe entre éste y el período de un satélite que gira próximo a la superficie de la Tierra. (*Nota:* La rotación de la Tierra no evitaría que el movimiento dejase de ser armónico simple, pero el período cambiaría ligeramente. ¿Cómo podría demostrarse que esto es cierto? ¿Cómo vendría afectado el período?)**

5. *Movimiento en una galaxia.* Considérese una distribución esférica uniforme de estrellas en una galaxia de masa total M y radio R_0. Cierta estrella de masa M_s a una determinada distancia $r < R_0$ del centro se moverá bajo la acción de una fuerza central cuyo módulo depende de la masa incluida dentro de la esfera de radio r.

(*a*) ¿Cuál es la fuerza en r? *Sol.* $F = GM_sMr/R_0^3$.

(*b*) ¿Cuál es la velocidad de la estrella si se mueve alrededor del centro en una órbita circular?

Sol. $v = (GMr^2/R_0^3)^{\frac{1}{2}}$.

6. *Orbita de los meteoritos.* Un meteorito tiene una velocidad de $7{,}0 \times 10^6$ cm/s en el perihelio cuando su distancia al Sol es de $5{,}0 \times 10^{12}$ cm. **Determinar su distancia y velocidad en el afelio y la excentricidad de su órbita utilizando las Ecs. (9.21), (9.25) y (9.28).**

Sol.: Distancia $= 5{,}5 \times 10^{13}$ cm; velocidad $= 6{,}3 \times 10^5$ cm/s; $\epsilon = 0{,}83$.

7. *Satélite de la Tierra.* Imaginar que la Luna no tiene masa, de modo que no influye sobre la órbita de un satélite. ¿Qué velocidad es necesaria para que un satélite perpendicular a un radio vector desde el centro de la Tierra y a 321,8 km por encima de la superficie terrestre tenga el otro extremo de su órbita elíptica en la Luna (386 160 km del centro de la Tierra)?

8. *Velocidad de escape.* Despreciando el rozamiento, determinar la velocidad que debe darse a un satélite en la superficie de la Tierra para que alcance justamente el punto situado entre la Tierra y la Luna, donde la fuerza gravitatoria es cero. Si justamente sobrepasara este punto, ¿con qué velocidad caería sobre la Luna?

Sol. v(escape) $= 1{,}1 \times 10^6$ cm/s.

9. *Variación en la masa solar.* ¿Qué pasaría con la órbita terrestre, supuesta circular, si la masa del Sol se redujera bruscamente a la mitad de su valor actual?

10. *Orbita del helio.* Suponer que el nivel energético a $-13{,}6$ eV del hidrógeno es producto de una órbita circular de un electrón.

(*a*) Calcular el momento cinético. *Sol.* $1{,}1 \times 10^{-27}$ erg-s.

(*b*) ¿Cuál sería el radio y energía de un electrón en órbita circular alrededor de un núcleo de helio (carga $+ 2e$) moviéndose con el mismo momento cinético?

11. *Movimiento orbital de las estrellas binarias.* La estrella de mayor masa conocida hasta el presente, es la estrella J. S. Plaskett. Es una estrella doble o binaria *; es decir, se compone de dos estrellas ligadas por acción de la gravedad. A partir de estudios espectroscópicos se sabe que

(*a*) El período de revolución alrededor de su centro de masas es 14,4 días ($1{,}2 \times 10^6$ s).

(*b*) La velocidad de cada componente es de 220 km/s aproximadamente. Como ambas componentes tienen velocidades muy próximas (pero opuestas), se puede deducir que están prácticamente equidistantes del centro de masas y, por consiguiente, que sus masas son casi iguales.

(*c*) La órbita es prácticamente circular.

A partir de estos datos, calcular la masa reducida y la separación de ambas componentes.

Sol. $\mu \approx 0{,}6 \times 10^{33}$ g; separación $\approx 0{,}8 \times 10^{13}$ cm.

12. ***Forma del mar sobre una Tierra uniforme.*** **Una Tierra esférica uniforme está cubierta con agua. La superficie del mar adquiere la forma de un esferoide achatado (una esfera aplastada) cuando la Tierra gira con velocidad angular ω. Encontrar una expresión aproximada para la diferencia en profundidad del mar en un polo y en el ecuador, suponiendo que la superficie del mar es una superficie de energía potencial constante. (¿Por qué es ésta una hipótesis plausible?) Despreciar la atracción gravitatoria del mar sobre sí mismo. *Indicación:* Necesitamos una expresión de la energía potencial que represente el efecto de la rotación**

(*) Se encuentra un buen estudio de las estrellas binarias en el libro de O. Struve, B. Lynds y H. Pillans, «Elementary astronomy», Cap. 29 (Oxford University Press, Nueva York, 1959). Por lo menos la mitad de las cincuenta estrellas más próximas al Sol son binarias o múltiples.

de la Tierra. Este potencial centrífugo se ha citado en la figura 6.21 *b* y en el Cap. 6, Prob. 13:

$$U_{\text{cent}} = -\tfrac{1}{2}\omega^2 r^2$$

en donde U se refiere a la masa unidad. Como $F = -\partial U/\partial r$ resulta

$$F_{\text{cent}} = \omega^2 r$$

que es la familiar «fuerza centrífuga». Recordemos que esta expresión se utiliza sólo para valores de r ligeramente superiores al radio de la Tierra R_T.

Establezcamos el potencial gravitatorio en el polo N (o polo S), en donde $U_{\text{cent}} = 0$ (ya que la r en esta expresión es la distancia desde el eje de rotación), igual al potencial gravitatorio más U_{cent} en el ecuador. La superficie en el polo será $R_T + D_{\text{polo}}$ desde el centro de la Tierra; en el ecuador, $R_T + D_{\text{ec}}$, en donde D_{polo} y D_{ec} son ambos muy inferiores a R_T. *Sol.* $(D_{\text{ec}} - D_{\text{polo}})/R_T \approx \omega^2 R_T/2g \approx \dfrac{1}{580}$.

Este valor es muy próximo a 1/298 observado para la forma real de la Tierra.

13. *Cálculo directo de la fuerza.* Utilizar un cálculo directo que demuestre que la Ec. (9.14) es cierta; es decir, establecer el elemento diferencial de fuerza e integrar. (*Indicación:* Utilizar la simetría del problema para demostrar que la fuerza tiene la dirección de la línea que une M_1 y el centro de la corteza, de modo que la integración se refiere sólo a esta componente de la fuerza.)

14. *Satélite alrededor de la Luna.* Determinar el período de un satélite que se mueve alrededor de la Luna a partir de los valores incluidos en la cubierta interior de este libro.

TEMA AVANZADO

Otro método de integrar la ecuación 1/r. El trabajo de resolver la ecuación diferencial para r puede evitarse utilizando la otra constante del movimiento

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{-1}{MC}\mathbf{J} \times \mathbf{p} + \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (9.46)$$

en donde $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ = cantidad de movimiento y C es la constante de la ley de fuerza $F = C/r^2$. El lector puede comprobar que ésta es una magnitud sin dimensiones. Para demostrar que $\boldsymbol{\epsilon}$ es una constante necesitamos probar que

$$\frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} = 0$$

Realizaremos la derivación

$$\frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} = \frac{-1}{MC}\left[\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt} \times p\right) + \mathbf{J} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right] + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{1}{r^2}\mathbf{r}\frac{dr}{dt}$$

Ahora bien,

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{C}{r^3}\mathbf{r} \qquad \mathbf{J} = M\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

y

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot \left(\frac{dr}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = r\frac{dr}{dt}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} &= -\frac{1}{MC}\mathbf{J} \times \frac{C\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{1}{r^3}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \\ &= -\frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} \\ &= -\frac{r^2\mathbf{v}}{r^3} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = 0\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado la expresión del producto vectorial triple, Ec. (2.55).

Según la definición de $\boldsymbol{\epsilon}$, Ec. (9.46),

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r} = \epsilon r \cos\theta = \frac{-1}{MC}(\mathbf{J} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + r$$

o

$$r(1 - \epsilon\cos\theta) = -\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}{MC} = -\frac{J^2}{MC}$$

en donde hemos tenido en cuenta que

$$\mathbf{J} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{p} \times \mathbf{r} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$$

o

$$\frac{1}{r} = -\frac{MC}{J^2}(1 - \epsilon\cos\theta)$$

que es justamente la Ec. (9.24).

Como vemos, el vector $\boldsymbol{\epsilon}$ es de magnitud igual a la excentricidad y de dirección $\theta = 0$, eje principal de la elipse o eje de la hipérbola; $\boldsymbol{\epsilon}$ puede encontrarse, naturalmente, a partir de la ecuación energética.

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

PSSC, *Física*, cap. 21, D. C. Heath and Co., Ed. Reverté.

HPP, *Project Physics Course*, caps. 5-8. Holt, Rinehart and Winston, Inc, Nueva York, 1970. Este libro nos da un buen resumen de tipo elemental sobre los aspectos históricos de la comprensión del movimiento planetario.

P. van de Kamp, *Elements of Astromechanics*, W. H. Freeman and Co. San Francisco, 1964. Rústica; temas seleccionados elementales de mecánica celeste.

O. Struve, B. Lynds y H. Pillans, *Elementary Astronomy*. Oxford University Press, Nueva York, 1959. Destaca las principales ideas de la física en relación con el universo; excelente.

T. S. Kuhn, *The Copernican Revolution*, Vintage Books (rústica), Random House, Inc., Nueva York, 1962.

American Association of Physics Teachers, separatas seleccionadas, *Kinematics and Dynamics of Satellite Orbits*, American Institute of Physics, Nueva York, 1963.

Arthur Koestler, *The Watershed: A Biography of Johannes Kepler*, Anchor Books, Doubleday & Company, Inc., Garden City, N. Y., 1960. Una historia fascinante del recorrido espiritual e intelectual de Kepler hasta obtener una descripción correcta de las órbitas planetarias.

Contenido

LA VELOCIDAD DE LA LUZ *c* COMO CONSTANTE FUNDAMENTAL DE LA NATURALEZA
MEDIDA DE *c*
Tiempo de tránsito de la luz a través de la órbita de la Tierra
Aberración de la luz de las estrellas
Ruedas dentadas y espejos en rotación
Cavidad resonante
Célula de Kerr
VELOCIDAD DE LA LUZ EN SISTEMAS INERCIALES EN MOVIMIENTO RELATIVO
Experimentos de Michelson-Morley
Invariancia de *c*
EFECTO DOPPLER
Ejemplo. El corrimiento hacia el rojo debido al retroceso
LA VELOCIDAD LÍMITE
CONCLUSIONES
Problemas
Lecturas suplementarias

10

Velocidad de la luz

LA VELOCIDAD DE LA LUZ c COMO CONSTANTE FUNDAMENTAL DE LA NATURALEZA

La velocidad de la luz * en el vacío c es una de las constantes fundamentales en física. Algunas de sus características son:

1. Es la velocidad a la que se desplazan todas las radiaciones electromagnéticas en el espacio libre, independientemente de su frecuencia.
2. Ninguna señal puede transmitirse por ningún procedimiento en el espacio libre o en un medio material a una velocidad superior a la de la luz, c.
3. La velocidad de la luz en el espacio libre es independiente del sistema de referencia desde el que se la observa. Si en un sistema galileano la velocidad de la luz es $c = 2{,}99793 \times 10^{10}$ cm/s, se observará que vale también c y no $c + V$ (o $c - V$) en un segundo sistema galileano que se mueve paralelamente a la señal con una velocidad V respecto al primer sistema.
4. En las ecuaciones de Maxwell de la teoría electromagnética y en la ecuación de la fuerza de Lorentz figura la velocidad de la luz. Esto es evidente cuando se escriben en unidades gaussianas.
5. La constante sin dimensiones (recíproco de la constante de estructura fina)

$$\frac{\hbar c}{e^2} \approx 137{,}04$$

depende de la velocidad de la luz. Aquí $2\pi\hbar$ es la constante de Planck y e la carga del protón. Esta constante juega un importante papel en física atómica y se estudiará en el Vol. 4. No disponemos de ninguna teoría que prediga el valor de esta constante.

Este capítulo se refiere principalmente a experiencias y resultados experimentales. Discutiremos la medida de la velocidad de la luz y la prueba experimental de la invariancia de la misma respecto a la velocidad de cualquier sistema inercial. Dejaremos para el Vol. 3 ciertas cuestiones respecto a la naturaleza electromagnética de la luz y sobre su propagación en medios refractarios y dispersivos como los sólidos y los líquidos. (Un medio refractario es aquél en el que el índice de refracción no es exactamente la unidad. Un medio dispersivo es aquél en el que el índice de refracción es función de la frecuencia.)

(*) Obsérvese que la frase *velocidad de la luz* debe entenderse como la velocidad de la luz en el espacio libre (c), a menos que se advierta explícitamente otra cosa. La velocidad de la luz en un medio material es menor que c y puede incluso ser menor que la velocidad de una partícula cargada en el mismo medio (efecto Cerenkov).

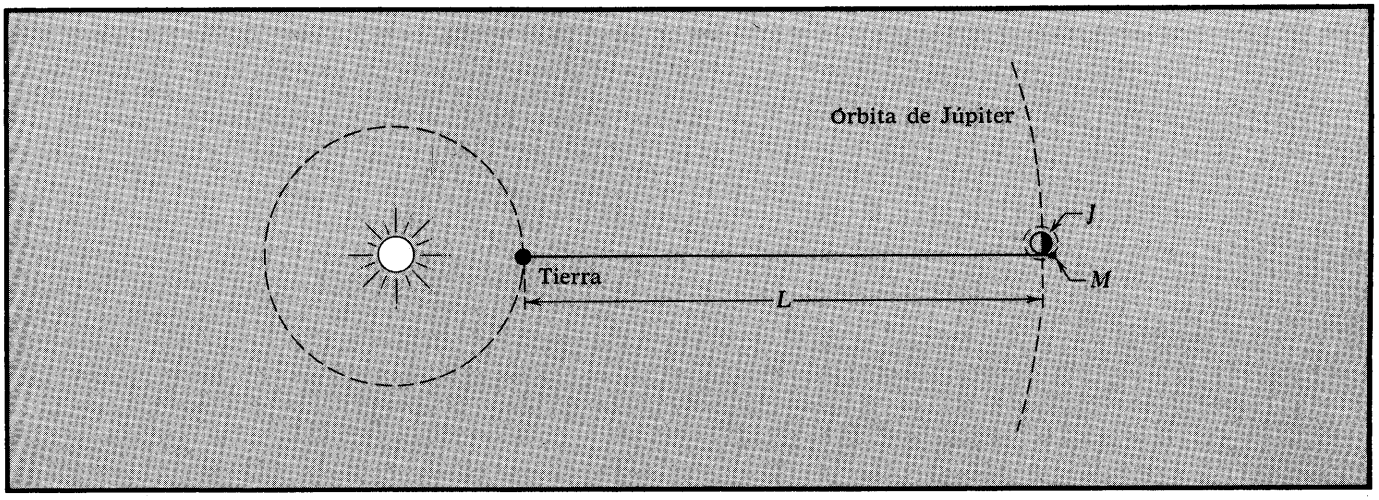


FIG. 10.1 Eclipse de la luna de Júpiter, *M*, que tiene lugar cuando *M* desaparece detrás de *J* visto desde la Tierra. El tiempo real de observación sobre la Tierra es *L*/*c* más tarde debido a la velocidad finita de la luz. El período de *M* es de unas 42 h.

MEDIDA DE *c*

Se han empleado muchos métodos para medir la velocidad de la luz *. Los revisaremos a continuación dando una breve idea de los mismos.

Tiempo de tránsito de la luz a través de la órbita de la Tierra. Durante muchos siglos, antes de que se realizaran pruebas experimentales, se creía que la velocidad de la luz debía ser finita. La primera prueba experimental de que esta velocidad era finita se debe a Roemer en 1676, el cual observó que el movimiento de Io, la luna más interna de Júpiter, no seguía un horario enteramente regular. Existía una variación en los períodos de los eclipses de Io por Júpiter (fig. 10.1). Cuando en cierta época del año predijo el momento del eclipse que se produciría 6 meses más tarde (fig. 10.2) cometió un error de 22 minutos aproximadamente y postuló que este valor es aproximadamente el tiempo de tránsito de la luz a través de la órbita de la Tierra. Su mejor estimación del diámetro medio D de la órbita terrestre alrededor del Sol era $2{,}83 \times 10^{13}$ cm y con estos datos calculó c,

$$c = \frac{2{,}83 \times 10^{13}}{22 \times 60} = 2{,}14 \times 10^{10} \text{ cm/s}$$

(*) Un excelente resumen en inglés de las medidas de la velocidad de la luz viene dado por E. Bergstrand en «Handbuch der Physick», S. Flügge (ed.), vol. 24, págs. 1-43 (Springer Verlag OHG, Berlín, 1956). Los valores de c que se dan aquí son los relacionados por Bergstrand. Véase también J. F. Mulligan y D. F. McDonald, *Am. J. Phys.*, **25**, 180 (1957).

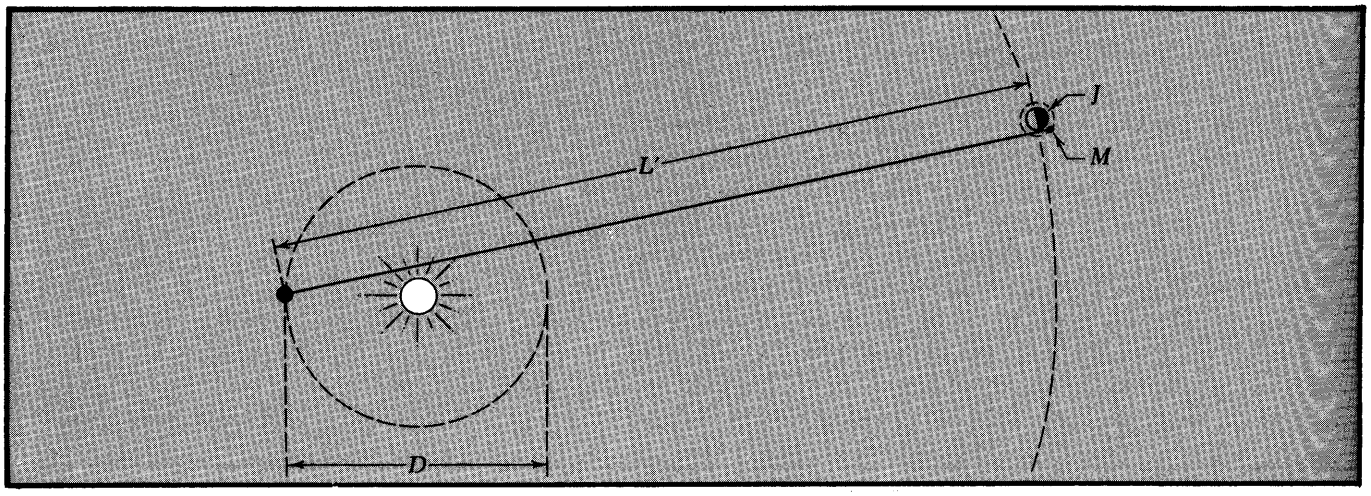


FIG. 10.2 Seis meses más tarde, la Tierra ha completado un semicírculo, pero Júpiter se ha desplazado sólo 15°. El eclipse se observa ahora un tiempo L'/c más tarde, en donde $L' \approx L + D$.

Para el tiempo en que Roemer hizo sus estimaciones, este valor estaba en buen acuerdo con $3{,}0 \times 10^{10}$ cm/s. El movimiento angular de Júpiter alrededor del Sol es más lento que el de la Tierra (12 años frente a 1); así, pues, es el diámetro de la órbita de la Tierra y no el de la de Júpiter el que interviene principalmente en los cálculos. El método de Roemer no es muy exacto, pero mostró a los astrónomos que al analizar las observaciones planetarias para encontrar el verdadero movimiento de un planeta o luna es necesario tener en cuenta el tiempo de propagación de la señal luminosa.

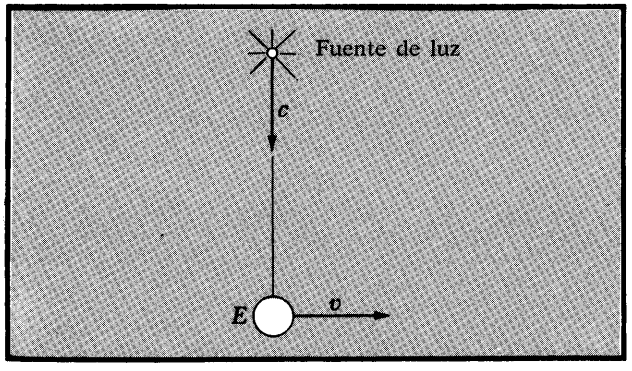


FIG. 10.3 Bradley, en 1725, utilizó el fenómeno de aberración para determinar c. Supongamos que la luz de una fuente alejada ilumina el objeto E, que tiene una velocidad v normal a la luz incidente.

Aberración de la luz estelar. En 1725 James Bradley inició una serie de interesantes observaciones precisas de un cambio aparentemente estacional en la posición de las estrellas, en particular de una estrella llamada γ Draconis. Él observó que (una vez aplicadas todas las demás correcciones) una estrella situada en el cenit (directamente encima de nosotros) parecía moverse en una órbita casi circular con un período de un año, teniendo un diámetro angular de unos 40,5″. También observó que las estrellas en otra posición tenían un movimiento algo semejante, en general, elíptico.

El fenómeno observado por Bradley se denomina *aberración* y se representa en las figs. 10.3 a 10.5. No tiene nada que ver con el verdadero movimiento, si lo tiene, de la estrella; se debe a la velocidad finita de la luz y a la velocidad de la Tierra en su órbita alrededor del Sol. Este experimento fue realmente el primero que directamente sugería que el Sol era un sistema inercial mejor

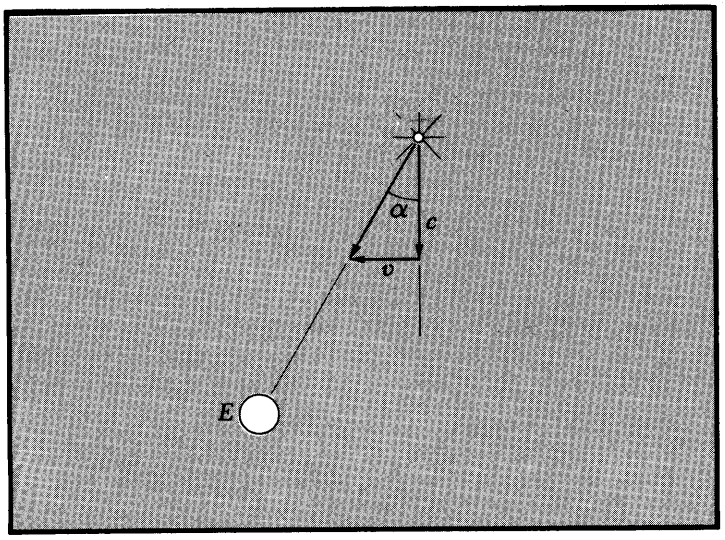


FIG. 10.4 De acuerdo con un observador en E, la luz tiene componente horizontal v lo mismo que componente vertical c. Así, pues, los rayos de luz de la fuente están inclinados un ángulo α, en donde $\text{tg}\,\alpha = v/c$.

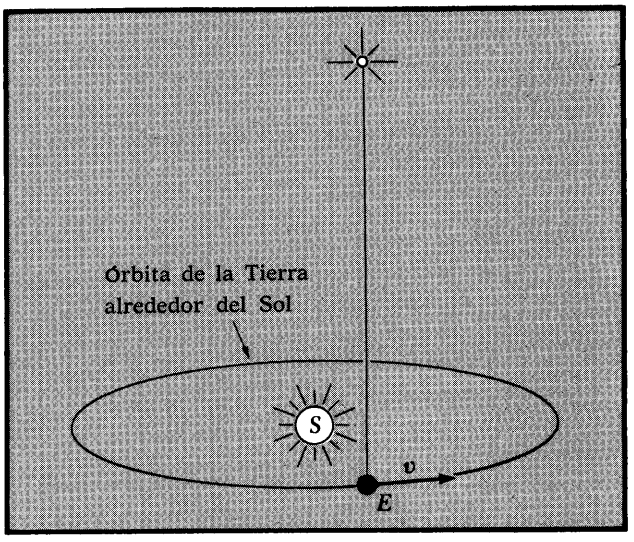


FIG. 10.5 Bradley utilizaba luz de una estrella lejana situada en el cenit y conocía la velocidad de la Tierra ($v_T = 30$ km/s) para determinar c a partir de las mediciones de α: $\text{tg}\,\alpha = v_T/c$.

que la Tierra, es decir, que es preferible considerar que la Tierra se mueve alrededor del Sol en lugar de este último alrededor de la Tierra, porque en dicha experiencia se detecta directamente el cambio anual en dirección de la velocidad de la Tierra respecto a las estrellas.

La explicación más sencilla de la aberración nos la suministra la analogía de la propagación de la luz con la caída de las gotas de lluvia (fig. 10.6). Si no sopla el viento, las gotas caen verticalmente y un hombre quieto con un paraguas directamente sobre él no se mojará. Si el hombre corre, manteniendo el paraguas en la misma posición, la parte delantera de su abrigo se mojará. Respecto a la persona móvil, las gotas no caen exactamente verticales.

Citamos aquí una amena relación * de cómo se le ocurrió a Bradley la explicación de sus observaciones:

> «Al fin, cuando ya desesperaba de poder justificar los fenómenos que había observado, se le ocurrió de repente una explicación satisfactoria, cuando ni siquiera pensaba en

(*) T. Thomson, «History of the Royal Society», p. 346 (Londres, 1812).

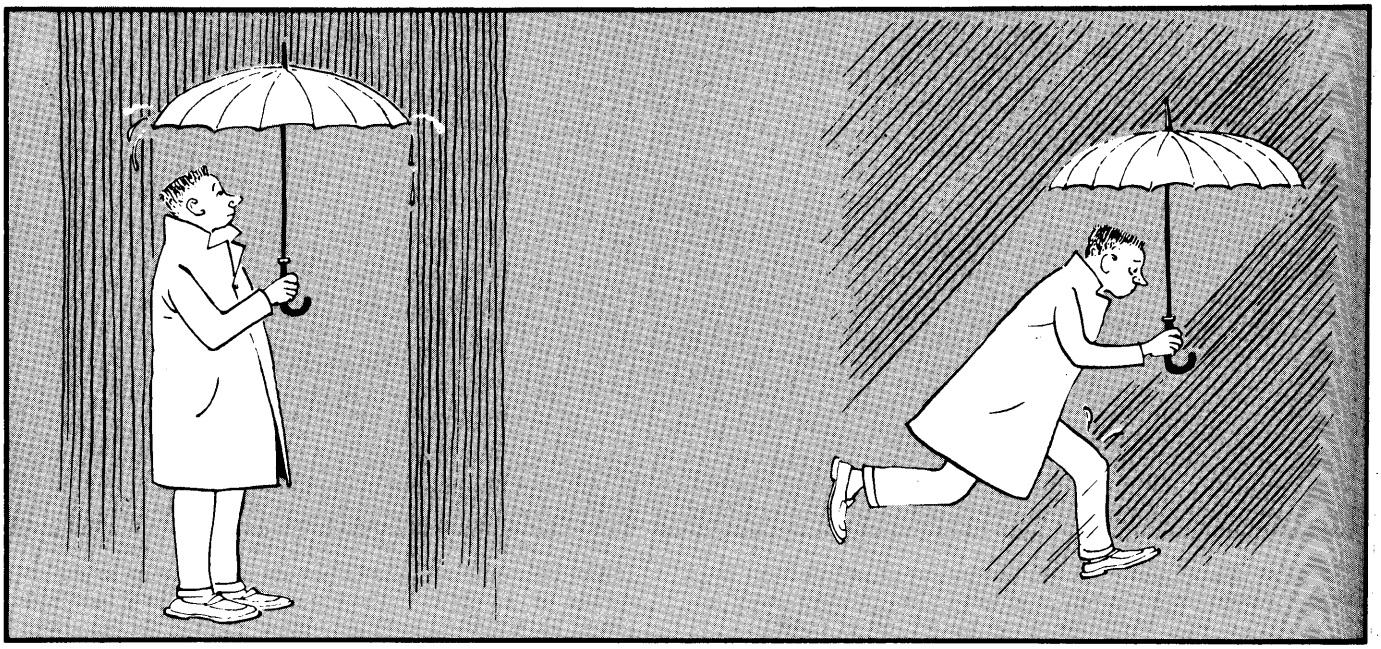


FIG. 10.6 Un ejemplo familiar de aberración. Este alumno se ve sorprendido por la lluvia que cae verticalmente. Si se mantiene quieto bajo su paraguas, no se mojará. Pero si empieza a correr empezará a mojarse. En este nuevo sistema de referencia la lluvia tiene una velocidad horizontal $-\mathbf{v}$, siendo $\mathbf{v}$ la velocidad respecto al suelo.

ello * . Asistía a una agradable excursión en una embarcación a lo largo del río Támesis. Dicha embarcación tenía un mástil que llevaba un grimpolón en el tope. Soplaba un viento moderado y estuvieron navegando aguas arriba y abajo por el río durante bastante tiempo. El Dr. Bradley observó que cada vez que la embarcación viraba, el grimpolón en el tope del palo se desviaba un poco, como si se produjera un ligero cambio en la dirección del viento. Lo observó tres o cuatro veces sin hablar; al final se lo mencionó a los marineros y expresó su sorpresa ante el hecho de que el viento se desviase tan regularmente cada vez que hacían virar la embarcación. Los marineros le dijeron que el viento no había rolado, sino que el cambio aparente se debía a la variación en la dirección de la barca asegurándole que lo mismo sucedía siempre. Esta observación accidental le llevó a la conclusión de que el fenómeno que tanto le había confundido se debía al movimiento combinado de la luz y de la Tierra.»

Esta es la explicación de la aberración según palabras de Bradley **:

(*) Muchos inventos y descubrimientos se han realizado cuando, después de un fracaso inicial, el científico ha alejado el problema de sus pensamientos. Un distinguido matemático comenta este hecho en un libro fascinante y muy importante: J. Hadamard, «An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field» (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1945); reimpresión (Dover Publications Inc., Nueva York, 1954).

(**) J. Bradley, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **35**, 637 (1728).

«Consideré este problema de la siguiente manera. Imaginé que *CA* [véase la fig. 10.7] era un rayo de luz, incidiendo perpendicularmente sobre la línea *BD*; entonces, si el ojo está en reposo en *A*, el objeto debería aparecer en la dirección *AC*, lo mismo si la luz se propaga en un instante que si tarda un cierto tiempo. Pero, si el ojo se mueve de *B* hacia *A* y la luz se propaga con el tiempo a una velocidad que es respecto a la velocidad del ojo como *CA* es a *AB*, entonces mientras la luz se mueve de *C* a *A*, el ojo lo hace de *B* a *A*. Esa partícula luminosa por la que se distingue el objeto y que marcha hacia *A*, se encuentra en *C* cuando el ojo en su movimiento está en *B*. Uniendo los puntos *B* y *C*, supuse que la línea *CB* era un tubo (inclinado sobre la línea *BD* en el ángulo *BCD*) de diámetro tal que sólo pudiese admitir una partícula luminosa; entonces fue fácil concebir que la partícula luminosa en *C* (por la que debe verse el objeto cuando el ojo, en su movimiento, llegue a *A*) debería pasar por el tubo *BC*, si está inclinado respecto a *BD* en el ángulo *DBC*, y acompaña al ojo en su movimiento de *B* a *A*, y no podría alcanzar al ojo colocado detrás de dicho tubo, si tuviese cualquier otra inclinación respecto a la línea *BD*.»

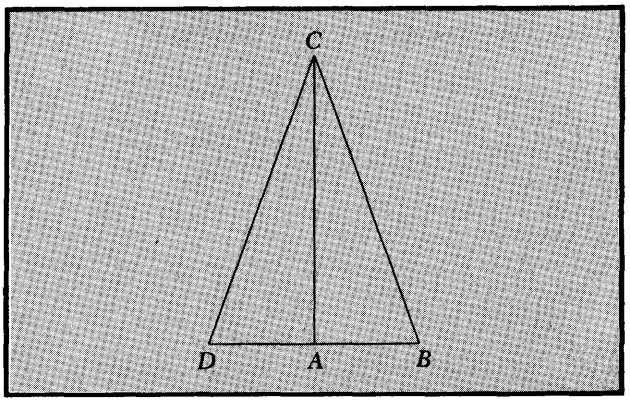


FIG. 10.7 Diagrama de velocidades utilizado por Bradley.

Para una estrella directamente sobre nosotros la aberración máxima se verifica cuando la velocidad de la Tierra es perpendicular a la línea de observación. Entonces el ángulo de inclinación, o aberración, del telescopio se deduce de las figs. 10.4 y 10.5 y viene dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_T}{c}$$

siendo v_T la velocidad de la Tierra. La velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol es, aproximadamente, $3{,}0 \times 10^6$ cm/s; la velocidad debida a la rotación de la Tierra sobre su propio eje, que es unas 100 veces menor, puede despreciarse aquí. El ángulo α en la Ec. (10.1) es la mitad del diámetro angular observado por Bradley, de 40,5″. Así, tomando $\alpha = 20''$ y despejando c en la Ec. (10.1) resulta (haciendo $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$)

$$c = \frac{v_T}{\alpha} = \frac{3 \times 10^6}{\frac{20}{3600} \times 1/57{,}3} = 3{,}1 \times 10^{10} \text{ cm/s}$$

que está en buen acuerdo con los valores actuales.

Ruedas dentadas y espejos en rotación. La primera determinación terrestre de la velocidad de la luz fue llevada a cabo por Fizeau en 1849. Encontró el valor (véase figs. 10.8*a, b, c*).

$$c = (315\,300 \pm 500) \text{ km/s}$$

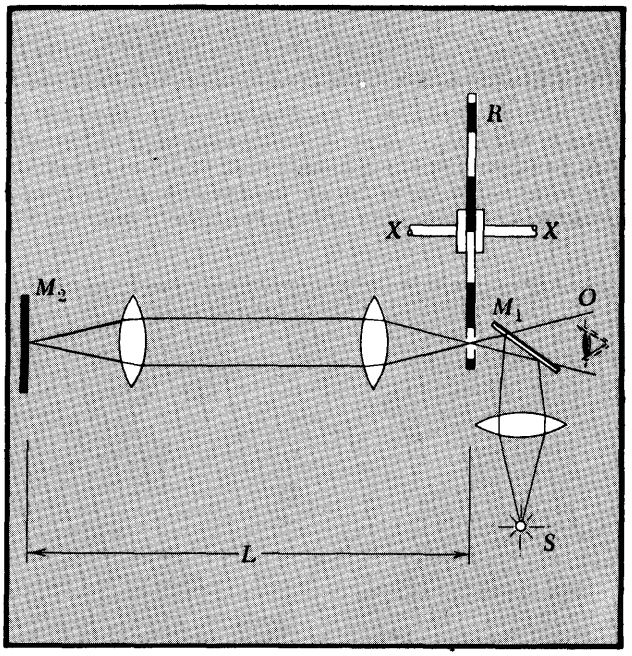


FIG. 10.8 *a*) Aparato de rueda dentada de Fizeau, 1849. La luz procedente de una fuente puntual *S* se refleja en un espejo semiplateado M_1 y pasa a través de una rueda dentada *R* que gira sobre el eje *X-X*. La luz va entonces al espejo M_2 y vuelve al observador *O* a través de *R* y M_1. Un espejo semiplateado refleja la mitad de la luz incidente y transmite la otra mitad.

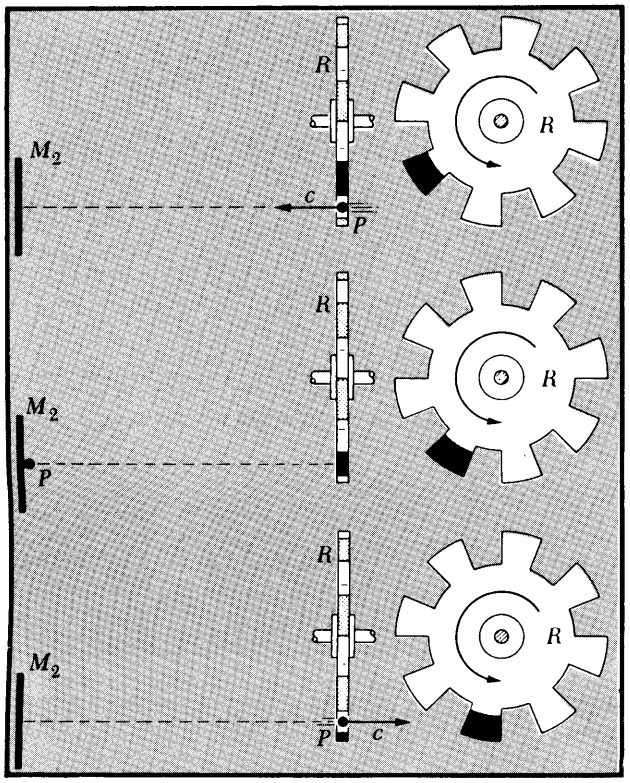
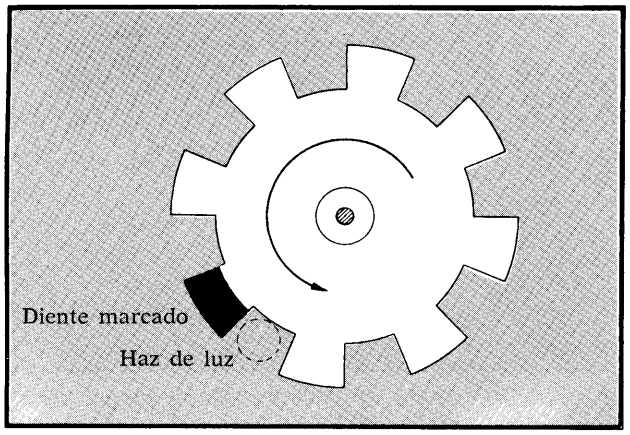


FIG. 10.8 *(continuación)* *b*) El pulso *P* con velocidad *c* debe ir hasta M_2 y volver a *R* (distancia total 2*L*) en el tiempo durante el cual los dientes se mueven al espacio siguiente, si el pulso ha de transmitirse a *O*. Fizeau determinó *c* a partir de *L* y de la velocidad angular de *R*.



c) Vista del haz luminoso y de la rueda dentada *R* observada por el operador *O*. La rotación de *R* interrumpe el haz procedente de *S*, M_1 en pulsos cortos. (La luz puede pasar de M_1 a M_2 únicamente si no se encuentra ningún diente en su camino.)

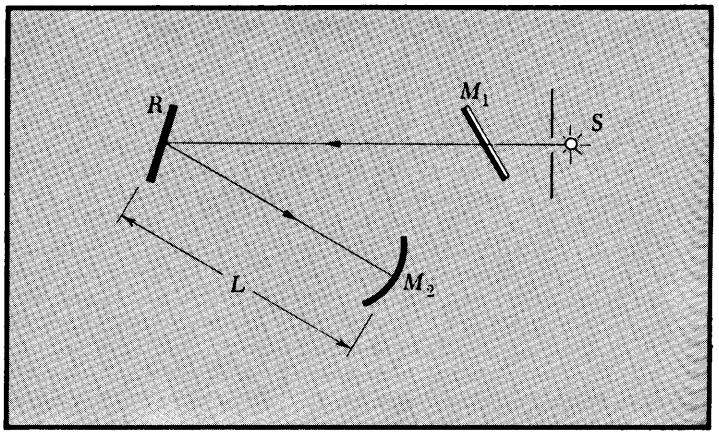


FIG. 10.9 *a*) Aparato del espejo rotatorio de Foucault, 1850, compuesto de una rendija luminosa *S* que hacía de fuente, un espejo semiplateado M_1, un espejo giratorio *R* (con su eje de rotación normal a la página) y un espejo esférico M_2. Se indica el trayecto del haz desde *S* a M_2.

para la velocidad de la luz en el aire *. Utilizó una rueda dentada giratoria como interruptor luminoso para determinar el tiempo de tránsito de un destello luminoso en una distancia de 2 × 8633 m de longitud.

El aparato de rueda dentada fue reemplazado pronto por un sistema de espejo rotatorio que da más luz y mejor enfoque. El dispositivo utilizado por Foucault en 1850 se ve en las figs. 10.9*a, b, c*. El mejor valor que halló (1862) para la velocidad de la luz en el aire es

$$c = (298\,000 \pm 500)\ \text{km/s}$$

Michelson (1927) utilizó un perfeccionamiento de dicho dispositivo sobre una distancia de 22 millas (≈ 35,4 km) entre el Monte Wilson y el Monte San Antonio, en California. Su montaje tenía la fuente luminosa en el punto focal de una lente dando un haz de rayos de luz paralelos en una gran longitud. Encontró así

$$c = (299\,796 \pm 4)\ \text{km/s}$$

Este trabajo excede grandemente en exactitud a todos los anteriores. En el Prob. 3 se darán más detalles.

Cavidad resonante. Es posible determinar con mucha exactitud la frecuencia a la que una cavidad reso-

(*) La velocidad de la luz en el vacío se calcula en 91 km/s mayor que en el aire.

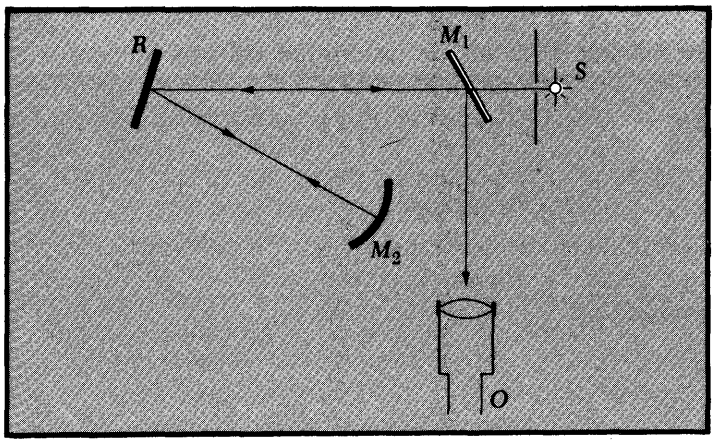
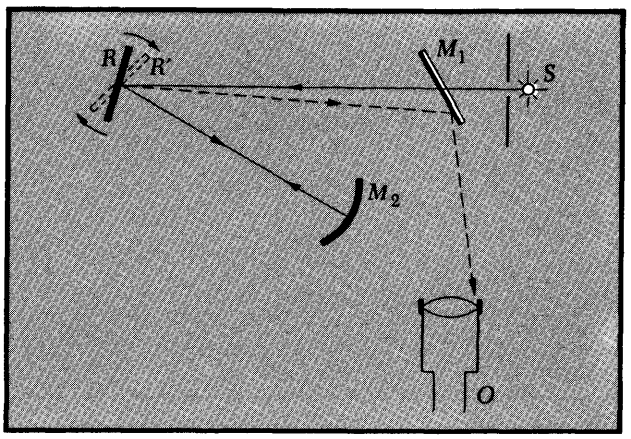


FIG. 10.9 *(continuación)* *b*) Estando estacionario R, el haz luminoso que va de M_1 a R y M_2 se refleja invirtiendo su recorrido hasta M_1 y siendo detectado en O.



c) Si el espejo R gira, la luz que va de S a R y M_2 regresa cuando el espejo giratorio está en una nueva posición R'. Así, pues, O observa una imagen desplazada en M_1. Foulcault determinó c a partir de L, del desplazamiento de la imagen y de la velocidad angular del espejo.

nante de dimensiones conocidas (una caja metálica) contiene un número determinado de medias longitudes de onda de radiación electromagnética. La velocidad de la luz se calcula entonces a partir de la relación teórica

$$c = \lambda\nu \qquad (10.2)$$

que relaciona la longitud de onda λ con la frecuencia ν. En la cavidad normalmente se ha hecho el vacío. Es necesario corregir las dimensiones interiores de la cavidad en la pequeña penetración * del campo electromagnético en la superficie del metal. Essen (1950) utilizó frecuencias de 5960, 9000 y 9500 Mc/s para hallar

$$c = (299\,792{,}5 \pm 1)\ \text{km/s}$$

Célula de Kerr. Cuando la luz polarizada pasa a través de una célula de Kerr (un líquido en el cual un campo eléctrico puede afectar la transmisión de luz polarizada) la intensidad de luz emergente y polarizada en la dirección inicial puede modularse modificando el voltaje entre las placas que producen el campo eléctrico. Si se utiliza la misma frecuencia para modular la sensibilidad de una fotocélula que detecta la luz, puede hacerse una medida de la velocidad de la luz con el aparato repre-

(*) La región de penetración se conoce como *profundidad de penetración* (skin depth). Es del orden de 1 micra (en abreviatura, μ; $1\,\mu \equiv 10^{-4}$ cm) de espesor en cobre a la temperatura ambiente para 10^{10} cps. Deben aplicarse también otras correcciones.

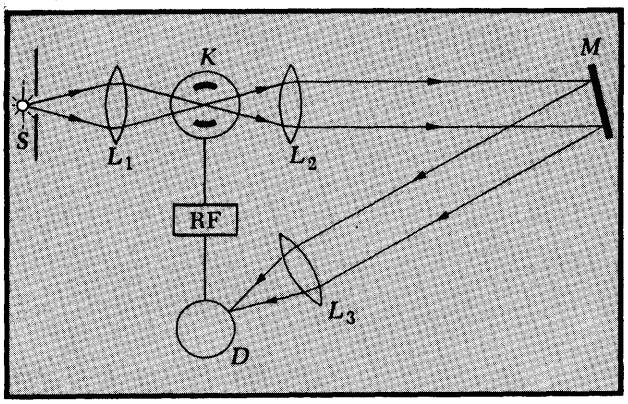


FIG. 10.10 Un método moderno para la determinación de c. La luz procedente de la fuente S es modulada en amplitud en la célula de Kerr K, pasando luego a un espejo M y al detector fotoeléctrico D a través de las lentes L_2, L_3. Las sensibilidades del fotodetector y la célula de Kerr están sincronizadas mediante un generador de tensión de radiofrecuencia modulada RF.

sentado en la fig. 10.10. La respuesta del detector D será un máximo si la luz de intensidad máxima alcanza a D en un instante de sensibilidad máxima. Si suponemos que la intensidad máxima y la sensibilidad máxima ocurren al mismo tiempo, esta respuesta máxima tendrá lugar si el tiempo necesario para que la luz se traslade de la célula de Kerr al espejo M y vuelva a D es igual a un número entero de períodos N de la radiofrecuencia moduladora ν. Entonces el tiempo transcurrido es N/ν, de donde

$$c = \frac{L\nu}{N}$$

siendo L la distancia de K a D. Las distancias empleadas son del orden de 10 km. Algunos detalles se ven en la fig. 10.11.

Utilizando este método, Bergstrand midió

$$c = (299\,793{,}1 \pm 0{,}3)\ \text{km/s}$$

Obsérvese que el error estimado es muy bajo. Se utiliza el mismo aparato (junto con un valor patrón para c) para determinar longitudes geodésicas en distancias hasta de 40 km; en esta aplicación se conoce con el nombre de *geodímetro*.

En los últimos cien años se han hecho centenares de mediciones de c por éstos y otros métodos. El valor que actualmente se acepta es

$$\boxed{c = (2{,}997\,925 \pm 0{,}000\,001) \times 10^{10}\ \text{cm/s}} \qquad (10.3)$$

Este valor representa un promedio ponderado de las mediciones recientes de mayor confianza mediante diversos métodos en los que se han investigado ondas electromagnéticas desde 10^8 cps (radio frecuencia) hasta 10^{22} cps (rayos gamma). La precisión a las frecuencias más elevadas no es tan grande como a las frecuencias de la radio o las ópticas, pero hasta el presente no hay ninguna razón para creer que c varía con la frecuencia de la radiación.

VELOCIDAD DE LA LUZ EN SISTEMAS INERCIALES EN MOVIMIENTO RELATIVO

Una aplicación elemental de la transformación de Galileo al problema del receptor móvil exige que la velo-

Fig. 10.11. La medición de Bergstrand de c se basó en el método de «detección sensible a la fase» y es análogo al experimento descrito aquí.

La intensidad de la luz que entra en el sistema de la célula de Kerr procedente de la fuente es constante...

pero la luz que emerge de dicho sistema está modulada. El tiempo de tránsito de la luz de K a D puede variarse moviendo M; M puede ajustarse de modo que la luz llegue a D como está indicado.

Si alejamos M un poco, la luz llegará más tarde...

alejando *aún más* a M, la luz llegará *todavía* más tarde...

alejando *aún más* a M, la luz llegará *todavía* más tarde...

alejando aún más a M, la luz llegará todavía más tarde.

Supongamos ahora que se modula la sensibilidad del detector como se indica aquí...

El detector responde únicamente cuando es sensible y cuando la luz incide en él.

Así pues, tenemos esta respuesta del detector para la condición *a*.

Para la condición *b* tenemos ésta: La luz incidente y la sensibilidad del detector están en fase.

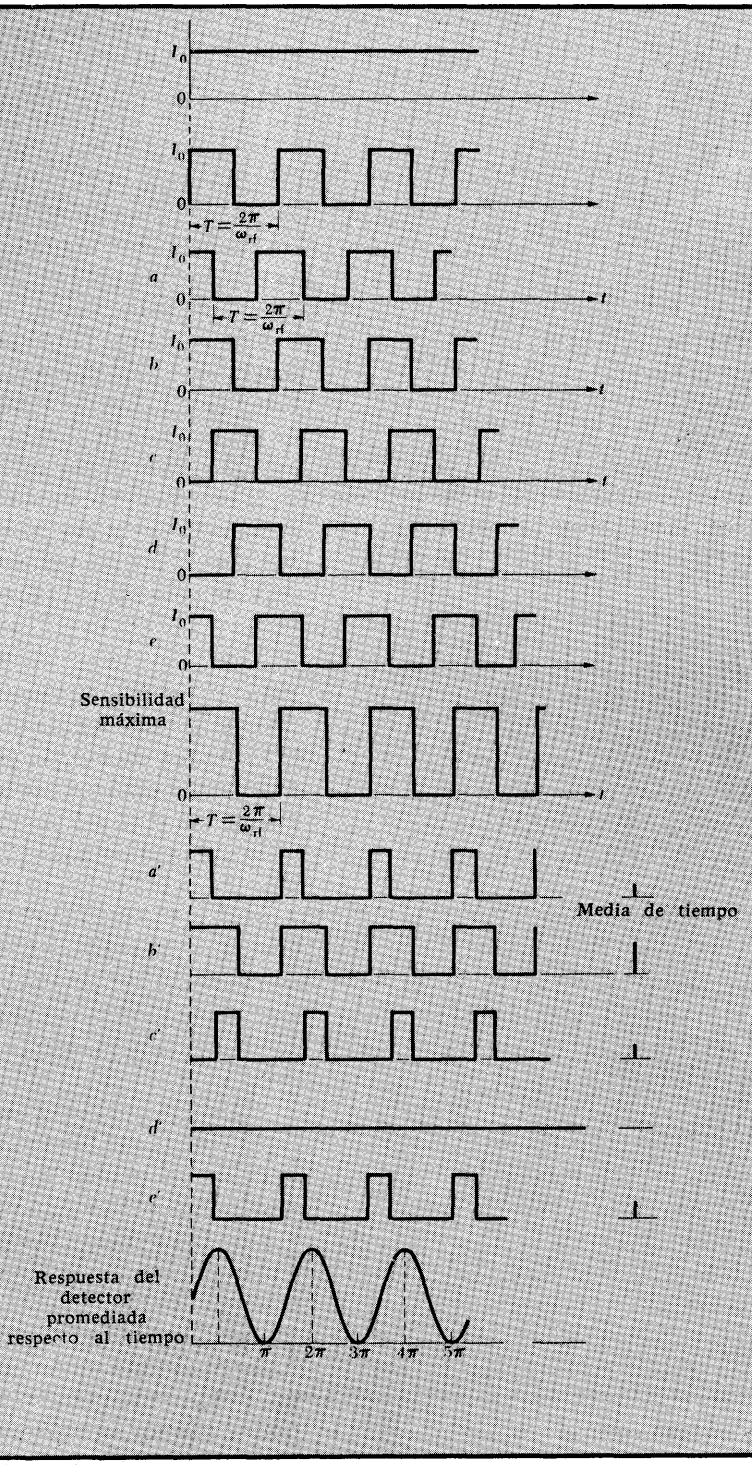
Para *c* tenemos esta respuesta.

Para *d* la luz que llega y la sensibilidad del detector están defasadas 180°, de modo que no hay respuesta.

Para *e* tenemos esta respuesta.

Cuando variemos continuamente la posición de M, obtendremos esta respuesta media del detector.

La distancia entre dos máximos sucesivos de esta curva corresponde a un cambio en el trayecto de la luz de $2\Delta L$, causado por el desplazamiento de M.



cidad de la luz en el sistema del receptor sea diferente de c.

De acuerdo con el sentido común es lógico que la velocidad de la luz c_R relativa al receptor móvil venga dada por

$$c_R = c \pm V \tag{10.4}$$

en donde V es la velocidad del receptor que se supone en movimiento *acercándose a* (+) o *alejándose de* (—) la fuente. Esto parece un modo perfectamente razonable de sumar velocidades, como se indica en las figs. 10.12*a* y *b*. La misma relación debería mantenerse cuando la fuente y el receptor estén en reposo y el medio se mueva con velocidad V. La relación (10.4) es obedecida aparentemente en incontables experiencias diarias, al menos en aquellas en que no interviene la luz. Es válida para las ondas sonoras si llamamos c a la velocidad del sonido. Pero *no es cierta,* ni siquiera aproximadamente, para las ondas luminosas en el espacio libre. Se encuentra experimentalmente (figs. 10.12*c* y *d*) que

$$c_R = c \tag{10.5}$$

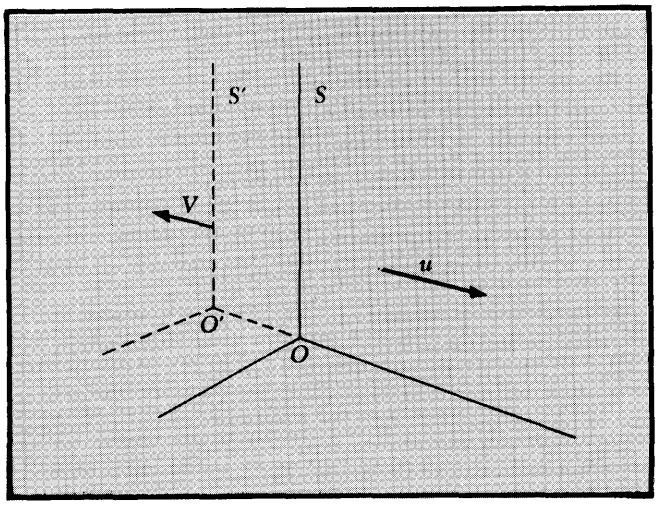
para cualquier sistema independiente de su *velocidad propia* e independientemente de la velocidad relativa a cualquier medio de propagación que imaginemos. En este hecho demostrado estriba la raíz de la formulación relativista de las leyes físicas.

Examinemos ahora la base experimental de la ecuación (10.5). Existen muchos tipos diferentes de experimentos que confirman la teoría de la relatividad restringida; los que conducen a (10.5) constituyen un punto conveniente de partida. Consideremos los experimentos que demuestran que la velocidad de la luz es independiente de la velocidad (3×10^6 cm/s) de la Tierra en su órbita.

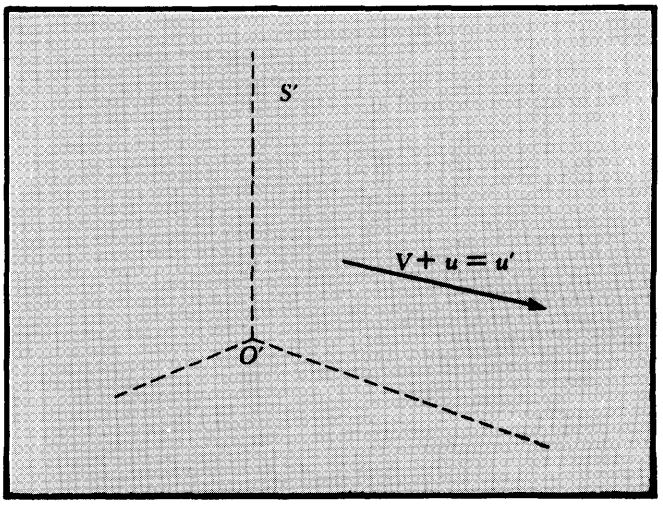
Supongamos primero, al igual que los físicos del siglo diecinueve, que la luz se propaga como una oscilación en un medio, lo mismo que el sonido se propaga como una oscilación de átomos en un líquido, sólido o gas. El medio «luminífero» a través del cual se propagan las ondas luminosas en el espacio libre se llamó el *éter*.

¿Qué es el éter? Hoy consideramos «éter» únicamente como sinónimo de vacío. Pero Maxwell y otros muchos no podían imaginar un campo como un sistema que por sí mismo se mantuviese propagándose en el espacio libre. Maxwell razonaba del modo siguiente:

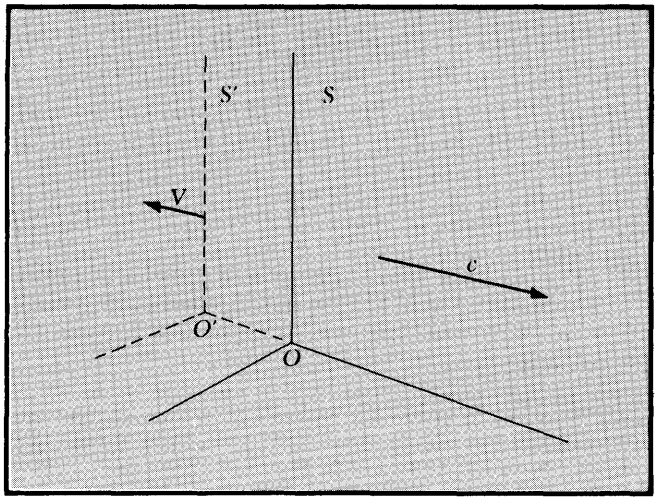
FIG. 10.12 Adición vectorial de velocidades prevista por la transformación de Galileo (*a*, *b*) y tal como es realmente observada para la luz (*c*, *d*).



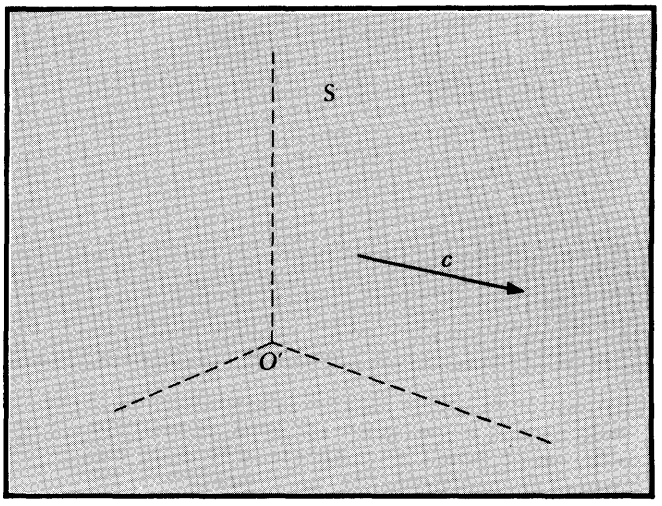
a) Si u es una velocidad terrestre ordinaria, como se observa desde un sistema inercial S,



b) la transformación galileana nos dice que en el sistema inercial S' observaremos $u' = V + u$.



c) Sin embargo, los experimentos demuestran que si un objeto tiene velocidad c en S,



d) también tiene la velocidad c en S'.

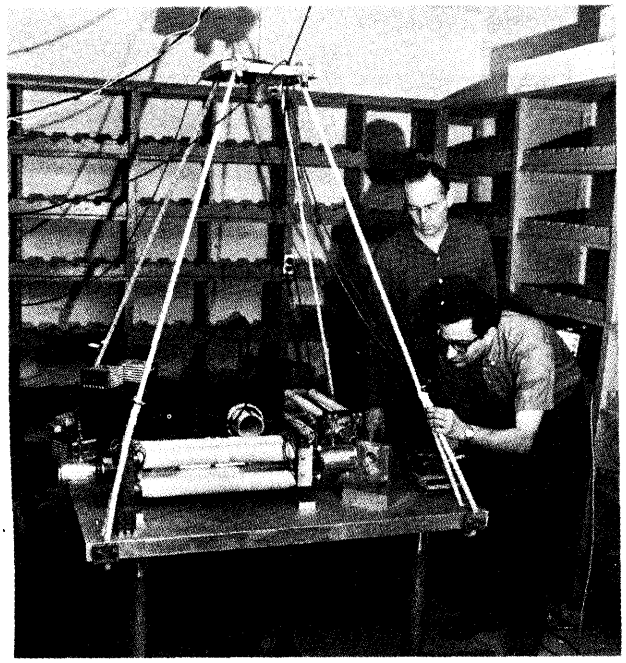


FIG. 10.13 Aparato de precisión para realizar experimentos en óptica relativista utilizando dos láseres de gas. El local es una bodega de una granja de Round Hill, Massachusetts. En la fotografía se ve a Charles H. Townes y Ali Javan.

«En todas estas teorías surge naturalmente una pregunta: Si *algo* se transmite a distancia de una partícula a otra, ¿cuál es su estado después que ha dejado la primera partícula y antes de alcanzar la segunda? Si este *algo* es la energía potencial de las dos partículas, como en la teoría de Neumann, ¿cómo hemos de concebir esta energía de modo que exista en un punto del espacio, que no coincida con ninguna de las dos partículas? En efecto, siempre que se transmita energía de un cuerpo a otro en el tiempo, debe existir un medio o sustancia en el que exista la energía después que abandone uno de los cuerpos y antes de que alcance el otro, porque la energía, como Torricelli hacía notar, *es una quintaesencia de naturaleza tan sutil que no puede estar contenida en ningún recipiente excepto en la sustancia íntima de las cosas materiales.* De aquí que todas estas teorías conduzcan a la concepción de un medio en el que tiene lugar la propagación y, si admitimos este medio como hipótesis, considero que debería ocupar un lugar destacado en nuestras investigaciones y que deberíamos intentar construir una representación mental de todos los detalles de su acción, **constante pretensión nuestra en este tratado.»**

El experimento directo y evidente para comprobar la posible dependencia de la velocidad de la luz con el movimiento de la Tierra es la medida exacta del tiempo en que un pulso de luz recorre por una sola vez una distancia conocida. Debería hacerse separadamente en dos direcciones, sobre una línea norte-sur y luego sobre otra este-oeste, y, finalmente, hacer lo mismo de nuevo al cabo de unos seis meses, cuando la velocidad de la Tierra alrededor del Sol tenga sentido contrario. Con el desarrollo de los láseres existen relojes suficientemente exactos como para permitir un experimento directo de esta clase; el factor tecnológico limitativo en el momento actual parece ser el tiempo origen de un pulso. En 10^{-9} segundos esto introduce un error de $10^{-9}\ c = 30$ cm en la longitud del recorrido. Los relojes de dicho experimento deberían estar sincronizados en un punto y luego deberían separarse lentamente hasta sus posiciones finales.

Se ha realizado un cierto número de experimentos para comprobar (10.4), es decir, para detectar el *desplazamiento del éter.* (fig. 10.13). Todos han fallado al intentar mostrar un movimiento de la Tierra a través del éter; los más importantes fueron los llevados a cabo por Michelson y Morley *.

Experimentos de Michelson-Morley. Dos conjuntos de ondas luminosas derivados de una fuente monocro-

(*) La influencia de este experimento sobre Einstein se discute en un interesante artículo de Holton. *Am. J. Phys.*, **37**, 968 (1969).

mática común pueden interferir destructiva o constructivamente en un punto, según la diferencia de fase que las ondas presenten en ese punto. La fase relativa puede variarse haciendo que un tren de ondas recorra más camino que el otro. Michelson y Morley construyeron un interferómetro perfeccionado, cuyas partes esenciales pueden verse en las figs. 10.14 y 10.15*a*. Un haz de luz de una fuente única *s* se desdobla mediante un espejo semiplateado en *a*. Continuamos la descripción del experimento esencialmente con las mismas palabras y notaciones de los propios investigadores *:

> Sea *sa* [fig. 10.15 *a* a *h*] un rayo de luz que se refleja parcialmente según *ab* y en parte se transmite por *ac*, siendo reflejados por los espejos *b* y *c*, a lo largo de *ba* y *ca*. El primero, *ba*, se transmite parcialmente a lo largo de *ad*, y *ca* se refleja parcialmente también a lo largo del mismo *ad*. Si entonces los recorridos *ab* y *ac* son iguales, los dos rayos interfieren a lo largo de *ad*. Supongamos ahora que, estando en reposo el éter, el aparato completo se mueve en la dirección *sc*

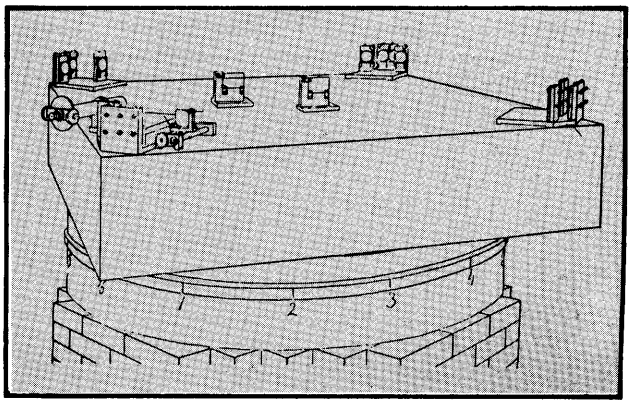


FIG. 10.14 Perspectiva del aparato descrito por Michelson y Morley en su artículo de 1887.

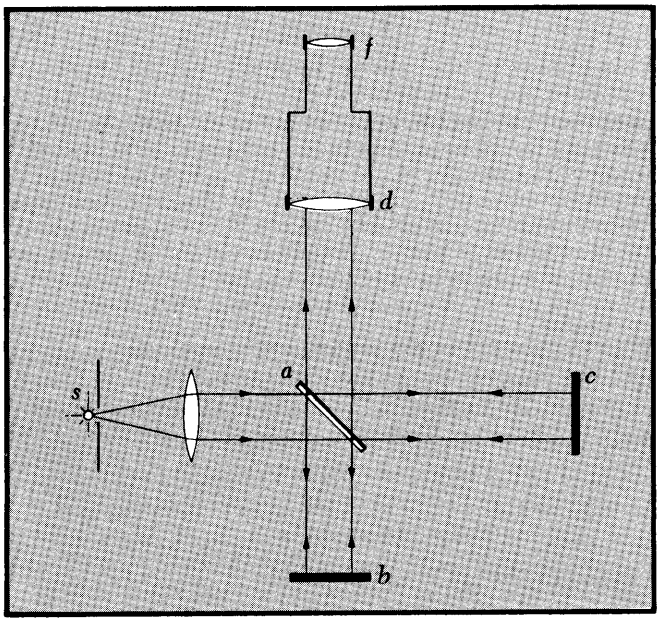
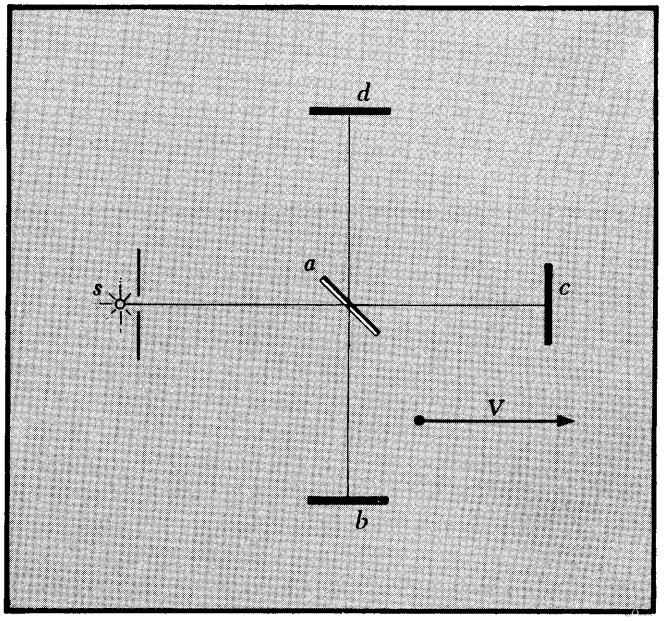


FIG. 10.15 *a*) El interferómetro experimental de Michelson-Morley se componía de una fuente luminosa *s*, un espejo semiplateado *a*, espejos *b* y *c* y un telescopio detector *d*; *f* representa el foco del telescopio.



b) Si el interferómetro está en reposo en el éter, una interferencia entre los haces *aba* y *aca* se observará en *d*. Si el aparato (y la Tierra) tienen velocidad *V* respecto a un éter hipotético, deberíamos esperar que la interferencia cambiase en *d*, puesto que el tiempo en recorrer *aba*, *aca* variará ahora en cantidades diferentes.

(*) A. A. Michelson y E. W. Morley, *Am. J. Sci.*, **34**, 333 (1887). Este experimento fue uno de los más notables del siglo diecinueve. Sencillo en principio, este experimento condujo a una revolución científica con unas consecuencias de gran alcance. Obsérvese que la razón entre la velocidad de la Tierra en su órbita y la velocidad de la luz es aproximadamente 10^{-4}. Al reproducir el extracto hemos escrito *c* en lugar de su *V*, y *V* en lugar de su *v*; las notas intercaladas se han incluido entre corchetes.

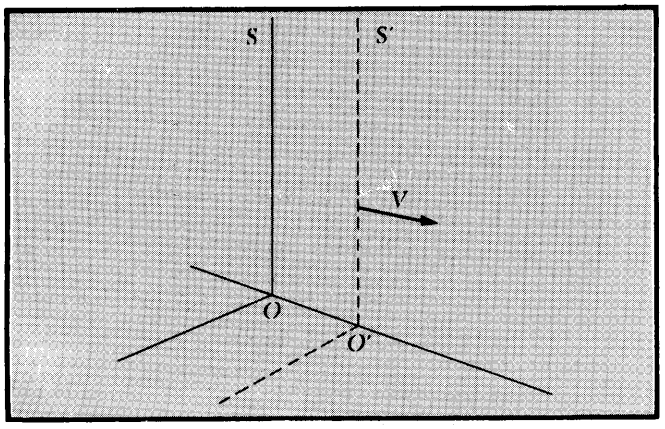
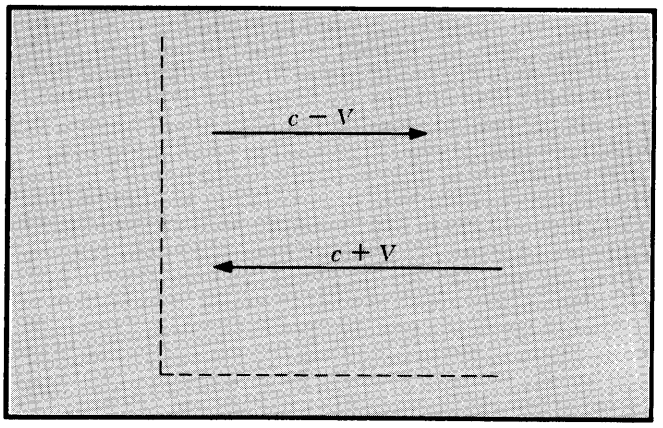
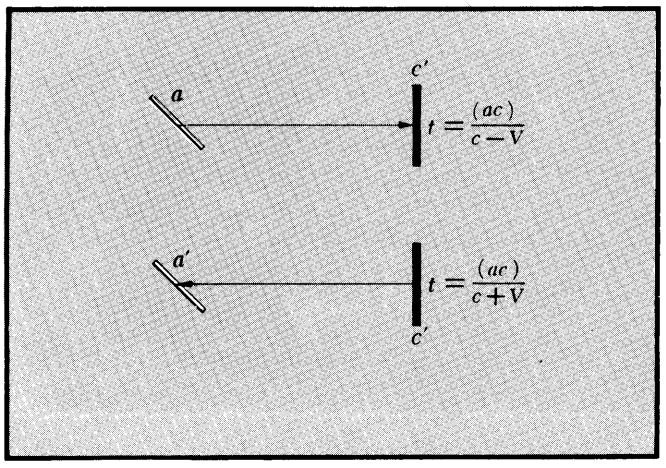


FIG. 10.15 *(continuación)* c) Para darse cuenta de esto, consideremos un sistema galileano S' moviéndose con la Tierra y el interferómetro. S es un sistema de Galileo en reposo en el éter.



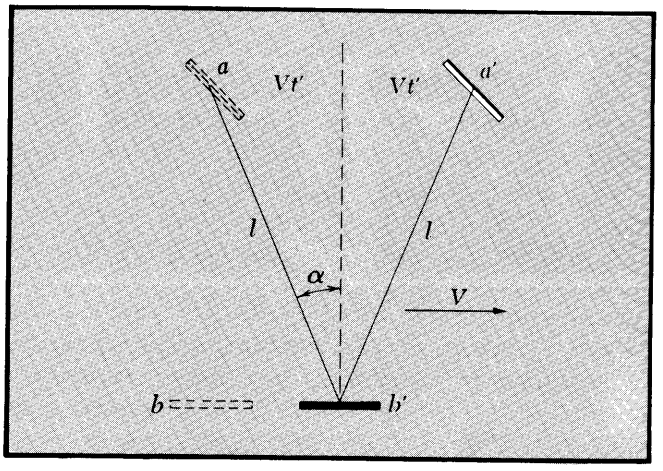
d) De acuerdo con la transformación de Galileo, la luz que se mueva hacia la derecha tendrá velocidad $c - V$ en S'; la que se desplace hacia la izquierda tendrá velocidad $c + V$ en S'.



e) Así, pues, el tiempo para ir de a a c' y regresar a a' es

$$\Delta t(ac'a') = \frac{(ac')}{c - V} + \frac{(ac')}{c + V}$$

en donde (ac') designa la distancia entre a y c'.



f) ¿Cuál es el tiempo $\Delta t(ab'a') = 2t'$ para ir de a a b' y volver a a'? En el sistema galileano S en reposo en el éter, el interferómetro tiene velocidad V hacia la derecha; la luz tiene velocidad c.

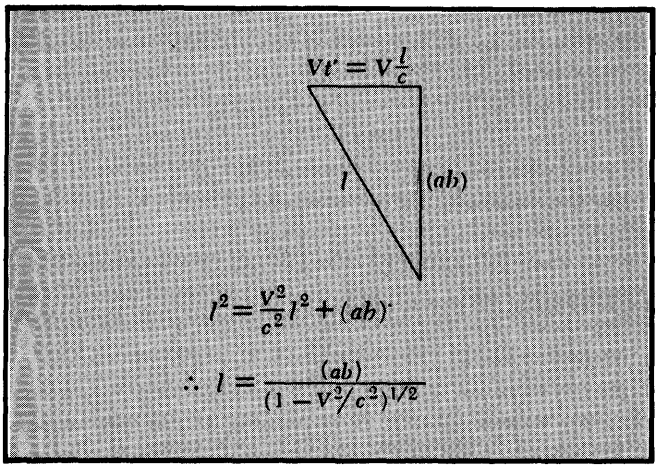


FIG. 10.15 *(continuación) g)* $\Delta t(ab'\,a') = 2t = 2(ab)/\sqrt{c^2 - V^2}$. **Hasta los términos de orden V^2/c^2, este tiempo es el mismo que**

$$\frac{2(ab)\sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}}}{c}$$

con la velocidad de la Tierra en su órbita; las direcciones y distancias recorridas por los rayos se verán así alteradas: El rayo *sa* se refleja a lo largo de *ab'* [fig. 10.15 *f*], y vuelve según *b'a'*, formando el ángulo *ab'a'*, o 2 α, duplo del ángulo de aberración, y va al foco del telescopio, cuya dirección está sin alterar. El rayo transmitido marcha a lo largo de *ac'*, vuelve a lo largo de *c'a'* [fig. 10.15 *e*] y se refleja en *a'*, formando un ángulo *c'a'd'* (no indicado) igual a $90° - \alpha$ y, por lo tanto, todavía coincidirá con el primer rayo. Puede señalarse que los rayos *b'a'* y *c'a'* no se encuentran exactamente en el mismo punto *a'*, aunque la diferencia es de segundo orden y no influye en la validez del razonamiento. Intentemos ahora hallar la diferencia entre las dos trayectorias *ab'a'* y *ac'a'*.

Sea c = velocidad de la luz.
V = Velocidad de la Tierra en su órbita.
D = distancia *ab* o *ac*.
T = tiempo que la luz tarda en pasar de *a* a *c'*.
T' = tiempo que la luz tarda en volver de *c'* a *a'*.

Entonces

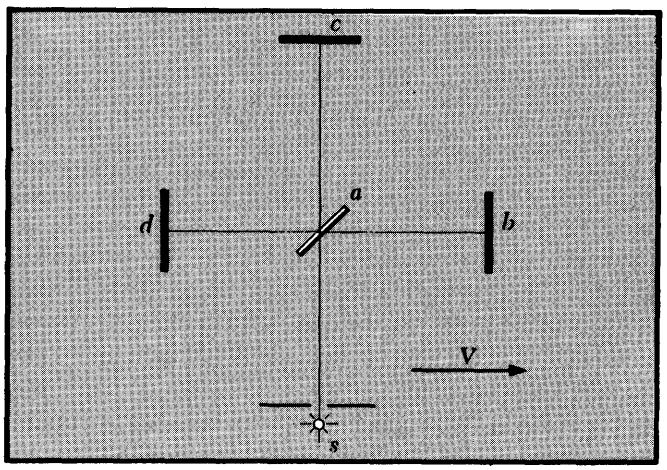
$$T = \frac{D}{c - V} \qquad T' = \frac{D}{c + V}$$

El tiempo total en ir y venir es

$$T + T' = 2D\frac{c}{c^2 - V^2}$$

y la distancia recorrida en este tiempo es

$$2D\frac{c^2}{c^2 - V^2} \approx 2D\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)$$



h) **Así, pues, incluso aunque (*ab*) = (*ac*), la transformación de Galileo nos llevaría a esperar un corrimiento en la interferencia, si el interferómetro cambia su velocidad respecto al éter. No se observó nada en absoluto. Aquí el aparato ha girado 90° para repetir el ensayo con el movimiento paralelo a *ab* en lugar de a *ac*.**

despreciando los términos de cuarto orden. La longitud del otro recorrido es evidentemente

$$2D\sqrt{1+\frac{V^2}{c^2}}$$

o hasta el mismo grado de exactitud,

$$2D\left(1+\frac{V^2}{2c^2}\right)$$

La diferencia es, por lo tanto,

$$D\frac{V^2}{c^2}$$

Si ahora todo el aparato se hace girar 90°, la diferencia se producirá en la dirección opuesta; por tanto, el desplazamiento de las franjas de interferencia deberá ser $2D\,(V^2/c^2)$. Considerando únicamente la velocidad de la Tierra en su órbita, esto equivaldría a $2D \times 10^{-8}$. Si, como fue el caso en el primer experimento, $D = 2 \times 10^6$ ondas de luz amarilla, el desplazamiento que habría de esperarse sería 0,04 de la distancia entre las franjas de interferencia.

En el primer experimento una de las principales dificultades que encontramos fue el de hacer girar el aparato sin producir ninguna distorsión, y otra fue su extraordinaria sensibilidad a las vibraciones. Esta era tan grande que era imposible ver las franjas de interferencia (excepto a intervalos breves) cuando trabajábamos en la ciudad, incluso a las dos de la mañana. Finalmente, como antes señalábamos, la magnitud a observar, es decir, un desplazamiento ligeramente inferior a un veinteavo de la distancia entre las franjas de interferencia, puede haber sido demasiado pequeña para detectarse cuando estuviese enmascarada por los errores experimentales.

Las primeras dificultades nombradas fueron totalmente superadas [en el segundo experimento] montando el aparato sobre una piedra flotante sobre mercurio, y las segundas aumentando, mediante reflexiones repetidas, la trayectoria de la luz hasta casi diez veces su valor inicial.

...Considerando únicamente el movimiento de la Tierra en su órbita, este desplazamiento debe ser

$$2D\frac{V^2}{c^2} = 2D \times 10^{-8}$$

La distancia D era próxima a once metros, ó 2×10^7 longitudes de onda de luz amarilla; el desplazamiento esperado era, por tanto, de 0,4 franjas [si la Tierra estuviera moviéndose en el éter]. El desplazamiento real fue ciertamente menor que la veinteava parte de éste y, probablemente, aún menor que la cuarentava parte (fig. 10.16). Pero como el desplazamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad, la velocidad relativa de la Tierra y el éter es probablemente menor que un sexto de la velocidad orbital de la Tierra y ciertamente menor que un cuarto.

Los resultados experimentales de Michelson y Morley fueron contrarios a lo que podíamos esperar, basándo-

nos en la transformación galileana. Desde entonces estos experimentos se han repetido (con variaciones) con luz de diferentes longitudes de onda, con luz de las estrellas, con luz extraordinariamente monocromática procedente de un láser moderno, a altitudes elevadas, bajo la superficie de la Tierra, en diferentes continentes y en diversas épocas del año, a lo largo de un período de unos 80 años. Podemos decir que el corrimiento del éter («viento del éter») es cero hasta una precisión que se expresa mejor diciendo que las velocidades de la luz en su mismo sentido y en sentido contrario son iguales dentro de una imprecisión inferior a 10^3 cm/s o de 1 parte en 1000 de la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol.

Invariancia de c. El resultado negativo del experimento de Michelson-Morley sugiere que la influencia del éter es indetectable. El resultado también sugiere que la velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente o del observador. La evidencia experimental sobre este último punto es muy buena pero puede ser mejorada. El trabajo realizado por Sadeh descrito en el Cap. 11, demuestra que la velocidad de los rayos γ es constante dentro del $\pm$ 10 por ciento, independientemente de la velocidad de la fuente, aun con velocidades de éstas del orden de $\frac{1}{2}$ *c*. Llegamos a la conclusión de que, a partir de todas las pruebas experimentales, *un frente de luz de onda esférica emitido desde una fuente puntual en un sistema inercial parecerá esférico para un observador situado en cualquier otro sistema inercial.*

En una sección anterior señalamos que la velocidad de las ondas electromagnéticas es independiente de la frecuencia en el intervalo de 10^8 a 10^{22} cps. Mediciones cuidadosas demuestran también que *c* es independiente de la intensidad de la luz, así como de la presencia de otros campos eléctricos y magnéticos. Nuestras discusiones se han limitado enteramente a las ondas electromagnéticas moviéndose en el espacio libre.

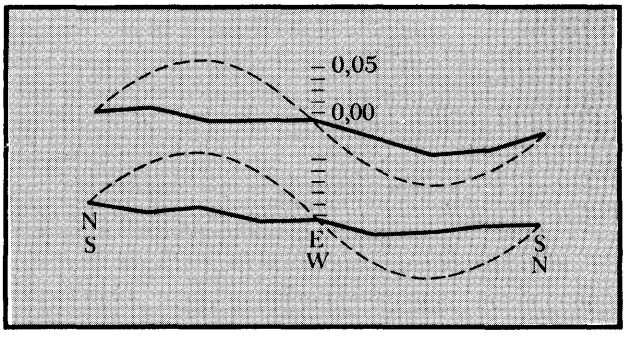


FIG. 10.16 «Los resultados de las observaciones se han representado gráficamente (en la figura). La curva superior es la correspondiente a las observaciones realizadas a mediodía, y la inferior, a la de las observaciones de la tarde. Las curvas a trazos representan *un octavo* de los desplazamientos teóricos. Parece acertado llegar a la conclusión, a partir de la figura, que si existe algún desplazamiento debido al movimiento relativo de la Tierra y del éter luminífero, éste no puede ser mucho mayor que 0,01 de la distancia entre las franjas.» [Michelson y Morley, *Am. J. Sci.*, **34**, 333 (1887)]. El eje vertical es el desplazamiento de las franjas; el horizontal se refiere a la orientación del interferómetro respecto a una línea este-oeste.

EFECTO DOPPLER

Este efecto o corrimiento Doppler relaciona la frecuencia medida de una onda con las velocidades relativas del transmisor, el medio y el receptor. En el sonido es familiar para cualquiera que haya escuchado el ruido de un automóvil que se aproxima y luego se aleja; o para los «mayores» que esperaban de pie en el andén de una estación de ferrocarril y escuchaban el silbato de un tren que pasaba sin detenerse. Al aproximarse la fuente

sonora el número de ondas emitidas en 1 s llegará al receptor en menos de un segundo, ya que la fuente está más próxima cuando se emite la última onda que cuando se emitió la primera. Por tanto, la frecuencia percibida es mayor. Viceversa, cuando la fuente se aleja, la frecuencia es menor. El mismo argumento se aplica a una fuente fija y un receptor móvil. Las relaciones para el sonido vienen dadas por

$$\nu_R = \nu_T \frac{1 + v_R/\mathcal{V}}{1 - v_S/\mathcal{V}} \tag{10.6}$$

en donde $\mathcal{V}$ es la velocidad de la onda sonora en el medio, por ejemplo, aire, considerado en reposo, v_S es la velocidad de la fuente considerada positiva cuando se mueve hacia el receptor, v_R es la velocidad del receptor considerada positiva cuando se mueve hacia la fuente, ν_T es la frecuencia de la fuente (transmisor) medida por un observador en reposo respecto a la fuente, y ν_R la frecuencia medida por el receptor.

Obsérvese que si $v_S \ll \mathcal{V}$ (supongamos $v_R = 0$),

$$\nu_R = \nu_T\left(1 + \frac{v_S}{\mathcal{V}}\right) \tag{10.7}$$

y

$$\frac{\nu_R - \nu_T}{\nu_T} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v_S}{\mathcal{V}} \tag{10.8}$$

En el caso de la luz se presentan efectos semejantes, aunque pronto veremos algunas diferencias esenciales. Al explicar y analizar el efecto Doppler para el sonido debemos considerar el medio que transporta las ondas sonoras y el movimiento de la fuente o receptor respecto al medio. En el caso de la luz no debemos entender el efecto Doppler de este modo, ya que, en virtud del experimento de Michelson-Morley, no podemos considerar un medio (por ejemplo, el éter). El efecto Doppler nos proporciona algunos ensayos interesantes de la relatividad especial e importantes resultados; por ejemplo, en astronomía. En el Cap. 11 trataremos este efecto correctamente para la luz.

EJEMPLO

El corrimiento hacia el rojo debido al retroceso. Los análisis espectrográficos de la luz recibida de galaxias lejanas muestran que ciertas líneas espectrales prominentes identificadas en estudios espectroscópicos de laboratorio, se corren de un modo apreciable hacia el extremo del color rojo o de frecuencias bajas del espectro visible. Este corrimiento puede interpretarse como un

efecto Doppler que tiene su origen en la velocidad de retroceso o alejamiento de la fuente. Se sabe también que las velocidades calculadas a partir de estos corrimientos Doppler son directamente proporcionales a las distancias de las fuentes al observador, determinadas por medios independientes.

Este es un hecho extraordinario y sorprendente. La explicación no relativista más sencilla de la relación distancia-velocidad se conoce con el nombre de *teoría de la expansión del universo* («big-bang»), de acuerdo con la cual el universo se formó mediante una gran explosión unos 10^{10} años atrás. Los productos de la explosión que se mueven a mayor velocidad forman ahora las regiones más exteriores del universo. Así, pues, cuanto mayor es la velocidad radial de la materia (relativa a nosotros) más alejada estará y mayor será su corrimiento hacia el rojo. Existen algunas explicaciones más complicadas del corrimiento hacia el rojo debido al retroceso. Ninguna está demostrada (fig. 10.17).

Un par de líneas de absorción fácilmente reconocibles en el espectro del potasio (las líneas K y H) son prominentes en los espectros de muchas estrellas. Estas líneas se encuentran cerca de la longitud de onda de 3950 Å * en los laboratorios terrestres. Supondremos que los observadores de un laboratorio moviéndose en el sistema en reposo de cualquier estrella medirán la misma longitud de onda. En la luz que procede de una nebulosa en la constelación Bootis observamos estas mismas líneas en una longitud de onda de 4470 Å, con un corrimiento hacia el rojo de $4470 - 3950 = 520$ Å. Esto da un corrimiento relativo de

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{520}{3950} = 0{,}13$$

Observemos que, mediante el empleo de (10.8) con $\mathcal{V}$ igual a c (como se justificará para las ondas luminosas en el Cap. 11) y diferenciando ** $\nu = c/\lambda$ con c constante, obtenemos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad \text{o} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v_S}{c} \tag{10.9}$$

Se infiere de (10.8) y (10.9) que la nebulosa está alejándose de nosotros con una velocidad relativa $|v| \approx 0{,}13\ c$, que es realmente una velocidad muy alta. Para *velocidades mayores* necesitamos utilizar una u otra relación para el efecto Doppler pero modificadas por la teoría de los modelos relativistas del universo ***. Las expresiones aproximadas de las Ecs. (10.8) y (10.9), válidas para cualquier sonido o luz a velocidaes pequeñas comparadas con las velocidades del sonido o de la luz, respectivamente, deben también substituirse por las expresiones correctas para la luz.

Observaciones análogas sobre gran número de galaxias pueden combinarse con estimaciones independientes de sus distancias hasta obtener un resultado empírico asombroso. La veloci-

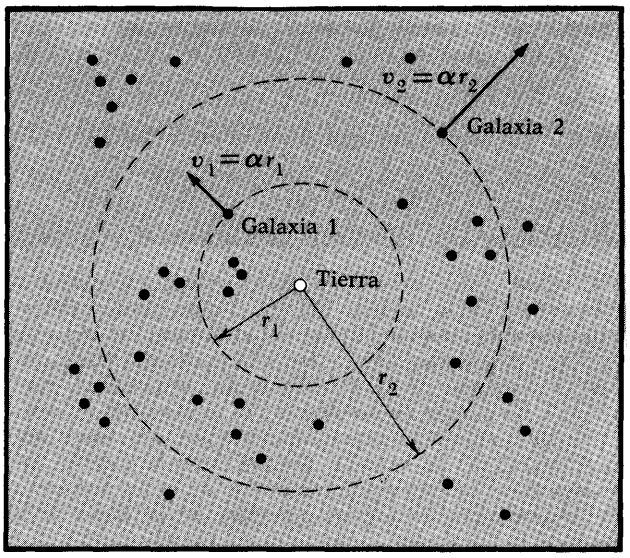


FIG. 10.17 El efecto Doppler observado en la luz de las estrellas lejanas indica que las galaxias están alejándose de nosotros con una velocidad proporcional a su distancia a la Tierra. Las galaxias 1 y 2 se suponen a distancia r_1 y r_2 medidas por otros medios; sus velocidades son v_1 y v_2 según el efecto Doppler.

(*) 1 angstrom $\equiv 10^{-8}$ cm $\equiv 1$ Å.

(**) Téngase presente este pequeño truco de cálculo: Supongamos que $y = Ax^n$, en donde A y n son constantes y que se desea encontrar dy/y en función de dx/x. Tomemos logaritmos naturales en ambos miembros para obtener $\log y = \log A + n \log x$. A continuación se diferencian ambos miembros para obtener $dy/y = n\,dx/x$. Aquí hemos usado la relación $d \log x/dx = 1/x$.

(***) Véase G. C. McVitties, *Physics Today*, p. 70 (julio 1964).

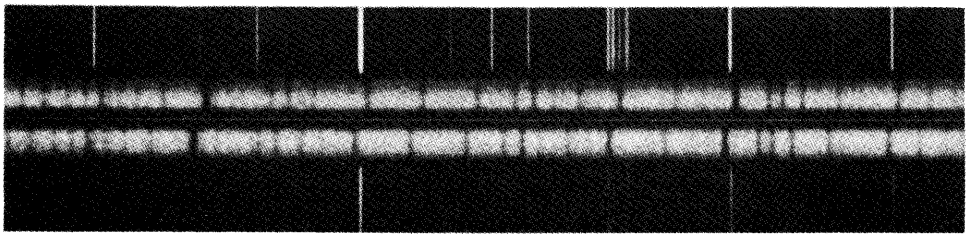


FIG. 10.18 Dos espectrogramas (tomados en instantes diferentes) de la estrella binaria α^1 Geminorum. Unicamente una de las dos estrellas del sistema emite bastante luz para detectarse. Obsérvese que las líneas espectrales procedentes de la estrella están desplazadas, respecto a las líneas de referencia del laboratorio en sentidos diferentes, que corresponden a las dos fases del movimiento de la estrella. En una fase la estrella se mueve hacia la Tierra y la frecuencia de la luz aumenta; en la otra fase, la estrella se aleja de la Tierra y la frecuencia disminuye. *(Fotografía del Observatorio Lick.)*

dad relativa de una galaxia a una distancia r de nosotros puede representarse por la relación

$$v = \alpha r \tag{10.10}$$

en donde la constante α, que se ha determinado empíricamente, vale alrededor de $1{,}6 \times 10^{-18}$ s^{-1}. (La estimación de las distancias galácticas es un tema complicado y debe consultarse un texto de astronomía con tal objeto.) El inverso de α tiene dimensiones de tiempo:

$$\frac{1}{\alpha} \approx 6 \times 10^{17}\,\text{s} \approx 2 \times 10^{10}\ \text{años} \tag{10.11}$$

Este es el tiempo transcurrido desde la explosión primitiva hasta alcanzar su distancia actual. Cuando multiplicamos $1/\alpha$ por c, obtenemos una longitud:

$$\frac{c}{\alpha} \approx (3 \times 10^{10})(6 \times 10^{17}) \approx 2 \times 10^{28}\,\text{cm} \tag{10.12}$$

El tiempo [Ec. (10.11)] suele denominarse «edad del universo» y la longitud [Ec. (10.12)] «radio del universo». El significado real de estas magnitudes no se conoce aún, aunque se han propuesto varios modelos cosmológicos diferentes para justificar la forma de las relaciones.

LA VELOCIDAD LÍMITE

Hemos visto que las ondas electromagnéticas en el espacio libre pueden viajar únicamente con la velocidad c. ¿Puede algún objeto tener una velocidad superior a esta velocidad límite c?

Consideremos el movimiento de partículas cargadas en un acelerador. ¿Pueden acelerarse las partículas para viajar con mayor rapidez que c? Todavía no hemos encontrado directamente durante este curso ningún principio que impida la aceleración de partículas cargadas hasta velocidades arbitrariamente elevadas (fig. 10.19).

El siguiente experimento * ilustra la proposición de que una partícula no puede acelerarse hasta una velo-

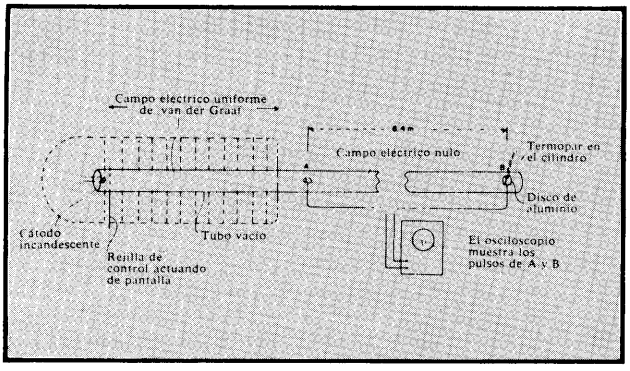


FIG. 10.19 Disposición general del experimento de la velocidad límite. Los electrones se aceleran en un campo uniforme a la izquierda y se mide el tiempo que tardan en pasar de A a B mediante el osciloscopio.

(*) Este experimento fue realizado por W. Bertozzi en conexión con la película PSSC «The Ultimate Speed». Nuestra descripción proviene directamente del Cap. A-3 del Programa de Temas avanzados del PSSC. Véase *Am. J. Phys.*, **32**, 551 (1964).

cidad mayor que c. Se aceleran electrones por campos electrostáticos sucesivamente mayores en un acelerador Van de Graaff, después de lo cual se dirigen con una velocidad constante a través de una región en la que no existe campo. Su tiempo de vuelo y, por consiguiente, su velocidad en una distancia conocida AB se mide directamente y la energía cinética (que se transforma en calor en un blanco al final de la trayectoria) se mide mediante un termopar calibrado.

En la experiencia se conoce el potencial acelerador Φ con buena precisión. La energía cinética de un electrón es

$$Ec = eEL = e\,\Phi$$

siendo L la distancia en la que tiene lugar la aceleración y $\Phi = EL$ la diferencia de potencial eléctrico entre los extremos de la trayectoria de aceleración. Si $\Phi = 10^6$ voltios, el electrón después de la aceleración tiene una energía de 1×10^6 electrón-voltios (1 MeV). Ahora bien, 10^6 voltios $\approx 10^6/300$ statvoltios, de modo que la energía cinética ganada por un electrón es

$$\frac{(4{,}80 \times 10^{-10})(10^6)}{300} \approx 1{,}60 \times 10^{-6}\ \text{erg} \qquad (10.13)$$

Si en el haz se mueven N electrones por segundo, la potencia liberada en el blanco de aluminio en el extremo del haz será de $1{,}60 \times 10^{-6}\ N$ ergs/s. Esto concuerda exactamente con la determinación directa mediante el termopar de la potencia absorbida por el blanco. Este resultado confirma que los electrones dejan en el blanco la energía cinética adquirida durante su aceleración. Además, sobre la base de la mecánica no relativista, es de esperar que

$$Ec = \tfrac{1}{2}mv^2$$

de modo que un gráfico de v^2 en función de la energía cinética Ec deberá ser una línea recta. Para energías mayores que 10^5 eV aproximadamente, sin embargo, la relación lineal entre v^2 y Ec no se mantiene experimentalmente. En su lugar, se observa que la velocidad se aproxima al valor límite 3×10^{10} cm/s a mayores energías. Así, cuando la velocidad medida se compara con la velocidad calculada según la Ec. (10.13) resulta ser menor que el valor previsto por la Ec. (10.13). En efecto, el gráfico de v^2 en función de Ec se curva como indica la fig. 10.20 aproximándose al valor 9×10^{20} cm^2/s^2. Los

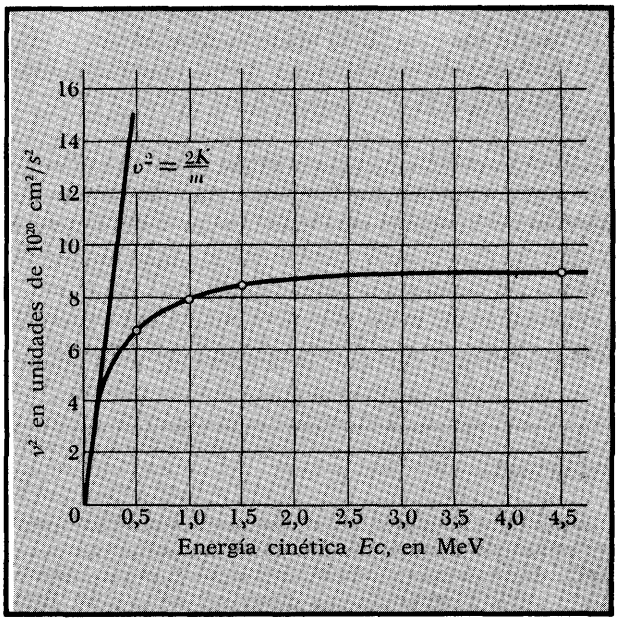


FIG. 10.20 Gráfico de v^2 en función de la energía cinética. Los pequeños círculos son puntos experimentales.

resultados experimentales pueden resumirse así: Los electrones absorben la energía esperada del campo acelerador, pero su velocidad no aumenta ilimitadamente. Esto sólo puede explicarse suponiendo que en la Ec. (10.13), cuando Ec se hace grande, m no permanece constante. Trataremos de nuevo este problema en el Cap. 12.

Otros muchos experimentos sugieren, al igual que éste, que c es el límite superior de la velocidad de las partículas. Así, pues, creemos firmemente que c es la máxima velocidad, tanto de las partículas como de las ondas electromagnéticas: *c es la velocidad límite.*

CONCLUSIONES

Estamos ahora en condiciones de estudiar la relatividad restringida en el Cap. 11 con los conocimientos experimentales siguientes:

1. c es invariante entre sistemas inerciales, es decir, sistemas de referencia que se mueven con velocidad uniforme unos respecto a otros.
2. c es la máxima velocidad a la cual puede transmitirse energía.
3. La velocidad absoluta de un sistema de referencia no tiene significado. Sólo velocidades relativas pueden determinarse experimentalmente.
4. Las simples transformaciones de Galileo no proporcionan una explicación satisfactoria de los fenómenos que tienen lugar a altas velocidades.
5. La fórmula newtoniana de la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$, falla cuando v se aproxima a c.

Hemos revisado únicamente un reducido número de las experiencias que fundamentan la teoría de la relatividad restringida que está ahora establecida muy sólidamente. Los físicos tienen tanta confianza en esta teoría como en cualquier otra parte de la física. Nuestra próxima tarea debe ser formularla con precisión y entender algo de sus consecuencias principales.

PROBLEMAS

1. *Efecto Doppler.* Un cosmonauta desea determinar su velocidad de aproximación a la Luna. Envía una señal de radio de frecuencia $v = 5000$ Mc/s y compara esta frecuencia con su eco, observando una diferencia de 86 kc/s. Calcular la velocidad del vehículo espacial relativa a la Luna. (La expresión no relativista para el efecto Doppler es suficientemente exacta en muchos casos.) *Sol.* $2{,}6 \times 10^5$ cm/s.

2. *Corrimiento hacia el rojo debido al retroceso.* Una línea espectral que aparece con una longitud de onda de 5000 Å en el laboratorio se observa con 5200 Å en el espectro de la luz que viene de una galaxia lejana.
   (*a*) ¿Cuál es la velocidad de retroceso de la galaxia? *Sol.* $1{,}2 \times 10^9$ cm/s.
   (*b*) ¿A qué distancia está la galaxia? *Sol.* 8×10^{26} cm.

3. *Velocidad de la luz.* En la medición de la luz realizada por Michelson, un prisma octogonal reflector girando alrededor de su eje reflejaba un haz de luz de una fuente luminosa lejana y regresaba hasta un observador próximo a la fuente. El sistema medidor de tiempos hacía que el tiempo de tránsito de la luz fuese igual a un octavo del período de rotación del prisma octogonal. La distancia simple era $L = 35{,}410 \pm 0{,}003$ km y la frecuencia de rotación del prisma $v = 529$ ciclos por segundo con una exactitud de 3×10^{-5} ciclos/s.

(*a*) Calcular la velocidad de la luz a partir de estos datos. (Ha de aplicarse una corrección fraccionaria o relativa del orden de 10^{-5} para compensar la influencia atmosférica.)

(*b*) El ángulo entre dos caras adyacentes del prisma era $135° \pm 0{,}1''$. Estimar la precisión total de la medida de *c*.

4. *Eclipses de Io.* Uno de los satélites de Júpiter, Io, se mueve en una órbita de radio $4{,}21 \times 10^{10}$ cm con un período medio de 42,5 horas. Roemer observó que el período variaba regularmente durante el año con un período de variación de casi un año. La desviación máxima del período respecto a la media fue 15 segundos en instantes separados aproximadamente seis meses. Despreciar la trayectoria orbital de Júpiter.

(*a*) Estimar la distancia que la Tierra recorre en un período del movimiento de Io alrededor de Júpiter.

Sol. $4{,}5 \times 10^{11}$ cm.

(*b*) ¿Cuándo parece que es más grande el período de Io?

(*c*) Utilizar los resultados precedentes y los datos que se acompañan para estimar la velocidad de la luz.

(*d*) Estimar el retraso aparente acumulado en los seis meses siguientes al punto de retardo cero cuando la Tierra está más próxima a Júpiter.

5. *Paralaje estelar.* La paralaje estelar fue predicha por Aristarco de Samos (alrededor de 200 años antes de Cristo) y fue observada con certeza por Bessel en 1838. Un notable intento, pero infructuoso, fue hecho por Bradley, quien descubrió en su lugar la aberración de la luz de las estrellas. Durante el transcurso de un año la posición aparente de una estrella se mueve entre dos extremos unos 40'' de arco aproximadamente, debido a la aberración.

(*a*) ¿Cuál debería ser la distancia en parsecs de una estrella con una paralaje de 20''? La estrella más cercana conocida es α Centauri a una distancia de unos 1,3 parsecs.

Sol. 0,05 parsecs.

(*b*) Demostrar que el movimiento anual aparente debido a la aberración, de las estrellas cercanas a la eclíptica es una línea recta cuyos extremos subtienden un ángulo de 40''. La eclíptica está en el plano de la órbita terrestre.

6. *Rotación de las galaxias.* En 1916, antes de que se conocieran las grandes distancias de las nebulosas (galaxias), se anunció que la nebulosa espiral M101 giraba como un cuerpo sólido con un período de 85 000 años. El diámetro angular observado es 22'. Calcular la máxima distancia posible de la galaxia si el período anterior es correcto, suponiendo que los extremos de la galaxia no se mueven a mayor rapidez que *c*. [Medidas recientes de las estrellas en M101 la sitúan a una distancia de $8{,}5 \times 10^{24}$ cm. Es evidente que la rotación anunciada en 1916 fue sobreestimada.]

7. *Estrellas variables.* El telescopio de 200 pulgadas de Monte Palomar puede escasamente distinguir las estrellas individuales en galaxias a una distancia de 3×10^{25} cm. Un método para calibrar distancias de este orden de magnitud implica la observación de los períodos de luminosidad de ciertas estrellas variables del tipo Cefeida. Una estrella tipo Cefeida es una estrella inestable gravitatoriamente que presenta pulsaciones periódicas en las que su radio puede variar quizás en un 5 ó 10 por ciento. El período de una Cefeida está referido a su luminosidad media. La temperatura de la estrella cambia con el mismo período que el radio, de modo que se observan variaciones periódicas en su brillo. Se han encontrado períodos tan breves como el de algunas horas. En nuestra galaxia una Cefeida cuya luminosidad intrínseca es 2×10^4 veces la del Sol tiene un período de 50 días.

(*a*) Estimar a partir de la relación distancia-velocidad la velocidad radial de una galaxia situada a una distancia de 3×10^{25} cm [Ec. (10.10)].

(*b*) ¿Qué valor puede predecirse para el período de esta Cefeida a la distancia citada anteriormente?

Sol. 50,08 días.

8. *Novas.* Ocasionalmente una estrella experimenta una explosión en la que parte de sus capas exteriores son expulsadas a gran velocidad. Una estrella de este tipo se llama *nova.* Se observó visualmente que una nova reciente tenía una corteza periférica después de su estallido, encontrándose que el diámetro angular de la corteza aumentaba en 0,3'' por año. El espectro de la nova es un espectro estelar normal con líneas anchas de emisión superpuestas, cuya anchura (en longitudes de onda) permanece a 10 Å (en la vecindad de una longitud de onda de 5000 Å) aunque las líneas se están debilitando. La anchura ha de interpretarse como una medida del corrimiento Doppler entre las partes de la corteza que avanzan hacia nosotros. Estimar la distancia a la nova, si la corteza es ópticamente delgada (de modo que recibimos tanta luz del hemisferio alejado como del cercano). *Sol.* $1{,}2 \times 10^{21}$ cm.

9. *Velocidades de las galaxias.* Las velocidades radiales de las galaxias medidas relativas a la Tierra no son isótropas en el firmamento. La anisotropía es consecuencia del movimiento del **Sol** (velocidad orbital) respecto al centro de nuestra galaxia y del movimiento de ésta respecto al patrón local extragaláctico de reposo. Examinemos todas las galaxias situadas a una distancia particular, por ejemplo, $3{,}26 \times 10^7$ años luz.

(*a*) ¿Cuál es la velocidad radial media de estas galaxias?

Sol. La velocidad media de las galaxias está calculada a partir de la relación velocidad-distancia y vale 930 km/s.

(*b*) En sus espectros, ¿dónde estará la situación media de la línea Hα del hidrógeno? (En el laboratorio $\lambda_{H_\alpha} = 6{,}563 \times 10^{-5}$ cm.)

Sol. La línea H_α estará, por término medio, a $6{,}584 \times 10^{-5}$ cm.

En nuestro ejemplo encontramos que en un cierto sentido las velocidades son 300 km/s mayores que la media y que precisamente en el sentido opuesto son más pequeñas en esta misma cantidad.

(*c*) ¿Cuál es la velocidad del Sol en este sistema de referencia? *Sol.* 300 km/s.

(*d*) ¿Es ésta necesariamente la velocidad orbital del Sol alrededor del centro de nuestra galaxia?

Sol. No, porque ésta incluye cualquier movimiento de nuestra galaxia como un todo en este sistema de referencia.

(*e*) Suponiendo que esta velocidad sea la orbital, estimar la masa de nuestra galaxia, considerando que todas las masas residen en su centro y que la órbita del Sol es circular (la distancia al centro de la galaxia es 3500 años luz). Comparar el valor obtenido con la masa de 8×10^{44} g citada como masa de la galaxia y explicar la diferencia.

Sol. $4{,}5 \times 10^{43}$ g. Es menor que la citada normalmente porque gran parte de la masa de nuestra galaxia no está en el centro —de hecho, mucha parte de ella es exterior al Sol, donde no debe influir en el movimiento del Sol o ser detectable por este medio.

10. *Rotación de las estrellas.* Puede verse mediante ciertas características de su superficie que el Sol gira lentamente con un período de 25 días en el ecuador. Algunas estrellas, sin embargo, giran bastante más deprisa. ¿Cómo puede determinarse esto en vista del hecho de que las estrellas están tan alejadas de nosotros que sólo pueden verse como puntos luminosos?

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

HPP, *Project Physics Course*, caps. 16 (sec. 6) y 20 (sec. 1), Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1970.

A. A. Michelson, *Studies in Optics*, The University of Chicago Press, Chicago, 1927; reimpresión en rústica, 1962.

Contenido

HIPÓTESIS BÁSICAS
TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ
Contracción de longitudes
Medida de la longitud perpendicular
a la velocidad relativa
Dilatación del tiempo de los relojes móviles
Ejemplo. Tiempo de vida de los mesones π^+
Transformación de velocidades
Ejemplo. Suma de velocidades
Ejemplo. Aberración de la luz
Ejemplo. Efecto Doppler longitudinal
Relojes acelerados
Problemas
Lecturas suplementarias

11

Relatividad especial: transformaciones de Lorentz

HIPÓTESIS BÁSICAS

El resultado negativo del experimento de Michelson-Morley para detectar el movimiento de la Tierra a través del éter y los demás expuestos en el Cap. 10 pueden comprenderse únicamente si hacemos un cambio revolucionario en nuestro modo de pensar; necesitamos enunciar un nuevo principio sencillo y claro:

> La velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente luminosa o del receptor.

Es decir, la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia con movimiento uniforme respecto a la fuente. A esta nueva hipótesis debemos añadir nuestras anteriores hipótesis:

> El espacio es isotrópico y uniforme. Las leyes fundamentales de la física son idénticas para dos observadores cualesquiera en movimiento uniforme relativo.

Todas las amplias consecuencias de la teoría especial de la relatividad surgen de estas hipótesis.

Las ondas electromagnéticas (fotones) no son las únicas que poseen una velocidad independiente del movimiento de la fuente. Los científicos creen, con gran fundamento, que hay otras partículas, sobre todo neutrinos y antineutrinos, que tienen velocidades iguales a c. Trataremos, sin embargo, sobre los fotones, porque es más fácil experimentar con ellos.

Consideremos primero una onda luminosa que se propaga a partir de una fuente. El frente de la onda (superficie de igual fase) será una esfera considerado en el sistema referencial en el que la fuente está en reposo. Pero de acuerdo con nuestro nuevo principio, el frente de la onda tiene que seguir siendo una esfera si se considera en un sistema referencial con movimiento uniforme con relación a la fuente; podríamos decir, de otra manera, que por la forma del frente de onda, la fuente está en movimiento. La hipótesis fundamental de que la velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente, nos imposibilita saber por la forma del frente de onda, si la fuente está o no en movimiento uniforme.

TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

En el Cap. 4 introdujimos la transformación de Galileo a fin de entender cómo se consideran los fenómenos

desde dos puntos de vista diferentes. Aquí utilizaremos las mismas ideas con dos sistemas de referencia distintos, S y S', que se mueven con velocidad uniforme V uno respecto al otro. Nos interesa encontrar una transformación de coordenadas, y posiblemente también el tiempo, tal como la transformación de Galileo [ecuación (4.14)] que relacione las coordenadas y el tiempo de un sistema de referencia con las coordenadas y el tiempo de otro sistema de referencia, de tal forma que sea consistente con las hipótesis relativistas. Si en el origen del sistema S existe una fuente luminosa y se emite una señal cuando $t = 0$, la ecuación de un frente de ondas esférico es

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{11.1}$$

En el sistema de referencia S' con las coordenadas x', y', z' y t', la ecuación del frente de onda esférico será

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{11.2}$$

La velocidad de la luz c es la misma en las Ecs. (11.1) y (11.2).

Utilicemos las transformaciones de Galileo para ver si el resultado que se obtiene con ellas está de acuerdo con las Ecs. (11.1) y (11.2).

$$x' = x - Vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t \tag{11.3}$$

Si sustituimos (11.3) en (11.2) obtenemos directamente que

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

que ciertamente no está de acuerdo con (11.1). Así, pues, la transformación galileana falla y debemos intentar buscar alguna otra transformación. Si el principio de la constancia de la velocidad de la luz es válido, deberá existir *alguna* transformación que se reduzca a la galileana para valores de la velocidad V muy pequeños comparados con la velocidad de la luz c.

Intentemos ahora

$$x' = \alpha x + \epsilon t \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \delta x + \eta t$$

Sabemos que para $x' = 0$, $dx/dt = V$, y para $x = 0$, $dx'/dt' = -V$. Operando algebraicamente resulta

$$V = -\frac{\epsilon}{\alpha} \qquad -V = \frac{\epsilon}{\eta}$$

o sea

$$\alpha = \eta$$

Si repetimos la Ec. (11.2)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

resulta

$$\alpha^2x^2 + 2\alpha\epsilon xt + \epsilon^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2(\delta^2x^2 + 2\delta\alpha xt + \alpha^2t^2)$$

Comparando esta expresión con la Ec. (11.1) veremos que esta consistencia es posible si

$$2\alpha\epsilon = 2c^2\delta\alpha$$
$$\alpha^2 - c^2\delta^2 = 1$$

y

$$c^2\alpha^2 - \epsilon^2 = c^2$$

Eliminando ϵ por $\epsilon = -V\alpha$ tenemos

$$\alpha = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \epsilon = \frac{-V}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\delta = \frac{-V/c^2}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \eta = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

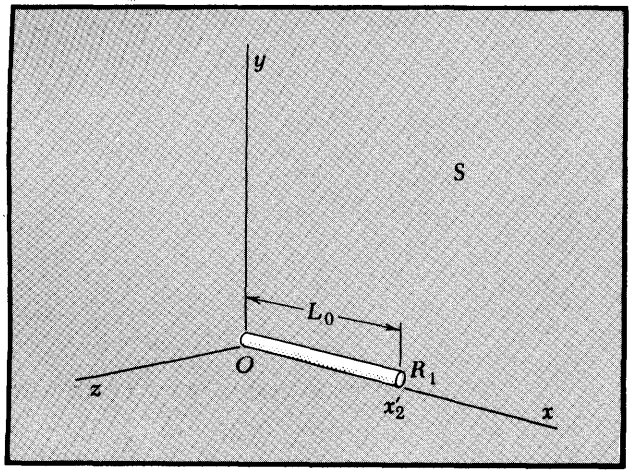


FIG. 11.1 *a*) Consideremos una varilla rígida R_1 de longitud L_0 en su sistema en reposo S.

Nuestra transformación es entonces

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z}$$
$$\boxed{t' = \frac{t - (V/c^2)x}{(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{11.4}$$

Esta es la *transformación de Lorentz* *. Es lineal en x y t; se reduce a la transformación galileana para $V/c \to 0$; cuando se sustituye en (11.2) da

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

exactamente como se requería. Esto es

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

es *invariante* en una transformación de Lorentz. La forma de la ecuación que describe el frente de ondas es la misma en todos los sistemas que se mueven con velocidad relativa uniforme. La ecuación (11.4) es la única solución a todas nuestras dificultades. Los alumnos deben aprender de memoria la transformación de Lorentz,

(*) Esta transformación tiene una larga historia. Fue utilizada primero por J. Larmor para explicar el resultado negativo del experimento de Michelson-Morley en su «Aether and Matter», págs. 174-176 (Cambridge University Press, Nueva York, 1900). Larmor pretendía una exactitud únicamente del orden v^2/c^2; en realidad, sus resultados son exactos.

pues con ella pueden recordarse muchos resultados importantes de la teoría de la relatividad. A continuación discutiremos algunos de estos resultados con ayuda de la transformación de Lorentz.

Usualmente es conveniente utilizar la notación típica de la relatividad

$$\boxed{\beta \equiv \frac{V}{c}} \tag{11.5}$$

Es decir, β (letra griega *beta*) representa la velocidad medida en un sistema natural de unidades en el que $c = 1$. También es conveniente introducir el símbolo γ (letra griega *gamma*):

$$\boxed{\gamma \equiv \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \equiv \frac{1}{(1-V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{11.6}$$

Obsérvese que $\gamma \geqslant 1$. La transformación de Lorentz, Ec. (11.4) se convierte en

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \tag{11.7}$$

y el lector puede comprobar (Prob. 2) que la transformación inversa es

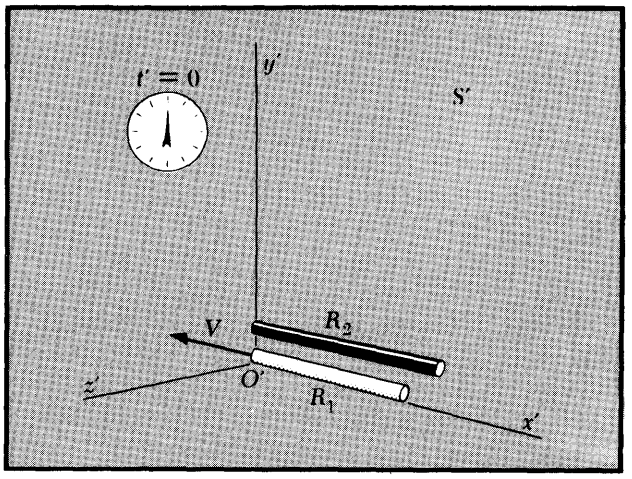
$$x = \gamma(x' + \beta ct') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) \tag{11.8}$$

Contracción de longitudes. Consideremos una varilla (véase fig. 11.1*a*) a lo largo del eje x y en reposo en el sistema de referencia S. Como está en reposo, las coordenadas de posición de sus extremos x_1 y x_2 son independientes del tiempo. Así, pues,

$$L_0 = x_2 - x_1$$

es la *longitud de la varilla en reposo* o *longitud propia* de la varilla. Consideremos también una varilla (véase fig. 11.2a) a lo largo del eje x' y en reposo en el sistema de referencia S'. Por la misma razón

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$



b) La transformación de Lorentz nos dice que R_1, que tiene la velocidad V en S', al ser medida tiene la longitud $L' = L_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ en S'. Obsérvese que $x_1 = x'_1 = 0$ en la figura.

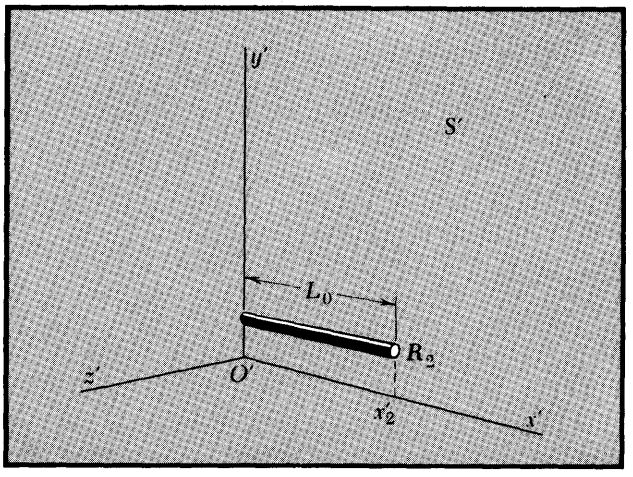
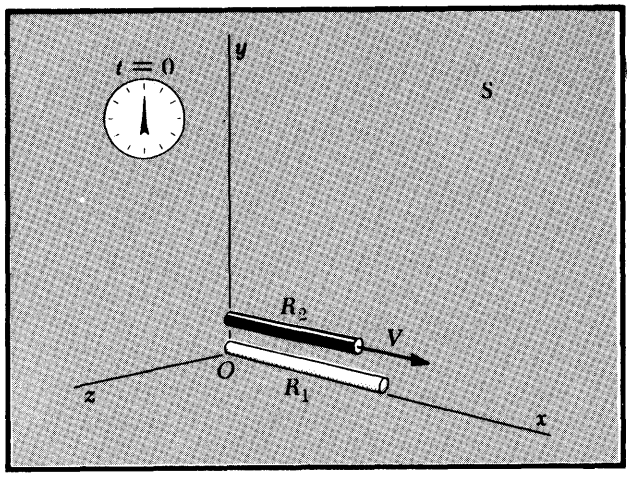


FIG. 11.2 *a*) Consideremos una varilla rígida R_2 de longitud L_0, cuando se mide en un sistema en reposo S'.



b) La transformación de Lorentz nos dice que R_2, que tiene la velocidad V en S, al ser medida tendrá una longitud $L = L_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ en S. Obsérvese que $x'_1 = x_1 = 0$ en la figura.

se denomina *longitud en reposo* o *longitud propia* de la varilla en S'.

Determinemos ahora las longitudes de estas barras vistas desde un sistema de referencia móvil. En primer lugar observemos la barra de la fig. 11.1*a* desde el sistema de referencia S', el cual se mueve con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto a la barra en reposo en S. (Véase fig. 11.1*b* y obsérvese que la barra R_2 de la fig. 11.2*a* está en reposo en S'.) La longitud de la barra vista desde S' se calcula determinando en un tiempo dado t' las posiciones x'_1 y x'_2 que coinciden con los extremos de la barra. El punto que hay que destacar aquí es que el tiempo t' es el mismo para x'_1 y x'_2. Dicho de otro modo, la distancia entre las posiciones x'_1 y x'_2 en S', los cuales coinciden *simultáneamente* (en S') con los extremos de la barra, es la definición natural de longitud L en el sistema móvil S'.

De las transformaciones de Lorentz, Ec. (11.8), tenemos

$$x_1 = \gamma(x'_1 + Vt'_1)$$
$$x_2 = \gamma(x'_2 + Vt'_2)$$
$$x_2 - x_1 = L_0 = \gamma(x'_2 - x'_1) + \gamma V(t'_2 - t'_1)$$

Haciendo ahora $t'_2 = t'_1$ como era necesario para la medida en S' resulta

$$L_0 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L$$

o sea

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (11.9)$$

utilizando nuestra definición $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Dicho de otro modo, la medida en el sistema móvil da una longitud más corta que en sistema estacionario.

Alternativamente observemos la barra de la fig. 11.2*a* (en reposo en S') a partir del sistema de referencia S que se mueve con velocidad $-V\hat{\mathbf{x}}'$ respecto a la barra en reposo en S'. (Véase fig. 11.2*b* y observemos que la barra R_1 de la fig. 11.1*a* está en reposo en S.) El procedimiento es el mismo, pero ahora el tiempo t es el mismo para la determinación de los puntos extremos x_1 y x_2. Según la transformación de Lorentz, Ec. (11.7), tenemos

$$x'_1 = \gamma(x_1 - Vt_1)$$
$$x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2)$$
$$x'_2 - x'_1 = L_0 = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma V(t_2 - t_1)$$

y haciendo $t_2 = t_1$, resulta

$$L_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$$
$$L = L_0(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

La medida de la varilla móvil da de nuevo una longitud más corta que la medida de la varilla estacionaria.

Esta es la famosa contracción de Lorentz-Fitzgerald de una barra que se mueve paralelaremente a su longitud respecto al observador. Uno puede preguntarse en este momento si la barra se ha «contraído realmente». Naturalmente, la barra no ha experimentado ningún proceso físico, pero la medida en el sistema móvil ha dado un resultado diferente. Para una discusión de los valores de objetos que se mueven rápidamente cuando se fotografían con una cámara, véase el excelente trabajo de Weisskopf *. Se ha demostrado, por ejemplo, mediante el cálculo de las trayectorias, que una esfera móvil se fotografiará en forma de una esfera y no como un elipsoide.

En la discusión anterior hemos destacado que el observador realiza sus medidas de longitud registrando *simultáneamente* las posiciones de los extremos de la barra en su propio sistema de referencia. Esto es lo que se requiere del observador en el sistema móvil S' cuando mide la longitud de la varilla estacionaria en S con el resultado L_0/γ [Ec. (11.9)]. Es esencial que reconozcamos que este acto de simultaneidad al registrar los puntos extremos en el tiempo t' en S' *no* se transforma en sucesos simultáneos en los puntos extremos x_1 y x_2 en S; por el contrario, las ecuaciones de Lorentz indican un intervalo de tiempo

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta(x_2 - x_1)}{c}$$

en S para el registro de los dos extremos que fue realizado simultáneamente en S'. Para una varilla a lo largo del eje y, no es preciso complicarnos con preguntas acerca de la simultaneidad en la comparación entre una móvil y otra estacionaria, pero con la varilla a lo largo del eje x la simultaneidad es de la máxima importancia **.

Ilustraremos esto mediante otro ejemplo diferente. Podemos sincronizar fácilmente una serie de relojes en S, sistema en el que la barra está en reposo. Supongamos que los relojes en $x = 0$ y $x = L_0$ (en cada extremo de la barra) emiten los dos en el instante $t = 0$ un destello de

(*) V. F. Weisskopf, «Physics Today», **13**, 24-27 (sept., 1960).

(**) Taylor y Wheeler, «Space Time Phisics - An introduction», páginas 64-66. W. H. Freeman and Company. San Francisco, 1965.

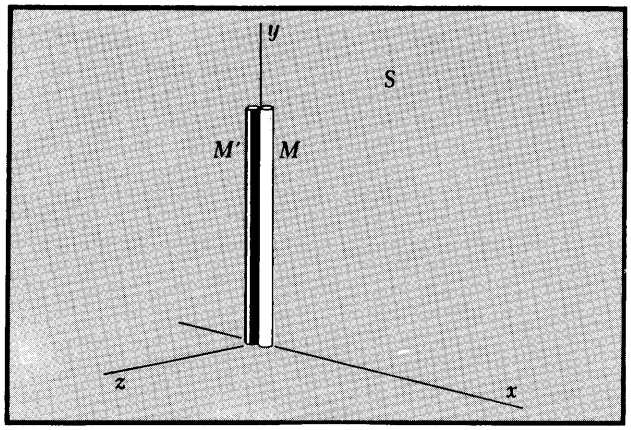
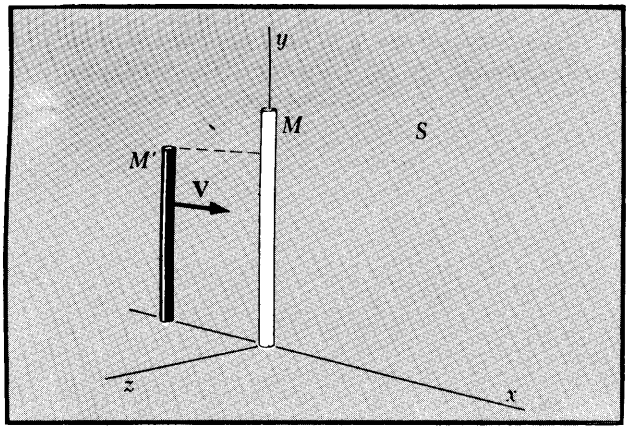
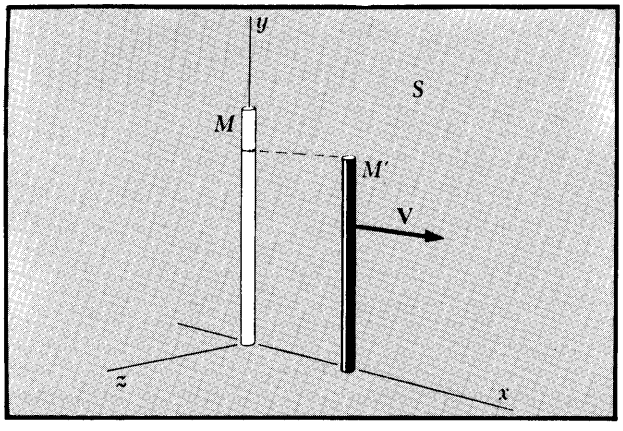


FIG. 11.3 *a*) Supongamos dos varillas idénticas M' y M en reposo en S.



b) Supongamos que M' parece más corta a un observador en S cuando se mueve en relación a S.



c) Entonces podríamos disponer la experiencia de modo que el extremo de M' marcase una señal en M cuando pasase junto a ella.

luz en la dirección y. Estos dos destellos se reciben en S' mediante dos contadores que forman parte de una serie de ellos espaciados a lo largo del eje x'. ¿A qué distancia estarán los dos contadores que son accionados? Según (11.7) tenemos para la situación de los dos contadores

$$x'_1 = 0 \cdot \gamma - c \cdot 0 \cdot \beta\gamma = 0$$
$$x'_2 = L_0\gamma - c \cdot 0 \cdot \beta\gamma = L_0\gamma$$

de modo que la distancia que los separa es

$$x'_2 - x'_1 = L_0\gamma = \frac{L_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (11.10)$$

¡Este resultado no está de acuerdo con (11.9)! Hemos hecho un experimento *diferente* y hemos obtenido un resultado diferente. Nuestro experimento anterior se basaba en la definición natural de la longitud en S', empleando el requisito de simultaneidad en S'. Dicho experimento exigía comparar $\Delta' x$ con Δx cuando $\Delta t' = 0$, mientras que en el segundo experimento se debía comparar $\Delta x'$ con Δx cuando $\Delta t = 0$.

Hemos aprendido indirectamente a partir del resultado (11.10) del segundo experimento que dos sucesos simultáneos en S no son, en general, simultáneos en S': Así, pues, vemos según (11.7) que dos sucesos *simultáneos* ($\Delta t = 0$) en S, que están separados por Δx en el espacio, estarán separados en S' tanto en el espacio como en el tiempo:

$$\Delta x' = \gamma\,\Delta x \qquad c\,\Delta t' = -\beta\gamma\,\Delta x$$

Medida de la longitud perpendicular a la velocidad relativa. Contrariamente a la medida de la distancia en la dirección de la velocidad relativa vemos que, de acuerdo con la transformación de Lorentz (11.7),

$$y' = y \qquad z' = z$$

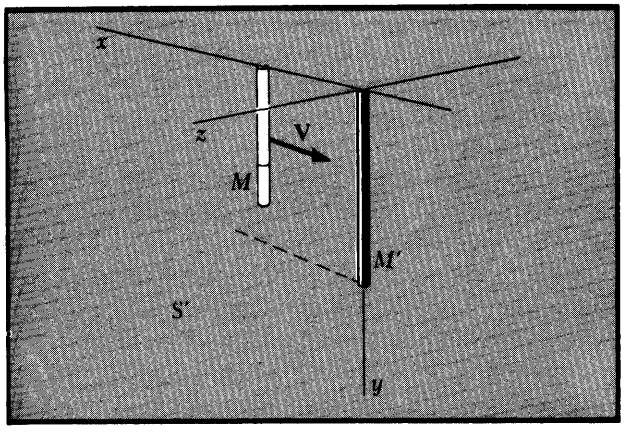
Estas relaciones son equivalentes a enunciar que la medición de la longitud de una regla es independiente de su velocidad *si* la regla se mueve perpendicularmente a su longitud.

¿Cómo podríamos comprobar experimentalmente este enunciado? Podemos hacer que una regla se mueva con velocidad constante y pase junto a otra que esté en reposo. No existe problema en hacer que sus orígenes de medida coincidan. Entonces la marca correspondiente a 1 metro en cada una de ellas deberá cruzarse exactamente en la misma posición o, si el movimiento hace variar la longitud, podemos disponer las cosas de modo

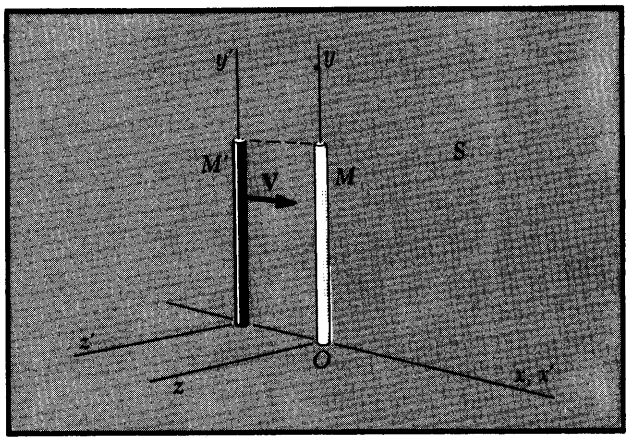
que la marca de 1 metro de la regla más corta haga una señal sobre la más larga (figs. 11.3*a, b, c*). Así se tendrá un registro físico definido de la longitud.

Sea S el sistema en reposo de una de las reglas y S' el sistema en reposo de la otra. Supongamos que el movimiento cambia la longitud aparente. Entonces si las leyes de la física han de permanecer para un observador en S iguales a las que apreciaría otro en S', es necesario que la regla que parece más corta a un observador en S parezca más larga al que está en S'. Pero, este cambio de papeles es incompatible con nuestro registro físico de que una de las reglas es más corta que la otra. Por lo tanto, las longitudes deben ser iguales cuando se ven desde S y S' (véanse figs. 11.3 *d* y *e*). Esta discusión confirma simplemente que $y = y'$ y $z = z'$.

Estos resultados referentes a las medidas de longitudes paralelas y perpendiculares a la velocidad relativa implican que las medidas de ángulos que incluyen las coordenadas x serán diferentes en los dos sistemas. Esto es cierto y el lector puede calcular por sí mismo las relaciones entre las funciones trigonométricas de los ángulos en los dos sistemas. (Véase Prob. 5 al final del capítulo.) Recuérdese que el punto importante aquí es determinar en qué sistema son simultáneas las medidas de los extremos de las longitudes.



d) La señal es un resultado físico de un experimento y debe observarse en otro sistema, por ejemplo, en el constituido por ejes de sentidos opuestos a los anteriores, en el sistema en reposo de M'. Pero ahora M debe aparecer *más corta* que M', puesto que M se está moviendo y M' está en reposo.



e) Así, pues, tenemos una contradicción que se resuelve únicamente si M' y M tienen la misma longitud aun cuando uno de ellos sea móvil. Así, pues, $y' = y$. Por un razonamiento semejante $z' = z$.

Dilatación del tiempo de los relojes móviles. Utilizada en su sentido ordinario, la palabra *dilatar* significa

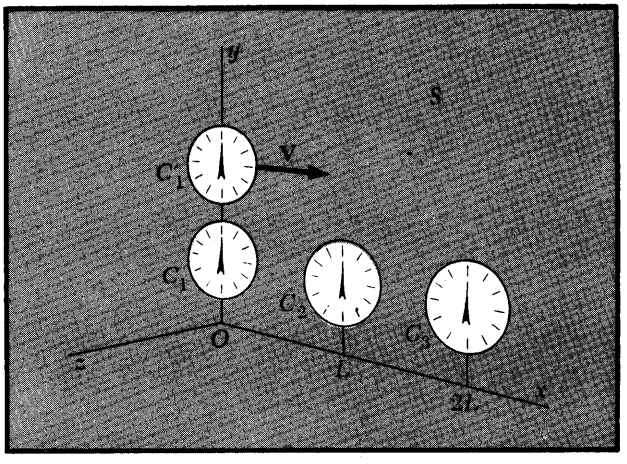
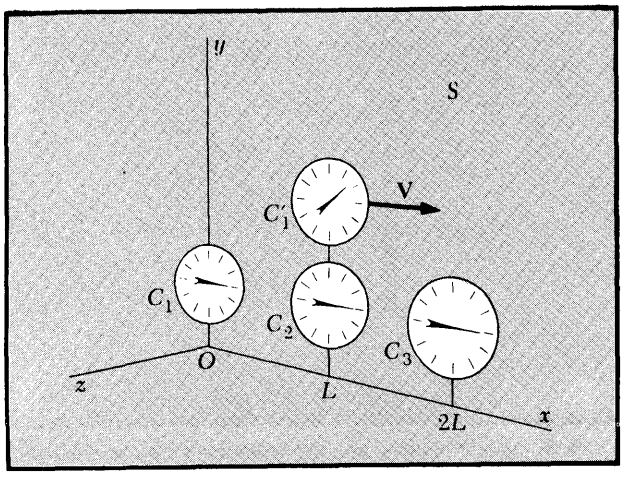


FIG. 11.4 *a*) Los relojes C_1, C_2, C_3 están en reposo en S, separados a intervalos iguales L a lo largo del eje x y todos sincronizados. El reloj C'_1 tiene velocidad **V** respecto a S. Supongamos que $t' = 0$ cuando $t = 0$, como está indicado.



b) La transformación de Lorentz da $t' = (t - xV/c^2)\gamma = t\sqrt{1 - V^2/c^2}$, puesto que $x = L = Vt$. Para el observador en S, el reloj móvil C'_1 se retrasa.

aumentar el tamaño normal; en relación a un reloj, significa alargar un intervalo de tiempo. Consideremos ahora un reloj que está en reposo en el sistema de referencia S.

El resultado de la medición de un intervalo de tiempo en el sistema en el que el reloj está *en reposo* se designa siempre por

$$\tau = t_2 - t_1$$

y se denomina *tiempo propio*. Utilizando la transformación de Lorentz [Ec. (11.7)] resulta

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{\beta x_2}{c}\right) \qquad t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{\beta x_1}{c}\right)$$

o sea (11.11)

$$\boxed{t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma\tau = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

donde hemos hecho $x_2 - x_1 = 0$; el reloj está en el mismo lugar en S. Este es el intervalo de tiempo medido por un reloj en el sistema de referencia S' que se mueve con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto al sistema S del reloj original. El

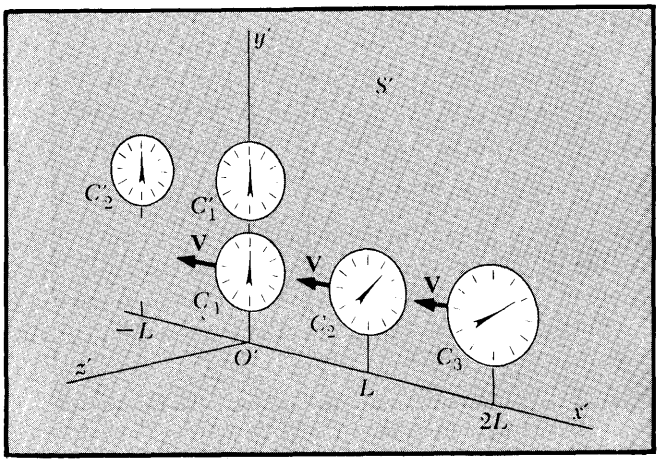
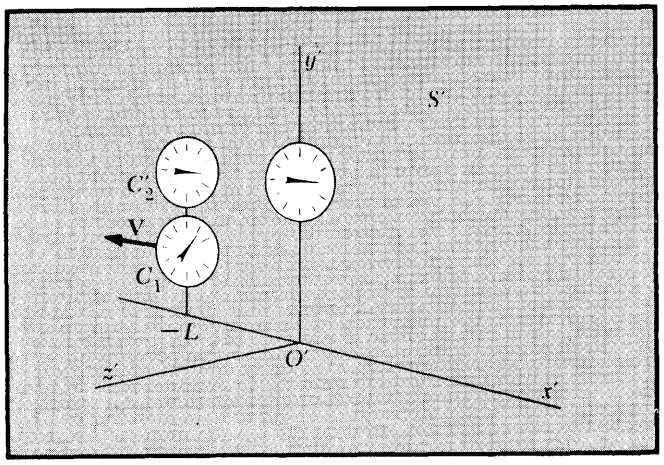


FIG. 11.5 *a*) En S' los relojes C'_1, C'_2, etc., están en reposo separados a una distancia L y sincronizados. Para el observador en S', los relojes C_1, C_2, C_3 *¡no están sincronizados!* ¿Qué se leerá en ellos?



b) Para el observador en S', es el *reloj móvil* C_1 el que se retrasa. ¿Dónde están los relojes C_2 y C_3 y qué se lee en ellos en este instante?

intervalo de tiempo medido en el sistema móvil S' es más largo que el intervalo de tiempo en el sistema S. Sin embargo, si realizamos el experimento representado en la fig. 11.4*a* y *b*, encontramos que la medida en S de un intervalo de tiempo en S' es más largo que el que indica el reloj en S'.

La conclusión que debemos aceptar es ésta: Consideremos dos sistemas de referencia S y S' en movimiento relativo constante. Cada sistema tiene un observador con sus propios relojes sincronizados en reposo en aquel sistema. Si ocurren dos sucesos en un lugar fijo en S separados por el intervalo de tiempo Δt medido por el observador S, el intervalo de tiempo Δt medido por el observador S' sería más largo; sería $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Inversamente, para dos sucesos en una posición fija en S' separados por el intervalo de tiempo $\Delta t'$, el observador en S medirá un intervalo más largo; medirá $\Delta t = \gamma \Delta t'$ (véase fig. 11.5*a* y *b*).

Este efecto se denomina *dilatación del tiempo*. Los relojes móviles parecen avanzar más lentamente que los que están en reposo. Esto no es fácil de entender de un modo intuitivo; puede uno tardar una semana o un año hasta aceptar la dilatación del tiempo. La esencia de esta aparente paradoja radica en la invariancia de c.

A continuación realizaremos un estudio simple que ilustre cómo la dilatación del tiempo ha sido forzada por la constancia de la velocidad de la luz. Construyamos un reloj patrón en el sistema de referencia S (fig. 11.6).

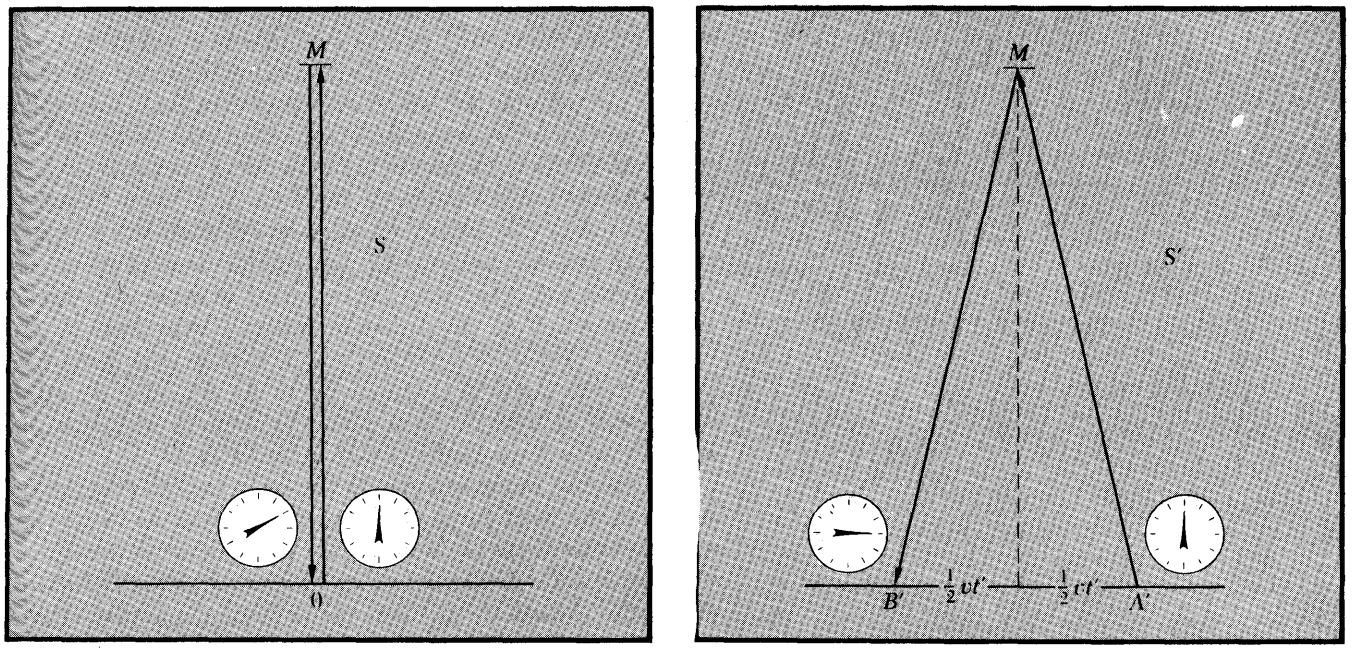


FIG. 11.6 Vista de la trayectoria de la luz en los sistemas S y S'. El punto A' coincide con O en el momento en que la luz es emitida. En S' la luz se propaga desde A' al espejo M y a B'.

El reloj puede utilizarse para medir el tiempo τ necesario para que un pulso luminoso recorra una distancia fija L desde una fuente hasta un espejo, ambos en reposo y regrese de nuevo. La trayectoria de la luz sigue la dirección del eje y. Así, pues,

$$\tau = \frac{2L}{c} \tag{11.12}$$

Este tiempo puede leerse sobre la esfera del reloj o puede imprimirse sobre un pedazo de papel. Diversos observadores en distintos sistemas pueden mirar el registro impreso del tiempo de vuelo del pulso y todos ellos estarán de acuerdo en que un reloj en el sistema S registraría el tiempo τ. Pero, ¿qué registrarían sus propios relojes, que no están en S?

Un observador en un sistema S' (moviéndose uniformemente en la dirección x respecto a S) (fig. 11.6) puede también medir el tiempo del experimento sobre la reflexión de la luz mientras se lleva a cabo en S. El observador en S' utilizará para ello un conjunto de relojes en reposo en S'. Pondremos en marcha los dos relojes en reposo en S' al mismo tiempo (sincronizados) por medio de un destello de una fuente luminosa situada a medio camino entre ambos; ambos empiezan a funcionar en 0 en el instante en que les llega el destello. El procedimiento puede extenderse a otros relojes. Podemos también sincronizar cualquier número de relojes en un sistema de referencia sincronizándolos cuando están juntos en el espacio y separándolos luego lentamente hasta que alcancen las posiciones deseadas.

Podemos mirar cualquier reloj en S' y estar seguros de que todos los demás en reposo también en S' marcarán el mismo tiempo. En particular leeremos en el reloj que en S' esté más cerca en el espacio del único reloj que en S se ha utilizado para el experimento de reflexión. Uno de los relojes en S' estará más próximo y será leído cuando el pulso parta de S; otro de ellos en S' será el más cercano a su vez cuando el pulso de la luz vuelva y se registre por el reloj en S.

El camino recorrido por la luz en S es $2L$. Pero visto desde S' es más largo, porque el aparato en S se ha movido relativamente a S' en $V \cdot \frac{1}{2}t'$ a lo largo del eje x durante el viaje de ida del pulso luminoso, desde la fuente al espejo, y otro $V \cdot \frac{1}{2}t'$ durante el viaje de vuelta (figura 11.6). Aquí t' es el tiempo observado desde S'. La distancia recorrida por el pulso en este último sistema es

$$2[L^2 + (\tfrac{1}{2}Vt')^2]^{\frac{1}{2}}$$

y como el pulso viaja siempre con velocidad c, esta distancia debe ser igual a ct'. Así, pues,

$$(ct')^2 = 4L^2 + (Vt')^2$$

o

$$t' = \frac{2L}{(c^2 - V^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2L}{c}\frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

o bien con referencia a la Ec. (11.12)

$$t' = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{11.13}$$

exactamente el mismo resultado que (11.11). Así, pues, el reloj en S parecerá al cronometrador en S' que retrasa, puesto que el reloj en S ha impreso un tiempo τ menor que el t'.

Vemos que el efecto de dilatación del tiempo no encierra ningún proceso misterioso del interior del átomo; el efecto surge durante el proceso de medida. El reloj en reposo en S indica el tiempo propio τ cuando lo mira un observador en reposo en S; otro reloj idéntico en reposo en S' también medirá τ cuando lo mire un observador en reposo en S'. Pero, cuando se mira desde S' un intervalo de tiempo que es τ en S, resulta un tiempo más largo t' debido al trayecto más largo recorrido por la luz. Cualquier clase de reloj se comportará de la misma manera. En particular, si τ es el período de semidesintegración de los mesones o de la materia radiactiva medida en el sistema S, en el cual las partículas están en reposo, se cumplirá

$$t' = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{11.14}$$

siendo t' el período de semidesintegración observado en el sistema S' en el cual las partículas se mueven con velocidad β. Esto se ilustra en las figs. 11.7*a* a *g*, que se refieren a los siguientes ejemplos:

EJEMPLO

Tiempo de vida de los mesones π^+. Se sabe que un mesón π^+ se desintegra en un mesón μ^+ y un neutrino. El mesón π^+ en en un sistema en el que está en reposo tiene una vida media antes de desintegrarse de unos $2{,}5 \times 10^{-8}$ s *.

(*) Si N_0 es el número de partículas radiactivas presentes en el tiempo $t = 0$, el número que existe después del tiempo t es $N_0 e^{-\lambda t}$. La vida media es $1/\lambda$, siendo λ la constante de desintegración.

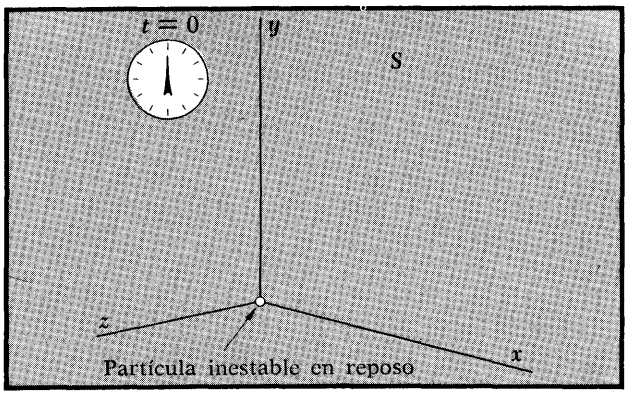
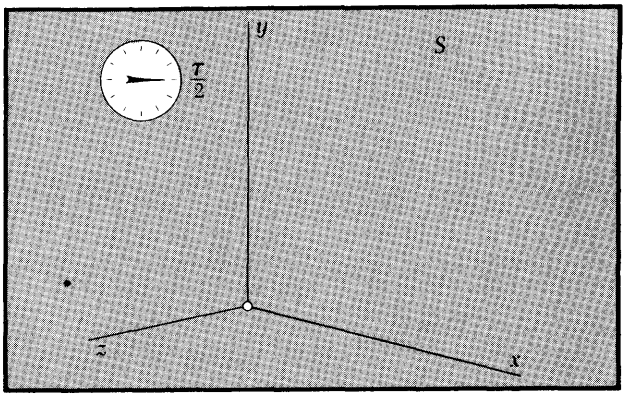
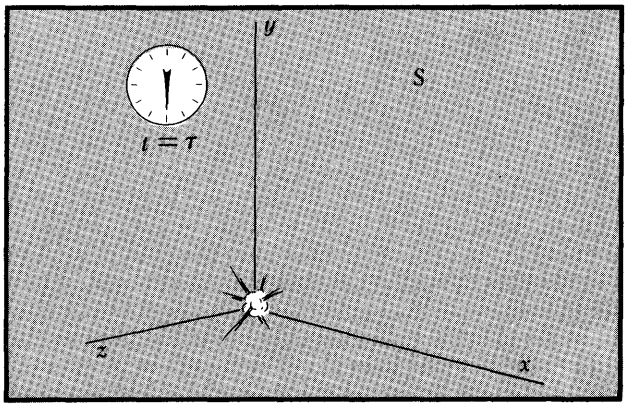


FIG. 11.7 *a*) Otro ejemplo de dilatación del tiempo: Una partícula inestable está en reposo en S. Empezamos a observarla cuando $t = 0$.



b) El tiempo pasa.



c) La partícula se desintegra para $t = \tau$.

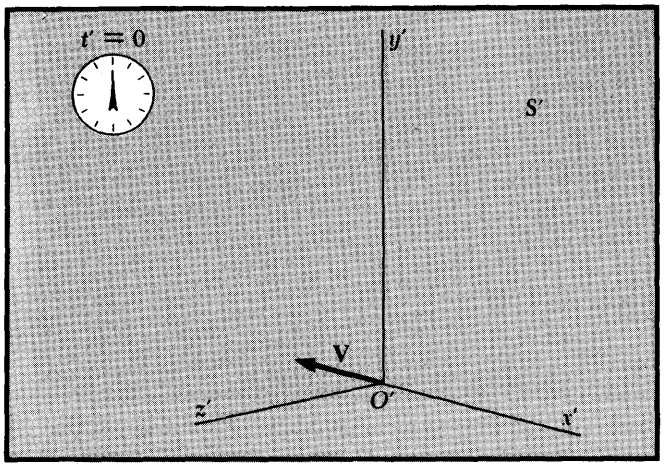
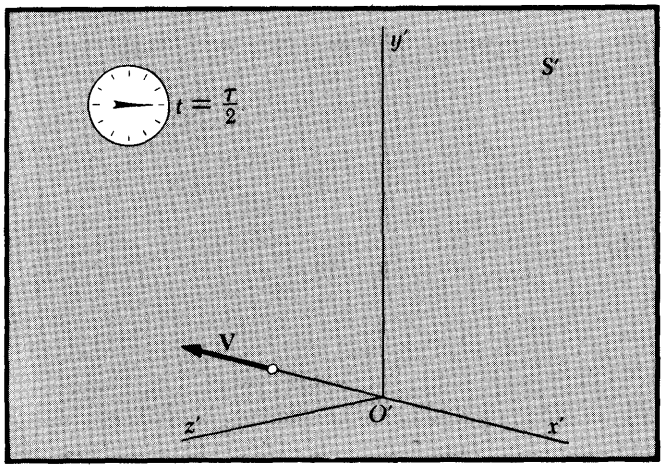
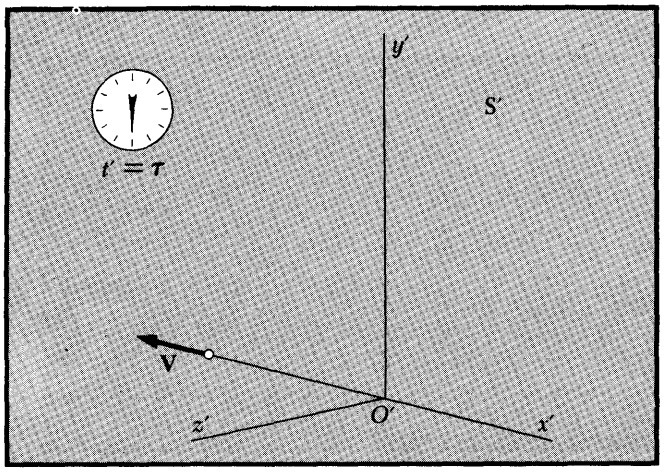


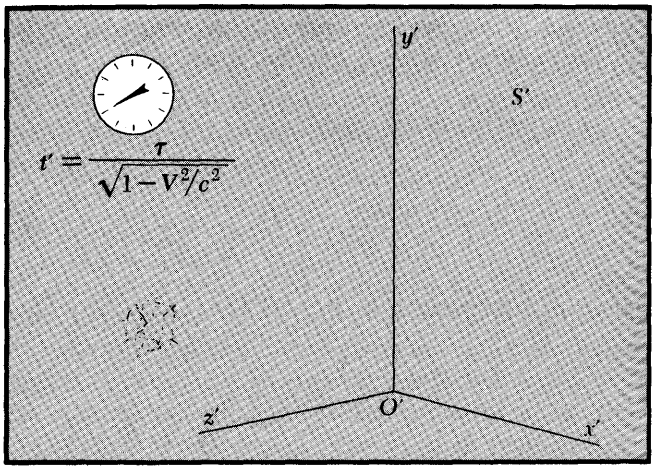
FIG. 11.7 *(continuación)* *d*) El mismo fenómeno observado desde S'. Ahora la partícula tiene velocidad V. Empezamos a observarla cuando $t' = 0 = t$.



e) El tiempo pasa.



f) ¡Pero para $t' = \tau$ la partícula todavía no se ha desintegrado!



g) La partícula se desintegra cuando $t' = \tau(1 - V^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ de acuerdo con un observador en S'.

Si se produce un haz de mesones π^+ con una velocidad $\beta \approx 0{,}9$, ¿cuál es el tiempo de vida del haz cuando se le observa desde el sistema de referencia del laboratorio? Un mesón π^+ es una partícula inestable positivamente cargada con masa próxima a 273 m, siendo m la masa del electrón. El mesón μ^+ tiene una masa próxima a 207 m; el neutrino tiene una masa en reposo cero.

El tiempo de vida propio τ del mesón π^+ es $2{,}5 \times 10^{-8}$ s. Si $\beta \approx 0{,}90$, entonces $\beta^2 \approx 0{,}81$ y el tiempo de vida esperado en el sistema del laboratorio será, según la Ec. (11.14),

$$t' \approx \frac{2{,}5 \times 10^{-8}}{(1 - 0{,}81)^{\frac{1}{2}}} \approx 5{,}7 \times 10^{-8}\,\text{s}$$

Así, pues, en valor medio, antes de desintegrarse, la partícula recorrerá más del doble del camino que le correspondería desde el punto de vista no relativista del producto de la velocidad por el tiempo de vida propio.

R. P. Durbin, H. H. Loar y W. W. Havens, Jr. han dado cuenta de haber realizado experimentos sobre el período de vida de los mesones (piones positivos), *Phys, Rev.* **88**, 179 (1952). Los resultados son concordantes con la dilatación del tiempo prevista para la velocidad adecuada. Se han producido mesones π^+ con

$$\beta = 1 - (5 \times 10^{-5})$$

su vida media en el haz es $2{,}5 \times 10^{-6}$ s, o sea 100 veces el tiempo de vida propio de los mesones π^+ en reposo.

Consideremos un haz de mesones π^+ viajando con una velocidad casi igual a c. Si el efecto de dilatación relativista del tiempo no existiera, recorrerían una distancia media igual a $(2{,}5 \times 10^{-8}\ \text{s})\ (3 \times 10^{10}\ \text{cm/s}) \approx 700$ cm antes de desintegrarse. Realmente recorren un espacio mucho mayor, debido a la dilatación del tiempo. La cámara de burbujas de hidrógeno del Lawrence **Berkeley** Laboratory está a casi 100 m de la fuente de piones en el **Bevatrón**. La distancia que los piones recorren antes de desintegrarse es del orden de $(2{,}5 \times 10^{-6})\ (3 \times 10^{10}) \approx 10^5$ centímetros, o sea unas 100 veces la distancia que deberían recorrer antes de desintegrarse sin la existencia del efecto de

dilatación. El proyecto de aparatos para experimentos de alta energía en la física de las partículas aprovecha la gran distancia de desintegración debida a la relatividad. Se ha dicho que casi todos los físicos dedicados a las energías elevadas ensayan la relatividad especial cada día y utilizan las transformaciones de Lorentz con la misma confianza con que los físicos del siglo XIX utilizaban las leyes de Newton.

Repetimos que no hay nada misterioso en los relojes. Si existe algo extraño en la relatividad restringida es la constancia de la velocidad de la luz. Aceptada ésta, todo se deduce directamente y de un modo más simple. Sin embargo, cada nueva situación debe analizarse cuidadosamente. Este campo es rico en aparentes paradojas. Quizás la más famosa de ellas es la paradoja de los gemelos *.

Estos dos efectos, contracción de longitudes y dilatación del tiempo, son los más famosos entre los previstos por la relatividad especial y comprobados por la experiencia. Sin embargo, existen mucho más efectos que han sido completamente comprobados por la experiencia, algunos de los cuales se exponen a continuación. En primer lugar discutiremos las transformaciones de velocidades. En las transformaciones de Galileo vimos cómo las velocidades se suman simplemente en la dirección x y, por tanto, era de esperar que cuando se aproximen a la velocidad de la luz sigan sumándose de igual modo. Sin embargo, como hemos visto en el Cap. 10, la velocidad de la luz es la máxima posible y, por tanto, debemos cambiar nuestra concepción deducida de las transformaciones de Galileo respecto a la suma de velocidades.

Transformación de velocidades. Supongamos que el sistema de referencia S' se mueve con velocidad uniforme $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto al sistema S. Una partícula se mueve con velocidad constante de componentes v_x, v_y, v_z respecto al sistema S. ¿Cuáles son las componentes de la velocidad v'_x, v'_y, v'_z respecto al sistema S'? (Véase figura 11.8*a* y *b*.)

Según la Ec. (11.7) resulta

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$$

de donde

$$dx' = \gamma\, dx - \gamma\beta c\, dt \qquad dt' = \gamma\, dt - \frac{\gamma\beta\, dx}{c}$$

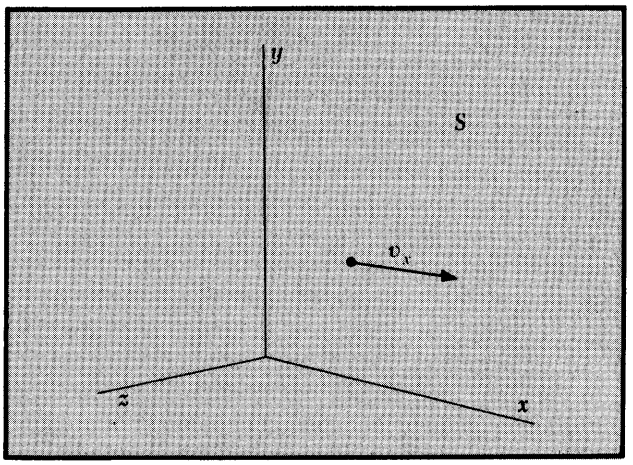
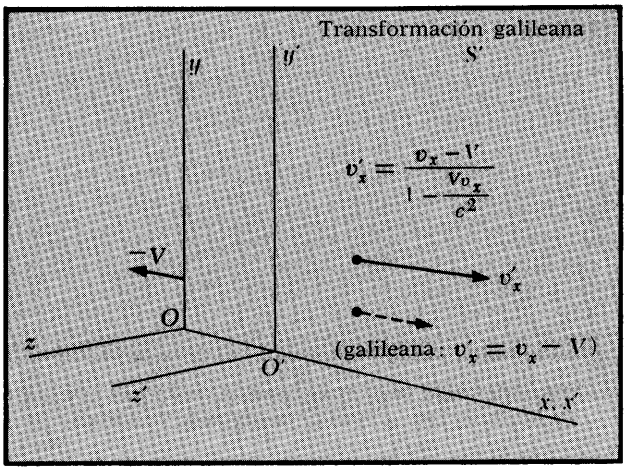


FIG. 11.8 *a*) Supongamos que una partícula tiene la velocidad v_x en S.



b) Entonces en S' la transformación de Lorentz predice que $v'_x = (v_x - V)/(1 - v_x V/c^2)$. La transformación galileana predeciría que $v'_x = v_x - V$.

(*) Este problema ha surgido de nuevo recientemente. Véase M. Sachs, *Physics Today*, **24**, 23 (septiembre 1971) y un grupo de cartas al editor en *Physics Today*, **25**, 9 (enero 1972).

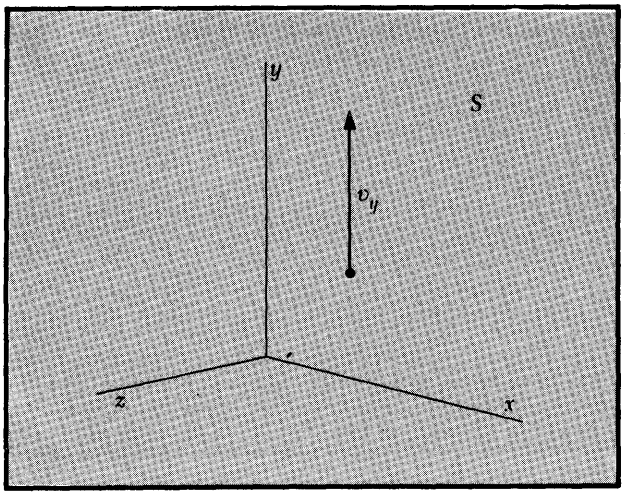


FIG. 11.9 *a*) Una partícula tiene velocidad v_y en la dirección y en S.

Por tanto

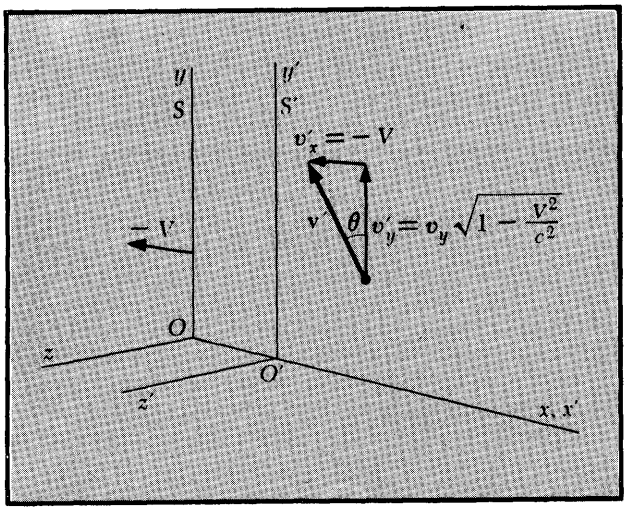
$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\, dx - \gamma\beta c\, dt}{\gamma\, dt - \gamma\beta\, dx/c} = \frac{v_x - \beta c}{1 - v_x\beta/c}$$

o sea,

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = \frac{v_x - V}{1 - \beta v_x/c}} \qquad (11.15)$$

Este resultado puede compararse con el galileano $v'_x = v'_x - V$, como vimos en el Cap. 4. Análogamente, como $y = y'$ y $z = z'$ (véanse figs. 11.9*a* y *b*),

$$\boxed{\begin{aligned} v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\, dt - \gamma\beta\, dx/c} \\ &= \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \beta v_x/c)} \qquad (11.16) \\ \text{y} \\ v'_z &= \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \beta v_x/c)} \qquad (11.17) \end{aligned}}$$



b) Entonces tiene las componentes indicadas en S', de acuerdo con la transformación de Lorentz.

$$|\operatorname{tg}\theta| = \frac{V}{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Las transformaciones inversas se deducen de (11.8) o resolviendo las Ecs. (11.15) a (11.17) para las componentes sin primas de la velocidad:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} = \frac{v'_x + V}{1 + \beta v'_x/c} \\ v_y &= \frac{v'_y}{1 + v'_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \beta v'_x/c)} \qquad (11.18) \\ v_z &= \frac{v'_z}{1 + v'_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \beta v'_x/c)} \end{aligned}$$

Obsérvese que para $V \ll c$, estas ecuaciones se reducen a la transformación de Galileo.

Supongamos que la partícula es un fotón y $v_x = c$ en S. Según (11.15) vemos que (fig. 11.10)

$$v'_x = \frac{c - V}{1 - cV/c^2} = c$$

La velocidad del fotón es también c en el sistema S. La transformación de Lorentz se estableció con la idea de obtener este resultado y es una comprobación de garantía el que obtengamos c en ambos sistemas de referencia.

Si $v_y = c$ y $v_x = 0$, entonces

$$v'_x = -V \qquad \text{y} \qquad v'_y = c\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

de modo que

$$\frac{v'_x}{v'_y} = -\frac{V}{c(1 - V^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

y

$$\sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = c$$

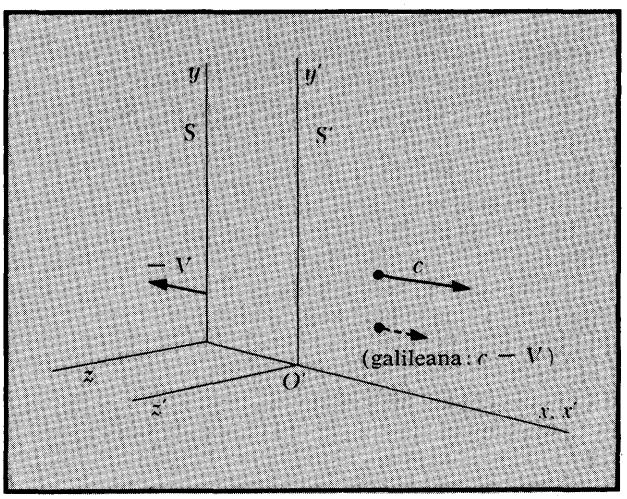


FIG. 11.10 Como sabemos, si $v_x = c$, también $v'_x = c$, de acuerdo con la transformación de Lorentz. Contábamos con ello en nuestra teoría desde el principio.

EJEMPLO

Suma de velocidades. Supongamos que dos partículas se mueven acercándose una a la otra con velocidades respectivas $v'_x = \pm\, 0{,}9\,c$, cuando se observa en el sistema S'. ¿Cuál es la velocidad de una partícula respecto a la otra? Para resolver este problema, sea S el sistema de referencia en el que la partícula de $v'_x = -0{,}9\,c$ está en reposo. Entonces la velocidad de S' respecto a S es $V = 0{,}9\,c$ de modo que la partícula que en S' tiene velocidad $v'_x = +\,0{,}9\,c$ tiene en S una velocidad [Ec. (11.18)]:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \approx \frac{1{,}8c}{1 + (0{,}9)^2} = \frac{1{,}80}{1{,}81}c = 0{,}994c$$

Obsérvese que la velocidad relativa de ambas partículas es menor que c.

Si un fotón se propaga a la velocidad $+\,c$ en S' y S' se mueve respecto a S a la velocidad $+\,c$, el fotón visto desde S se mueve sólo a la velocidad $+\,c$ y no a $+\,2c$. Este resultado está contenido en la Ec. (11.18). La velocidad límite es una consecuencia de la estructura de las ecuaciones que expresan la suma de velocidades deducidas de las transformaciones de Lorentz. Obsérvese, además, que no existe *ningún* sistema para el cual un fotón (cuanto de luz) esté en reposo.

D. Sadeh ha efectuado un experimento preciso [*Phys. Rev. Letters*, **10**, 271 (1963)] que demuestra que la velocidad de los rayos γ es la misma ($\pm$ 10 por ciento), independientemente de la velocidad de la fuente, cuando ésta es próxima a $\frac{1}{2}\,c$ o cuando está en reposo. Citamos de su trabajo:

> «En nuestras experiencias hemos utilizado la aniquilación en vuelo de positrones. En dicha aniquilación, el sistema del centro de masas del positrón y electrón se mueve con una velocidad próxima a $\frac{1}{2}\,c$ y se emiten dos rayos gamma. En el caso de aniquilación en reposo los dos rayos gamma se

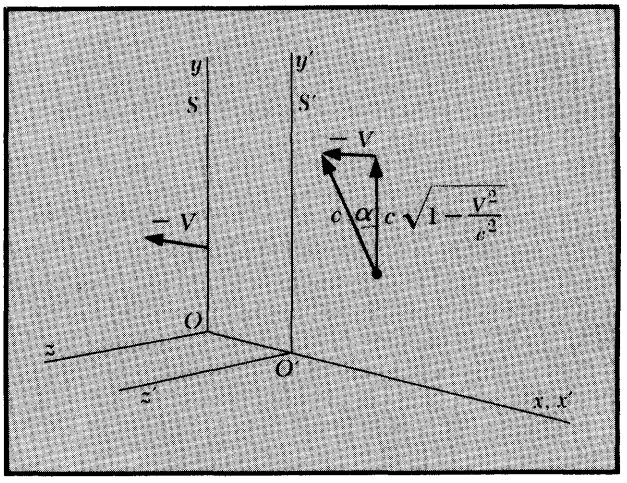


FIG. 11.11 En particular, si $v_y = c$, la resultante tiene el valor c en S'. Así, pues,

$$|\ \text{tg}\ \alpha\ | = \frac{V}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Esta es la teoría relativista de la aberración.

emiten formando un ángulo de 180° y su velocidad es c. Cuando este fenómeno se produce en vuelo, el ángulo es menor que 180° y depende de la energía del positrón. Si se suma la velocidad de los rayos gamma a la velocidad del centro de masas de acuerdo con una suma vectorial clásica y no según la transformación de Lorentz resulta que el rayo gamma que se mueve con una componente del movimiento en el sentido de vuelo del positrón posee una velocidad mayor que c y aquel cuyo sentido sea opuesto tendrá una velocidad menor. Si se encuentra que los dos rayos gamma alcanzan a los contadores en el mismo tiempo para el caso en que la distancia entre los contadores y el punto de aniquilación sean iguales, esto probará que, incluso para una fuente móvil, los dos rayos gamma se mueven con la misma velocidad.»

EJEMPLO

Aberración de la luz. Vimos en la Ec. (10.1) que para una estrella situada directamente sobre nuestras cabezas (cuando la velocidad de la Tierra v_T es perpendicular a la línea de observación), el ángulo de inclinación, o aberración, del telescopio viene dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_T}{c} \tag{11.19}$$

Este resultado se dedujo utilizando un argumento no relativista. Consideremos ahora el problema desde el punto de vista relativista como ejercicio elemental en el uso de la transformación de Lorentz.

Supongamos que en el sistema de referencia S en el que la estrella está en reposo se observa una señal luminosa procedente de la estrella a lo largo del eje y. ¿Cuál será la trayectoria en S' de estos rayos que se mueven a lo largo del eje y en S? En S las componentes de la velocidad son $v_x = 0$, $v_y = c$, $v_z = 0$. Las componentes de la velocidad en S' pueden obtenerse utilizando las Ecs. (11.15) a (11.17). Así resulta

$$v'_x = -V \qquad v'_y = \frac{c}{\gamma} \qquad v'_z = 0$$

La dirección de estos rayos en S' viene dada por el ángulo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-v'_x}{v'_y} = \frac{\gamma V}{c} = \beta\gamma = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{11.20}$$

o sea

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{V}{c} = \beta$$

Este es el resultado correcto; está de acuerdo con el resultado no relativista (11.19) dentro de la exactitud de las mediciones, ya que V/c es pequeño para el movimiento de la Tierra, siendo aproximadamente igual a 10^{-4}.

EJEMPLO

Efecto Doppler longitudinal. Consideremos dos pulsos de luz emitidos en $t = 0$ y $t = \tau$ por un transmisor en reposo en $x = 0$ del sistema de referencia S. El sistema S' se mueve con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto a S. El pulso inicial se recibe en $x' = 0$ en S' en el

tiempo $t' = 0$. El punto en S' que coincide con $x = 0$ para $t = \tau$, viene dado por la transformación de Lorentz (11.7):

$$x' = \frac{x - Vt}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-V\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

tomando $x = 0$. El tiempo correspondiente en S' es

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

El tiempo necesario para que el segundo pulso viaje en S' desde $-V\tau/(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ hasta el origen es

$$\Delta t' = \frac{\tau V/c}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

de modo que el tiempo total en S' entre la recepción en $x' = 0$ de los dos pulsos es

$$t' + \Delta t' = \tau \frac{1 + V/c}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \tau \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

El tiempo entre las dos señales puede interpretarse igualmente como el tiempo transcurrido entre dos nodos sucesivos de una onda luminosa. La frecuencia es la recíproca del período de la onda, de modo que

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tag{11.21}$$

Aquí ν' es la frecuencia recibida en S' y ν la que se transmite en S. Si el receptor está alejándose de la fuente, entonces $\beta = V/c$ es positiva y ν' es menor que ν. Si el receptor se acerca, tenemos que hacer a β negativa y ν' será mayor que ν. En función de la longitud de onda, $\lambda = c/\nu$ y $\lambda' = c/\nu'$, de modo que

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tag{11.22}$$

La ecuación (11.21) describe el efecto Doppler longitudinal relativista para las ondas luminosas en el vacío. El corrimiento de la frecuencia está de acuerdo hasta el primer orden en β con el resultado no relativista (10.7) deducido en el Cap. 10 *. El término de orden β^2 en el desarrollo en serie de (11.21) ha sido confirmado experimentalmente por Ives y Stilwell.

H. E. Ives y G. R. Stilwell [*J. Opt. Soc. Am.* **28**, 215 (1938); **31**, 369 (1941)] han llevado a cabo experiencias espectroscópicas con haces de átomos de hidrógeno en estados electrónicos excitados. Los átomos fueron acelerados como iones de hidrógeno molecular H_2^+ y H_3^+ en un campo eléctrico intenso. Se formó hidrógeno atómico como producto de la rotura de los iones. La velocidad de los átomos fue del orden de $\beta = 0{,}005$. Ives y Stilwell buscaban un corrimiento en la longitud de onda *media* de una línea espectral emitida por los átomos de hidrógeno. La media

(*) El lector debe demostrar que para

$$\beta \ll 1, \quad \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)} = 1 + \beta.$$

se tomó en sentido hacia adelante y hacia atrás respecto a la línea de vuelo de los átomos. Empleando $\beta_{ad.} = -\beta_{atras}$, la longitud de onda media será según la Ec. (11.22):

$$\frac{1}{2}(\lambda_{ad.} + \lambda_{atras}) = \frac{1}{2}\lambda_0\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)$$
$$= \frac{\lambda_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (11.23)$$

Así, pues, existe un corrimiento del orden de β^2 en la posición media de las líneas desplazadas, respecto a la longitud de onda λ_0 emitida por un átomo en reposo. En su trabajo de 1941, Ives y Stilwell señalaron un corrimiento observado de 0,074 Å en la longitud de onda media, comparable al valor 0,072 Å calculado según la Ec. (11.23) para un valor de β deducido del potencial acelerador aplicado a los iones originales. Esta es una confirmación excelente del efecto Doppler relativista.

El efecto Doppler *transversal* se aplica a las observaciones realizadas en ángulo recto con la dirección del movimiento de la fuente luminosa, que es normalmente un átomo. En la aproximación no relativista no existe efecto Doppler transversal. La teoría relativista predice un efecto Doppler transversal para las ondas luminosas; las frecuencias deben estar relacionadas entre sí como las inversas de los tiempos en (11.11) de modo que,

$$\nu' = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\nu$$

en donde ν es la frecuencia en el sistema en el que el átomo está en reposo y ν' la observada en un sistema que se mueve con velocidad V $(= \beta c)$ respecto al átomo.

Relojes acelerados. La teoría de la relatividad restringida describe y relaciona medidas que son independientes de la estructura detallada de los cuerpos reales. No predice nada sobre los efectos dinámicos de la aceleración, como las tensiones inducidas por ella. Si dichas tensiones están ausentes o pueden ignorarse, la teoría da una descripción sin ambigüedades de la influencia de la aceleración sobre las variaciones de los relojes. El resultado es como si en cada instante un reloj acelerado tuviese una velocidad diferente, con una variación que ha de calcularse a partir de (11.11) con la velocidad instantánea apropiada.

Si esta predicción es correcta se deducen dos consecuencias:

1. Si el módulo de la velocidad es constante pero varía su dirección, la Ec. (11.11) se mantiene sin variación. El sistema de referencia del reloj es no inercial.
2. Si el módulo es constante excepto en breves momentos de aceleración o desaceleración (momentos despreciablemente cortos en comparación con el tiempo total), entonces la Ec. (11.11) describirá aún exactamente

la relación entre el tiempo propio y el tiempo del laboratorio estacionario.

Una partícula cargada rápida en un campo magnético constante sufre una aceleración perpendicular a su movimiento, pero el módulo de la velocidad no varía nunca. Si la partícula es inestable, el período de semidesintegración medido deberá ser exactamente el mismo que si se moviese con una velocidad del mismo módulo en línea recta y sin la presencia de ningún campo magnético. Este pronóstico se confirma mediante experiencias con mesones μ^-, que se desintegran con una vida media propia de $2{,}2 \times 10^{-6}$ s en un electrón y neutrinos. El mismo tiempo de vida propio se observa para los mesones μ^- que son libres o se mueven en espiral en un campo magnético o que se les deja llegar al reposo. Se cree que la teoría de la relatividad restringida da una buena descripción del movimiento circular (acelerado) de las partículas en un campo magnético.

PROBLEMAS

1. *Invariante de Lorentz.* Comprobar a partir de (11.7) que

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$$

Obsérvese que si escribimos $x_1 \equiv x$, $x_4 \equiv ict$, resulta $x^2 - c^2t^2 \equiv x_1^2 + x_4^2$. Aquí $i = \sqrt{-1}$.

2. *Transformación de Lorentz.* Dada (11.7), demostrar la Ec. (11.8).

3. *Cambio de volumen.* Demostrar que si L_0^3 es el volumen en reposo de un cubo, entonces

$$L_0^3(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

es el volumen observado desde un sistema de referencia que se mueve con velocidad uniforme β en una dirección paralela a una arista del cubo.

4. *Simultaneidad.* Demostrar a partir de la transformación de Lorentz que dos sucesos simultáneos ($t_1 = t_2$) en posiciones diferentes ($x_1 \neq x_2$) en el sistema de referencia S no son simultáneos en general en el sistema de referencia S'.

5. *Cambio de ángulo.* Calcular en S' la longitud y el ángulo que forma con el eje x' una barra de longitud L_0 y ángulo θ con el eje x del sistema S. S' se mueve con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto a S.

6. *Suma de velocidades.* Demostrar que si en el sistema S' se cumple $v'_y = c \operatorname{sen} \theta$ y $v'_x = c \cos \theta$, entonces en el sistema S

$$v_x^2 + v_y^2 = c^2$$

El sistema S' se mueve con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto al sistema S.

7. *Mesones* π^+

(*a*) ¿Cuál es la vida media de un grupo de mesones π^+ moviéndose con $\beta = 0{,}73$? (El tiempo de vida media propio τ es $2{,}5 \times 10^{-8}$ s.) *Sol.* $3{,}6 \times 10^{-8}$ s.

(*b*) ¿Qué distancia se recorre con $\beta = 0{,}73$ durante una vida media? *Sol.* 800 cm.

(*c*) ¿Qué distancia se recorrería sin efectos relativistas? *Sol.* 550 cm.

(*d*) Responder a las partes (*a*), (*b*) y (*c*) de nuevo para $\beta = 0{,}99$.

8. *Mesones* μ. La vida media propia de los mesones μ es aproximadamente 2×10^{-6} s. Supóngase que un gran grupo de mesones μ, producidos a cierta altura de la atmósfera, se mueven hacia abajo con una velocidad $v = 0{,}99c$. El número de colisiones en la atmósfera durante su descenso es pequeño.

(*a*) Si el 1 por ciento de los que existían en el grupo original sobreviven y alcanzan la superficie terrestre, estimar la altura original. (En el sistema de referencia de los mesones μ el número de partículas que sobreviven al cabo de un tiempo t viene dado por $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$.) *Sol.* 2×10^6 cm.

(*b*) Calcular esta distancia de propagación medida por el mesón μ.

9. *Dos sucesos.* Considerar dos sistemas inerciales S y S'. Supongamos que S' se mueve con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto a S. En un punto x'_1 tiene lugar un suceso en el tiempo t'_1. En x'_2 se verifica otro en el instante t'_2. Los orígenes coinciden en el instante $t = t' = 0$. Encontrar los tiempos y distancias correspondientes en S.

10. *Mesones* π^+. Un «chaparrón» de 10^4 mesones π^+ se mueve en una trayectoria circular de radio 20 m a una velocidad $\beta = 0{,}99c$. La vida media propia del mesón π^+ es $2{,}5 \times 10^{-8}$ s.

(*a*) ¿Cuántos sobrevivirán cuando el grupo retorne a su punto de partida?

(*b*) ¿Cuántos mesones quedarán en un «chaparrón» que hubiese quedado en reposo en el origen durante este mismo período de tiempo?

11. *Velocidad de retroceso de una galaxia.* Vimos en el Cap. 10 que los datos sobre el corrimiento hacia el rojo en las galaxias distantes daban una velocidad de alejamiento proporcional a la distancia, en la región no relativista

$$V = \alpha r \qquad \alpha \approx 1{,}6 \times 10^{-18}\ \text{s}^{-1}$$

Calcular la velocidad de retroceso de una galaxia a una distancia de 3×10^9 años luz. ¿Es relativista esta velocidad?
Sol. $4{,}5 \times 10^9$ cm/s.

12. *Velocidades galácticas.* Observamos una galaxia retrocediendo en un sentido determinado a una velocidad $V = 0{,}3c$ y otra retrocediendo en sentido contrario con la misma velocidad. ¿Qué velocidad de alejamiento de una de las galaxias apreciaría un observador situado en la otra?

13. *Simultaneidad.* Consideremos las fuentes de dos sucesos que están situadas en reposo en los puntos A y B a igual distancia del observador O en el sistema S. Supóngase que en el instante particular de tiempo (determinado por el observador O en S) en el que se producen ambos sucesos, un segundo observador O' y su sistema de referencia asociado S', moviéndose con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto a S, coincide con O y su sistema S (véase fig. 11.12).

(*a*) Suponer $V/c = 1/3$. Dibujar las posiciones de los dos sistemas y los puntos A, A', B, B', cuando la señal B llega al observador O'. ¿Ha llegado esta señal al observador O? ¿Por qué?

(*b*) Dibujar las posiciones de S y S' cuando ambas señales lleguen a O.

(*c*) Dibujar las posiciones de S y S' cuando la señal de A llegue a O'.

(*d*) Suponer que los dos sucesos se registran físicamente en los puntos A', B'; por ejemplo, sobre placas fotográficas. Demostrar, de acuerdo con las hipótesis de este problema, que las distancias $A'O'$ y $B'O'$ son iguales.

(*e*) Demostrar que los dos sucesos no son simultáneos cuando se observan desde O'. La constancia de la velocidad de la luz en todas circunstancias está implícitamente supuesta en la definición de simultaneidad. Para aclarar esta dependencia consideremos que los dos sucesos en A y B son la radiación simultánea de pulsos sonoros, según aprecia en O un observador en reposo respecto al medio en el que se propaga el sonido. Sea O' un observador moviéndose con una velocidad V igual a un tercio del sonido.

(*f*) Utilizar la transformación galileana para demostrar que las velocidades de los pulsos sonoros hacia O' desde A y B no son las mismas que las observadas por O'.

(*g*) Demostrar que, aun en el caso de que las dos señales lleguen a O' en instantes diferentes, como los pulsos

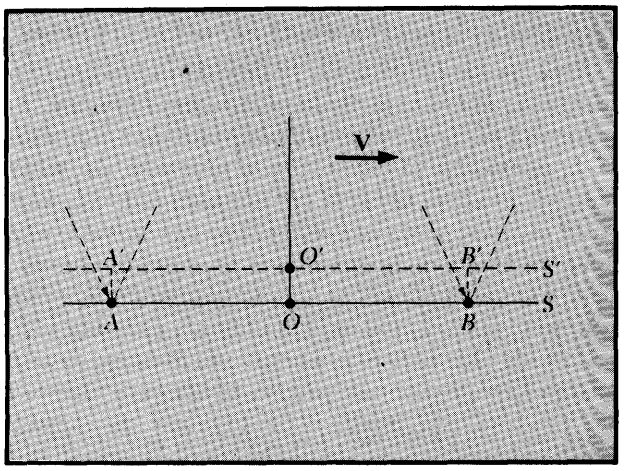


FIG. 11.12

han viajado con diferentes velocidades, se compensa este hecho y los dos sucesos parecen simultáneos incluso para el observador O'.

14. *Efecto Doppler relativista.* Se aceleran protones a través de un potencial de 20 kv y a continuación se desvían con velocidad constante hacia una región en donde tiene lugar su neutralización formándose átomos de H emitiendo luz. La emisión H_β ($\lambda = 4861{,}33$ Å para un átomo en reposo) se observa en un espectrómetro. El eje óptico del mismo es paralelo al movimiento de los iones. El espectro presenta un corrimiento Doppler debido al movimiento de los iones en la dirección de la emisión observada. El aparato contiene también un espejo colocado de modo que permita la superposición del espectro de luz emitida en sentido contrario. Recuérdese que 1 Å $\equiv 10^{-8}$ cm.

(*a*) ¿Cuál es la velocidad de los protones después de la aceleración? *Sol.* 2×10^8 cm/s.

(*b*) Calcular los corrimientos Doppler de primer orden, dependientes de v/c, adecuados para los sentidos hacia adelante y hacia atrás e indicar el aspecto de la parte principal del espectro sobre un diagrama.

(*c*) Considerar ahora el efecto de segundo orden, en v^2/c^2, que surge de consideraciones relativistas. Demostrar que el corrimiento de segundo orden es $= \frac{1}{2}\lambda(v^2/c^2)$ y calcularlo numéricamente para este problema. Obsérvese que es el mismo, tanto para el movimiento con $+\mathbf{v}$ como para con $-\mathbf{v}$. *Sol.* 0,10 Å.

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

En los últimos años se han publicado numerosos libros sobre relatividad, algunos de ellos en rústica. Los siguientes constituyen una selección.

J. A. Wheeler y E. F. Taylor, *Space-Time Physics—An Introduction*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1965. Muy recomendable. No es un libro de texto; excelente para estudio propio.

A. P. French, *Relatividad especial,* Ed. Reverté, 1974. Forma parte de la serie «Introducción a la Física del MIT».

C. Kacser, *Introduction to the Special Theory of Relativity,* Co-Op Paperback, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967.

R. S. Shankland, *Conversations with Albert Einstein,* Am. J. Phys., **31**, 47 (1963).

Special Relativity Theory, separatas seleccionadas publicadas por el A. A. P. T. American Institute of Physics, 335 East 45th St., Nueva York, 1962. Contiene una excelente discusión de la famosa paradoja de los relojes; véanse especialmente los trabajos de Darwin, Crawford y McMillan.

M. Born, *Einstein's Theory of Relativity* (E. P. Dutton & Co., Inc., Nueva York, 1924; reimpresión Dover, Nueva York, 1962). Un estudio completo, detallado y claro de la teoría de la relatividad restringida.

H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski y H. Weyl, *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs,* traducido al inglés por W. Perrett y G. B. Jeffery (Methuen & Co., Ltd., Londres, 1923; reimpresión, Dover, Nueva York, 1958).

W. Pauli, *Theory of Relativity,* traducido al inglés por G. Field, Pergamon Press, Nueva York, 1958. Es una excelente traducción de una monografía del alemán (Relativitätstheorie, publicada por B. G. Teubner, Leipzig, 1921). El contenido de la Parte I no es difícil.

E. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity,* 2 vols., Harper & Row, Publishers, Incorporated, Nueva York, impreso en rústica, 1960.

Contenido

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO
Y SU DEFINICIÓN RELATIVISTA
ENERGÍA RELATIVISTA
TRANSFORMACIÓN DE LA CANTIDAD
DE MOVIMIENTO Y DE LA ENERGÍA
Ejemplo. Choque inelástico
Equivalencia de masa y energía
Ejemplo. Conversiones masa-energía
Ejemplo. Reacciones que proporcionan la energía estelar
Partículas con masa en reposo cero
TRANSFORMACIÓN DE LA DERIVADA DE LA CANTIDAD
DE MOVIMIENTO RESPECTO AL TIEMPO
CONSTANCIA DE LA CARGA
Problemas
Tema avanzado. Emisión sin retroceso de rayos gamma
Nota histórica. Relación masa-energía
Lecturas suplementarias

12

Dinámica relativista: cantidad de movimiento y energía

El cambio fundamental en nuestros conceptos de espacio y tiempo como se expresa en la transformación de Lorentz ha influido profundamente en toda la física. Debemos volver a examinar ahora las leyes de la física tal y como se desarrollaron y confirmaron para velocidades bajas ($v \ll c$) para ver si son compatibles con la teoría de la relatividad. No deberá sorprendernos el encontrar que las leyes varían cuando se aplican en nuevos dominios. Las leyes cambian de tal forma que, a bajas velocidades, volvemos a encontrar las formulaciones newtonianas que, por experiencia, sabemos que son exactas en el límite de las velocidades bajas.

Lo mismo que en el Cap. 4 aceptaremos como leyes físicas posibles únicamente aquellas que son idénticas en todos los sistemas de referencia en movimiento relativo no acelerado. Pero en lugar de utilizar la transformación galileana para transformar una ley física de un sistema de referencia a otro, emplearemos ahora la transformación de Lorentz. Esta transformación se reduce a la galileana cuando $v/c \ll 1$. En vez de insistir en la invariancia de las leyes físicas bajo las transformaciones galileanas, insistiremos ahora en su invariancia bajo las transformaciones de Lorentz.

Dos observadores en distintos sistemas de referencia S y S' deducen leyes físicas. Cada uno de ellos las expresa en función de longitudes, tiempos, velocidades o aceleraciones según se miden en su propio sistema. Las leyes deben tener idéntica forma en las variables del sistema S y en las del sistema S'. Así, pues, cuando utilizamos la transformación de Lorentz para pasar las x, y, z, t de S a las x', y', z', t', de S', cualquier ley física deducida en S se traduce al lenguaje de S' y deberá permanecer con la misma forma. El significado de esto resultará más claro cuando examinemos algunos problemas particulares.

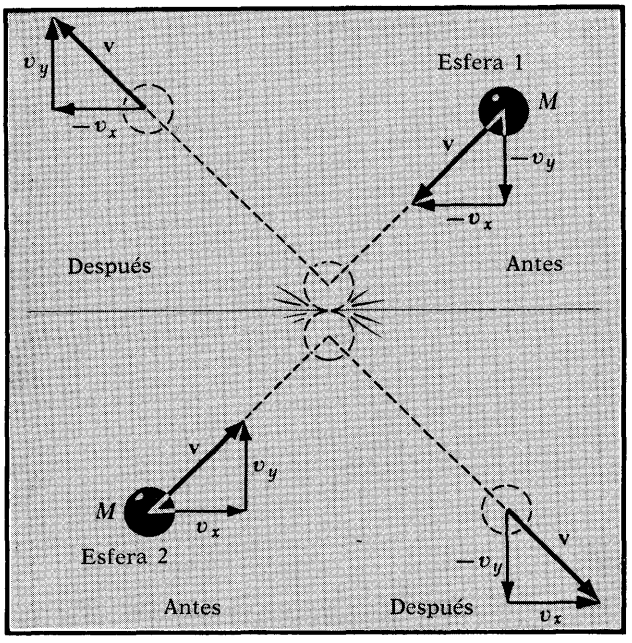


FIG. 12.1 *a*) Choque entre dos esferas de masa M, que tiene lugar en el plano xy. Se indican las velocidades en las direcciones x e y antes y después del choque.

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y SU DEFINICIÓN RELATIVISTA

Deseamos encontrar una definición de la cantidad de movimiento $\mathbf{p}$ que se reduzca a $M\mathbf{v}$, siendo M la masa en reposo *, para $v/c \ll 1$, y que asegure la conservación de la cantidad de movimiento en los choques sin tener en cuenta las velocidades de las partículas relativas al sistema de referencia. Encontraremos la definición apro-

(*) La masa en reposo se define como la masa inerte en el límite no relativista $v/c \ll 1$, y en particular cuando $v = 0$.

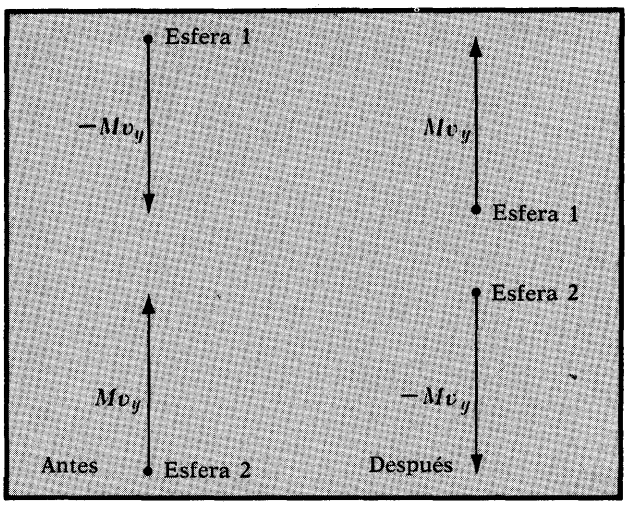
piada mediante la consideración de una colisión particular. Demostremos primero con un ejemplo que la cantidad de movimiento newtoniana (no relativista) $M\mathbf{v}$ no se conserva en los choques en que intervengan velocidades *relativistas* *. Podemos ya ver que la segunda ley de Newton no puede ser válida si M es constante, pues $\mathbf{a}$ sería $\mathbf{F}/M$ y si la fuerza actúa durante bastante tiempo, v sería mayor que c.

Consideremos las figs. 12.1*a* y *b*, que describen una colisión entre partículas de *igual masa*. Escojamos un sistema de referencia S tal que las partículas se aproximen entre sí con velocidades iguales y opuestas: la componente y de la velocidad de la partícula 1 es $-v_y$ antes y $+v_y$ después del choque. En este sistema de referencia el centro de masas está en reposo. La componente y total de la cantidad de movimiento debe ser cero por simetría, tanto antes como después del choque. Esto debe ser cierto, independientemente de la definición empleada para la cantidad de movimiento, con tal que tenga signos opuestos para $\pm v_y$. Por lo tanto, no encontraremos ninguna dificultad aquí (sea o no esta expresión correcta) con la definición newtoniana $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$: el cambio en p_y de la partícula 1 es $+2Mv_y$ y el de la partícula 2 es $-2Mv_y$ de modo que la variación total en la componente y de la cantidad de movimiento newtoniana es cero.

Consideremos ahora el sistema de referencia con prima S' que se mueve con la velocidad particular $\mathbf{V} = v_x\hat{\mathbf{x}}$ respecto a S, como se indica en la fig. 12.2*a*. Obsérvese que v_x es la componente x de la velocidad de la partícula 2 en S y $-v_x$ es la correspondiente a la partícula 1. La suma relativista de velocidades viene descrita por las Ecs. (11.15) a (11.17) y utilizándolas resultan para las componentes de las velocidades vistas desde S' (recordando que $V = v_x$) los valores

$$-v_x'(1) = \frac{-v_x - V}{1 + v_x V/c^2} = \frac{-2v_x}{1 + v_x^2/c^2}$$

$$v_y'(1) = \frac{v_y}{1 + v_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_y}{1 + v_x^2/c^2}\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12.1}$$



b) Se indican las cantidades de movimiento no relativistas individuales en las direcciones x e y. La cantidad de movimiento total en la dirección y es cero antes y después del choque.

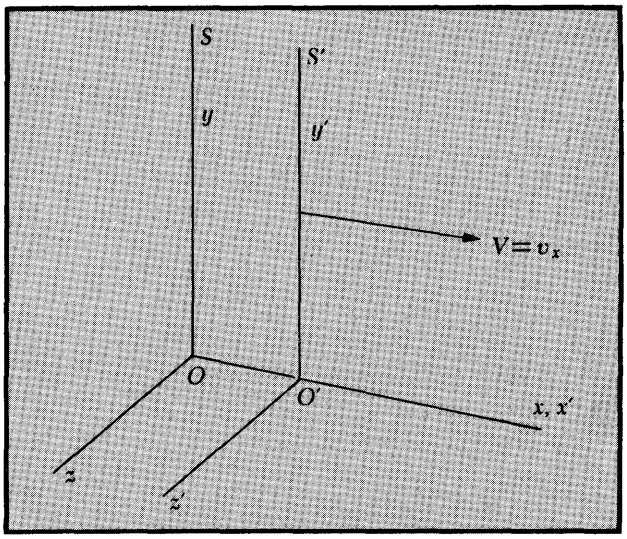


FIG. 12.2 *a*) Hemos visto la colisión en el sistema S. ¿Cómo se vería en el sistema S', que tiene la velocidad particular $V = v_x$ respecto a S, como está indicado?

(*) La cuestión de la magnitud que debe tener v para que sea relativista depende de la exactitud de los resultados experimentales. Veremos que si $(v/c)^2$ puede despreciarse frente a la unidad, la velocidad puede considerarse como relativista.

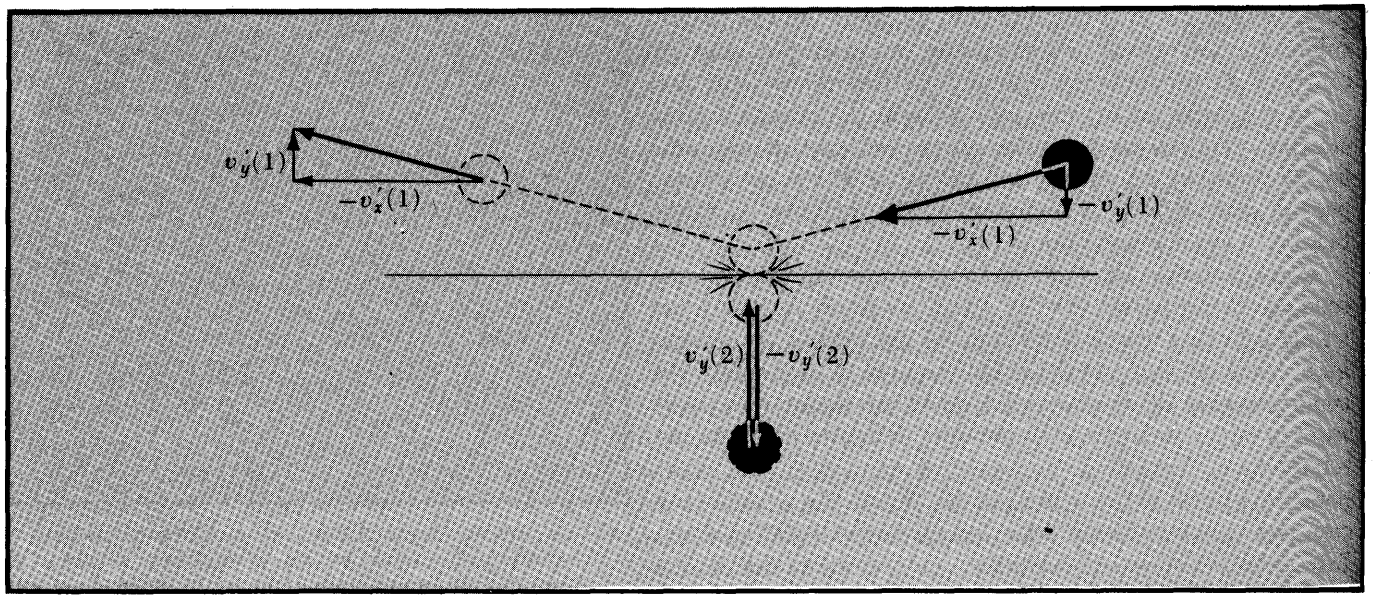


FIG. 12.2 (*cont.*) *b*) En S' encontramos (puesto que $V = v_x$)

$$-v'_x(1) = -\frac{2V}{1 + V^2/c^2} \qquad v'_x(2) = 0$$

$$v'_y(1) = \frac{v_y}{1 + V^2/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

y

$$v'_y(2) = \frac{v_y}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} > v'_y(1)$$

$$v'_x(2) = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = 0$$

$$v'_y(2) = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_y}{(1 - v_x^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (12.2)$$

Estos resultados vienen ilustrados en la fig. 12.2*b*. [Obsérvese que en la figura estas expresiones vienen dadas en función de V, mientras que en las Ecs. (12.1) y (12.2) aparecen en función de v_x y V y luego en función de v_x sólo.]

Evidentemente, las magnitudes de las componentes y de la velocidad en S' dadas por las Ecs. (12.1) y (12.2) no son iguales, incluso aunque fueran iguales en S. Esta **diferencia en las magnitudes de las componentes y** de las velocidades en S' surge del hecho de que las componentes x de las velocidades en S no son iguales; unas eran las negativas de las otras. La situación viene ilustrada en la fig. 12.2*c*. **La variación de la cantidad de movimiento** no relativista $-2Mv'_y(2)$ y $2Mv'_y(1)$ no sería aquí igual y opuesta. Una definición en la que la cantidad de movimiento es directamente proporcional a la velocidad no puede asegurar la conservación de la cantidad de movimiento en todos los sistemas de referencia. Es decir, la conservación de la cantidad de movimiento es incompatible con la invariancia de Lorentz o existe otra definición de la cantidad de movimiento en la que la ley de la conservación sea válida en todos los sistemas con velocidades relativas constantes.

Veamos ahora una definición de la cantidad de movimiento que sea una invariante de Lorentz. La definición debe ser tal que la componente y de la cantidad de movimiento de una partícula sea independiente de la componente x de la velocidad del sistema de referencia en el que se observa el choque. Si se encuentra esta definición, entonces la conservación de la componente y de la cantidad de movimiento en un sistema de referencia asegura su conservación en todos los sistemas de referencia. Sabemos que bajo las transformaciones de Lorentz el desplazamiento Δy en la dirección y es el mismo para todos los sistemas de referencia. Pero el tiempo Δt para recorrer la distancia Δy depende del sistema de referencia y, por consiguiente, la componente de la velocidad $v_y = \Delta y/\Delta t$ depende del sistema de referencia. En lugar de relojes de laboratorio para medir Δt, podemos referirnos a un reloj que lleve la misma partícula. Este reloj mide el intervalo de tiempo propio $\Delta\tau$ de la partícula. *Todos los observadores estarán de acuerdo sobre el valor de* $\Delta\tau$. Así, pues, la cantidad $\Delta y/\Delta\tau$ es la misma en todos los sistemas de referencia.

Sabemos que Δt **e** $\Delta\tau$ difieren en el factor de dilatación del tiempo de la Ec. (11.11), de modo que se tiene

$$\Delta\tau = \Delta t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12.3}$$

en donde v es la velocidad de la partícula relativa al sistema de referencia en el cual se mide Δt. Por tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Vemos que la componente y de $\mathbf{v}/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ será la misma en todos los sistemas de referencia que difieran únicamente en su componente x de la velocidad. Si definimos la cantidad de movimiento relativista por

$$\boxed{\mathbf{p} \equiv \frac{M\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{12.4}$$

la conservación de la componente y de la cantidad de movimiento es válida en cualquier otro sistema de referencia inercial que difiera del sistema en reposo por una velocidad constante en la dirección x. Obsérvese que podemos escribir

$$p = Mc\beta\gamma \tag{12.5}$$

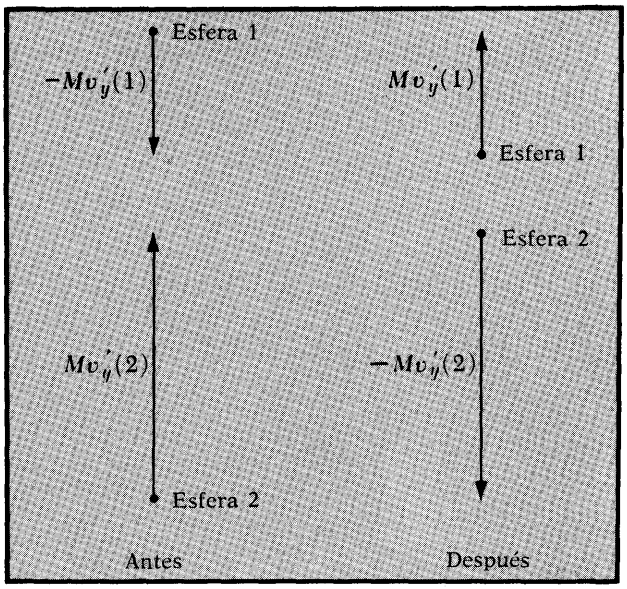


FIG. 12.2 *(cont.)* c) En el nuevo sistema S' la cantidad de movimiento no relativista *no* es la misma en la dirección y' antes y después del choque.

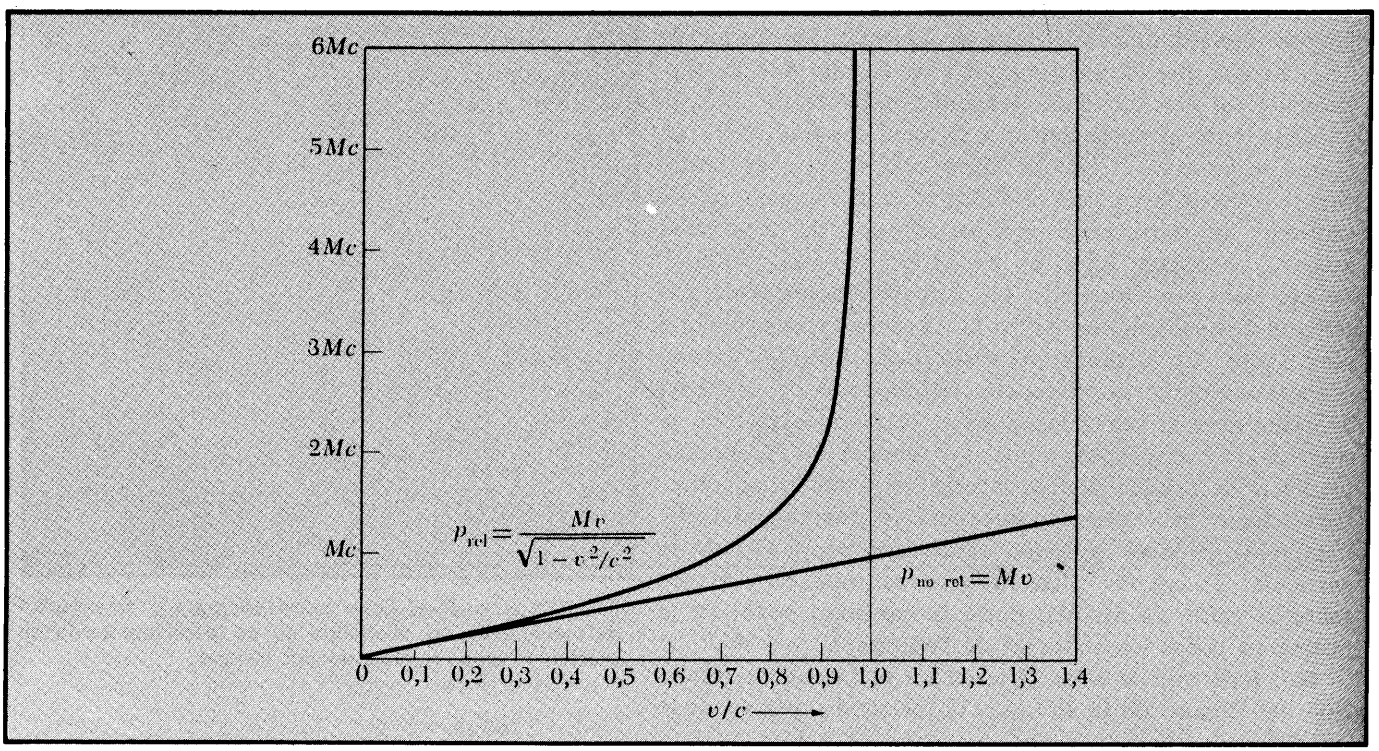


FIG. 12.3 Para que la conservación de la cantidad de movimiento sea válida en *todos* los sistemas, definiremos **p** de nuevo como sigue: Para una partícula con velocidad **v** y masa en reposo M,

$$\mathbf{p} = \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Los valores de las cantidades de movimiento relativista y no relativista están representados en el gráfico.

a partir de las definiciones $\beta = v/c$ y $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ introducidas en el Cap. 11. La fig. 12.3 ilustra esta nueva definición de p en función de v.

Por conveniencia hemos empleado ejes dispuestos de un modo simétrico respecto a los movimientos para que no haya cambio en la componente x de la velocidad de ninguna partícula. Puesto que no hay cambio en la magnitud de la componente y, la definición de la Ec. (12.4) proporciona también la conservación de la componente x de la cantidad de movimiento. Ya veremos en la sección de «Transformación de cantidad de movimiento y energía» que, en general, la transformación de la cantidad de movimiento en S' viene relacionada con la cantidad de movimiento en S y la energía en S. El alumno puede demostrar que aunque la partícula 2 tenga una masa diferente de la 1, el razonamiento anterior es válido, de modo que tenemos una ley relativista de la conservación de la cantidad de movimiento. Para $v/c \ll 1$ **la definición de la cantidad de movimiento se reduce al** resultado no relativista $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$. Es un hecho experimental que la cantidad de movimiento como se define en la Ec. (12.4) se conserva en todos los procesos de choque.

Podemos escribir la cantidad de movimiento relativista (12.4) como

$$\mathbf{p} = M(v)\mathbf{v}$$

de modo que podamos interpretar

$$\boxed{M(v) \equiv \frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = M\gamma} \qquad (12.6)$$

como la masa relativista de la partícula de masa en reposo M cuando está en movimiento con velocidad v. La masa en reposo es la correspondiente para $v \to 0$. Cuando $v \to c$, $M(v)/M \to \infty$. El aumento relativista de masa ha sido comprobado en diversos experimentos de desviación de electrones; se comprueba también implícitamente en el funcionamiento de los aceleradores de partículas de alta energía. La otra formulación de la Ec. (12.6) que se da a continuación resalta directamente la relación entre la energía relativista y la cantidad de movimiento y con frecuencia es más fácil de aplicar.

En algunos textos se utiliza M como la masa variable y podemos escribir $M = M_0/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma M_0$, en donde M_0 se denomina masa en reposo. Aquí seguiremos llamando masa en reposo a M y masa relativista a γM, o algunas veces a $M(v)$.

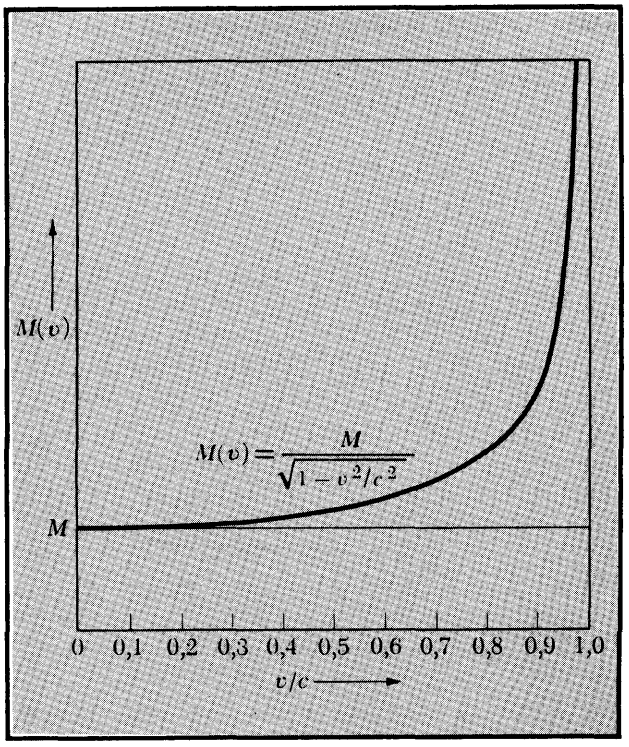


FIG. 12.4 La nueva definición de cantidad de movimiento conduce a este comportamiento de la masa:

$$M(v) = \frac{M}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ENERGÍA RELATIVISTA

¿Qué es la energía cinética relativista? ¿Con qué reemplazamos $\frac{1}{2}Mv^2$ para obtener una expresión relativista adecuada? En primer lugar recordemos cómo se definió la energía cinética en el Cap. 5: La energía obtenida por una partícula libre inicialmente en reposo cuando sobre ella se realiza un trabajo W. Retenemos esta definición y procedemos a escribir la segunda ley de Newton en la forma

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

en donde el tiempo t y la fuerza F se refieren a estas magnitudes evaluadas en el sistema de laboratorio, en el cual se observa la cantidad de movimiento p. (La transformación de fuerza de un sistema de referencia a otro se trata posteriormente en este capítulo.) Supongamos que $\mathbf{F}$ tiene la dirección x. Entonces el trabajo W viene dado por

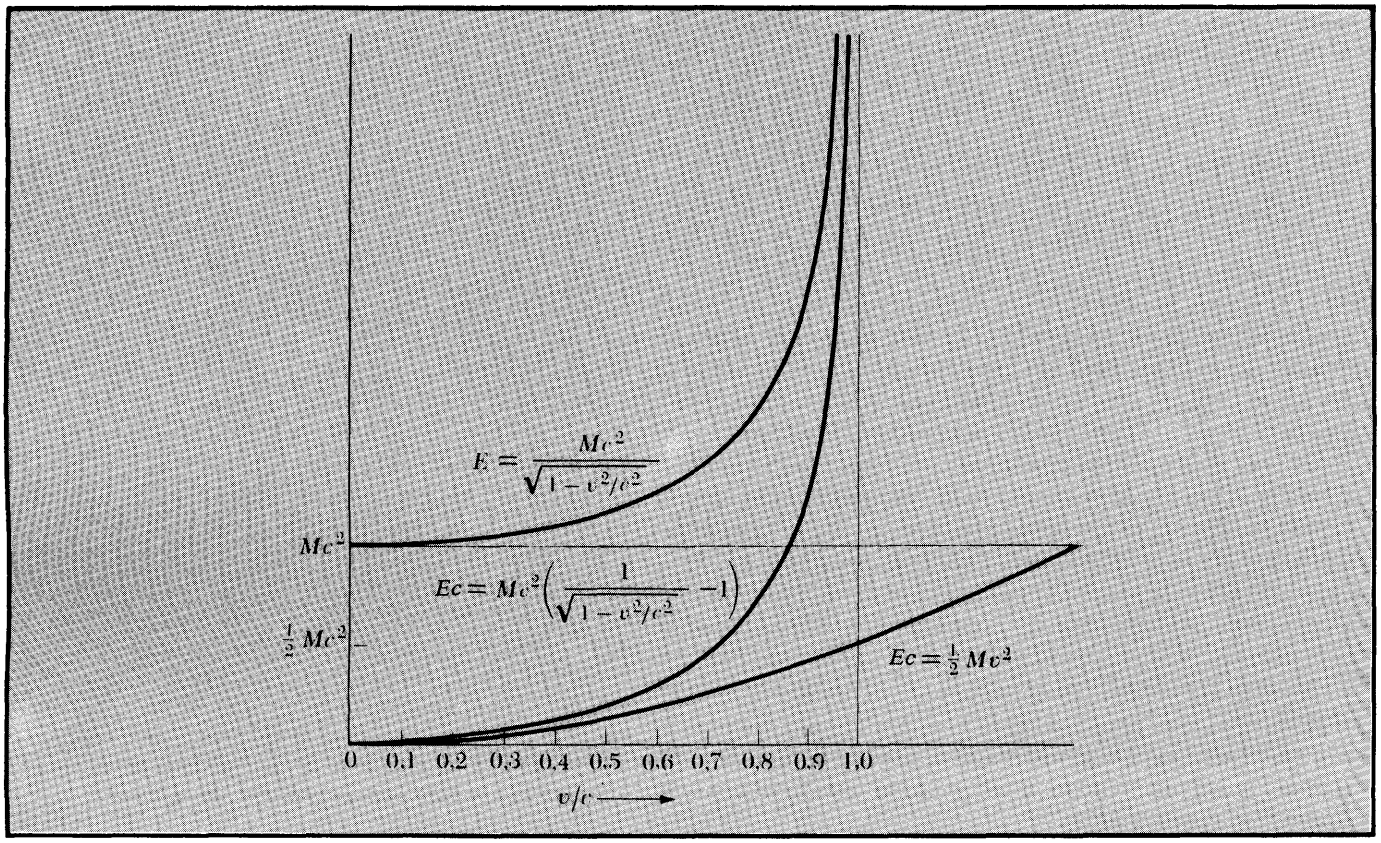


FIG. 12.5 La energía relativista $E = Mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, la energía cinética relativista $Ec = Mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2} - Mc^2$ y la energía cinética no relativista $Ec = \frac{1}{2}Mv^2$ representadas en función de v/c. Para $v/c \ll 1$, las curvas para E y Ec son casi idénticas en forma, puesto que $Mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx Mc^2 + \frac{1}{2}Mv^2$. Para $v/c \sim 1$, E aumenta mucho más rápidamente que $\frac{1}{2}Mv^2$.

$$W = \int F\,dx = \int \frac{d}{dt}\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{d}{dt}\left(\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= \int \left[\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{dv}{dt} + \frac{Mv^3c^{-2}}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}}\frac{dv}{dt}\right]dt$$

$$= \int \frac{Mv\,dv/dt}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}}\,dt = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)dt$$

en donde hemos supuesto que $dx/dt = v$.

Si suponemos que en el límite superior la velocidad es v y en el límite inferior $v = 0$, resulta

$$\boxed{W = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - Mc^2 = Mc^2(\gamma - 1)} \qquad (12.7)$$

Esta será la energía cinética Ec y se representa en función de v en la fig. 12.5. Utilizando esta expresión para

Ec los resultados son acordes con los valores experimentales representados en la fig. 10.20.

Esta nueva expresión formalmente no recuerda en absoluto el valor $\frac{1}{2}Mv^2$, pero veamos en qué se convierte para $v/c \ll 1$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \cdots$$

Por tanto,

$$\gamma - 1 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

Y así,

$$Mc^2(\gamma - 1) \quad \text{se convierte en} \quad \frac{1}{2}Mc^2\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}Mv^2$$

Consideremos ahora la energía relativista desde un punto de vista formal. Según (12.5) el cuadrado de la cantidad de movimiento relativista puede escribirse en la forma

$$p^2 = M^2c^2\beta^2\gamma^2 \tag{12.8}$$

La identidad

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = 1$$

o

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

es ya una invariante de Lorentz, porque 1 es una constante. Multiplicando por M^2c^4, tenemos,

$$M^2c^4(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) = M^2c^4$$

o bien, usando la Ec. (12.8),

$$M^2c^4\gamma^2 - p^2c^2 = M^2c^4 \tag{12.9}$$

Como la *masa en reposo* es una constante, M^2c^4 lo será también y, por lo tanto, una invariante de Lorentz como queríamos. ¿Pero qué magnitud física es $M^2c^4\gamma^2$? Su papel en (12.9) sugiere profundamente que debe ser una magnitud física importante, ya que, cuando se le resta p^2c^2 resulta un número (M^2c^4) que es invariante en las transformaciones de Lorentz.

Si definimos la *energía relativista total* E de una partícula libre mediante la ecuación

$$\boxed{E \equiv Mc^2\gamma \equiv \frac{Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{12.10}$$

entonces la Ec. (12.9) nos dice que

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = M^2c^4} \tag{12.11}$$

que es una invariante de Lorentz. Si transformamos de un sistema a otro, con $p \to p'$ y $E \to E'$, la invariancia de (12.11) significa que

$$E'^2 - p'^2c^2 = E^2 - p^2c^2 = M^2c^4$$

Esto es lo que queremos decir al afirmar que (12.11) es una invariante de Lorentz. Insistimos en que M designa la masa en reposo de la partícula y es un número invariante en la transformación de Lorentz. Obsérvese que de la Ec. (12.11) resulta

$$E = \sqrt{p^2c^2 + M^2c^4} \tag{12.12}$$

Si $pc \ll Mc^2$, entonces

$$E = Mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{M^2c^4}} = Mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2c^2}{M^2c^4} \cdots\right)$$
$$= Mc^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{M}$$

y $Ec = \frac{1}{2}p^2/M$ es el resultado no relativista. Sin embargo, si $pc \gg Mc^2$, entonces

$$E = pc$$

Esta es una aproximación realizada con frecuencia por los físicos de alta energía. Más tarde veremos (pág. 376) que esto es válido para los cuantos luminosos, para los cuales $M = 0$.

Entre estos dos límites no existe una relación simple entre E y p o entre la energía cinética Ec y p (o v). Obsérvese que Ec, dada por la Ec. (12.7), se convierte ahora con el uso de $E = \gamma Mc^2$ en

$$Ec = E - Mc^2 \qquad \text{o} \qquad E = Mc^2 + Ec \tag{12.13}$$

Es importante observar aquí que $v = 0$, $E = Mc^2$. En otras palabras, la masa M posee energía, aun cuando esté en reposo. Esta energía se llama, naturalmente, *energía en reposo* y veremos algunos ejemplos de su importancia. La diferencia entre la energía E (en el caso $v > 0$) y la energía en reposo, es la energía cinética Ec.

Obsérvese también que $E = \gamma Mc^2$ [Ec. (12.10)] y que γM es justamente la masa relativista, de modo que E es igual al producto de la masa relativista por c^2. Masa y energía son nombres distintos de la misma magnitud.

No tiene sentido particular el preguntar: ¿Una partícula tiene más masa porque tiene energía cinética o tiene energía cinética porque tiene más masa? «Más masa» y «energía cinética» son conceptos paralelos.

La conservación de la energía para las partículas en choque toma la forma

$$\sum_i^n E_i = \text{const}$$

la misma antes y después de un choque, siendo E_i la energía relativista de la partícula i-ésima (12.12). La conservación de la energía relativista es válida incluso para lo que hemos denominado choque inelástico, porque la pérdida de energía cinética (en excitación interna de las partículas) aparece como un aumento de la masa. La conservación de la cantidad de movimiento adquiere la forma

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{const}$$

la misma antes y después de un choque.

TRANSFORMACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y DE LA ENERGÍA

Escribamos ahora las componentes de la Ec. (12.4) haciendo uso de la (12.3)

$$p_x = M\frac{dx}{d\tau} \qquad p_y = M\frac{dy}{d\tau} \qquad p_z = M\frac{dz}{d\tau} \tag{12.14}$$

Igualmente se deduce de (12.10) y (12.3) que podemos escribir E en la forma

$$E = Mc^2\frac{dt}{d\tau} \tag{12.15}$$

Como M y τ son invariantes de Lorentz, resulta de (12.14) y (12.15) que p_x, p_y, p_z y E/c^2 deben transformarse bajo una transformación de Lorentz del mismo modo exactamente que lo hacen x, y, z y t. Una vez conocida la forma en que se transforman estas últimas, el resultado (12.16) es inmediato. Utilizando las transformaciones dadas en el Cap. 11, tenemos las *relaciones de transformación* para la cantidad de movimiento y energía:

$$\boxed{\begin{gathered} p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right) \qquad p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z \\ E' = \gamma(E - p_x c\beta) \end{gathered}} \tag{12.16}$$

Las transformaciones inversas se obtienen sustituyendo $-\beta$ por $+\beta$ e intercambiando las cantidades con prima por las sin prima:

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{\beta E'}{c}\right) \qquad p_y = p'_y \qquad p_z = p'_z$$
$$E = \gamma(E' + p'_x c\beta) \tag{12.17}$$

Podemos determinar la velocidad de la partícula a partir de su cantidad de movimiento y energía, empleando (12.14) y (12.15):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{p_x}{M}\frac{Mc^2}{E} = \frac{c^2 p_x}{E}$$

o

$$\boxed{\mathbf{p} = \mathbf{v}\frac{E}{c^2}} \tag{12.18}$$

EJEMPLO

Choque inelástico. Supongamos que dos partículas 1 y 2 idénticas chocan y se adhieren entre sí para formar una tercera partícula 3. En el sistema de referencia S en que el centro de masas está en reposo tenemos (por definición de dicho centro)

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$$

La partícula producto debe estar en reposo. En otro sistema de referencia S' tendremos

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_3$$

Podemos expresar esto en función de magnitudes observadas en S por medio de la transformación (12.16),

$$p'_{x1} + p'_{x2} = \gamma(p_{x1} + p_{x2}) - \frac{\gamma\beta(E_1 + E_2)}{c}$$
$$= p'_{x3} = \gamma p_{x3} - \frac{\gamma\beta E_3}{c} \tag{12.19}$$

Aquí E_1 y E_2 son las energías en S de las partículas iniciales; E_3 es la energía en S de la partícula producto. Pero $p_{x3} = 0$ y $p_{x1} + p_{x2} = 0$, de modo que (12.19) se reduce a

$$E_3 = E_1 + E_2$$

Este resultado nos dice que la energía relativista se conserva en el choque. Esta discusión nos recuerda la mantenida sobre la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía en el Cap. 4.

Ahora bien, como las partículas son idénticas resulta $E_1 = E_2$; utilizando (12.10) para E_1, tenemos para E_3 en el sistema S,

$$M_3 c^2 = \frac{2Mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{12.20}$$

Aquí M_3 es la masa *en reposo* de la partícula producto y **v** es la velocidad inicial de la partícula 1 ó 2 en el sistema S. La masa en reposo M_3 de la partícula producto es mayor en este ejemplo que la suma $2M$ de las masas en reposo de las partículas iniciales. La energía cinética de éstas se ha convertido en una contribución a la masa en reposo de la partícula producto.

En la consideración de los choques más generales, se encuentra que la cantidad de movimiento puede conservarse únicamente si la suma

$$\sum_i \frac{M_i c^2}{(1 - v_i^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_i E_i \tag{12.21}$$

extendida a todas las masas incidentes es igual a la misma suma referida a las partículas que emergen *. Vimos un ejemplo de esto en la Ec. (12.20). Esto es, la cantidad de movimiento puede conservarse en una colisión relativista únicamente si la energía relativista se conserva también.

La nueva masa en reposo M_3 es mayor que la suma $2M$ de las masas iniciales en reposo. Para $\beta \ll 1$ podemos describir este aumento parcialmente en función de conceptos no relativistas. Como

$$\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \cdots$$

tenemos según la Ec. (12.20) que

$$\begin{aligned} M_3 &\approx 2\left(M + \frac{1}{2}M\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right) \\ &\approx 2\left(M + \frac{\text{energía cinética}}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{12.22}$$

Así, pues, la masa en reposo M_3 está compuesta no sólo de la suma de las masas en reposo de las partículas incidentes, sino también de una contribución proporcional a su energía cinética. Este ejemplo de un choque inelástico demuestra que ha existido una conversión de energía cinética en masa. [Hemos escrito (12.22) para valores pequeños de β únicamente porque así resulta más fácil la conversión masa-energía. Esta conversión es válida también para cualquier valor de β.] Según (12.22) la relación entre el incremento de masa

$$\Delta M = M_3 - 2M \tag{12.23}$$

y la energía cinética que ha desaparecido es

$$\text{Energía cinética} = c^2\,\Delta M \tag{12.24}$$

De la definición de energía cinética dada en la Ec. (12.7), a saber, $Ec = (\gamma - 1)Mc^2$, resulta que las Ecs. (12.22) a (12.24) pueden considerarse ciertas en general, no sólo para pequeños valores de β.

(*) No podemos aplicar la Ec. (12.21) directamente si en el choque intervienen fotones, porque $v = c$ para un fotón. En las Ecs. (12.26) y (12.27) veremos cómo manejar el problema para fotones y otras partículas que tengan masa cero en reposo.

Equivalencia de masa y energía. La posibilidad de un intercambio entre la masa en reposo y la energía (y la relación cuantitativa entre ellas) fue considerada por Einstein como la contribución más significativa de la teoría de la relatividad. En tanto que las partículas no adquieran nunca velocidades que sean comparables a c, podemos utilizar la definición no relativista de la energía cinética, por lo que llegamos a la conclusión de que en cualquier choque entre partículas (aunque el número de las incidentes sea diferente del número de las que emergen) toda pérdida o ganancia neta de masa en reposo multiplicada por c^2 es igual a la ganancia o pérdida neta de energía cinética. Inversamente, en un choque inelástico en el que exista una pérdida de energía cinética, deberá existir un aumento en las masas en reposo de las partículas que emergen.

Teniendo en cuenta (12.6) y (12.10) podemos escribir $E = M(v)c^2$. Así, pues, la definición natural de energía en la teoría de la relatividad permite afirmar que el enunciado (12.24) es válido exactamente para la energía total sin la restricción $v/c \ll 1$:

$$\Delta E = c^2 \, \Delta M$$

(Se da una deducción exacta en la nota histórica al final del capítulo.) El cambio de masa ΔM asociado con la conversión de la energía cinética en masa en reposo es generalmente muy pequeña en los procesos ordinarios cotidianos, porque c es mucho más grande que las velocidades comunes.

Como la masa es equivalente a la energía, un sistema con energía relativista total E tiene asociada una masa inerte $M = E/c^2$. Consideremos una caja sin masa que contiene N partículas en reposo, cada una de ellas de masa M. La caja pone de manifiesto una masa inercial NM cuando se intenta acelerarla. La cantidad de movimiento es $NM\mathbf{V}$ si la caja posee la velocidad $\mathbf{V}$. Pero si cada una de las partículas tiene una velocidad $\mathbf{v}$ y una energía cinética $\frac{1}{2}Mv^2$ dentro de la caja, entonces la masa inerte de la caja es $N(M + Mv^2/2c^2)$ y su cantidad de movimiento es $N\mathbf{V}(M + Mv^2/2c^2)$. En estas expresiones se ha supuesto que las velocidades V y v son mucho menores que c.

Análogamente, un muelle comprimido tiene mayor masa que otro sin comprimir y la diferencia estriba en el trabajo necesario para comprimirlo dividido por c^2. Si el muelle comprimido se disuelve completamente en un ácido, los productos de la reacción tienen una masa ligeramente mayor (pero demasiado pequeña para ser

medida) de la que resultaría si el muelle no estuviese sometido a tensión. También se revelaría, si pudiera medirse, por el ligero aumento de la temperatura de la solución.

EJEMPLO

Conversiones masa-energía

(1) Si dos masas de 1 gramo con velocidades iguales y opuestas de 10^5 cm/s chocan y se adhieren entre sí, la masa en reposo adicional del conjunto es

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \approx 2\left(\frac{1}{2}M\frac{v^2}{c^2}\right) \approx 1 \times 10^{-11}\,\text{g}$$

Esto es menor que la precisión con la que puede medirse una masa de 1 gramo.

TABLA 12.1 Comparación de las energías de desintegración calculadas y observadas *.

	Disminución de masa u	*Energía liberada, MeV*	
		$\Delta M\,c^2$	ΔE
$Be^9 + H^1 \rightarrow Li^6 + He^4$	0,00242	2,25	2,28
$Li^6 + H^2 \rightarrow He^4 + He^4$	0,02381	22,17	22,20
$B^{10} + H^2 \rightarrow C^{11} + n^1$	0,00685	6,38	6,08
$N^{14} + H^2 \rightarrow C^{12} + He^4$	0,01436	13,37	13,40
$N^{14} + He^4 \rightarrow O^{17} + H^1$	−0,00124	−1,15	−1,16
$Si^{28} + He^4 \rightarrow P^{31} + H^1$	−0,00242	−2,25	−2,23

(*) S. Dushman, *General Electric Review*, **47**, 6-13 (octubre, 1944).

(2) Un átomo de hidrógeno se compone de un electrón ligado a un protón por fuerzas de atracción eléctrica; su masa en reposo M_H es más ligera que la suma de las masas en reposo m del electrón y M_p del protón libres. La masa extra de las partículas libres es igual a la energía de ionización (enlace) dividida por c^2. La masa M_H de un átomo de H es $1{,}6736 \times 10^{-24}$ g. La energía de enlace entre el electrón y el protón resulta ser 13,6 eV ó $22 \times \times 10^{-12}$ erg, de modo que

$$M_p + m - M_H = \frac{22 \times 10^{-12}}{c^2} \approx 2{,}4 \times 10^{-32}\,\text{g}$$

que representa una parte en 10^8 de la masa del átomo de H, magnitud de nuevo demasiado pequeña para ser medida *.

(3) La suma de las masas en reposo del protón y neutrón es

$$M_p + M_n = (1{,}67265 + 1{,}67496) \times 10^{-24} = 3{,}34761 \times 10^{-24}\,\text{g}$$

(*) Las mediciones actuales son de 10 a 100 veces menos exactas. Los efectos del enlace electrónico han sido observados en una reacción nuclear.

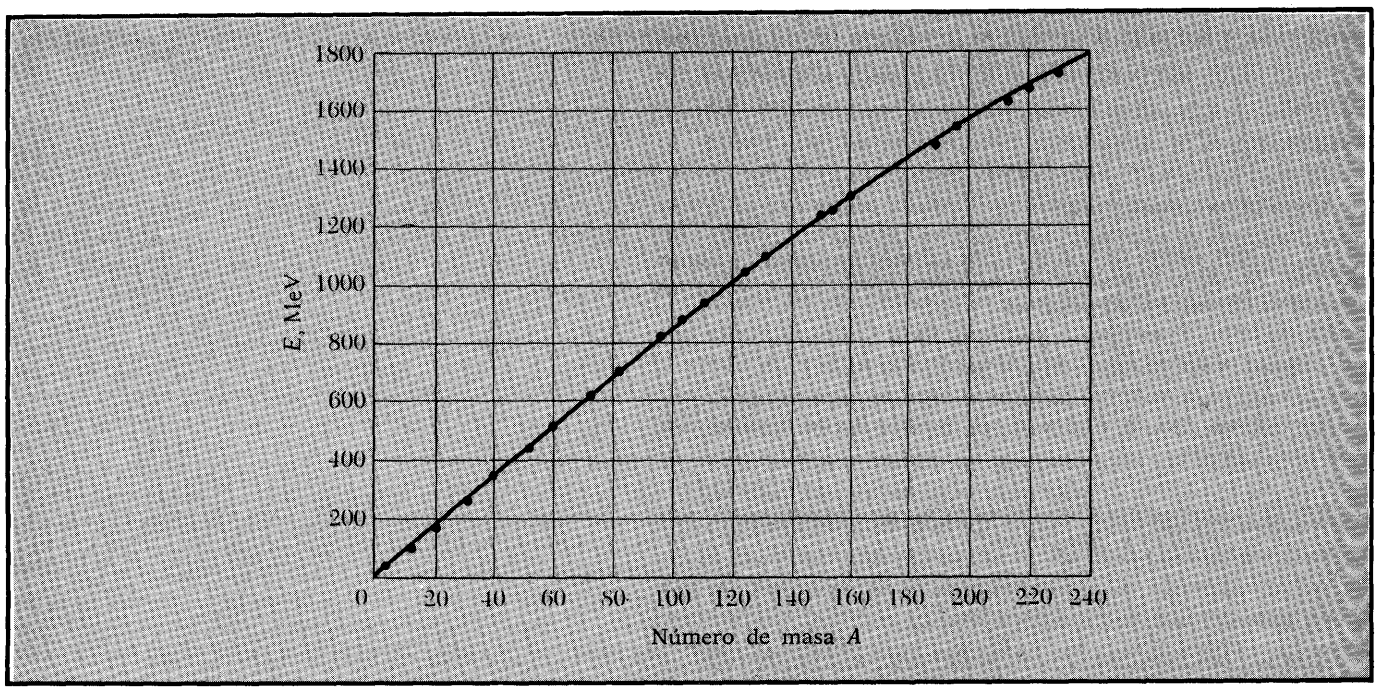


FIG. 12.6 Energía de enlace o ligadura de los núcleos, en MeV, en función del número de masa A del núcleo. Recuérdese que 1 MeV es equivalente a una masa de $1{,}76 \times 10^{-27}$ g. No están representados todos los núcleos en el gráfico.

Sin embargo, la masa del deuterón es $3{,}34365 \times 10^{-24}$ g. La diferencia $0{,}00396 \times 10^{-24}$ g es igual a $3{,}56 \times 10^{-6}$ erg ó 2,23 MeV, que es justamente la energía necesaria para disociar el deuterón en un neutrón libre y un protón y se denomina energía de enlace del deuterón (la fig. 12.6 muestra la energía de enlace de los núcleos representada en función del número de masa). Realmente estos datos proporcionan un método de obtener la masa del neutrón. La desintegración del neutrón en protón, electrón y neutrino es otro ejemplo y el acuerdo es muy bueno.

(4) En la tabla 12.1 se compara la liberación de energía observada ΔE y el cambio de masa ΔM observado en diversas reacciones nucleares. Una unidad de masa atómica unificada (u) es igual a un doceavo de la masa de un átomo de C^{12}.

EJEMPLO

Reacciones que proporcionan la energía estelar. La fuente de energía más importante en el Sol y en la mayoría de las estrellas surge de la combustión nuclear de los protones con formación de helio.

La energía liberada por átomo de helio formado (fig. 12.7) puede calcularse del cambio de masa neto en la reacción:

$$\begin{aligned} 4M(\mathrm{H}^1) - M(\mathrm{He}^4) &= 4(1{,}6736 \times 10^{-24})\,\mathrm{g} - 6{,}6466 \times 10^{-24})\,\mathrm{g} \\ &\approx 0{,}0478 \times 10^{-24}\,\mathrm{g} \\ &\approx 52\,m \end{aligned} \qquad (12.25)$$

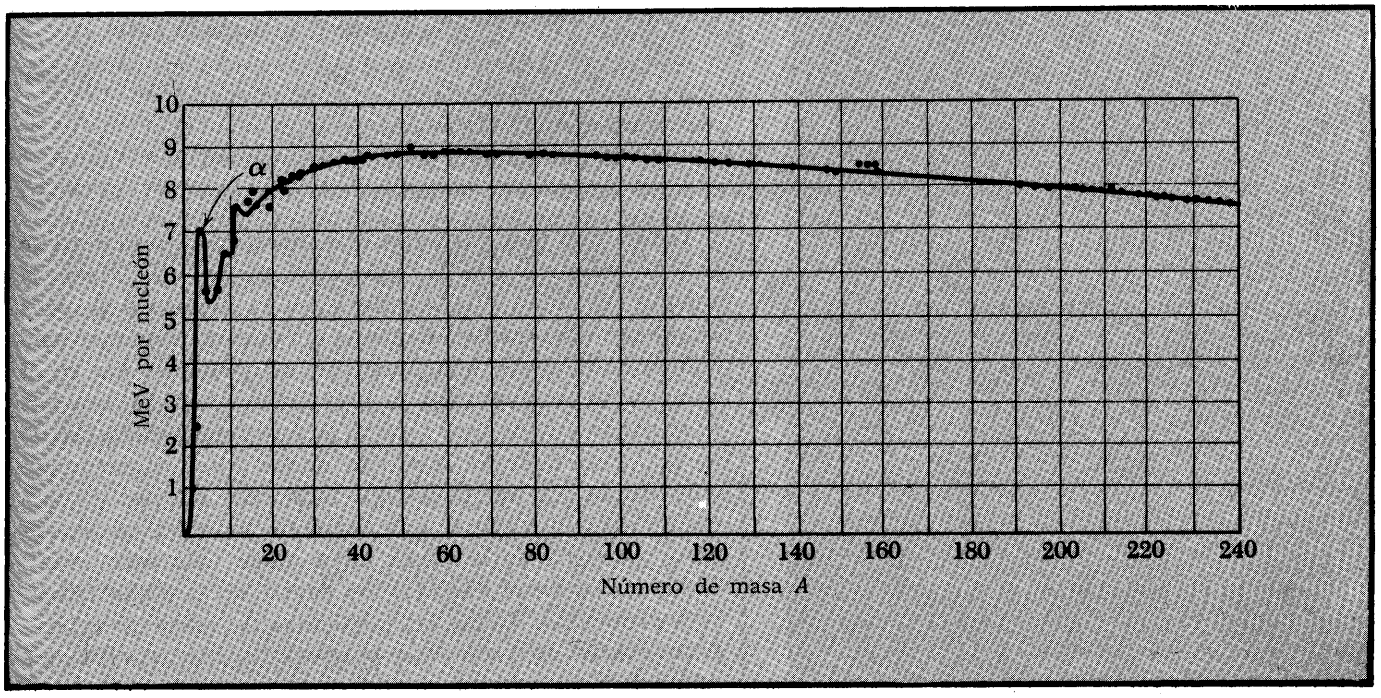


FIG. 12.7 Energía de enlace por nucleón en MeV en función del número de masa A. El punto marcado con α corresponde al He^4, que tiene una energía de enlace relativamente alta.

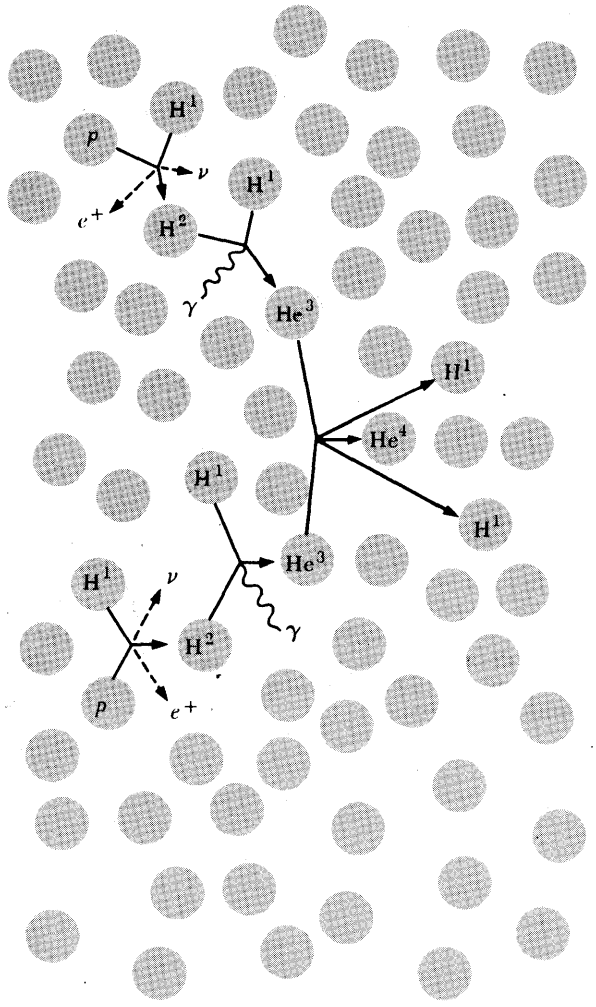
en donde m es la masa del electrón. El resultado es equivalente a 26,7 MeV. Las masas atómicas tabuladas incluyen la masa del número normal de electrones atómicos. Los positrones de la reacción que sigue se aniquilan con electrones para dar rayos gamma.

La temperatura del centro del Sol es $\sim 2 \times 10^7$ grados K. A esta temperatura se cree que predomina en los procesos nucleares el siguiente conjunto de reacciones (fig. 12.8):

$$H^1 + p = H^2 + e^+ + \text{neutrino}$$
$$H^2 + H^1 = He^3 + \gamma$$
$$He^3 + He^3 = He^4 + 2H^1$$

El efecto neto es la combustión del hidrógeno para producir He^4. Obsérvese que en la primera fase se emite un neutrino (partícula neutra sin masa), de modo que el Sol es una poderosa fuente de neutrinos. Estas partículas interaccionan muy débilmente con la materia, de modo que casi todos los neutrinos producidos en las reacciones nucleares en las estrellas escapan al espacio. Pueden llevar casi el 10 por ciento de la energía emitida por el Sol *.

(*) Para un excelente estudio del origen de los elementos, véase William A. Fowler, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **52**, 524-528 (1964).



Resultado total:

4 núcleos de hidrógeno → núcleos de helio
Liberación de energía = $2 \cdot 10^7$ kW-h/kg convertido

FIG. 12.8 Diagrama de la fusión de hidrógeno en helio por la cadena *p-p* que tiene lugar en las estrellas de la serie principal de masa igual a la solar o inferiores. Densidad: 10^2 g/cm^3. Temperatura: 10^7 °K. *(Según W. A. Fowler.)*

Partículas con masa en reposo cero. Cuando $M = 0$ en (12.11) tenemos que

$$E = pc \tag{12.26}$$

de modo que (12.18) se reduce a

$$v = c \tag{12.27}$$

y vemos que una partícula con masa en reposo cero se mueve siempre con la velocidad de la luz. Tiene la misma velocidad y la misma masa en reposo nula para cualquier observador. Excepto en que no siempre pensamos de él como una partícula, un pulso de luz en el vacío tiene precisamente la propiedad $v \equiv c$. En muchos fenómenos en los que resalta la naturaleza cuántica de la luz, encontramos que ésta actúa como si estuviese constituida por partículas que llamamos *fotones* o cuantos de luz. Un fotón es una partícula de masa en reposo cero; pero no es la única cuya masa vale cero, pues, como vimos en el Cap. 11, los neutrinos también tienen esta propiedad. Todas las partículas de masa en reposo cero poseen la propiedad particularmente sencilla que expresa la ecuación $E = pc$. La energía de un fotón está relacionada con su frecuencia ν por $E = h\nu$, en donde h es la constante de Planck. Así, pues, $E = h\nu = pc$, o $p = h\nu/c$.

Existe siempre una cantidad de movimiento E/c asociada con un fotón de energía E. Cuando un fotón es absorbido por un átomo, se transfiere a éste una cantidad de movimiento E/c. Si el fotón es reflejado (absorbido y reemitido en sentido inverso) la transferencia de cantidad de movimiento es $2E/c$.

Calculemos la presión de radiación dentro de un gran cubo de arista L que contiene muchos fotones, con energía radiante total U por unidad de volumen. Supongamos que los fotones se mueven aleatoriamente de modo que en valor medio un tercio de ellos se mueve paralelamente a cualquier arista del cubo. En la unidad de tiempo una cara determinada del cubo experimentará $\left(\frac{N}{3}\right)\left(\frac{c}{2L}\right)$ choques, siendo N el número total de fotones en el cubo. El cambio de cantidad de movimiento por choque es $2E/c$. La fuerza media en el tiempo sobre dicha cara es $F =$ (choques por unidad de tiempo) (variación de la cantidad de movimiento por choque)

$$= N\left(\frac{c}{6L}\right)\left(\frac{2E}{c}\right) = N\frac{E}{3L}$$

Si n es el número de fotones por unidad de volumen, entonces $N = nL^3$ y tendremos

$$F = nL^2\frac{E}{3} \qquad \text{o:} \qquad P = \frac{1}{3}U \ *$$

para la presión de radiación, en donde $P = F/L^2$ y $U = nE$.

Es fácil deducir la expresión del efecto Doppler a partir de la expresión para p y E y la transformación de Lorentz [Ec. (12.16]. Si en el sistema S, $E = h\nu$, $p_x = h\nu/c$, ¿cuánto valen E' y p' en el sistema S'?

$$p'_x = \gamma\left(\frac{h\nu}{c} - \beta\frac{h\nu}{c}\right) \qquad E' = \gamma\left(h\nu - \beta c\frac{h\nu}{c}\right)$$

Por tanto,

$$p'_x = \frac{h\nu}{c}(1-\beta)\gamma \qquad E' = h\nu(1-\beta)\gamma$$

$$p'_x = \frac{h\nu}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad E' = h\nu' = h\nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{12.28}$$

E' es, naturalmente, igual a $p'c$.

La luz del Sol deposita sobre la superficie de la Tierra en forma de energía radiante alrededor de 10^6 ergs/ /cm^2-s. Si se absorbe toda la energía incidente, la presión resultante es $(10^6/c)$ dinas/cm$^2 \approx 3 \times 10^{-5}$ dinas/cm^2. Si toda la energía se reflejase, la presión sería, a lo sumo, el doble. Esta presión es muy pequeña y tiene un efecto totalmente despreciable sobre el movimiento de la Tierra. Sobre la cola muy difusa de un cometa o sobre los satélites Eco, como el área de la superficie es grande para una masa dada, es posible que el efecto acumulativo de esta presión no sea despreciable (fig. 12.9). Puede que tenga más importancia, sin embargo, el bombardeo de la cola del cometa por partículas materiales procedentes del Sol. En el interior de una estrella muy caliente y de baja densidad la presión de radiación puede llegar a ser de extrema importancia.



FIG. 12.9 El cometa Mkros, 27 de agosto de 1957. *(Fotografía de los Observatorios de Monte Wilson y Palomar.)*

(*) Para partículas no relativistas (teoría cinética de gases) la relación es

$$P = \frac{Nmv^2}{3L^3} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{Nmv^2}{L^3}\right) = \frac{2}{3} \text{ densidad de energía cinética}$$

La transición de $P = 2/3$ densidad de energía cinética a $P = 1/2$ densidad de energía (que será la presión si $v \approx c$) corresponde a la transición de

$$Ec = \frac{p^2}{2m} \qquad \text{a} \qquad Ec = E = pc$$

Cualquier partícula con energía suficientemente elevada, de modo que $E \gg Mc^2$, tendrá aproximadamente las mismas relaciones de cantidad de movimiento y energía que un fotón. Para una partícula podemos siempre encontrar un observador móvil para el que la partícula esté en reposo. Pero en el fotón, aunque su energía y cantidad de movimiento difieran para distintos observadores, siempre se cumplirá $v = c = E/p$ y nunca podrá llevarse al reposo mediante el cambio de sistemas de referencia.

Consideremos un átomo de hidrógeno en reposo pero en un estado electrónico excitado. Dicho átomo emite un cuanto de luz de energía E y cantidad de movimiento $(E/c)\hat{\mathbf{x}}$. El átomo retrocede con cantidad de movimiento $-(E/c)\hat{\mathbf{x}}$. Como consecuencia del retroceso, el centro de masas del sistema (átomo más cuanto de luz) no puede permanecer en reposo a no ser que el cuanto de luz posea una masa, por ejemplo, M_γ. Para determinar esta masa consideremos que

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}} \equiv \frac{M_H \dot{\mathbf{r}}_H + M_\gamma \dot{\mathbf{r}}_\gamma}{M_H + M_\gamma} = 0$$

Ahora bien, $M_H \dot{\mathbf{r}}_H = -(E/c)\hat{\mathbf{x}}$ y $\dot{\mathbf{r}}_\gamma = c\hat{\mathbf{x}}$; de modo que

$$-\frac{E}{c} + M_\gamma c = 0 \qquad M_\gamma = \frac{E}{c^2}$$

Esta masa es precisamente la que resulta de la relación de Einstein. La masa del cuanto de luz no es una masa en reposo, es la equivalente a la energía E. La masa en reposo de un cuanto de luz es cero.

TRANSFORMACIÓN DE LA DERIVADA RESPECTO AL TIEMPO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Estamos interesados en la segunda ley de Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

y como se transforma. Es evidente que

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \neq \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}$$

Consideremos el sistema S' como aquel en el cual la masa M está instantáneamente en reposo. Entonces S' se mueve con velocidad $v\hat{\mathbf{x}}$ respecto a S. Según la ecuación (12.16),

$$\Delta p_y = \Delta p'_y \qquad \Delta p_z = \Delta p'_z$$

y según la Ec. (12.3)

$$\Delta t' = \Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta t$$

en donde $\Delta\tau$ es el tiempo propio. Por tanto,

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{\Delta p'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\Delta t'} = \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta p'_y}{\Delta t'}$$

Como

$$F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \qquad \text{y} \qquad F'_y = \frac{\Delta p'_y}{\Delta t'}$$

resulta que

$$F_y = \frac{1}{\gamma}F'_y \qquad \text{y} \qquad F_z = \frac{1}{\gamma}F'_z$$

Las componentes x de $\Delta\mathbf{p}/\Delta t$ no son tan simples

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{vE'}{c^2}\right)$$

$$\Delta p_x = \gamma\,\Delta p'_x + \gamma v\frac{\Delta E'}{c^2} \tag{12.29}$$

Conviene evaluar $\Delta E'$ en función de $\Delta p'_x$

$$E' = (M_0{}^2c^4 + c^2p'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta E' = \frac{c^2p'\,\Delta p'}{\sqrt{M_0{}^2c^4 + c^2p'^2}}$$

Pero p'_x, p'_y, p'_z son todas nulas. Por tanto, $\Delta E' = 0$ y volviendo a la Ec. (12.29),

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{\gamma\,\Delta p'_x}{\Delta t'}\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\gamma\,\Delta p'_x}{\Delta t'}\frac{1}{\gamma} = \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'}$$

o sea

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'}$$

y

$$F_x = F'_x \tag{12.30}$$

Estas ecuaciones juegan un papel fundamental en el Vol. 2,Cap. 5. Naturalmente, son casos especiales de resultados más generales.

CONSTANCIA DE LA CARGA

La ley del movimiento $q\mathbf{E} = \dot{\mathbf{p}}$ de una partícula de carga q en un campo eléctrico $\mathbf{E}$ es incompleta, a no ser que conozcamos la dependencia de la carga respecto

de la velocidad y de la aceleración de la partícula, cuya cantidad de movimiento es **p**. La mejor prueba experimental de que la carga de un protón o electrón es con mucha exactitud constante es la observación de que los haces de átomos o moléculas de hidrógeno no sufren desviación en campos eléctricos uniformes perpendiculares al haz. El átomo de hidrógeno se compone de un electrón (e) y un protón (p). La molécula de hidrógeno H_2 se compone de dos electrones y dos protones. Aunque los protones se desplazan muy lentamente, los electrones giran a su alrededor con una velocidad media próxima a $10^{-2}c$ *. Una molécula no desviada tiene una cantidad de movimiento constante, de modo que el resultado experimental nos dice que $\dot{\mathbf{p}}_p + \dot{\mathbf{p}}_e = 0 = (e_p + e_e)\mathbf{E}$. Así, pues, se deduce de este experimento que en el átomo o molécula $e_e = -e_p$ a pesar del hecho de que el electrón tiene una velocidad elevada y el protón una baja velocidad y aunque la velocidad media del electrón difiera en el átomo y en la molécula. Cuantitativamente, se sabe que la carga del electrón es independiente de la velocidad e igual a la del protón, por lo menos hasta una parte en 10^9 incluso hasta una velocidad del electrón de $10^{-2}\ c$. Además se sabe que la carga tiene lugar sólo en múltiplos de la carga electrónica, de modo que la carga total puede determinarse por el simple proceso de recuento, que es independiente del sistema de referencia.

La situación experimental se discutirá en el Vol. 2. El resultado es que la carga es independiente de la velocidad de la partícula y del observador. Así, pues, carga y masa se transforman de modo diferente cuando se cambia de sistema de referencia.

PROBLEMAS

1. *Cantidad de movimiento relativista.* ¿Cuál es la cantidad de movimiento de un protón que tiene una energía cinética de 1 GeV **? (Si se mide E en GeV, podemos medir p en GeV/c.) *Sol.* 1,7 GeV/c.

2. *Cantidad de movimiento relativista.* ¿Cuál es la cantidad de movimiento de un electrón que posee una energía cinética de 1 GeV? *Sol.* 1,0005 GeV/c.

3. *Cantidad de movimiento de un fotón.* ¿Cuál es la cantidad de movimiento de un fotón de energía 1 GeV?

4. *Energía y cantidad de movimiento de un protón rápido.* Dado un protón cuya $\beta = 0{,}995$ medida en el laboratorio, ¿cuáles serán las correspondientes energías y cantidades de movimiento relativista? ¿Y la energía cinética?

5. *Partículas energéticas de los rayos cósmicos.* Se sabe que las partículas de los rayos cósmicos tienen energías hasta 10^{19} eV y quizá superiores.

(*a*) ¿Cuál es la masa aparente de una de estas partículas (aproximadamente)? *Sol.* $1{,}8 \times 10^{-14}$ g.

(*b*) ¿Cuál es su cantidad de movimiento (aproximadamente)? *Sol.* 5×10^{-4} g-cm/s.

(*) La simple teoría del átomo de Bohr ofrece para el estado fundamental el valor $v = c/137$.

(**) El prefijo giga (G en abreviatura) se emplea para designar 10^9. Los americanos emplean la palabra *billion* (B en abreviatura) para designar 10^9, mientras que en castellano un billón es 10^{12}. Así, pues, 1 BeV (americano) $\equiv$ 1 GeV $\equiv 10^9$ eV.

6. *Transformación de energía y cantidad de movimiento.* Un protón tiene $\beta = 0{,}999$ en el laboratorio. Determinar la energía y la cantidad de movimiento que se observaría en un sistema viajando en la misma dirección, con $\beta' = 0{,}990$ respecto al laboratorio.

7. *Energía de un electrón rápido.* Un electrón tiene $\beta = 0{,}99$. ¿Cuál es su energía cinética? *Sol.* 3,1 MeV.

8. *Retroceso en la emisión de rayos* γ. ¿Cuál es la cantidad de movimiento de retroceso en el laboratorio de un núcleo Fe^{57} que retrocede debido a la emisión de un fotón de 14 keV? ¿Es relativista la cantidad de movimiento del núcleo? *Sol.* $7{,}5 \times 10^{-19}$ g-cm/s.

9. *Retroceso del núcleo.* Consideremos un rayo gamma de energía E_γ que choca contra un protón en reposo en el laboratorio.

(*a*) En el sistema del laboratorio, ¿cuál es la cantidad de movimiento del rayo gamma?

(*b*) Demostrar que la velocidad V del centro de masas en el sistema del laboratorio está dado por

$$\frac{V}{c} = \frac{E_\gamma}{E_\gamma + M_p c^2}$$

(*c*) ¿Cuál es la energía de los rayos γ en el sistema de centro de masas?, ¿y la energía del protón en el mismo sistema?

10. *Desintegración de neutrones.* Utilizar los valores dados en el Cap. 12 para calcular la cantidad de energía liberada cuando un neutrón se desintegra en un protón y un electrón. *Sol.* 0,79 MeV.

11. *Invariancia de Lorentz en el sistema de dos partículas.* Sean $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ y $E = E_1 + E_2$ la cantidad de movimiento y energía totales de un sistema de dos partículas, respectivamente. Demostrar explícitamente que las transformaciones de Lorentz de $\mathbf{p}$ y E son consistentes con la invarianza de la cantidad $E^2 - p^2c^2$.

12. *Transformación al sistema de referencia en reposo del sistema de centro de masas.* Dos protones viajan en sentidos opuestos desde un punto común con velocidades $\beta = 0{,}5$.

(*a*) ¿Cuáles son la energía y la cantidad de movimiento de un protón relativas al punto común?

(*b*) Utilizar la transformación de Lorentz para encontrar la energía y cantidad de movimiento de uno de los protones en el sistema en reposo del otro protón o de él mismo. (En problemas de esta clase, es normalmente conveniente expresar la energía como un múltiplo de alguna masa en reposo.)

13. *Radiación de masa mediante un transmisor de radio.* ¿Cuál es la masa equivalente de la energía emitida por una antena que radie 1000 watts de energía radiante durante 24 horas? (1 watt $\equiv 10^7$ ergs/s.)

14. *Energía solar.* La *constante solar* es el flujo de energía solar por centímetro cuadrado y por segundo a la distancia de la Tierra al Sol. Midiéndola se ha encontrado que el valor de la constante es $1{,}4 \times 10^6$ ergs/s-cm^2.

(*a*) Demostrar que la generación de energía total del Sol es $\approx 4 \times 10^{33}$ erg/s.

(*b*) Demostrar que la generación de energía media por unidad de tiempo y por gramo de materia del Sol es ≈ 2 ergs/g-s $\approx 6 \times 10^7$ ergs/g-año.

(*c*) Demostrar que la energía equivalente a la combustión de 1 g de hidrógeno para producir He^4 es $\approx 6 \times 10^{18}$ ergs

(*d*) Demostrar que si la masa del Sol estuviese constituida por un tercio de hidrógeno y el proceso de combustión nuclear continuase sin variación, el Sol podría continuar radiando en la proporción presente durante 3×10^{10} años.

15. *Propulsión por radiación.* Un medio posible de propulsión en el espacio está constituido por una gran lámina metálica reflectora unida a un pequeño vehículo. Hacer una estimación razonable de las aceleraciones que podrían resultar para algún vehículo típico a la distancia de 1 U. A. del Sol.

16. *Cantidad de movimiento de un pulso laser.* Un pulso laser grande puede producir un pulso de luz con una energía de 2000 joules (1 joule $\equiv 10^7$ ergs).

(*a*) Demostrar que la cantidad de movimiento del pulso es del orden de 1 g-cm/s.

(*b*) Discutir cómo se podría detectar esta cantidad de movimiento. La duración del pulso puede ser un milisegundo (10^{-3} s).

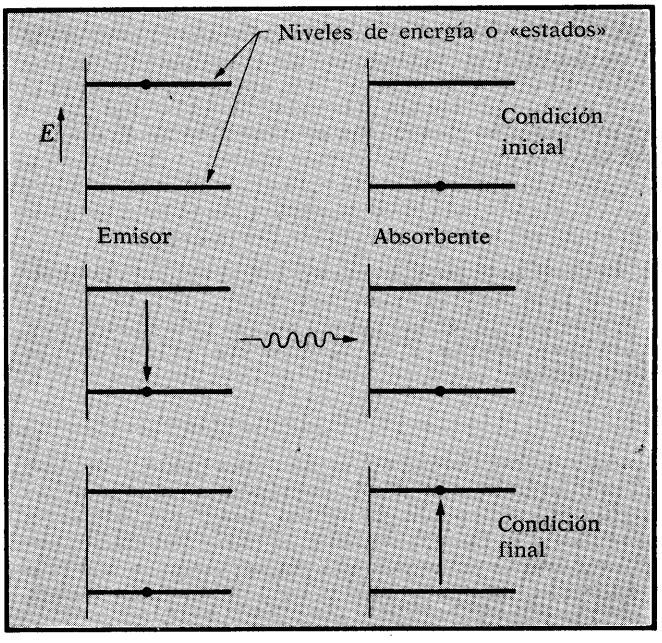


FIG. 12.10 Cambios de niveles de energía nuclear en la emisión y absorción de la radiación.

TEMA AVANZADO

Emisión sin retroceso de rayos gamma. Un núcleo en un estado energético excitado puede emitir un fotón (rayos γ) al realizar una transición al estado fundamental o no excitado del núcleo. El proceso inverso también puede ocurrir. Un núcleo en su estado fundamental puede absorber un fotón, dejando el núcleo en un estado excitado (véase fig. 12.10).

Supongamos que preparamos una fuente que contiene núcleos excitados. En el curso del tiempo la fuente emitirá fotones. Hagamos que los fotones choquen contra un absorbente que contiene núcleos semejantes en su estado fundamental. Estos núcleos absorberán los fotones incidentes y, a su vez, reemitirán fotones. El fenómeno de absorción y reemisión se denomina *fluorescencia nuclear.* Los fotones emitidos (tanto por la fuente como por el absorbente) tendrán un intervalo de energía de anchura aproximada Γ, como indica la fig. 12.11. Aquí Γ es la letra griega mayúscula gamma.

El núcleo de Fe^{57} es un buen ejemplo. Este se forma en un estado excitado como producto de la desintegración radiactiva del Co^{57}. El estado excitado del Fe^{57} emite un fotón de energía 14,4 keV, dejando el núcleo de Fe^{57} en un estado fundamental.

Consideremos un núcleo de Fe^{57} en un estado excitado y supongamos que el núcleo está inicialmente en reposo en el espacio libre. Cuando se emite el fotón, el núcleo retrocederá en la dirección opuesta al fotón.

(*a*) ¿Cuál es la frecuencia ν de un fotón de energía 14,4 keV? Recordemos que $E = h\nu$, en donde h es la constante de Planck y E la energía. *Sol.* $3{,}5 \times 10^{18}$ cps.

(*b*) La cantidad de movimiento del fotón es $h\nu/c$. ¿Cuál es la cantidad de movimiento de retroceso del núcleo? *Sol.* $7{,}7 \times 10^{-19}$ g-cm/s.

(*c*) Demostrar que la energía de retroceso R del núcleo es

$$R = \frac{E^2}{2Mc^2}$$

en donde M es la masa del núcleo y E la energía del fotón. Evaluar R en electrón-voltios para el Fe^{57}. *Sol.* 2×10^{-3} eV

Los niveles de energía nuclear no son muy agudos, pero tienen más anchura Γ de acuerdo con el principio de incertidumbre

$$\Gamma\tau \approx \frac{h}{2\pi}$$

siendo τ la vida media del estado. Para rayos γ de baja energía, como los del F^{57}, la dispersión energética de los niveles nucleares puede ser mucho menor que la energía de retroceso R. En esta situación el rayo γ emitido no puede normalmente ser reabsorbido por un núcleo en el estado fundamental, pues la frecuencia no es la adecuada (véanse figs. 12.11 y 12.12).

Un método de sintonizar las frecuencias del emisor y absorbente consiste en dar a la fuente una velocidad relativa respecto al absorbente.

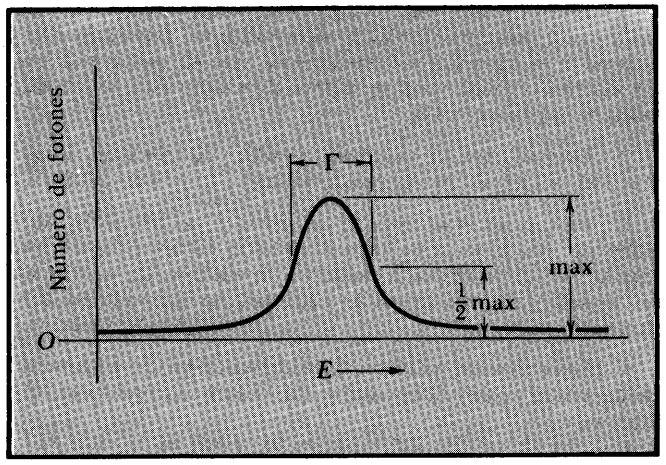


FIG. 12.11 Distribución de la energía de rayos gamma causada por la anchura del nivel de energía nuclear.

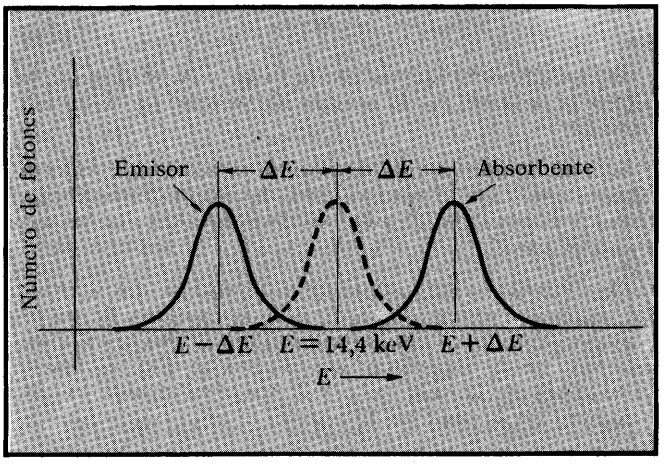


FIG. 12.12 Corrimientos de la distribución de energía de los rayos gamma en la emisión y absorción nuclear.

(*d*) ¿Cuál es la magnitud requerida de esta velocidad para el Fe^{57}?

(*e*) Mössbauer observó que en algunas de las emisiones de ciertos cristales, la cantidad de movimiento de retroceso procede del cristal como conjunto más que de los núcleos individuales. A la temperatura ambiente, alrededor del 70 % de los fotones procedentes de un cristal de Fe apenas tienen retroceso en este sentido. Calcular R para un fotón sin retroceso si la masa del cristal de Fe es 1 g.

Sol. 2×10^{-25} eV, que es completamente despreciable.

NOTA HISTÓRICA

Relación masa-energía. El primer trabajo de Einstein sobre la teoría de la relatividad restringida, titulado «Sobre

la electrodinámica de los cuerpos móviles», apareció en *Annalen der Physik* **17**, 891-921 (1905). Este volumen de *Annalen* contiene tres trabajos clásicos de Einstein: uno sobre la interpretación cuántica del efecto fotoeléctrico (págs. 132-148); otro sobre la teoría del movimiento browniano (págs. 549-560), y el de la teoría de la relatividad citado antes (muchos de los resultados publicados en este artículo habían sido anticipados por Larmor, Lorentz y otros). En el mismo año, un breve artículo de Einstein apareció en el Vol. 18, págs. 639-641, con el título «¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido de energía?» Parafraseamos aquí el razonamiento de Einstein:

Consideremos (como en el trabajo de Einstein sobre electrodinámica) un paquete o grupo de ondas planas de luz. Supongamos que el paquete posee la energía ϵ y se mueve en la dirección positiva de las x en el sistema S. Visto en el sistema S', que se mueve con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ relativa a S, el paquete de ondas tiene la energía

$$\epsilon' = \epsilon\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \beta = \frac{V}{c} \tag{12.31}$$

Este resultado se dedujo en el trabajo de Einstein sobre electrodinámica, sin referencia a la noción de fotón. Se deduce más directamente a partir de otro razonamiento. Observemos a partir del resultado (12.28) del efecto longitudinal Doppler que las frecuencias vistas por observadores en reposo en S' y S están relacionadas por

$$\nu' = \nu\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12.32}$$

De acuerdo con la representación cuántica un pulso luminoso puede considerarse como constituido por un número entero de cuantos de luz o *fotones*, cada uno de ellos de energía $h\nu$ (visto en S), siendo h la constante de Planck. Cuando vemos el pulso desde S', el número de fotones permanece invariable, pero la energía de un fotón se transforma en $h\nu'$. (Suponemos que el valor de h es el mismo en S' que en S.) Se deduce que la energía ϵ' del pulso luminoso es proporcional a ν'; de aquí que (12.31) se deduce de (12.32).

Supongamos ahora que existe un cuerpo estacionario en el sistema S y que su energía inicial es E_0 en S y E'_0 en S'. Supongamos que el cuerpo emite un pulso luminoso de energía $\frac{1}{2}\epsilon$ en el sentido positivo de las x y otro pulso análogo de energía $-\frac{1}{2}\epsilon$ en el sentido negativo. El cuerpo permanecerá en reposo en S. Designemos mediante E_1 y E'_1 la energía del cuerpo en S y S' después de la emisión de ambos pulsos. Entonces, por la conservación de la energía,

$$E_0 = E_1 + \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon \tag{12.33}$$

$$E'_0 = E'_1 + \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= E'_1 + \frac{\epsilon}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{12.34}$$

de las cuales tendremos, restando (12.34) de (12.33),

$$E_0 - E'_0 = E_1 - E'_1 + \epsilon - \frac{\epsilon}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{12.35}$$

La diferencia en energía $E'_0 - E_0$ debe ser precisamente la energía cinética inicial Ec_0 del cuerpo visto desde S', puesto que en S el cuerpo estaba inicialmente en reposo. Análogamente, $E'_1 - E_1$ es la energía cinética final Ec_1 vista desde S'. Así, pues, (12.35) puede escribirse como

$$Ec_0 - Ec_1 = \epsilon\left(\frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} - 1\right)$$

Vemos que la energía cinética del cuerpo disminuye como resultado de la emisión de luz. La cantidad de la disminución es independiente de las propiedades del cuerpo. Si $\beta \ll 1$,

$$Ec_0 - Ec_1 \approx \frac{1}{2}\epsilon\beta^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{c^2}V^2$$

de modo que la masa en reposo del cuerpo disminuye en

$$\Delta M = \frac{\epsilon}{c^2}$$

A partir de esta relación, Einstein obtenía las siguientes conclusiones:

«*Si un cuerpo emite energía ϵ en forma de radiación, su masa disminuye en ϵ/c^2.*» El hecho de que la energía extraída del cuerpo se transforme en energía de radiación evidentemente no constituye ninguna diferencia, de modo que se llega a la conclusión más general de que...

«La masa de un cuerpo es una medida de su contenido de energía; si la energía cambia en ϵ, la masa varía en el mismo sentido en $\epsilon/(9 \times 10^{20})$, midiéndose la energía en ergs y la masa en gramos.

«No es imposible que pueda comprobarse con éxito la teoría con cuerpos cuyo contenido de energía sea variable en alto grado (por ejemplo, con sales de radio).

«Si la teoría corresponde a los hechos, la radiación transporta inercia entre los cuerpos emisores y absorbentes.»

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

M. Born, *Einstein's Theory of Relativity*, cap. 6, secs. 7-9 (reimpresión) Dover Publications, Inc., Nueva York, 1962.

A. P. French, *Relatividad especial*, cap. 7. Ed. Reverté, 1974.

C. Kacser, *Introduction to the Special Theory of Relativity*, caps. 5-7, Co-Op Paperback, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N. J., 1967.

Contenido

ACELERACIÓN DE UNA PARTÍCULA CARGADA POR UN CAMPO ELÉCTRICO LONGITUDINAL CONSTANTE
ACELERACIÓN MEDIANTE UN CAMPO ELÉCTRICO TRANSVERSAL
PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO
SISTEMA CENTRO DE MASAS Y ENERGÍA UMBRAL
Ejemplo. Energía umbral para la fotoproducción de mesones π^0
Ejemplo. Energía disponible a partir de una partícula móvil
Ejemplo. Umbral del antiprotón
Ejemplo. Efecto Compton
Problemas
Nota histórica. El sincrotrón
Lecturas suplementarias

13

Problemas de dinámica relativista

En el Cap. 3 discutimos cierto número de problemas que se referían al movimiento relativista de las partículas en campos eléctricos y magnéticos. En los Caps. 3 y 4 y de nuevo en el Cap. 6, estudiamos los choques elásticos e inelásticos de dos partículas no relativistas. Ahora extenderemos varias de las soluciones anteriores a la región relativista. Con frecuencia las soluciones no presentan una dificultad especial y algunas de ellas son de la mayor importancia en los mundos de la física de las partículas de alta energía y de la astrofísica.

Es un hecho bien conocido que en las colisiones de partículas de alta energía pueden crearse por conversión de energía en materia nuevas partículas, no presentes antes del choque. En el sistema de centro de masas, toda la energía de las partículas incidentes puede producir nuevas partículas y posibles estados de energía interna de las partículas. Para toda reacción que conduzca a un conjunto de nuevas partículas o estados excitados hay una energía umbral capaz de producirla. Si la reacción supone energías relativistas, la fracción de energía del laboratorio representada por esta energía umbral del centro de masas es menor que si la situación fuera no relativista. Esta es una consideración importante de los experimentos de física de partículas de alta energía, de la cual daremos un ejemplo más adelante.

El hecho de que la cantidad de movimiento de una partícula acelerada relativista pueda aumentar indefinidamente, aun cuando la velocidad varía un poco cuando se acerca a la de la luz, constituye la base de los grandes aceleradores y del análisis de la cantidad de movimiento de partículas de alta energía mediante un campo magnético deflector. Los métodos de desviación magnética se emplean ampliamente en la investigación de rayos cósmicos y en otros trabajos con partículas de elevada energía.

Estudiaremos primero la desviación de una partícula relativista por un campo eléctrico, con objeto de familiarizarnos con el empleo de ciertas operaciones normales.

ACELERACIÓN DE UNA PARTÍCULA CARGADA POR UN CAMPO ELÉCTRICO LONGITUDINAL CONSTANTE

La ecuación del movimiento de una partícula de carga q y de masa en reposo M en un campo eléctrico constante y uniforme ** $\varepsilon\hat{\mathbf{x}}$ es

$$\dot{p}\hat{\mathbf{x}} = q\mathcal{E}\hat{\mathbf{x}} \tag{13.1}$$

(*) El alumno que desee comprobar (13.1) puede recurrir a la ecuación (12.30). Una discusión detallada se verá en el Vol. 2.

(**) Aquí designaremos la intensidad del campo eléctrico por ε, para evitar confusiones con la energía E.

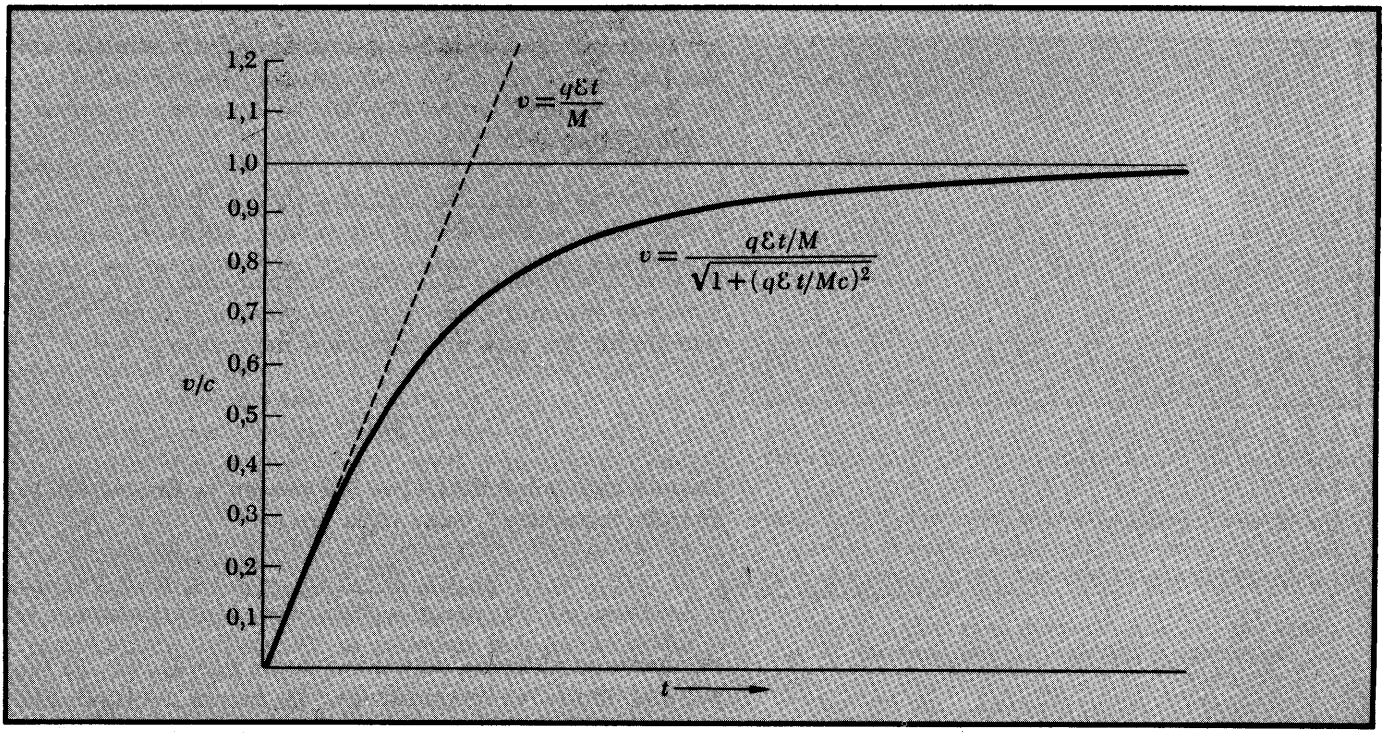


FIG. 13.1 La velocidad v de una carga q de masa en reposo M, acelerada desde el reposo por un campo eléctrico uniforme $\mathcal{E}$, está representada en función del tiempo. La velocidad v tiende al límite c para $t \gg 0$. La línea de trazos representa la velocidad de la carga que predice la mecánica no relativista.

o, con $\mathbf{p} = M\mathbf{v}/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$M\frac{d}{dt}\frac{v}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = q\mathcal{E} \tag{13.2}$$

si suponemos $v_y = v_z = 0$ como se requiere en el caso de aceleración en la direción x partiendo del reposo. Integrando (13.2) respecto al tiempo vemos directamente que

$$p = M\frac{v}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = q\mathcal{E}t$$

con $v(0) = 0$. Después de elevar ambos miembros al cuadrado y reordenar, teniendo en cuenta (12.11) y (12.18), resulta

$$v^2 = \frac{(q\mathcal{E}t/Mc)^2}{1 + (q\mathcal{E}t/Mc)^2}c^2 \tag{13.3}$$

Para tiempos cortos * $t < Mc/q\varepsilon$, el denominador en (13.3) puede reemplazarse por la unidad y tendremos

$$v^2 \approx \left(\frac{q\mathcal{E}}{M}t\right)^2 = \frac{p^2}{M^2}$$

(*) Con $\varepsilon = 1$ statvoltio/cm, tenemos para un electrón

$$\frac{mc}{e\mathcal{E}} \approx \frac{(10^{-27})(3 \times 10^{10})}{5 \times 10^{-10}} \approx 10^{-7}\,\text{s}$$

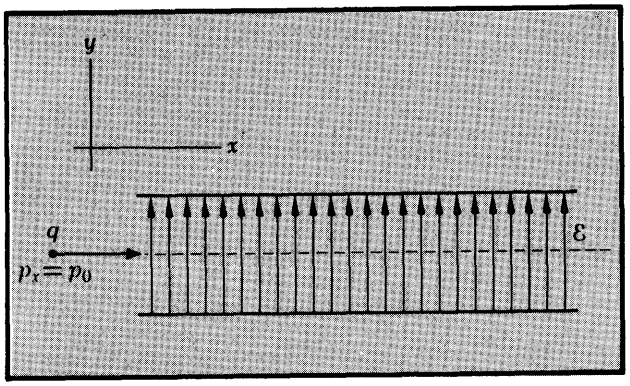


FIG. 13.2 Supongamos que una carga q con una cantidad de movimiento inicial p_x entra en un campo transversal $\mathcal{E}$

exactamente igual que en la aproximación no relativista del Cap. 3.

Para tiempos largos $t \gg Mc/q\varepsilon$, tenemos la aproximación relativista

$$v^2 = \frac{1}{(Mc/q\mathcal{E}t)^2 + 1} c^2 \approx \left[1 - \left(\frac{Mc}{q\mathcal{E}t}\right)^2\right] c^2$$

en donde $Mc/q\varepsilon t$ es una magnitud pequeña. Esta última ecuación muestra cómo v se aproxima a c como velocidad límite. En esta aproximación utilizando $\beta \equiv v/c$

$$\frac{1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{q\mathcal{E}t}{Mc}$$

Usando este valor de $1/(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} = \gamma$ en la Ec. (12.10), la energía relativista * viene dada por

$$E = \frac{Mc^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \approx q\mathcal{E}ct$$

de nuevo en el límite de tiempo largo, $t \gg Mc/q\varepsilon$. El resultado límite es precisamente la fuerza multiplicada por la distancia recorrida en el tiempo t a velocidad c. En el mismo límite, la cantidad de movimiento es

$$p \approx q\mathcal{E}t \approx \frac{Mc}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{E}{c}$$

Obsérvese la característica relativista especial de que la cantidad de movimiento y la energía pueden seguir aumentando, después que la velocidad ha alcanzado para todos sus propósitos prácticos el nivel máximo y que la energía es proporcional a p y no a p^2.

El desplazamiento x se encuentra a partir de la raíz cuadrada de la Ec. (13.3) escribiendo dx/dt para v:

$$dx = \frac{(q\mathcal{E}/Mc)t}{\sqrt{1 + (q^2\mathcal{E}^2t^2/M^2c^2)}} c\,dt \qquad (13.4)$$

Integrando entre 0 y t obtenemos el desplazamiento

$$x = \frac{Mc^2}{q\mathcal{E}} \left\{ \left[1 + \left(\frac{q\mathcal{E}t}{Mc}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \qquad (13.5)$$

Hemos supuesto que $x = 0$ y $v = 0$ para $t = 0$. Obsérvese que si $q\varepsilon t/Mc \gg 1$, $x \approx ct$, mientras que si $q\varepsilon t/Mc \ll 1$, $x \approx \frac{1}{2}(q\varepsilon/M)t^2$, que es el caso no relativista.

(*) La expresión general para E se obtiene de la Ec. (12.11)

$$E^2 = M^2c^4 + q^2\mathcal{E}^2t^2c^2$$

ACELERACIÓN MEDIANTE UN CAMPO ELÉCTRICO TRANSVERSAL

Consideremos una partícula cargada que se mueve a lo largo del eje x con una cantidad de movimiento elevada p_0 y entra en una región de longitud L en la que existe un campo eléctrico transversal $\mathcal{E}\hat{y}$. Encontrar el ángulo en que la partícula se desvía por el campo eléctrico (véase fig. 13.2).

Las ecuaciones del movimiento son

$$\frac{dp_x}{dt} = 0 \qquad \frac{dp_y}{dt} = q\mathcal{E}$$

de donde

$$p_x = p_0 \qquad p_y = q\mathcal{E}t$$

como se indica en la fig. 13.3. Deseamos determinar la velocidad **v**. Si podemos hallar la energía E, entonces se puede encontrar la velocidad a partir de la cantidad de movimiento utilizando la relación $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/E$ deducida en la Ec. (12.8).

La energía viene dada por

$$\begin{aligned} E^2 &= M^2c^4 + p^2c^2 = M^2c^4 + {p_0}^2c^2 + (q\mathcal{E}tc)^2 \\ &= {E_0}^2 + (q\mathcal{E}tc)^2 \end{aligned} \tag{13.6}$$

en donde E_0 es la energía inicial. Por lo tanto, a partir de (13.6) y de la relación velocidad-cantidad de movimiento, tenemos

$$v_x = \frac{p_0c^2}{[{E_0}^2 + (q\mathcal{E}tc)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{13.7}$$

$$v_y = \frac{q\mathcal{E}tc^2}{[{E_0}^2 + (q\mathcal{E}tc)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{13.8}$$

Obsérvese que v_x disminuye cuando t aumenta (véase figura 13.4). Vemos también que v_y es siempre menor que el valor no relativista $q\mathcal{E}t/M$. En el instante t, el ángulo θ que la trayectoria forma con el eje x viene dado por

$$\operatorname{tg}\theta(t) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{q\mathcal{E}tc^2}{p_0c^2} = \frac{q\mathcal{E}t}{p_0}$$

El tiempo t_L necesario para recorrer la distancia L se encuentra integrando la Ec. (13.7)

$$\int_0^L dx = p_0c^2 \int_0^{t_L} \frac{dt}{[{E_0}^2 + (q\mathcal{E}tc)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

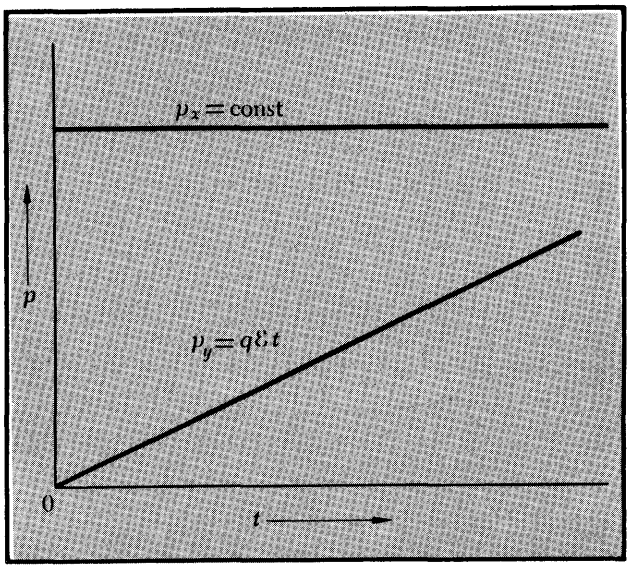


FIG. 13.3 La fuerza en la dirección y es $q\mathcal{E}$; por tanto, $p_y = q\mathcal{E}t$, mientras que p_x permanece constante. La energía

$$E = c\sqrt{(p_x^2 + p_y^2) + M^2c^2}$$

aumenta.

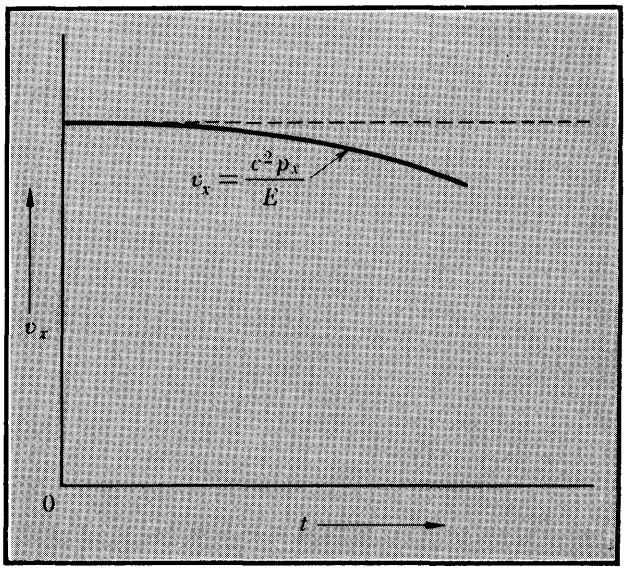


FIG. 13.4 Como $v_x = c^2p_x/E$, v_x realmente *disminuye* cuando la partícula se acelera en la dirección y. La mecánica no relativista predeciría naturalmente que $v_x = \text{const}$.

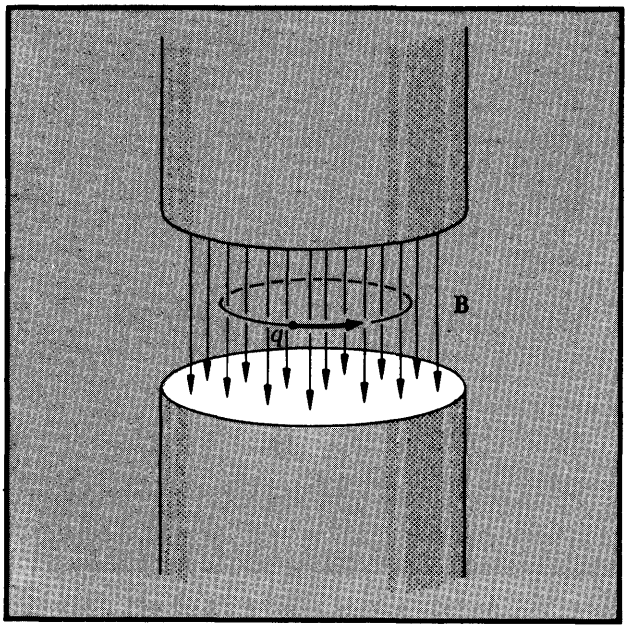


FIG. 13.5 Una carga con velocidad **v** perpendicular a un campo magnético uniforme describe un movimiento circular, con radio $\rho = pc/qB$.

o según Dwight 728.1,

$$L = \frac{p_0 c}{q\mathcal{E}} \operatorname{senh}^{-1} \frac{q\mathcal{E} t_L c}{E_0}$$

de modo que

$$t_L = \frac{E_0}{q\mathcal{E}c} \operatorname{senh} \frac{q\mathcal{E}L}{p_0 c} \; *$$

PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Consideremos un problema práctico importante que se refiere al movimiento de una partícula de carga q en un campo magnético constante y uniforme **B**. La ecuación del movimiento es, según la Ec. (3.23):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{13.9}$$

Lo mismo que en el problema no relativista (Cap. 3) tenemos $d^2p/dt^2 = 0$ porque

$$\frac{d}{dt} p^2 = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2\frac{q}{c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

pero **p** es siempre paralelo a **v**, de modo que el producto mixto es cero. Así, pues, el módulo de la cantidad de movimiento y, por consiguiente, el de la velocidad de la partícula, no varían por la acción de un campo magnético constante. Pero si únicamente se altera la dirección, entonces el factor

$$\frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{13.10}$$

que interviene en la definición de **p**, es constante.

La ecuación del movimiento (13.9) puede escribirse ahora como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{13.11}$$

Debido a la constancia de (13.10), esta ecuación tiene soluciones en las que la partícula se mueve en una circunferencia en un plano perpendicular a **B** (véase Cap. 3). Llamemos ρ a su radio y ω_c la frecuencia angular del movimiento para el caso en que **v** es perpendicular a **B**

(*) senh $\theta = (e^{\theta} - e^{-\theta})/2$; así, para pequeños valores de θ, senh $\theta \approx \theta$, mientras que para valores grandes de θ, senh $\theta \approx e^{\theta}/e$.

(fig. 13.5). Sustituyendo en (13.11) $d\mathbf{v}/dt$ por la aceleración centrífuga $\omega_c^2\rho$ y v por $\omega_c\rho$, tendremos

$$\frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}\omega_c^2\rho = \frac{q}{c}\omega_c\rho B$$

de donde

$$\boxed{\omega_c = \frac{qB(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}{Mc}} \qquad (13.12)$$

Como vemos, la frecuencia del movimiento es inferior para partículas rápidas que para las más lentas. Así, pues, un ciclotrón puede utilizarse para acelerar partículas hasta energías relativistas únicamente si la frecuencia del campo acelerador de radio frecuencia (o la intensidad del campo magnético) se modula para permanecer sincronizada con (13.12) cuando aumenta la energía de las partículas. Esta relación se representa en la figura 13.6. Para partículas no relativistas puede despreciarse la dependencia de la frecuencia con la velocidad, como vimos en el Cap. 3.

Los valores de ω_c predichos por (13.12) se han confirmado experimentalmente durante el funcionamiento de los aceleradores de alta energía. Esta relación ha sido confirmada para electrones acelerados en un sincrotrón en el caso en que $1/(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \approx 12\,000$, es decir, cuando la masa aparente de la partícula es 12 000 veces la masa en reposo. Es interesante conocer lo que esto significa en función de $c - v$ (exceso de la velocidad de la luz sobre la de la partícula). Tenemos

$$(1 - \beta^2) = (1 + \beta)(1 - \beta)$$
$$\approx 2(1 - \beta) \approx (12\,000)^{-2} \approx 7{,}0 \times 10^{-9} \qquad (13.13)$$

Obsérvese que hemos puesto $(1 + \beta) \approx 2$. A partir de la Ec. (13.13) se tiene

$$1 - \beta = \frac{c - v}{c} \approx 3{,}5 \times 10^{-9} \qquad c - v \approx 100 \text{ cm/s}$$

En el acelerador de protones de Serpukhov (Rusia) los protones se inyectan a una energía de 100 MeV en la órbita circular de un campo magnético y se aceleran a unos 80 000 MeV. Esto corresponde a un cambio en β de 0,43 a $1 - 6{,}8 \times 10^{-5}$.

Haciendo uso de (13.12) el radio de giro ρ de una partícula relativista en un campo magnético viene dado por

$$\rho = \frac{v}{\omega_c} = \frac{cMv}{qB(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

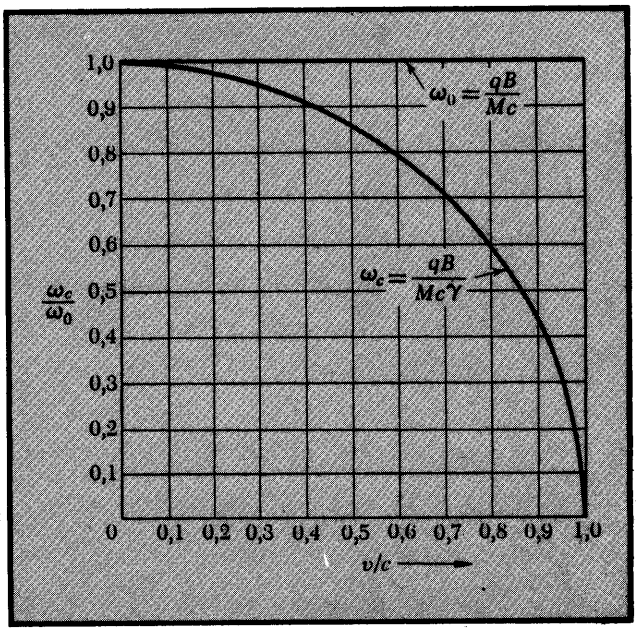


FIG. 13.6 La frecuencia ciclotrón ω_c para el movimiento circular de una carga q, con masa en reposo M, en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme **B**, se ha representado en función de la razón de velocidades v/c. La frecuencia ciclotrón no relativista ω_0 está representada por la línea horizontal.

Pero el segundo miembro contiene la cantidad de movimiento p, de modo que

$$\boxed{B\rho = \frac{cp}{q}}$$

o en unidades SI

$$B\rho = \frac{p}{q}$$

Por lo tanto, el radio ρ del círculo descrito por una partícula cargada en un campo magnético es una medición directa de la cantidad de movimiento relativista. Esta relación es el método simple más importante para medir la cantidad de movimiento de partículas relativistas cargadas.

SISTEMA DEL CENTRO DE MASAS Y ENERGÍA UMBRAL

La conservación de la energía impone una limitación general a las reacciones nucleares o sucesos que pueden tener lugar en el choque de dos partículas. Por ejemplo, un fotón de alta energía (rayo γ) puede producir un par electrón-positrón de acuerdo con la reacción

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

únicamente si la energía del rayo γ excede a la energía equivalente a las masas en reposo del electrón y positrón. Así, pues, la conservación de la energía por sí sola determina que la energía umbral o mínima para la producción del par electrón-positrón es

$$E_\gamma = 2mc^2 \approx 1{,}02 \times 10^6 \text{ eV}$$

Recordemos del Cap. 9 que la masa en reposo del positrón es igual a la masa en reposo del electrón.

Esta reacción, sin embargo, es imposible en el espacio libre a cualquier energía, porque la cantidad de movimiento no puede conservarse. Vimos en el Cap. 12 que la cantidad de movimiento del fotón es $p_\gamma = E_\gamma/c$. Para observar la reacción escojamos el sistema de referencia en el que el centro de masas del par electrón-positrón está en reposo. En él, la suma de las cantidades de movimiento del positrón y electrón es cero:

$$\mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+} = 0$$

Pero en este sistema la cantidad de movimiento del fotón incidente no es cero, porque no existe *ningún* sistema de referencia en el que pueda hacerse nula la cantidad de

movimiento de un fotón *. Por lo tanto, en el sistema centro de masas

$$\mathbf{p}_\gamma \neq \mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+} = 0$$

y la reacción $\gamma \rightarrowtail e^+ + e^-$ no es correcta (no se verifica) porque no se conserva la cantidad de movimiento. Si no puede producirse en un sistema de referencia determinado no tendrá lugar en ningún sistema.

La reacción puede verificarse en la vecindad de otra partícula, tal como el núcleo de un átomo, porque entonces éste puede absorber la variación de la cantidad de movimiento. La absorbe actuando con su campo coulombiano sobre las partículas cargadas. Se puede tener

$$\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_{\text{nuc}} = \mathbf{p}'_{\text{nuc}} + \mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+}$$

El núcleo sufre un cambio de cantidad de movimiento debido a la reacción, pero por lo demás el núcleo resulta sin modificar y actúa únicamente como un catalizador de una clase muy sencilla. La cantidad de movimiento nuclear inicial puede ser cero.

Una partícula pesada o núcleo es un buen vehículo para absorber el exceso de cantidad de movimiento sin absorber mucha energía. Puede verse esto a partir de la fórmula de la energía cinética no relativista

$$\text{Ec} = \tfrac{1}{2}Mv^2 = \frac{p^2}{2M}$$

Cuanto mayor es la masa M, más pequeña es la energía cinética asociada a una cantidad de movimiento determinada.

EJEMPLO

Energía umbral para la fotoproducción de los mesones π^0. La masa del mesón π^0 es 135 MeV. ¿Cuál será la energía mínima de los rayos γ que pueden producir en el laboratorio la reacción

$$\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$$

cuando el protón inicial está en reposo?

Es instructivo considerar este problema desde dos puntos de vista diferentes: en coordenadas de laboratorio y en coordenadas centro de masas.

(1) En el laboratorio (fig. 13.7) un rayo γ de alta energía choca contra un protón en reposo y el resultado umbral es un protón y un mesón π^0 que se mueven juntos a la velocidad βc con la misma cantidad de movimiento que el rayo γ original. Escriba-

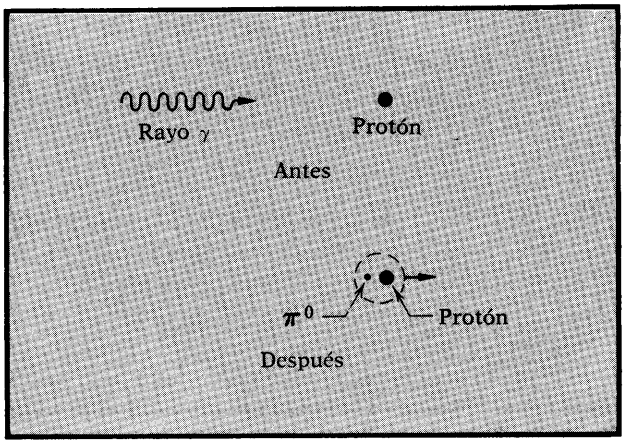


FIG. 13.7 En el laboratorio, un rayo γ choca contra un protón en reposo para dar un protón y un mesón π^0 que deben viajar juntos en la dirección del rayo γ para conservar la cantidad de movimiento umbral.

(*) Se cambia la frecuencia de un fotón variando los sistemas de referencia, pero no podemos hacerlo desaparecer ni llevarlo al reposo por este procedimiento.

mos las ecuaciones de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. (Obsérvese que γ en las ecuaciones siguientes es $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ y no el símbolo de un fotón γ como en la discusión inmediatamente anterior.)

Energía: $$h\nu_{\text{lab}} + M_p c^2 = \frac{(M_p + M_\pi)c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(M_p + M_\pi)c^2 \tag{13.14}$$

Cantidad de movimiento: $$\frac{h\nu_{\text{lab}}}{c} = \frac{(M_p + M_\pi)\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(M_p + M_\pi)\beta c$$

Podemos eliminar $h\nu_{\text{lab}}$ y resolver para β y, por tanto, γ, del modo siguiente:

$$h\nu_{\text{lab}} = \gamma(M_p + M_\pi)\beta c^2$$
$$\gamma(M_p + M_\pi)\beta c^2 + M_p c^2 = \gamma(M_p + M_\pi)c^2$$

Sea $M_\pi/M_p = \alpha$, con lo que resulta

$$1 + \gamma\beta(1 + \alpha) = \gamma(1 + \alpha)$$

o

$$\sqrt{1 - \beta^2} = (1 + \alpha)(1 - \beta)$$

y, por tanto,

$$\beta = \frac{\alpha(2 + \alpha)}{2 + 2\alpha + \alpha^2} \tag{13.15}$$

y

$$\gamma = \frac{2 + 2\alpha + \alpha^2}{2(1 + \alpha)}$$

Resolviendo ahora para $h\nu_{\text{lab}}$

$$h\nu_{\text{lab}} = \frac{M_p c^2 \alpha(1 + \alpha)(2 + \alpha)}{2(1 + \alpha)} = \frac{M_\pi c^2}{2}(2 + \alpha) \tag{13.16}$$

o sea

$$h\nu_{\text{lab}} = 144{,}7 \text{ MeV}$$

en donde hemos utilizado

$$\alpha = \frac{135}{938} = 0{,}144$$

(2) En el sistema centro de masas (fig. 13.8) puede escribirse

Energía:
$$h\nu_{\text{c.m.}} + \gamma M_p c^2 = (M_p + M_\pi)c^2$$

y

Cantidad de movimiento: $$\frac{h\nu_{\text{c.m.}}}{c} = \gamma M_p \beta c$$

en donde β y γ se refieren ahora al movimiento inicial del protón en el sistema centro de masas. Utilizando la misma notación de antes y eliminando $h\nu_{\text{c.m.}}$ resulta

$$\gamma(\beta + 1) = 1 + \alpha \qquad \frac{\beta + 1}{\alpha + 1} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

y

$$\beta = \frac{\alpha(2 + \alpha)}{2 + 2\alpha + \alpha^2}$$

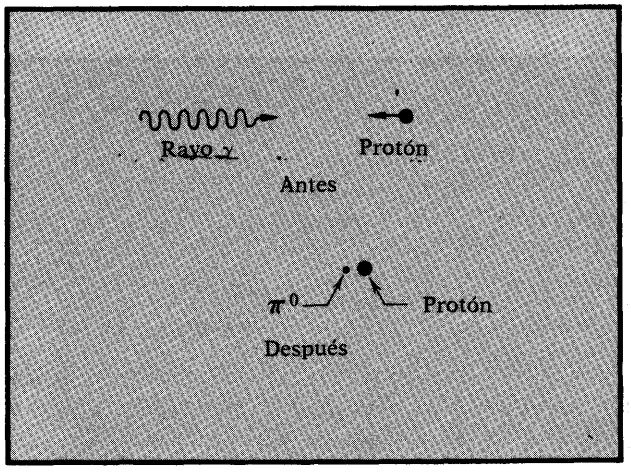


FIG. 13.8 Sistema centro de masas. Un rayo γ y un protón se mueven acercándose el uno al otro, con iguales cantidades de movimiento. Después de la interacción el protón y el mesón π^0 están en reposo si el suceso tiene lugar en el umbral.

que es la misma β obtenida en la Ec. (13.15) anterior, resultado lógico, ya que en el sistema del centro de masas el protón y el mesón π^0 están en reposo en el estado final. Así, encontramos

$$h\nu_{\text{c.m.}} = M_\pi c^2 \frac{2 + \alpha}{2(1 + \alpha)} = 126{,}5 \text{ MeV} \qquad (13.17)$$

Podemos también determinar $h\nu_{\text{c.m.}}$ a partir de $h\nu_{\text{lab}}$ mediante la fórmula del efecto Doppler [Ec. (12.28)]:

$$h\nu_{\text{c.m.}} = h\nu_{\text{lab}} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \frac{M_\pi c^2}{2}(2 + \alpha)\frac{1}{(1 + \alpha)}$$

que concuerda con el valor de la Ec. (13.17).

Una forma más simple de resolver este problema es recordar que $E^2 - p^2c^2$ es una invariante. Especifiquemos la situación antes y después de la reacción en el laboratorio:

$$(h\nu_{\text{lab}} + M_p c^2)^2 - \left(\frac{h\nu_{\text{lab}} c}{c}\right)^2 = [\gamma(M_p + M_\pi)c^2]^2 - [\beta\gamma(M_p + M_\pi)c^2]^2 \qquad (13.18)$$

de donde resulta

$$2h\nu_{\text{lab}} M_p c^2 + M_p{}^2 c^4 = (M_p + M_\pi)^2 c^4$$

siendo

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

Por tanto

$$h\nu_{\text{lab}} = \frac{M_\pi{}^2 c^2}{2M_p} + \frac{M_\pi M_p c^2}{M_p} = M_\pi c^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

que concuerda con el valor anterior de la Ec. (13.16).

En los sucesos de colisión, en los que se crean nuevas partículas, el requerimiento de la conservación de la cantidad de movimiento hace normalmente imposible convertir toda la energía cinética inicial en el sistema del laboratorio en masa en reposo de las nuevas partículas formadas en la colisión. Si existe una cantidad de movimiento neta en el estado inicial antes del choque, debe existir una cantidad de movimiento igual en el estado final después del choque. Por tanto, las partículas restantes después del choque no estarán en reposo; parte de la energía cinética inicial se transfiere como energía cinética de las partículas finales.

La única situación en la cual *toda* la energía cinética inicial puede disponerse en la reacción tiene lugar cuando la cantidad de movimiento del estado inicial es cero. La cantidad de movimiento puede siempre aparecer como nula considerada la colisión desde un sistema apropiado de referencia, el sistema centro de masas.

EJEMPLO

Energía disponible a partir de una partícula móvil. ¿De cuánta energía se puede disponer en el choque de un protón móvil contra otro en reposo?

Supongamos primero que la energía cinética del protón incidente es mucho menor que M_pc^2, de tal modo que el choque puede considerarse como no relativista. Si el protón incidente tiene una velocidad **v** en el sistema de referencia del laboratorio, su energía cinética es

$$Ec_{\text{lab}} = \tfrac{1}{2} M_p v^2 \tag{13.19}$$

En el sistema de referencia del centro de masas un protón tiene velocidad **1/2v** y el otro **—1/2v**. En dicho sistema toda la energía cinética está disponible para la producción de ulteriores partículas; esta energía cinética es

$$Ec_{\text{c.m.}} = \tfrac{1}{2}M_p(\tfrac{1}{2}v)^2 + \tfrac{1}{2}M_p(\tfrac{1}{2}v)^2 = \tfrac{1}{4}M_p v^2 \tag{13.20}$$

Según las Ecs. (13.19) y (13.20) tenemos el resultado no relativista

$$\frac{Ec_{\text{c.m.}}}{Ec_{\text{lab}}} = \frac{1}{2}$$

así, pues, podemos disponer de la mitad de la energía en el sistema del laboratorio. Si aceleramos un protón a 50 MeV, únicamente 25 MeV pueden utilizarse para crear nuevas partículas en el choque con otro protón en reposo.

El rendimiento es inferior en la región relativista. Resulta sencillo y útil llevar a cabo su cálculo.

Podemos relacionar la energía relativista total en el sistema del laboratorio a la total en el sistema del centro de masas utilizando la propiedad de la invariancia (12.11) como se hizo en (13.18), aplicada al sistema de dos protones

$$\underbrace{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2c^2}_{\text{laboratorio}} = \underbrace{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2c^2}_{\text{centro de masas}} \tag{13.21}$$

Por definición del sistema de centro de masas $(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)_{\text{c.m.}} = 0$. Si el protón 2 está en reposo en el sistema del laboratorio, $E_{2\,(\text{lab})} = M_pc^2$ y $\mathbf{p}_{2\,(\text{lab})} = 0$. Utilizando

$$E_{1,\text{lab}}^2 - p_{1,\text{lab}}^2c^2 = M_p^2c^4$$

vemos que la Ec. (13.21) se reduce a

$$2E_{1,\text{lab}}M_pc^2 + 2M_p^2c^4 = E^2_{\text{tot,c.m.}} \tag{13.22}$$

en donde $E_{\text{tot (c.m.)}}$ designa la suma $E_1 + E_2$ en el sistema del centro de masas. Si a su vez llamamos $E_{\text{tot (lab)}}$ a la energía total $E_1 + M_pc^2$ en el sistema del laboratorio, tendremos (13.22)

$$2E_{\text{tot,lab}}M_pc^2 = E^2_{\text{tot,c.m.}}$$

o sea,

$$\boxed{\frac{E_{\text{tot,c.m.}}}{E_{\text{tot,lab}}} = \frac{2M_pc^2}{E_{\text{tot,c.m.}}}} \tag{13.23}$$

Esta es una medida del «rendimiento». Para conseguir una energía total de 20 GeV en el sistema del centro de masas, como $M_pc^2 \approx 1$ GeV, necesitamos

$$E_{\text{tot,lab}} = \frac{E^2_{\text{tot,c.m.}}}{2M_pc^2} \approx \frac{400}{2} \approx 200 \text{ GeV}$$

En este caso alrededor de 20 GeV de la energía cinética del protón de 200 GeV en el sistema del laboratorio está disponible para crear partículas nuevas. Debido a este bajo rendimiento, en el caso de colisión de una partícula relativista con una partícula en reposo se han diseñado nuevos aceleradores de electrones, en los cuales dos haces de estas partículas chocan con cantidades de movimiento iguales y opuestas; en el CERN * se ha construido un nuevo acelerador de protones de 28 GeV para experimentos con estas partículas.

EJEMPLO

Umbral del antiprotón. La energía del **Bevatrón** de Berkeley se proyectó de modo que hiciera posible la producción de antiprotones (designados por $\bar{p}$) bombardeando protones estacionarios con otros de elevada energía. La reacción puede escribirse

$$p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p})$$

es decir, se produce un par protón-antiprotón. Así se conserva la carga, puesto que el antiprotón lleva carga $-e$. ¿Cuál es la energía umbral para la reacción?

La energía en reposo de un par protón-antiprotón es $2M_pc^2$, puesto que la masa en reposo del antiprotón es igual a la masa en reposo del protón. En el sistema del centro de masas la energía cinética debe ser por lo menos $2M_pc^2$, lo cual equivale a M_pc^2 para cada uno de los dos protones iniciales. A esto debe añadirse la energía en reposo M_pc^2 para cada uno de los protones iniciales, de modo que la energía total mínima en el sistema del centro de masas es

$$E_{\text{tot,c.m.}} = 4M_pc^2$$

En el sistema del laboratorio la energía correspondiente es, según la Ec. (13.23),

$$E_{\text{tot,lab}} = \frac{E^2_{\text{tot,c.m.}}}{2M_pc^2} = \frac{16}{2}M_pc^2$$

de la cual $2M_pc^2$ es energía en reposo de los dos protones y $6M_pc^2$ es la energía cinética. Así, pues, la energía umbral es

$$6M_pc^2 = 6\,(0{,}938 \text{ GeV}) \approx 5{,}63 \text{ GeV}$$

Si el protón incidente choca con otro ligado a un núcleo, la energía umbral es inferior porque el protón blanco está ligado. ¿Puede ver el lector por qué? La energía umbral observada para la producción de un antiprotón cuando los protones chocan con

(*) *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*, una institución de investigación en Ginebra, Suiza, de la que son miembros numerosas naciones europeas.

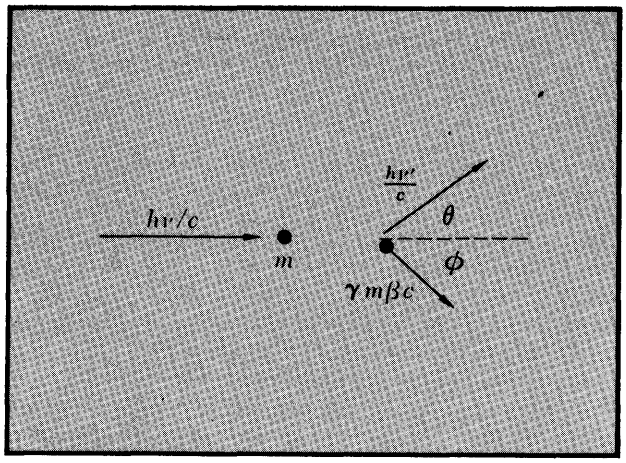


FIG. 13.9 Efecto Compton. Cantidades de movimiento antes y después del choque.

núcleos es 4,4 MeV, que es 1,2 GeV más bajo que el calculado para protones blanco libres en reposo. Este umbral es la energía cinética mínima que necesita el protón incidente, observado desde el sistema del laboratorio, para que la reacción progrese.

EJEMPLO

Efecto Compton. El efecto Compton es una de las manifestaciones más convincentes de la naturaleza corpuscular de las ondas electromagnéticas. Admitiremos que los alumnos están familiarizados con el carácter ondulatorio de la luz, por ejemplo, con la determinación de la longitud de onda por efecto de interferencia. En 1922, Compton (véase Vol. 4 para una discusión completa de este efecto) demostró que cuando las ondas electromagnéticas en la región de la longitud de onda de los rayos X ($\sim 10^{-8}$ cm) chocan con los electrones libres, se comportan como si fueran partículas en los choques elásticos. Ya hemos visto que la energía característica o energía cuántica relativa a las ondas electromagnéticas de frecuencia ν es $h\nu$, y la cantidad de movimiento asociada es $h\nu/c$. La fig. 13.9 muestra las cantidades de movimiento en un choque con un electrón, en el cual el rayo X se difunde bajo un ángulo θ con la frecuencia reducida ν'.

Cantidad de movimiento longitudinal:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + \gamma m\beta c\cos\phi$$

Cantidad de movimiento transversal:

$$\frac{h\nu'}{c}\operatorname{sen}\theta = \gamma m\beta c\operatorname{sen}\phi$$

Energía:

$$mc^2 + h\nu = h\nu' + \gamma mc^2$$

Determinar ν' en función de θ eliminando β y ϕ. Sea

$$\frac{h\nu}{mc^2} = \alpha \qquad \frac{h\nu'}{mc^2} = \alpha'$$

$$\alpha = \alpha'\cos\theta + \gamma\beta\cos\phi$$
$$\alpha'\operatorname{sen}\theta = \gamma\beta\operatorname{sen}\phi$$

Después de algunas operaciones algebraicas, ligeramente complicadas, resulta

$$\alpha - \alpha' = \alpha\alpha'(1 - \cos\theta)$$
$$\frac{h\nu}{mc^2} - \frac{h\nu'}{mc^2} = \frac{h^2\nu\nu'}{m^2c^4}(1 - \cos\theta)$$
$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

Este mismo resultado se obtiene resolviendo el problema en el sistema centro de masas y luego transformándolo en el sistema de laboratorio, pero esto lleva consigo más cálculos.

Un desarrollo reciente que incluye el efecto Compton es el uso de los aceleradores de electrones de alta energía y láseres que den lugar a rayos γ de alta energía por el efecto Compton inverso. Consideremos la colisión indicada en la fig. 13.10. Para

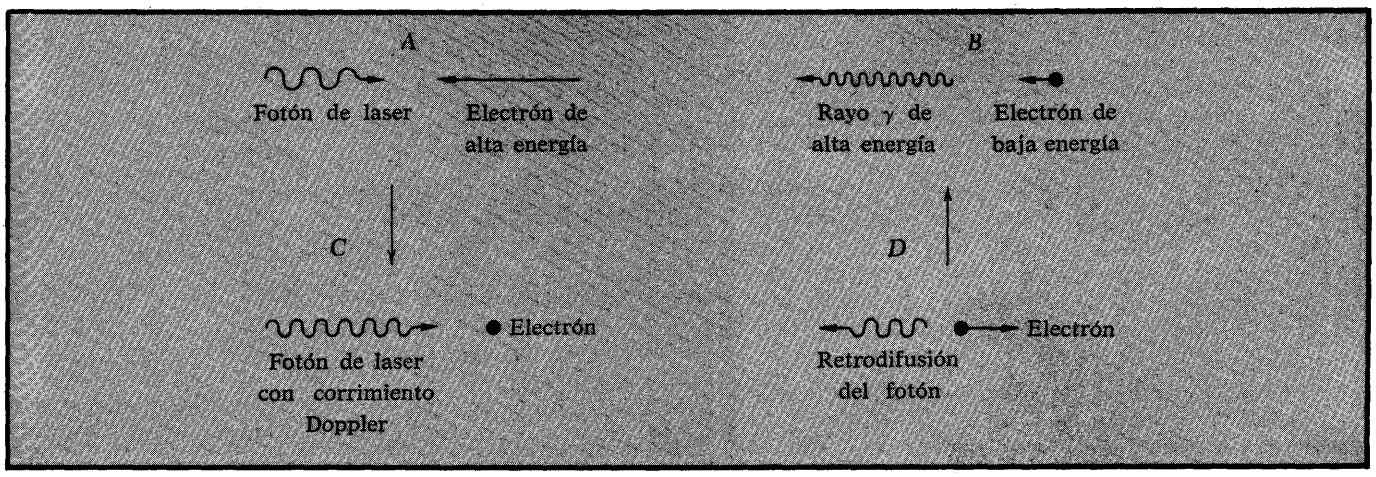


FIG. 13.10 Efecto Compton inverso. *A* y *B* muestran estados de laboratorio. La transformación referida en el texto cambia *A* en *C*. $C \rightarrowtail D$ en el efecto Compton ($\theta = \pi$) y la transformación vuelve *D* a *B*.

calcular la energía del rayo γ haremos una transformación al sistema que utilizamos antes con el electrón en reposo.

El fotón de láser con corrimiento Doppler tiene la energía

$$h\nu_C = h\nu\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$$

[Ec. (12.28)] (utilizamos ν_c como referencia a la fig. 13.10 *C*), o sea

$$\lambda_C = \lambda\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

en donde β es el cociente v/c del electrón y vale ≈ 1. Consideremos ahora la retrodifusión del fotón con corrimiento Doppler, de modo que

$$\lambda' - \lambda_C = \frac{h}{mc}(1 - \cos\pi) = \frac{2h}{mc}$$

Si

$$\beta \approx 1 \quad \text{de modo que} \quad \lambda_C \ll \frac{h}{mc} \ ^*$$

entonces

$$\lambda' \approx \frac{2h}{mc}$$

Volvamos al sistema de laboratorio y λ' experimentará de nuevo el corrimiento Doppler. Así

$$\lambda_{\text{lab}} \approx \lambda'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \approx \frac{2h}{mc}\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{2}}$$

(*) En el Prob. 13, al final de este capítulo, se solicita la solución exacta.

Pero si la energía inicial del electrón es

$$E_{\text{lab}} \approx \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{mc^2}{\sqrt{2}\sqrt{1-\beta}}$$

$$\lambda_{\text{lab}} \approx \frac{2h}{mc}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{mc^2}{\sqrt{2}E_{\text{lab}}} \approx \frac{h}{mc}\frac{mc^2}{E_{\text{lab}}}$$

Con esta aproximación resulta

$$\frac{c}{\lambda_{\text{lab}}} \approx \frac{mc^2}{h}\frac{E_{\text{lab}}}{mc^2} \approx \nu_{\text{lab}}$$

y

$$h\nu_{\text{lab}} \approx E_{\text{lab}}$$

en donde E es la energía del electrón; casi toda la energía cinética recae en el fotón. El efecto Compton inverso es importante en consideraciones astrofísicas (véanse Probs. 12 y 13).

PROBLEMAS

1. *Protón en el campo magnético.* Calcular el radio de giro y la frecuencia angular de un protón de energía relativista total 30 GeV en un campo magnético de 15000 gauss. *Sol.* $\omega_c = 4{,}5 \times 10^6$ rad/s.

2. *Retroceso nuclear.* ¿Cuál es la energía de retroceso en ergs y electrón-volts de un núcleo de masa 10^{-23} g después de la emisión de un rayo γ de 1 MeV de energía? (Cap. 12, Tema Avanzado). *Sol.* $1{,}4 \times 10^{-10}$ erg; 90 eV.

3. *Choque electrón-protón.* Un electrón de 10 GeV de energía choca contra un protón en reposo.
(*a*) ¿Cuál es la velocidad del sistema del centro de masas?
(*b*) ¿Qué energía está disponible para producir nuevas partículas? (Expresar el resultado en unidades de M_pc^2.)

4. *Frecuencia ciclotrónica de alta energía.* A energías elevadas la frecuencia ciclotrón depende de la velocidad de la partícula acelerada. Con objeto de mantener el sincronismo entre la partícula que gira y el campo eléctrico alterno que la acelera, el proyectista debe imponer que la radiofrecuencia o el campo magnético aplicados (o los dos) esté modulada cuando progresa la aceleración. Demostrar que $\omega \propto B/E$, en donde ω es la radiofrecuencia, B el campo magnético y E la energía total de la partícula.

5. *Frecuencias del ciclotrón, relativista y no relativista.* En una de las etapas de su desarrollo el ciclotrón de Berkeley de 184 pulgadas funcionaba con un campo magnético fijo de 23 000 gauss aproximadamente.
(*a*) Calcular la frecuencia ciclotrón no relativista para protones en este campo *Sol.* $2{,}2 \times 10^8$ rad/s.
(*b*) Calcular la frecuencia apropiada para una energía cinética final de 720 MeV.

6. *Leyes de conservación*
(*a*) Demostrar que un electrón libre que se mueva en el vacío a velocidad **v** no puede emitir un solo cuanto de luz. Es decir, mostrar que tal proceso de emisión violaría las leyes de conservación.
(*b*) Un átomo de hidrógeno en un estado electrónico excitado puede emitir un cuanto de luz. Demostrar que este proceso puede satisfacer las leyes de conservación. ¿Cuál es la razón de la diferencia entre las partes (*a*) y (*b*)?

7. *Protón de alta energía.* Calcular la cantidad de movimiento, la energía total y la energía cinética de un protón ($M_pc^2 = 0{,}94$ GeV) para el que $\beta \equiv v/c = 0{,}99$ en los casos siguientes:
(*a*) En el sistema de laboratorio.
Sol. 6,58 GeV/c; 6,63 GeV; 5,69 GeV.
(*b*) En un sistema moviéndose con la partícula.
(*c*) En un sistema estacionario respecto al centro de masa del protón y un núcleo de helio estacionario. ($M_{\text{He}} \approx \approx 4M_p$.)
(*d*) En el sistema del centro de masas del protón y un protón estacionario.

8. *Partícula de rayos cósmicos.* Determinar el radio de la órbita de una partícula de carga e y de 10^{19} eV de energía en un campo magnético de 10^{-6} gauss. (Este valor del campo magnético es razonable para un campo existente en nuestra galaxia.) Compararlo con el diámetro de nuestra galaxia. (Partículas que causan «sucesos» con esta tremenda energía dan lugar a los llamados *chaparrones extensos* de electrones, positrones, rayos γ y mesones en el aire.)

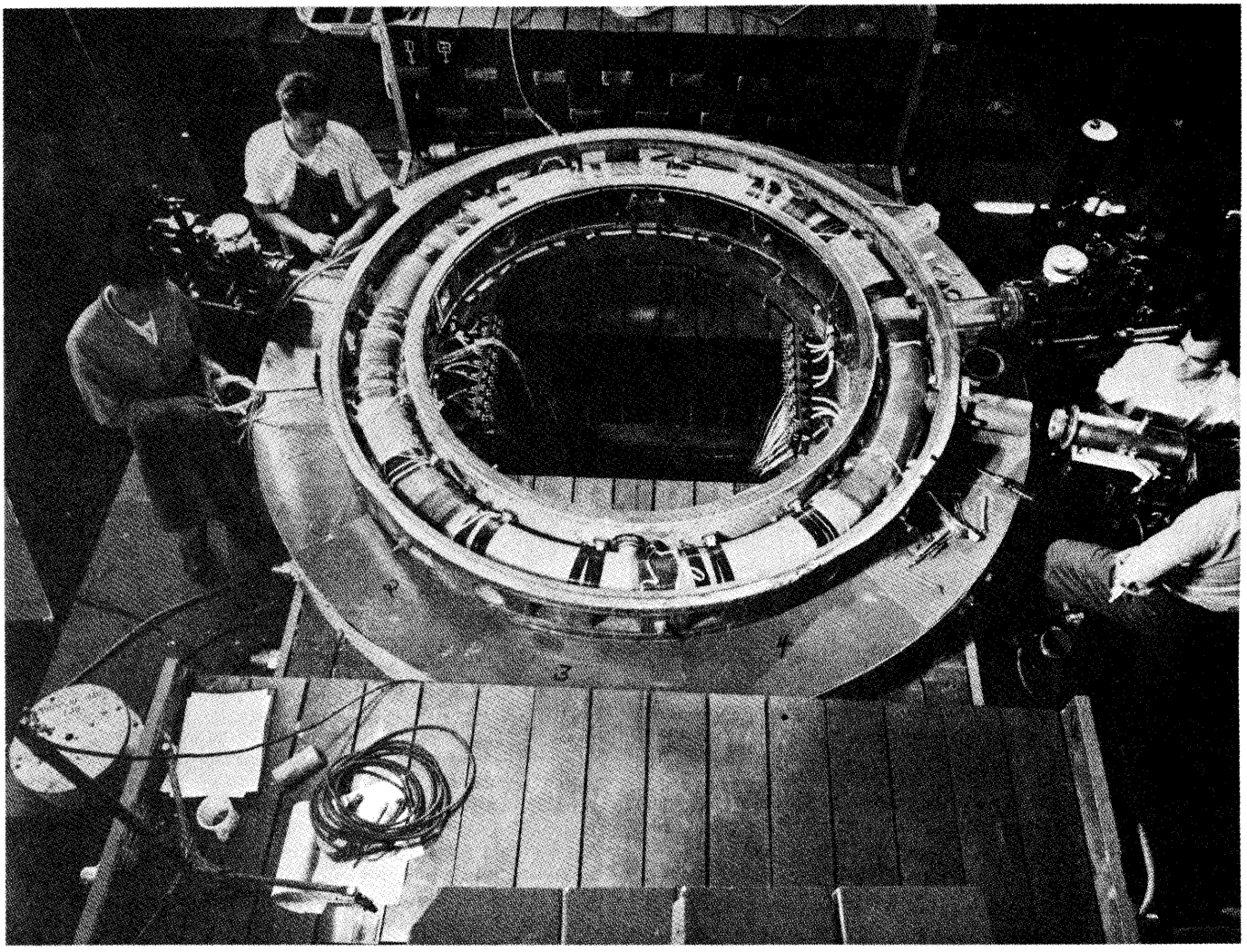


FIG. 13.11 Primer sincrotrón de electrones. *(Fotografía del Lawrence Berkeley Laboratory.)*

9. *Curvatura de los campos eléctricos y magnéticos*

(*a*) Calcular el radio de curvatura en la trayectoria de un protón de energía cinética 1 GeV en un campo magnético transversal de 20 000 gauss. *Sol.* 284 cm.

(*b*) ¿Qué campo eléctrico transversal se necesita para producir aproximadamente el mismo radio de curvatura? Utilizar la fórmula del radio de curvatura de una curva $y(x)$ que viene dado por $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2}/(d^2y/dx^2)$, y calcular ρ en un punto donde el protón entra en el campo eléctrico, $dy/dx = 0$; d^2y/dx^2 puede calcularse a partir de d^2y/dt^2 y $x = vt$.

Sol. $1{,}75 \times 10^4$ statvoltios/cm $= 5{,}25 \times 10^8$ voltios/m.

(*c*) Considerar el módulo del campo eléctrico en la parte (*b*) y discutir la posibilidad del empleo de campos eléctricos para la desviación de partículas relativistas.

10. *Desintegración del deuterón.* Considerar la reacción nuclear en la que un protón incidente de energía cinética Ec_p choca y escinde un deuterón estacionario de acuerdo con

$$p + d \rightarrow p + p + n$$

Para una energía próxima a la umbral, los dos protones y el neutrón se mueven en un grupo no ligado con la misma velocidad aproximadamente. Escribir las expresiones no relativistas para la cantidad de movimiento y energía y demostrar que la energía cinética umbral $Ec_p{}^0$ del protón incidente es

$$Ec_p{}^0 = 3/2\, E_B$$

en donde E_B (≈ 2 MeV) es la energía de enlace del deuterón, respecto a un neutrón y a un protón libres.

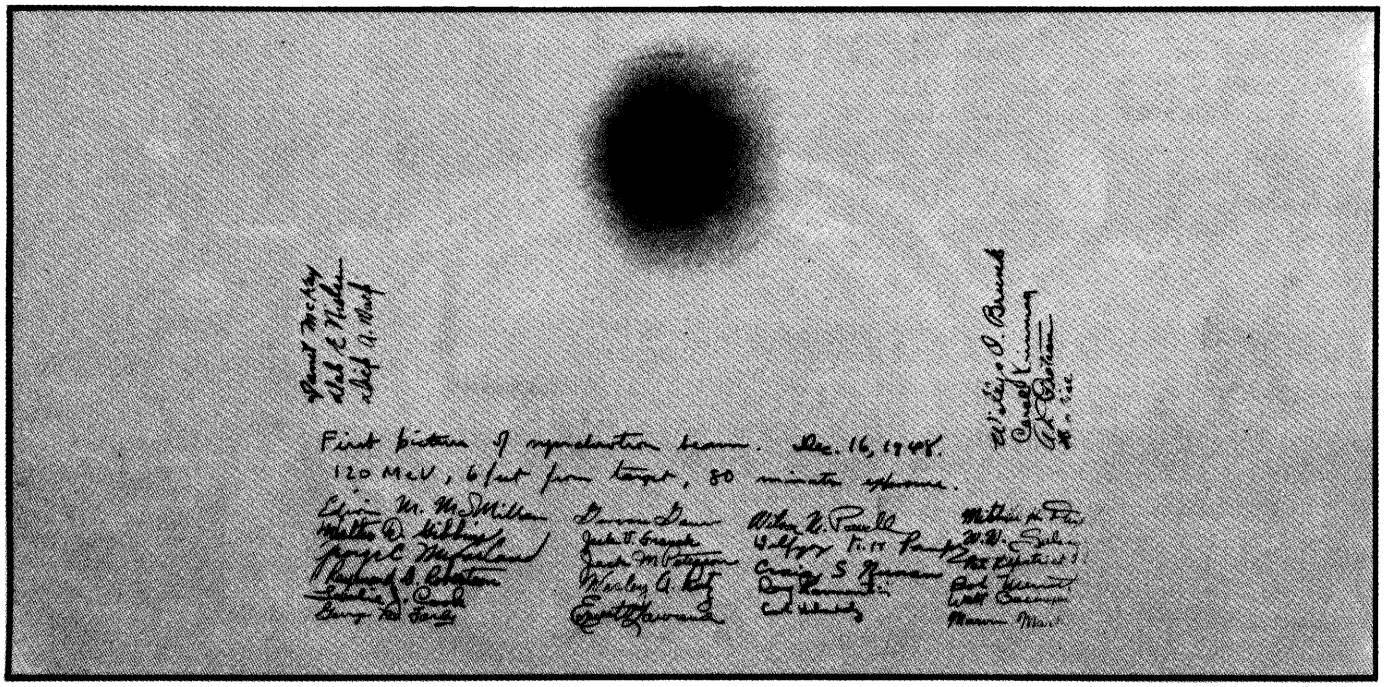


FIG. 13.12 La primera imagen del haz del sincrotrón. *(Fotografía del Lawrence Berkeley Laboratory.)*

11. *Umbral π^0 no relativista.* Utilizar las expresiones no relativistas de la energía cinética y cantidad de movimiento del protón y del mesón π^0 al calcular el umbral fotónico [comparar las Ecs. (13.14)]. ¿Cuál es la diferencia con el umbral calculado a partir de la Ec. (13.16)? ¿Cuál es la energía cinética correcta del protón más el mesón π^0 en el umbral? ¿Cuál es la energía cinética no relativista en el umbral? *Sol.* $h\nu_{\text{umbral}} = M_p c^2 \, [1 + \alpha - (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}]$

12. *Colisión elástica electrón-fotón.* ¿Cuál es la energía cinética de un electrón que se dispersa sin pérdida o ganancia de energía por medio de un fotón de 10 000 eV de energía? (*Sugerencia:* Comparar con la dispersión elástica en el sistema de centro de masas.) *Sol.* 98 eV.

13. *Efecto inverso Compton.* Deducir la fórmula exacta de la longitud de onda de un fotón de longitud de onda λ difundido hacia atrás por un electrón de velocidad βc.

Aplicarlo al caso en que el fotón incidente posee una energía $h\nu = 3{,}0$ eV y el electrón tiene una energía total 1,02 MeV ($\gamma = 2$) para determinar la energía del fotón difundido. *Sol.* 41 eV.

NOTA HISTÓRICA

El sincrotrón. El principio del sincrotrón se utiliza en todos los aceleradores de alta energía en la región superior a 1 GeV, excepto para los aceleradores lineales de electrones como el de Stanford. El sincrotrón es un aparato para acelerar partículas hasta energías elevadas. Esencialmente es un ciclotrón en el que o bien el campo magnético o la radiofrecuencia aplicada se varía durante la aceleración y en el que la fase de las partículas respecto al campo eléctrico de radiofrecuencia se ajusta automáticamente al valor correcto de la aceleración. La idea de la modulación del campo o de la frecuencia no era nueva; la novedad consistía en la demostración de que las órbitas de las partículas podían ser estables durante la modulación. El principio del sincrotrón fue descubierto por V. Veksler en Moscú e independientemente un poco más tarde por E. M. McMillan en Berkeley. Una relación completa del trabajo de Veksler apareció en la *Revista de Física* (URSS) **9**, 153-158 (1945). El artículo de McMillan apareció en el Physical Review **68**, 143 (1945). Reproducimos aquí la publicación de McMillan. La fig. 13.11 muestra el primer sincrotrón construido bajo la dirección de McMillan, y la fig. 13.2, la primera exposición registrada de un haz de rayos X.

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

C. Kacser, *Introduction to the Special Theory of Relativity*, cap. 7, Co-Op Paperback, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967.

A. P. French, *Relatividad especial*, cap. 6, Ed. Reverté, S. A.

Lawrence Radiation Laboratory, *Introduction to the Detection of Nuclear Particles in a Bubble Chamber* (Ealing Press, Cambridge, Mass. 1964). Una maravillosa colección de fotografías de trazas de partículas en las cámaras de burbujas (completa con un visor estereoscópico).

El sincrotón — Una propuesta de acelerador de partículas de alta energía

EDWIN M. MCMILLAN
Universidad de California, Berkeley, California
5 de septiembre de 1945

UNO de los métodos más fructíferos para acelerar partículas cargadas hasta energías muy elevadas se basa en la aplicación repetida de un campo eléctrico oscilante, como en el ciclotrón. Si se necesita un número muy grande de aceleraciones individuales, puede existir alguna dificultad en mantener las partículas en fase con el campo eléctrico. En el caso del ciclotrón esta dificultad aparece cuando el cambio de masa relativista produce una variación notable en la velocidad angular de las partículas.

El aparato propuesto aquí hace uso de una «estabilidad de fase» que poseen ciertas órbitas del ciclotrón. Consideremos, por ejemplo, una partícula cuya energía corresponde a una velocidad angular justamente la correcta para acoplarse a la frecuencia del campo eléctrico. Esta energía se denomina de equilibrio. Supóngase además que la partícula cruza los intervalos aceleradores o «gaps» en el momento justo en que el campo eléctrico pasa por cero, cambiando de sentido de modo tal que si la partícula llegara un poco antes resultaría acelerada. Esta órbita es evidentemente estacionaria. Para demostrar que es estable, supongamos que se realiza un desplazamiento en la fase de modo que la partícula llega al «gap» demasiado pronto. Entonces resulta acelerada; el aumento de energía produce una disminución de velocidad angular y el tiempo de llegada tiende a retrasarse un poco. Un razonamiento análogo demuestra que un cambio de energía a partir del valor de equilibrio tiende a corregirse por sí mismo. Estas órbitas desplazadas continuarán oscilando, mientras que su fase y su energía varíen alrededor de sus valores de equilibrio.

Con objeto de acelerar las partículas es necesario ahora cambiar el valor de la energía de equilibrio, lo cual puede hacerse variando el campo magnético o bien la frecuencia. Mientras está cambiando la energía de equilibrio, la fase del movimiento se adelantará lo preciso para suministrar la fuerza aceleradora necesaria; la semejanza de este comportamiento con el del motor síncrono sugiere el nombre del aparato.

Las ecuaciones que describen las variaciones de fase y energía han sido deducidas teniendo en cuenta la variación con el tiempo del campo magnético y la frecuencia, la aceleración debida al «efecto betatrón» (variación de cambio del flujo con el tiempo), la variación de este último con el radio de la órbita durante las oscilaciones y las pérdidas de energía por ionización o radiación. Se supuso que el período de las oscilaciones de fase es largo comparado con el período del movimiento orbital. Se consideró que se trataba de una sola carga electrónica. La ecuación (1) define la energía de equilibrio; (2) da la energía instantánea en función del valor de equilibrio y de la variación de fase, y (3) es la «ecuación del movimiento» para la fase. La ecuación (4) determina el radio de la órbita.

$$E_0 = (300cH)/(2\pi f), \tag{1}$$

$$E = E_0[1 - (d\phi)/(d\theta)], \tag{2}$$

$$2\pi \frac{d}{d\theta}\left(E_0 \frac{d\phi}{d\theta}\right) + V \operatorname{sen}\phi = \left[\frac{1}{f}\frac{dE_0}{dt} - \frac{300}{c}\frac{dF_0}{dt} + L\right] + \left[\frac{E_0}{f^2}\frac{df}{dt}\right]\frac{d\phi}{d\theta}, \tag{3}$$

$$R = (E^2 - E_r^2)^{\frac{1}{2}}/300H. \tag{4}$$

Los símbolos son:

E = Energía total de la partícula (cinética más energía en reposo).
E_0 = Valor del equilibrio de E.
E_r = Energía en reposo.
V = Energía del campo eléctrico ganada por vuelta en la fase más favorable para la aceleración.
L = Pérdida de energía por vuelta debida a la radiación e ionización.
H = Campo magnético en la órbita.
F_0 = Flujo magnético a través de la órbita de equilibrio.
ϕ = Fase de la partícula (posición angular respecto al «gap» cuando el campo eléctrico = 0).
θ = Desplazamiento angular de la partícula.
f = Frecuencia del campo eléctrico.
c = Velocidad de la luz.
R = Radio de la órbita.

(Las energías están en electrón-volts, las magnitudes magnéticas en u.e.m., los ángulos en radianes y las demás magnitudes en unidades c.g.s.)

La ecuación (3) resulta ser idéntica a la del movimiento de un péndulo de amplitud no restringida, representando los términos del segundo miembro un par constante y una fuerza amortiguadora. La variación de fase es, por consiguiente, oscilante en tanto que la amplitud no sea demasiado grande, siendo $\pm\pi$ la amplitud permisible cuando el primer corchete del segundo miembro se hace cero y anulándose cuando se iguala a V. De acuerdo con el teorema adiabático, la amplitud disminuirá en proporción inversa con la raíz cuarta de E_0, puesto que E_0 juega el papel de una masa que varía lentamente en el primer término de la ecuación; si se disminuye la frecuencia, el último término de la derecha proporciona un amortiguamiento adicional.

La aplicación del método dependerá del tipo de partículas que ha de acelerarse, puesto que la energía inicial será en cualquier caso próxima a la ener-

gía en reposo. En el caso de electrones, E_0 variará durante la aceleración en un factor grande. De momento no es práctico variar la frecuencia en un factor tan grande y es preferible variar H con la ventaja adicional de que la órbita tiende a un radio constante. En el caso de partículas pesadas E_0 variará mucho menos; por ejemplo, en la aceleración de protones a 300 MeV cambia en un 30 por ciento. Así, pues, puede ser práctico variar la frecuencia para la aceleración de partículas pesadas.

Un diseño posible para un acelerador de electrones de 300 MeV se indica a continuación:

H en el pico = 10000 gauss,
radio final de la órbita = 100 cm,
frecuencia = 48 megaciclos/s,
energía de inyección = 300 kv,
radio inicial de la órbita = 78 cm.

Como el radio se expande 22 cm durante la aceleración, el campo magnético necesita cubrir únicamente un anillo de esta anchura con algún margen adicional naturalmente para dar la forma apropiada al campo. Este debe disminuir ligeramente con el radio para dar una estabilidad radial y axial a las órbitas. El flujo magnético total es casi 1/5 del que se necesitaría para satisfacer la condición del flujo del betatrón para la misma energía final.

El voltaje necesario en los electrodos aceleradores depende de la variación del campo magnético con el tiempo. Si el imán se excita a 60 ciclos, el valor pico de $(1/f)\ (dE_0/dt)$ es 2300 volts. (El término de betatrón que contiene dF_0/dt es alrededor de 1/5 de éste y se despreciará.) Si consideramos $V = 10000$ volts el mayor corrimiento de fase será 13°. El número de vueltas por oscilación de fase variará de 22 a 440 durante la aceleración. La variación relativa de E_0 durante un período de la oscilación de fase será el 6,3 por ciento en el tiempo de la inyección y disminuirá luego. Por consiguiente, las hipótesis de variación lenta durante el período que se ha utilizado al deducir las ecuaciones son válidas. La pérdida de energía por radiación se discutirá en un artículo posterior y se demostrará que no es importante en el caso anterior.

La aplicación a partículas pesadas no se discutirá en detalle, pero parece probable que el mejor método sea la variación de la frecuencia. Como esta variación no ha de ser extremadamente rápida, puede conseguirse por medio de dispositivos mecánicos accionados por motores eléctricos.

El sincrotrón ofrece la posibilidad de alcanzar energías en la zona de los mil millones de electrón-volts tanto con electrones como con partículas pesadas; en el primer caso, cumplirá este objetivo con un coste inferior en materiales y potencia que el betatrón; en el segundo caso carece del límite de la energía relativista del ciclotrón.

Se está planeando ahora la construcción de un acelerador de electrones de 300 MeV empleando el principio anterior en el Radiation Laboratory de la Universidad de California en Berkeley.

Contenido

MASA INERTE Y GRAVITATORIA
MASA GRAVITATORIA DE LOS FOTONES
Desplazamiento hacia el rojo debido
a la gravitación
Desviación de los fotones por el Sol
PRECESIÓN DEL PERIHELIO DE MERCURIO
EQUIVALENCIA
ONDAS GRAVITATORIAS
Problemas
Nota histórica. Los péndulos de Newton
Lecturas suplementarias

14

Principio de equivalencia

En este capítulo discutiremos otros aspectos de la relatividad. Algunos de los temas tratados incluyen la teoría general de la relatividad con la teoría especial discutida en los Caps. 11 a 13.

MASA INERTE Y GRAVITATORIA

La segunda ley de Newton puede utilizarse para definir la masa de un objeto sometiendo masas diferentes a la misma fuerza y midiendo sus aceleraciones. Así

$$M(1)a(1) = F = M(2)a(2)$$
$$\frac{M(2)}{M(1)} = \frac{a(1)}{a(2)}$$

y si hacemos $M(1) = 1$, $M(2)$ queda unívocamente definida. La masa determinada por este procedimiento recibe el nombre de *masa inerte* y se designa por M_i. Podemos determinar también la masa midiendo la fuerza gravitatoria ejercida sobre el cuerpo en cuestión por otro, como la Tierra

$$\frac{GM_gM_T}{R_T{}^2} = F$$
$$M_g = \frac{FR_T{}^2}{GM_T} \tag{14.1}$$

La masa así determinada se denomina *masa gravitatoria* y se designa por M_g. En (14.1) la masa de la Tierra es M_T y su radio R_T.

Es un hecho notable que la masa inerte de todos los cuerpos sea, dentro de la exactitud experimental, proporcional a la masa gravitatoria. (Podemos considerar que la constante G ha sido determinada como en el experimento de Cavendish utilizando la definición de una fuerza y, por tanto, reflejando la masa inercial.) El experimento más sencillo para comprobarlo es ver si todos los cuerpos caen con la misma aceleración. Para un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra, tendremos

$$M_i(1)a(1) = \frac{GM_TM_g(1)}{R_T{}^2} \tag{14.2}$$

para otro segundo cuerpo que cae

$$M_i(2)a(2) = \frac{GM_TM_g(2)}{R_T{}^2} \tag{14.3}$$

Dividiendo la Ec. (14.2) por la Ec. (14.3), se tiene

$$\frac{M_i(1)a(1)}{M_i(2)a(2)} = \frac{M_g(1)}{M_g(2)}$$

$$\frac{M_i(1)}{M_g(1)} = \frac{M_i(2)}{M_g(2)} \cdot \frac{a(2)}{a(1)}$$

Pero se ha observado que los cuerpos que caen en el vacío lo hacen siempre con la misma velocidad, de modo que $a(2) = a(1)$ dentro de la exactitud experimental y, por consiguiente, tendremos para la razón entre las masas inerte y gravitatoria

$$\frac{M_i(1)}{M_g(1)} = \frac{M_i(2)}{M_g(2)} \tag{14.4}$$

Siempre que esta razón sea constante, podemos hacer que su valor en (14.4) sea igual a la unidad ajustando adecuadamente el valor de G; es decir, determinamos cómo en el experimento de Cavendish la fuerza F entre dos masas $M_i(1)$ y $M_i(2)$ medidas en el sistema inercial, separadas una distancia r y establecemos que

$$G = \frac{Fr^2}{M_i(1)M_i(2)}$$

La tarea experimental consiste en determinar si existen variaciones de la razón M_i/M_g para diferentes partículas, materiales y objetos.

Las determinaciones clásicas se llevaron a cabo por Newton, utilizando el método del péndulo del Prob. 1 al final de este capítulo. Otras famosas determinaciones son las de R. Eötvös, que inició en 1890 y continuó durante 25 años. Su ingenioso método puede comprenderse considerando un péndulo suspendido en la superficie de la Tierra y en una latitud de 45° (fig. 14.1). Sobre el péndulo actúa la fuerza gravitatoria $M_g g$ dirigida hacia el centro de la Tierra y también una fuerza centrífuga * $M_i\omega^2 R_T/\sqrt{2}$ en donde el factor $R_T/\sqrt{2}$ es el radio del círculo en el cual la lenteja del péndulo se mueve en virtud de la rotación de la Tierra. La fuerza centrífuga está dirigida normalmente al eje de rotación y su componente horizontal se obtiene multiplicando finalmente por cos 45° o $1/\sqrt{2}$. La resultante de las dos fuerzas forma un ángulo

$$\theta \approx \frac{M_i\omega^2 R_T/2}{M_g g - \frac{1}{2}M_i\omega^2 R_T} \approx \frac{M_i\omega^2 R_T}{2M_g g}$$

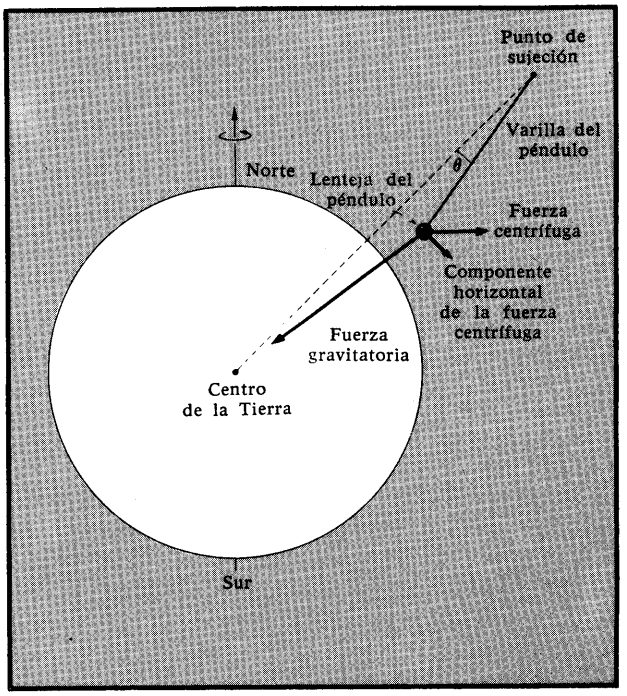


FIG. 14.1 Ilustración del modo en que un péndulo se desvía de la vertical un pequeño ángulo θ debido a la fuerza centrífuga que nace de la rotación de la Tierra. El ángulo θ, la distancia de la lenteja a la superficie de la Tierra y la fuerza centrífuga están muy exagerados.

(*) Nosotros mismos nos situamos en un sistema de referencia que gira con la Tierra.

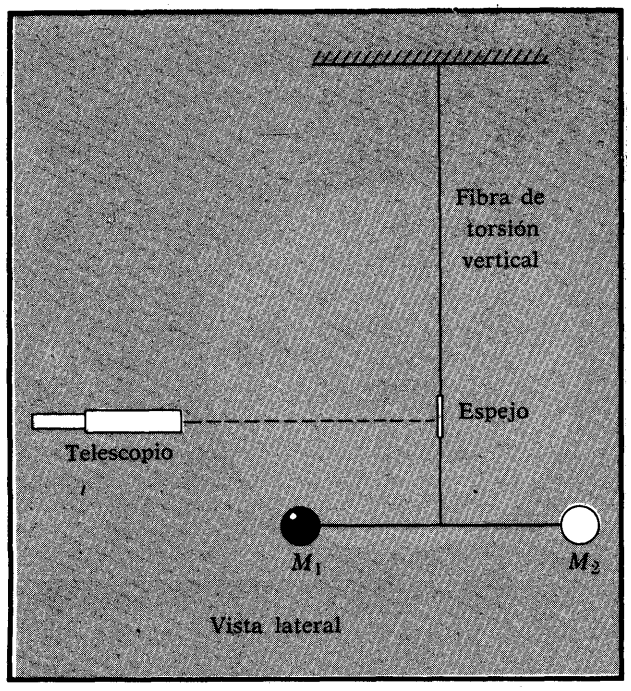


FIG. 14.2 Vista lateral de un aparato análogo al empleado por Eötvös para determinar la razón entre las masas inerte y gravitatoria. M_1 y M_2 son dos objetos distintos de la misma masa gravitatoria.

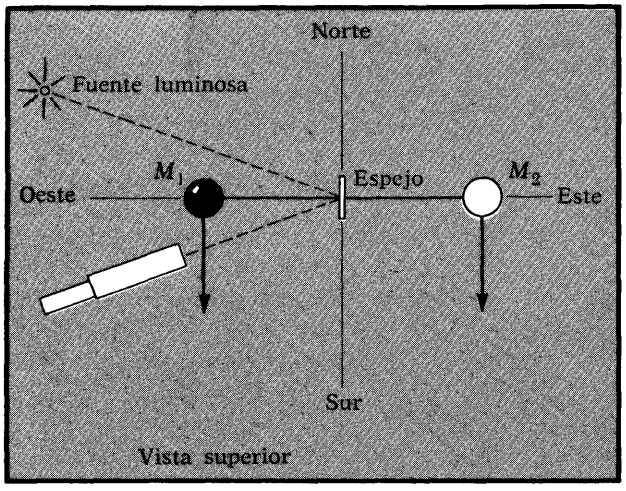


FIG. 14.3 Si las masas inertes de M_1 y M_2 son iguales, las componentes horizontales de la fuerza centrífuga (las dos flechas) son también iguales y no existe torsión en la fibra.

con la dirección de la vertical local. Aquí hemos utilizado el hecho de ser la razón $M_i\omega^2 R_T/M_g g$ un número pequeño y por tanto tg $\theta = \theta$. Empleando los datos suministrados al principio del Cap. 4 vemos que esta relación tiene un valor de 0,003 aproximadamente.

Supongamos ahora que se prepara una suspensión de torsión, como se indica en la fig. 14.2, con las dos esferas hechas de materiales diferentes pero de igual masa gravitatoria, de modo que $M_g(1) = M_g(2)$. Si $M_i(1)$ es igual a $M_i(2)$, no existirá un par de fuerzas que tienda a hacer girar la fibra de torsión; esta situación se ilustra en la fig. 14.3. Sin embargo, si $M_i(1)$ es mayor que $M_i(2)$, la componente horizontal de la fuerza centrífuga sobre $M(1)$ será mayor que sobre $M(2)$ y un par neto retorcerá la fibra, como muestra la fig. 14.4. Si $M_i(1)$ no es igual a $M_i(2)$, la fibra de torsión se torcerá bajo la fuerza centrífuga. La medida se repite con el aparato girado 180°; esto contribuye a determinar la posición cero de la balanza. El experimento es un buen ejemplo de experiencia negativa: sólo se observó algún efecto si $M_i(1) \neq M_i(2)$. Eötvös comparó ocho materiales diferentes con el platino (Pt) como standard o patrón y encontró que

$$\frac{M_i(1)}{M_g(1)} = \frac{M_i(\text{Pt})}{M_g(\text{Pt})}$$

con un error de una parte en 10^8. Experimentos recientes realizados por Dicke y otros * han mostrado la igualdad de ambos tipos de masas dentro de una parte en 3×10^{10}.

La situación experimental actual puede resumirse como sigue:

Si llamamos Q a la razón M_g/M_i, entonces

1. El valor de Q para un electrón más un protón es igual al valor de Q para un neutrón hasta una parte en 10^7. (Esta comparación resulta directamente al comparar entre sí los elementos ligeros y pesados en la tabla periódica de los elementos; los últimos tienen una proporción mayor de neutrones que los primeros.)

2. El valor de Q para aquella parte de la masa nuclear asociada con la ligadura nuclear es igual a la unidad hasta una parte en 10^5.

(*) P. G. Roll, R. Krotkov, R. H. Dicke, *Ann. Phys.* (N. Y.), **26**, 442 (1964).

3. El valor de Q para aquella parte de la masa atómica asociada con el enlace de los electrones orbitales es igual a la unidad hasta una parte en 200.

4. El valor de Q para el aluminio respecto al oro es de $1 \pm 3 \times 10^{-11}$.

MASA GRAVITATORIA DE LOS FOTONES

Vimos en el Cap. 12 que un fotón de energía $h\nu$, en donde ν es la frecuencia, debe tener una masa inerte igual a $h\nu/c^2$. ¿Tiene el fotón también una masa gravitatoria? Las pruebas experimentales indican con insistencia que así es, y que la masa gravitatoria tiene el mismo valor que la inerte. (La masa *en reposo*, naturalmente, es cero.)

Consideremos un fotón que, cuando está a una altura L por encima de la superficie de la Tierra, tiene una frecuencia ν y una energía $h\nu$. La energía del fotón al descender la distancia L aumenta en $MgL = (h\nu/c^2)gL$ y él mismo habrá ganado esta energía de modo que la del fotón llegará a ser $h\nu'$, en donde

$$h\nu' \approx h\nu + \frac{h\nu}{c^2}gL \tag{14.5}$$

suponiendo una masa constante $h\nu/c^2$ para el fotón durante su caída (lo cual puede admitirse puesto que ν' no difiere apenas de ν). La frecuencia ν' medida para el fotón *después* de verificado el descenso es, según (14.5)

$$\nu' \approx \nu\left(1 + \frac{gL}{c^2}\right) \tag{14.6}$$

La fig. 14.5 ilustra este efecto. Si $L = 20$ m, el desplazamiento relativo de la frecuencia es

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gL}{c^2} \approx \frac{(10^3)(2 \times 10^3)}{(3 \times 10^{10})^2} \approx 2 \times 10^{-15} \tag{14.7}$$

Este efecto fantásticamente pequeño ha sido realmente observado por Pound y Rebka * empleando una fuente de rayos γ. Encontraron, con $\Delta\nu = \nu' - \nu$

$$\frac{(\Delta\nu)_{\text{exp}}}{(\Delta\nu)_{\text{calc}}} = 1{,}05 \pm 0{,}10$$

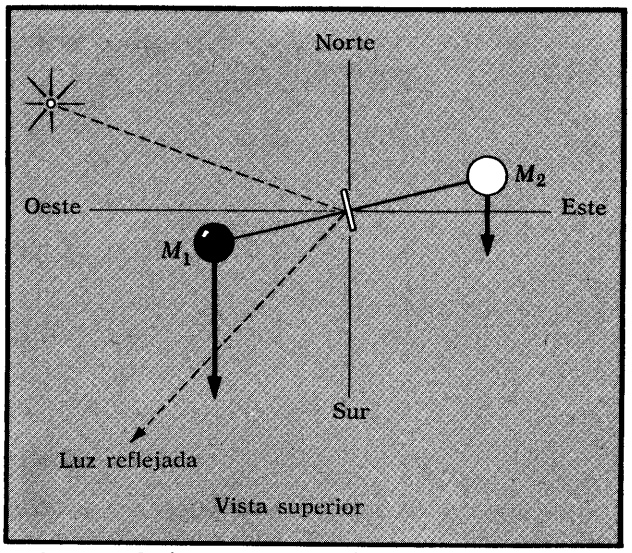


FIG. 14.4 Si la masa inerte de M_1 es mayor que la de M_2 existirá una torsión en la fibra y el espejo girará.

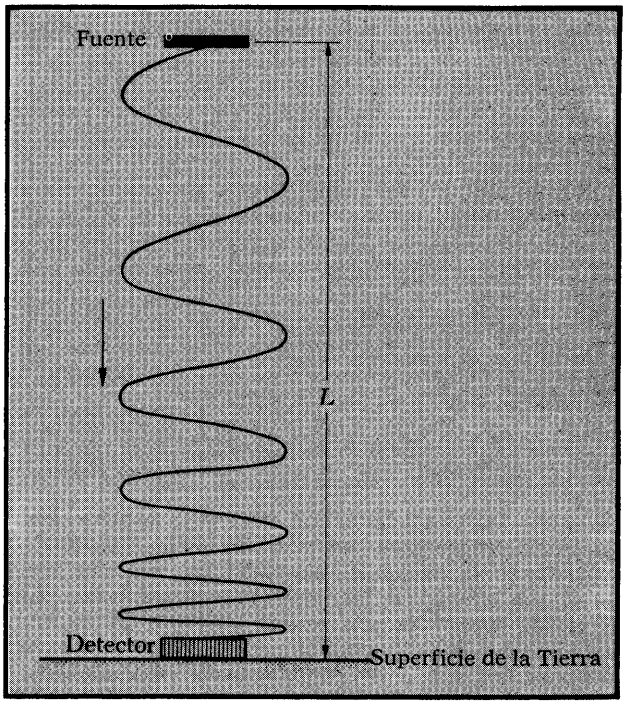


FIG. 14.5 Representación esquemática del experimento del «desplazamiento hacia el rojo debido a la gravedad». Un fotón emitido por la fuente en una dirección hacia el centro de la Tierra pierde «energía potencial» $\Delta U = (h\nu/c^2)gL$ y gana una cantidad igual de «energía cinética» al caer una distancia L. La frecuencia del fotón en el detector es $\nu' = \nu(1 + gL/c^2)$; la frecuencia del fotón en la fuente es ν. (Este es un *comienzo hacia el azul* como se describe aquí. Sería un *comienzo hacia el rojo* si el fotón se moviera hacia arriba.)

(*) R. V. Pound y G. A. Rebka, Jr., *Phys. Rev. Letters*, **4**, 337 (1960); R. V. Pound y J. L. Snider; *Phys. Rev.*, **140**, B788 (1965).

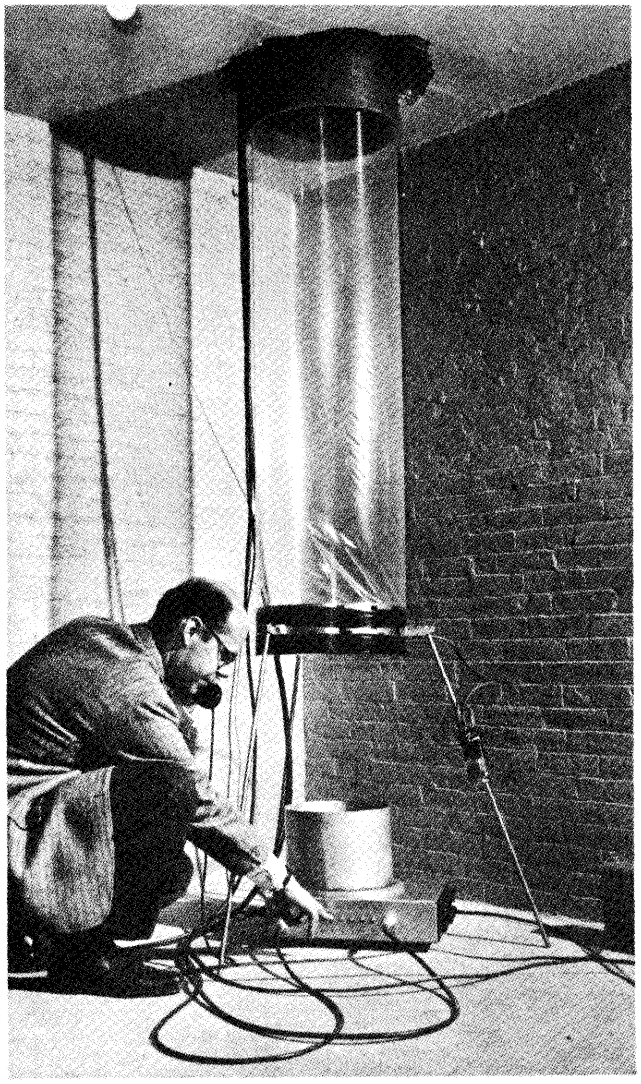


FIG. 14.6 Extremo inferior del dispositivo experimental del «fotón descendente» de Pound en Harvard, en donde vemos a G. A. Rebka Jr., ajustando los fotomultiplicadores con arreglo a las instrucciones recibidas del centro de control. En una versión posterior del experimento se han previsto medios para controlar la temperatura de la fuente y del absorbente. El desplazamiento gravitatorio total medido es únicamente alrededor de 1/500 de la anchura de una raya. Para medir con exactitud un desplazamiento tan pequeño es necesaria la ayuda de algunos artificios. *(Cortesía de R. V. Pound.)*

en donde el valor calculado se obtuvo a partir de (14.6).

Un fotón con frecuencia ν emitido a una distancia infinita de la Tierra tendrá la frecuencia ν' al alcanzar la superficie terrestre, en donde, mediante una generalización evidente de las Ecs. (14.5) y (14.6):

$$\nu' \approx \nu\left(1 + \frac{GM_T}{R_E c^2}\right) \tag{14.8}$$

Obsérvese que el desplazamiento de la frecuencia es función de la razón entre la «longitud gravitatoria» GM_T/c^2 de la Tierra * y el radio R_T de ésta. Este cociente tiene el valor 6×10^{-10}. El efecto mayor aquí presente es del mismo tipo que el considerado en (14.6), pero ahora la fuente de la radiación está mucho más alejada de la Tierra.

Desplazamiento hacia el rojo debido a la gravitación. Un fotón de frecuencia ν que sale de una estrella y escapa hacia el infinito (fig. 14.7) será observado desde allí con una frecuencia

$$\nu' \approx \nu\left(1 - \frac{GM_s}{R_s c^2}\right) \tag{14.9}$$

siendo M_s y R_s la masa y el radio de la estrella. Esto se deduce como una modificación de (14.8); el fotón ahora ha de perder energía para escapar del campo gravitatorio de la estrella. Un fotón en la región azul del espectro visible desplazará su frecuencia hacia el extremo rojo del espectro: por esta razón el efecto se conoce como *desplazamiento hacia el rojo debido a la gravitación.* No debe confundirse con el corrimiento hacia el rojo debido al retroceso de las estrellas lejanas que se cree debido a su movimiento radial aparente alejándose de la Tierra, como se vio en el Cap. 10.

Las estrellas enanas blancas tienen grandes valores de M_s/R_s y, por consiguiente, valores relativamente grandes del desplazamiento hacia el rojo debido a la gravedad. Para Sirio B el desplazamiento relativo calculado es

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx -5{,}9 \times 10^{-5}$$

(*) Definido por analogía con el radio del electrón (Cap. 9).

$$M_e c^2 = \frac{GM_e^2}{R} \qquad R = \frac{GM_e}{c^2}$$

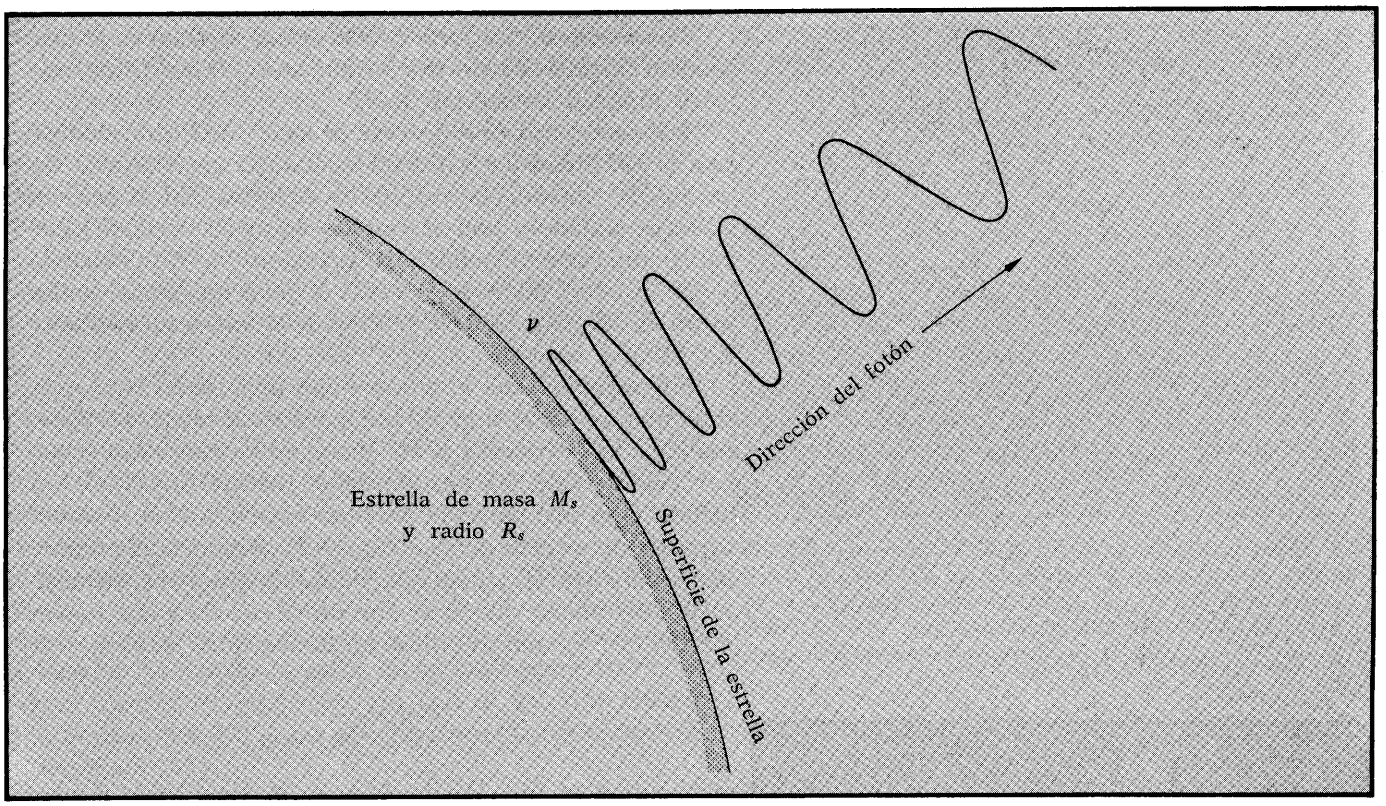


FIG. 14.7 Un fotón escapando hacia el infinito desde la superficie de una estrella gana «energía potencial» y pierde una cantidad igual de «energía cinética». Si la frecuencia del fotón en la superficie es ν, la frecuencia del fotón en el infinito es $\nu' = \nu(1 - GM_s/R_sc^2)$.

y el valor observado es $-6{,}6 \times 10^{-5}$. La discrepancia cae dentro de las incertidumbres en los valores de M_s y R_s.

Si $$\frac{GM_s}{R_sc^2} > 1$$

la frecuencia ν' de la Ec. (14.9) sería negativa, lo cual es naturalmente imposible. Sin embargo, el caso $GM_s/R_sc^2 \approx 1$ es un problema más complicado que requiere la teoría de la relatividad general. El resultado es que si

$$\frac{2GM_s}{R_sc^2} \geq 1 \qquad (14.10)$$

un fotón u otra partícula *no* puede escapar de la estrella. Tal estrella se denomina *agujero negro* y ha despertado mucho interés entre los astrofísicos * (véase Prob. 5).

(*) Por ejemplo, Kip S. Thorne, *Scientific American*, **217**, 5, 88 (1967); R. Ruffini y J. A. Wheeler, *Physics Today*, **24**, 30 (1971).

Desviación de los fotones por el Sol. ¿Cuál es la desviación angular de un haz luminoso o de un fotón que pase junto al borde del Sol?

En este problema interviene un fotón moviéndose con la velocidad de la luz en un campo gravitatorio. No se puede obtener la respuesta correcta sin hacer un cálculo cuidadoso con el empleo de la relatividad general o una combinación del principio de equivalencia y de la relatividad restringida *, pero podemos hallar el orden de magnitud de la respuesta correcta mediante un cálculo sencillo.

Supongamos que el fotón tiene una masa M_L; veremos más adelante que M_L desaparece de nuestros cálculos para la desviación y así, pues, no es necesario conocer cuánto vale. El haz luminoso pasará junto al Sol siendo r_0 la distancia de máxima aproximación, medida a partir del centro del Sol (fig. 14.8). Supongamos que la desviación sea muy pequeña, de modo que r_0 es esencialmente el mismo que si el haz no se desviase. La fuerza transversal F_x sobre el fotón en la posición (r_0, y) es

$$F_x = -GM_sM_L\frac{r_0}{(r_0^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

en donde y se mide desde el punto P como en la figura. El valor final de la componente transversal de la velocidad v_x del fotón tiene el valor dado por

$$M_L v_x = \int F_x\,dt = \int F_x\frac{dy}{v_y} \approx \frac{1}{c}\int F_x\,dy$$

de modo que

$$v_x \approx -\frac{GM_sr_0}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(r_0^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\approx -\frac{2GM_sr_0}{c}\int_0^{\infty}\frac{dy}{(r_0^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{2GM_s}{cr_0}$$

Así resulta que cuando r_0 es igual al radio R_s del Sol, la desviación angular es

$$\text{tg } \phi \approx \phi \approx \frac{|v_x|}{c} \approx \frac{2GM_s}{R_sc^2} \text{ radianes}$$

Al hacer el cálculo se encuentra $\phi = 0{,}87''$. Un estudio más cuidadoso empleando la relatividad restringida y el principio de equivalencia predice un valor doble del

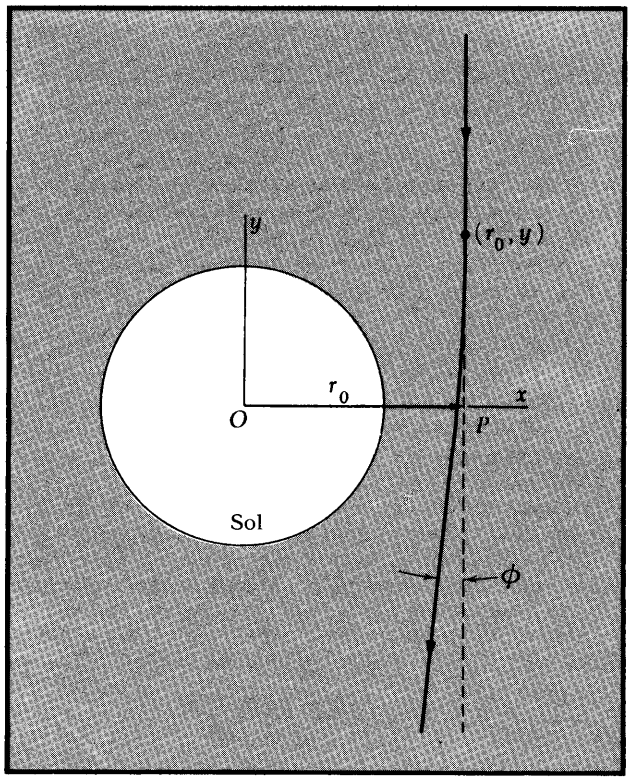


FIG. 14.8 Desviación de un fotón por el campo gravitatorio del Sol.

(*) L. I. Schiff, *Am. J. Phys.*, **28**, 340 (1961).

obtenido en nuestro razonamiento, o sea 1,75″. Este valor ha sido confirmado mediante la observación con una exactitud posible del 20 por ciento. (Todavía se formulan protestas sobre la exactitud de los datos, pero los experimentos son muy difíciles.) La fig. 1.9 muestra una estrella fotografiada durante un eclipse cuando se realizaron tales medidas.

Cuando resolvemos un problema de choque calculando la fuerza que actúa sobre una partícula como si su trayectoria fuera una línea recta, estamos haciendo lo que se llama una *aproximación de impulso*. La conexión entre $\int F_x dt$ y la componente x del cambio en la cantidad de movimiento se discutió en el Cap. 5. La aproximación del tipo impulso es muy útil con frecuencia, con tal que la trayectoria real no se separe mucho de la línea recta que la partícula debiera seguir si no existiera interacción.

Shapiro * ha observado otro efecto previsto por la teoría general de la relatividad de Einstein. Cuando las señales del radar se reflejan en un planeta como Venus, el tiempo que tarda la señal en ir a Venus y volver es mayor cuando la señal pasa próxima al Sol, que cuando está alejada del Sol, y las observaciones concuerdan con la teoría.

PRECESIÓN DEL PERIHELIO DE MERCURIO

Las tres pruebas clásicas de la relatividad general son el corrimiento hacia el rojo debido a la gravitación, la desviación de la luz en el campo solar y la precesión del perihelio de Mercurio. El retraso en las señales del radar mencionado anteriormente se ha referido como una *cuarta prueba* de la relatividad general.

Incluso en esta etapa de nuestro estudio podemos hacer una estimación del orden de magnitud de la precesión del perihelio de Mercurio. De acuerdo con los cálculos del Cap. 9 la línea comprendida entre el Sol y el planeta Mercurio en su máxima aproximación debería permanecer fija en el espacio **. La órbita real muy exagerada se muestra en la fig. 14.9. El efecto es debido al hecho de que v/c, o más apropiadamente v^2/c^2 no es cero. ¿Qué magnitud sería proporcional a v^2/c^2? Una posibilidad razonable es el ángulo de avance por revolu-

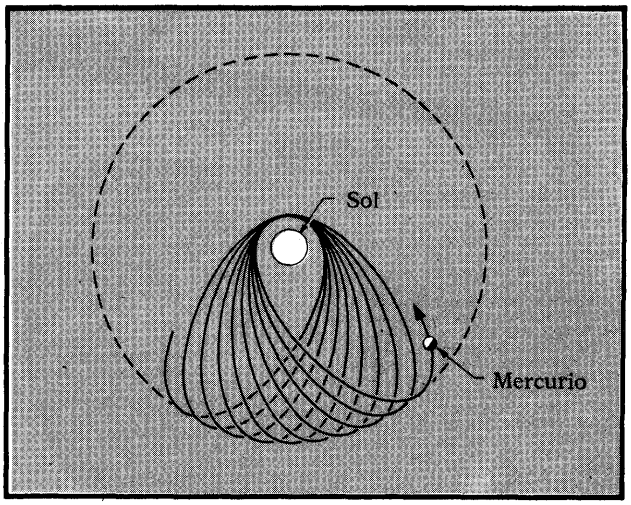


FIG. 14.9 Precesión de la órbita de Mercurio según la teoría general de la relatividad. El plano de la órbita es el del papel; la excentricidad de la órbita, para mayor claridad, está muy exagerada. Sin precesión, la figura sería una elipse estacionaria.

(*) I. I. Shapiro, *Scientific American*, **219**, 1, 28 (1968).

(**) La perturbación debida a otros planetas puede calcularse y compararse con el experimento. El movimiento observado de esta línea en el espacio difiere del calculado con estas perturbaciones en 43″ por siglo.

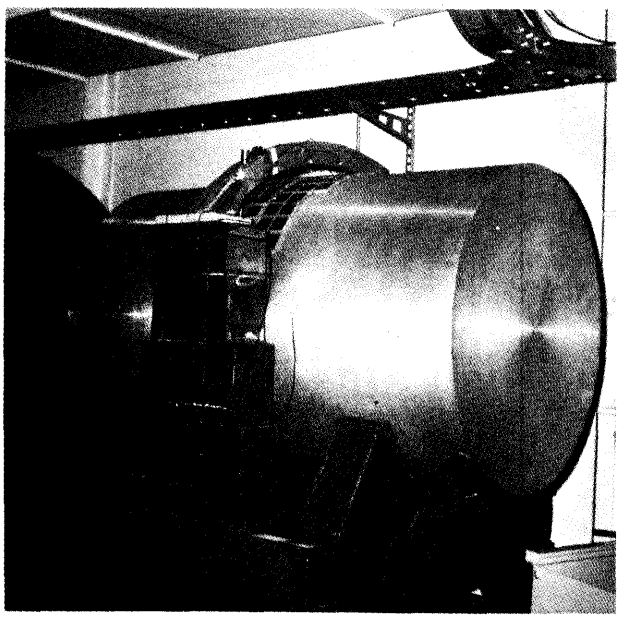


FIG. 14.10 Detector de ondas gravitatorias constituido por un cilindro de alumnio de 96 cm. Su longitud es de 151 cm y su respuesta está centrada en 1661 Hz. Es direccional como un cuadripolo de masa. *(Fotografía cedida por el Prof. J. Weber.)*

ción o el ángulo de avance dividido por 2π. El valor de v/c puede estimarse de la Tabla 9.2. Supongamos que la órbita es circular de radio igual al semieje mayor. Utilizando el período tenemos

$$v = \frac{2\pi r}{\text{período}} = \frac{(2\pi \times 0{,}39 \times 1{,}5)10^{13}}{7{,}6 \times 10^6}$$

$$\approx 4{,}8 \times 10^6 \text{ cm/s}$$

$$\frac{v}{c} \approx 1{,}6 \times 10^{-4}$$

$$\frac{v^2}{c^2} \approx 2{,}6 \times 10^{-8} = \frac{\delta\theta}{2\pi}$$

$$\delta\theta(\text{en grados}) \approx 360 \times (2{,}6 \times 10^{-8})$$

$$\approx 9 \times 10^{-6}$$

$$\delta\theta \approx 3 \times 10^{-2} \text{ segundos de arco/revolución}$$

El valor usual es el número de segundos por siglo. El período es de 0,24 años. Por tanto, el efecto será del orden de magnitud de

$$\delta\theta \text{ (por siglo)} = \frac{100}{0{,}24}(3 \times 10^{-2}) \approx 13''$$

El valor experimental es 42,9″ y la teoría general de la relatividad predice 43,0″, que está dentro del error experimental *.

EQUIVALENCIA

El resultado experimental de no haberse detectado nunca ninguna diferencia entre las masas inerte y la gravitatoria de un cuerpo sugiere que la gravitación pueda ser equivalente en cierto sentido a una aceleración. Consideremos un observador en un ascensor que cae libremente con aceleración g.

El principio de equivalencia establece que para un observador en un ascensor cayendo libremente, las leyes de la física son las mismas que en los sistemas inerciales de la relatividad especial (al menos en la inmediata vecindad del centro del ascensor). *Los efectos debidos al movimiento acelerado y a las fuerzas gravitatorias se anulan exactamente.* Un observador sentado en el interior de un ascensor cerrado no puede decir, si observa fuezas aparentemente gravitatorias, qué parte de ellas corresponde a la aceleración y qué parte a las

(*) Una discusión cuidadosa de estos experimentos clásicos viene dada en el primer capítulo de L. Witten, «Gravitation: An Introduction to Current Research», John Wiley & Sons, Inc, Nueva York, 1962.

fuerzas gravitatorias reales. No detectará ninguna fuerza en absoluto a menos que otras fuerzas (es decir, otras diferentes de las gravitatorias), actúen sobre el ascensor. En particular, el principio de equivalencia que hemos postulado exige que la razón entre las masas inerte y gravitatoria sea $M_i/M_g \equiv 1$. La «carencia de peso» (ingravidez) de un hombre en órbita en un satélite es una consecuencia del principio de equivalencia.

Las consecuencias matemáticas del principio de equivalencia conducen a la teoría general de la relatividad; para una discusión ulterior, consúltense las referencias que se dan al final del Cap. 11.

ONDAS GRAVITATORIAS

De igual modo que las cargas eléctricas oscilantes originan ondas electromagnéticas, la teoría general de la relatividad predice que las masas oscilantes gravitatorias, tales como las estrellas dobles, deben producir ondas gravitatorias. Debido al pequeño valor de G resultan difícil de detectar, pero recientemente, Weber * ha publicado algunos resultados que indican la llegada de ondas gravitatorias del espacio exterior. La fig. 14.10 muestra un detector de ondas gravitatorias.

(*) J. Weber, *Phys. Rev. Letters*, **24**, 276 (1970); *Scientific American*, **224**, 5, 22 (1971).

PROBLEMAS

1. *Péndulo en función de las masas gravitatoria e inerte.* Demostrar que la frecuencia de un péndulo de longitud L viene dada por

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{M_g\, g}{M_i\, L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

siendo M_g y M_i las masas gravitatorias e inerte. (Hace tiempo Bessel hizo cuidadosas observaciones con el péndulo y demostró que M_g era igual a M_i con un error de una parte en 6×10^4.)

2. *Desplazamiento al rojo debido a la gravitación.* Encontrar una expresión para el desplazamiento hacia el rojo debido a la gravedad en la que no se haga la hipótesis de que $\Delta\nu/\nu \ll 1$. (Despreciar cualquier influencia asociada con la curvatura del espacio.) Recuérdese que $h\,\Delta\nu = -(h\nu/c^2)\,(M_s G/r^2)\,\Delta r$ e intégrese respecto a dr desde R_s hasta infinito y respecto a $d\nu$ desde ν a ν'.

Sol. $\nu' = \nu e^{-GM_s/R_s c^2}$.

3. *Desplazamiento al rojo de nuestra galaxia.* Estimar el desplazamiento hacia el rojo debido a la gravedad para la luz que sale del centro de nuestra galaxia y es observada desde un punto muy alejado exterior a ella. Considérese la distribución de masa como uniforme dentro de una esfera de radio 10 000 parsecs. La masa de la galaxia es $\sim 8 \times 10^{44}$ g. *Sol.* $\Delta\nu/\nu = -3 \times 10^{-6}$.

4. *Radio-galaxia.* En 1962 se identificó ópticamente una intensa fuente de radiación de radiofrecuencia extraterrestre como un objeto semejante a una estrella con un diámetro angular de 1 segundo de arco aproximadamente. En un principio se pensó que era una estrella de nuestra galaxia que emitía ondas de radio, pero se obtuvo a continuación su espectro y se encontró que las líneas espectrales estaban desplazadas considerablemente hacia el rojo. Por ejemplo, una línea de oxígeno atómico con una longitud de onda normal de $3{,}727 \times 10^{-5}$ cm se identificó con $\lambda = 5{,}097 \times 10^{-5}$ cm. Una explicación a este hecho podría justificarse si fuese una estrella con una masa extraordinaria, de modo que su espectro estuviese *desplazado hacia el rojo debido a la gravedad.* Si esta hipotética estrella radiante está en nuestra galaxia, su distancia a la Tierra debe ser menor que 10^{22} cm *.

(*) Para más detalles, véase J. L. Greenstein, Quasi-stellar Radio Sources, *Scientific American*, **209**, 54 (diciembre 1963).

(*a*) Calcular a partir del diámetro angular y el desplazamiento hacia el rojo, la masa y densidad media de la estrella objeto de nuestra hipótesis, suponiendo que la distancia es 10^{22} cm. ¿Es razonable esta explicación del fenómeno?

Sol. La masa es $1{,}0 \times 10^{44}$ g y la densidad media $1{,}7 \times 10^{-6}$ g/cm^3. Esto no parece razonable, pues la masa es aproximadamente 0,1 de la masa total de nuestra galaxia. (Utilizar el resultado del Prob. 2.)

(*b*) Otra posible sugerencia es que fuese una peculiar «radio galaxia» con un desplazamiento hacia el rojo obedeciendo a la normal relación dada en el Cap. 10 para el corrimiento hacia el rojo debido al retroceso. Calcular su distancia a partir de esta segunda hipótesis.

Sol. 3×10^9 años luz (3×10^{27} cm).

(*c*) ¿Está de acuerdo la hipótesis de la radio galaxia con nuestra previsión?

Sol. Sí, tiene un radio de 10^{22} cm aproximadamente. Este es un valor normal de los radios de las galaxias.

5. *Agujero negro.* ¿Cuál debería ser el radio del Sol si fuera un agujero negro? [véase Ec. (14.10)]. Comparar la densidad que tendría con la densidad de un núcleo.

Sol. $\sim 3 \times 10^5$ cm.

NOTA HISTÓRICA

Péndulos de Newton. Citamos a continuación la relación que hizo Newton en su *Principia* de sus experimentos con péndulos para investigar las variaciones posibles del cociente entre las masas gravitatoria e inerte.

Pero ha sido observado durante largo tiempo por otros, que (teniendo en cuenta la pequeña resistencia del aire) todos los cuerpos descienden espacios iguales en tiempos iguales y, con ayuda de los péndulos, esta igualdad de tiempos puede observarse con gran exactitud.

He intentado lo mismo con oro, plata, plomo, vidrio, arena, sal común, madera, agua y trigo. Provisto de dos cajas de madera iguales, llené una de ellas con madera y suspendí un peso igual de oro (tan exactamente como pude) en el centro de oscilación de la otra. Las cajas, suspendidas por cuerdas iguales de 11 pies, formaron un par de péndulos perfectamente iguales en peso y forma e igualmente expuestas a la resistencia del aire; y, colocándolas una junto a la otra, oscilaron juntas adelante y atrás durante un largo rato con vibraciones iguales. Y, por tanto (según Cor. I y VI, Prop. XXIV, Libro II), la cantidad de materia en el oro era a la cantidad de materia en la madera como la acción de la fuerza motriz que actuaba sobre todo el oro a la acción de la misma fuerza sobre toda la madera, es decir, como el peso de uno al peso del otro.

Y por estos experimentos, en cuerpos del mismo peso, podía haber descubierto una diferencia de materia menor que la milésima parte de la totalidad.

LECTURAS SUPLEMENTARIAS

C. Kacser, *Introduction to the Special Theory of Relativity*, cap. 8, Co-Op Paperback, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967.

Apéndice

Los siguientes libros de mecánica poseen aproximadamente el mismo nivel que el de este texto; son libros de estudio y de consulta. El alumno debe examinar cierto número de libros **antes de comprar o perder mucho tiempo en uno cualquiera.**

H. D. Young, *Fundamentals of Mechanics and Heat*, Mc Graw-Hill Book Company, Nueva York, 1964. Buen texto. Algo menos avanzado. Tratamiento breve de la relatividad.

R. Resnick y D. Halliday, *Physics for Students of Science and Engineering*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1966. Vol. I, 2.ª ed. o vols. I y II combinados. Muchos ejemplos. Buen texto convencional.

R. Resnick y D. Halliday, *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1970. Versión resumida de su texto original.

A. P. French, *Newtonian Mechanics*, W. W. Norton and Company, Inc., Nueva York, 1971. Forma parte de la serie M.I.T. Libro excelente y muy extenso.

M. Alonso y E. J. Finn, *Fundamental University Physics*, vol. I, *Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1967. Libro bueno, breve y conciso, pero quizás demasiado breve para este nivel.

R. T. Weidner y R. L. Sells, *Elementary Classical Physics*, vol. I, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1965. No tan avanzado como otros textos.

R. P. Feynman, R. B. Leigthon y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I. Fondo Educativo Interamericano. Ed. bilingüe, 1963. Serie notable de conferencias con una visión aguda de muchos aspectos de la mecánica. No es un libro de texto.

En los últimos años han aparecido cierto número de libros de «problemas». Aunque en los libros mencionados anteriormente se incluyen problemas, algunos alumnos pueden desear mayor número.

J. A. Taylor, *Programmed Study Aid for Introductory Physics*, part. I, *Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1970. Buen libro, con muchos problemas de nivel menos avanzado.

R. B. Leighton y E. Vogt, *Exercises in Introductory Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1969. Escrito para acompañar el vol. I de *Feynman lectures*. Problemas excelentes.

D. Schaum, *Theory and Problems of College Physics*, Schaum Publishing Co., Nueva York, 1961. Muchos problemas, de los cuales están resueltos la mitad.

Lista de películas

Existen muchas películas excelentes que tratan de la mecánica. En la revista *Am. J. Phys.*, **36**; 475 (1968), Resource Letter, BSPF-1, *Películas de Física* de W. R. Riley, se relaciona una buena lista de películas de 16 mm, así como información sobre catálogos, centros de adquisición de las películas, etc. Muchos de los comentarios dados a continuación proceden directamente de esta revisión.

En los últimos años se han producido muchas películas tipo «loop» (rebobinado automáticamente). Son muy útiles en particular porque son fáciles de utilizar como instrucción individual. La «Commission on College Physics» ha publicado un catálogo de «películas cortas para la enseñanza de la física» que está disponible en la AIP, Division of Education and Manpower, Information Pool, Universidad del Estado de Nueva York, Stony Brook, N. Y. 11970.

El lector observará que muchas de las películas relacionadas pertenecen al proyecto PSSC y corresponden a un nivel más elemental que este curso. Sin embargo, estas películas están muy bien diseñadas y resulta útil su proyección, incluso por segunda vez.

Recientemente se constituyó un «Comité Nacional para Películas de Demostraciones Físicas» [George Appleton, James Strickland, *Am J. Phys.*, **38**, 1945 (1970)]. Strickland se encuentra en el Education Development Center, Newton, Mass. 02160.

Las películas están relacionadas dentro de los capítulos donde se ajustan con mayor coherencia. Al final se relacionan los centros donde pueden adquirirse.

Capítulo 1

La evolución de las ideas físicas (49 min). P.A.M. Dirac; SUNY. Enfoque personal de Dirac a la física teórica; sugiere que los intentos de los físicos en mejorar las teorías existentes suponen una búsqueda de la belleza matemática.

Medición de grandes distancias (29 min). F. Watson; PSSC MLA 0103. Muestra por medidas de triangulación y paralaje cómo pueden determinarse las distancias a la Luna y a las estrellas hasta 500 años luz.

Cambio de escala (23 min). R. W. Williams; PSSC MLA 0106. Orienta en las ideas de estimación y escala. Presenta bonitos ejemplos de resistencias en modelos a escalas, especialmente en relación con la velocidad (diseño de buques).

Capítulo 2

Medida (21 min). William Siebert; MLA. Medida de la velocidad de una bala de rifle con énfasis en relación a la exactitud sobre cuestiones apropiadas.

Simetría (10 min). P. Stapp, J. Bregman, R. Davisson, A. Holden; BTL. Interesante presentación contemporánea de simetrías de reflexión, rotación y traslación y sus usos.

Movimiento circular uniforme (8 min). MGH. Muestra cambios en la velocidad vectorial, explicando que el movimiento se acelera incluso cuando la magnitud de la velocidad permanece constante. La fuerza centrípeta se ilustra con distintos movimientos.

Cinemática vectorial (16 min). F. Friedman; PSSC MLA 0109. Un computador envía a un tubo de rayos catódicos los datos para la representación de vectores velocidad y aceleración correspondientes a diversos tipos de desplazamientos de un punto: circular, armónico simple y caída libre.

Cinemática de la línea recta (34 min). E. M. Hafner; PSSC MLA. Utilizando equipo especial en un carro móvil se engendran gráficos de distancia, velocidad y aceleración en función del tiempo; se analizan las relaciones entre ellos.

La relación entre la matemática y la física (57 min). Richard Feynman; EDC. Destaca que sin un conocimiento profundo de las matemáticas es inútil una explicación honesta de las leyes de la naturaleza.

Capítulo 3

Fuerza, masa y movimiento (10 min). F. W. Sinden; Bell y EDC. Película de dibujos ilustrando el movimiento de los cuerpos masivos bajo la acción de la gravedad y otras fuerzas. Se observa el trazado de órbitas y la conservación de la cantidad de movimiento.

Fuerzas (23 min). Jerrold Zacharias; PSSC MLA 0301. Discute las fuerzas de la naturaleza con demostraciones experimentales. Experimento de Cavendish ilustrado. También existe una versión de ocho minutos del experimento de Cavendish.

Electrones en un campo magnético uniforme (11 min). Dorothy Montgomery; PSSC MLA 0412. Muestra electrones en un tubo de Leybold para la determinación del cociente *e/m*.

Ley de Coulomb (30 min). Eric Rogers; PSSC MLA 0403. Muestra la dependencia de las fuerzas eléctricas con la carga y la distancia.

Constante de la fuerza de Coulomb (34 min). Eric Rogers; PSSC MLA 0405. Aparato de Millikan de gran escala para determinar la constante de proporcionalidad de la ley de Coulomb entre las cargas eléctricas.

Masa del electrón (18 min). Eric Rogers; PSSC MLA 0413. Muestra cómo la observación del movimiento electrónico conduce a las medidas de masa.

Ley de la gravitación, un ejemplo de ley física (55 min). Richard Feynman; EDC. Versión excelente del descubrimiento de la ley y algunas de sus consecuencias.

Inercia (26 min). E. M. Purcell; PSSC MLA 0302. Movimiento de un disco de hielo seco de masa constante exento de fuerzas y bajo la acción de fuerzas externas.

Masa inercial (19 min). E. M. Purcell; PSSC MLA 0303. Movimiento de masas diferentes bajo fuerza constante utilizando discos de hielo seco.

Caída libre y movimiento de proyectiles (27 min). Nathaniel Frank; PSSC MLA 0304. Estudio de la caída libre y de las masas de inercia y gravitatoria hasta llegar al movimiento de proyectiles.

Capítulo 4

Sistemas de referencia (28 min). Patterson Hume y Donald Ivey; PSSC MLA 0307. Demostraciones excelentes del movimiento relativo en sistemas de referencia inercial y acelerado. También existe (EDC) una versión de 6 min en sistemas linealmente acelerados y una versión de 7 min sobre sistemas de referencia en rotación.

Fuerzas inerciales - Aceleración centrípeta (3 1/4 min). Franklin Miller, Jr.; OSU, «loop» de 16 mm. Muestra divertidos fenómenos de rotación.

Fuerzas inerciales - Aceleración de traslación (2 min). Franklin Miller, Jr.; OSU, cinta en *cassette* rebobinable de 16 mm. Muestra las fuerzas en velocidad constante o movimiento acelerado, tanto hacia arriba como hacia abajo.

Capítulo 5

Energía y trabajo (28 min). D. Montgomery; PSSC MLA 0311. Explica el trabajo realizado por una fuerza constante y por otra variable y la determinación de la energía producida por dicho trabajo.

Colisiones elásticas y energía almacenada (28 min). J. Strickland; PSSC MLA 0318. Demostraciones cuantitativas de las transformaciones entre la energía cinética y la potencial en colisiones prácticamente elásticas.

Principios de la gran conservación (56 min). Richard Feynman; EDC. Una discusión muy interesante de cierto número de principios de conservación y sus relaciones en física.

Capítulo 6

Vorticidad (44 min). Ascher H. Shapiro; EBEC. Película interesante con referencia al momento cinético (véase también Cap. 8).

Capítulo 7

Movimiento periódico (33 min). Patterson Hume y Donald Ivey; PSSC MLA 0306. Película excelente sobre el movimiento armónico simple utilizando discos sin rozamiento montados sobre muelles.

Movimiento armónico simple (10 min). MGH. La masa accionada por el muelle moviéndose horizontalmente ilustra el movimiento armónico simple.

Hundimiento del puente de Tacoma (4 min 40 seg). OSU. Imágenes espectaculares de las vibraciones resonantes excitadas por el viento que destrozaron el puente.

El péndulo de Wilberforce (5 min). Franklin Miller, Jr.; OSU. Caso interesante de resonancia entre las vibraciones de torsión y de traslación.

Capítulo 8

Momento cinético, magnitud vectorial (27 min). A. Lemonick; ESI MLA 0451. Demuestra que los momentos cinéticos se suman vectorialmente y que el momento aplicado a un sistema que ya tiene un momento cinético da lugar a una precesión del mismo.

Moviéndose con el centro de masas (26 min). Herman Branson; PSSC MLA 0320. Validez de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento demostrada por diversas interacciones con discos magnéticos observados en dos sistemas de referencia distintos.

Capítulo 9

Orbitas elípticas (19 min). Albert Baez; PSSC MLA 0310. Demostración geométrica de las dos primeras leyes de Kepler y la ley inversa del cuadrado.

Medida de «G». Experimento de Cavendish (4 min 25 seg). Franklin Miller, Jr.; OSU. Película corta sobre el péndulo de torsión de Cavendish.

Gravitación universal (31 min). Patterson Hume y Donald Ivey; PSSC MLA 0309. Se deduce la ley de gravitación en el planeta X a partir de observaciones en satélites y un planeta.

Capítulo 10

Medida de la velocidad de la luz (8 min). MGH. Explicación excelente de diversas medidas terrestres de la velocidad de la luz, incluyendo los métodos de Fizeau, Foucault y Michelson.

Efecto Doppler (8 min). MGH. Clara exposición de los casos de fuente en movimiento y observador en movimiento.

Efecto Doppler y ondas de choque (8 min). James Strickland; MLA 0464. Parte de una serie tomada en una cubeta de ondas. Muestra los efectos producidos por una fuente de ondas periódicas moviéndose con diversas velocidades respecto al medio ondulatorio.

La velocidad límite, una exploración con electrones de alta energía (38 min). William Bertozzi; ESI MLA 0452. Muestra la relación entre la energía cinética de los electrones y su velocidad, investigada por técnicas calorimétricas y de tiempo de vuelo. Los resultados indican una velocidad límite igual a *c* de acuerdo con la teoría especial de la relatividad.

Velocidad de la luz (21 min). William Siebert; PSSC MLA. La velocidad de la luz se mide por el tiempo de vuelo de un pulso luminoso y también por el método de los espejos giratorios.

Capítulo 11

El gran mundo de Albert Einstein (60 min). Edward Teller; SUNY. Extensión de las relaciones tiempo-distancia al reino de la relatividad. Discute el impacto de la relatividad especial en la física.

Dilatación del tiempo, un experimento con mesones Mu (36 min). David Frisch y James Smith; ESI MLA 0453. Utilizando la desintegración radiactiva de los mesones mu de la radiación cósmica se muestra la dilatación del tiempo en un experimento realizado en Mt. Washington, N.H. (5300 pies) y Cambridge, Mass. (nivel del mar). Una relación detallada de este experimento aparece en *Am. J. Phys.* **31**, 342 (1963).

BELL (Bell System): ponerse en relación con la Bell Telephone Co. local.

(BTL) oficina de negocios o Bell Telephone Laboratories (BTL), Film Library, Murray Hill, N. J. 17971.

BTL: véase BELL.

EBEC: Encyclopedia Britannica Educational Corporation, 425 North Michigan Avenue, Chicago, Ill. 60611.

EDC: Education Development Center (antes Educational Services, Inc.), Film Librarian, Education Development Center, 39 Chapel Street, Newton, Mass. 02160.

ESI MLA: ESI College Physics Films producidos por Educational Services, Inc. Disponible en Modern Learning Aids, 1212 Avenue of the Americas, N. Y. 10036. Disponible para compra, alquiler o suscripción.

MGH: McGraw-Hill Book Company, Text-Film Division, 327 West 41st Street, N. Y. 10036. Sólo para la venta.

MLA: véase ESI MLA.

OSU: Ohio State University, Film Distribution Supervisor, Motion Picture Division, 1885 Neil Avenue, Columbus, Ohio 43210. «Loop» de 16 mm.

PSSC MLA: Physical Sciences Study Committee-Modern Learning Aids. El alquiler se distribuye por Modern Talking Picture Service, Inc. Para compra, establecer contacto con la división MLA de Ward's Natural Science Establishment, Inc., P. O. Box 302, Rochester, N. Y. 14603.

SUNY: The State University of New York, Educational Communications Office, Room 2332, 60 East 42nd Street, N. Y. 10017.

Indice alfabético

Aberración luz, 310, 352
Aceleración, 47
absoluta, 116
angular, 201, 257
alrededor centro masas, 259
centrípeta, 49, 119
centro masas, 259
ciclotrón, principio, 87
componentes, 134
Coriolis, 135
longitudinal electrón, 79
protón, 78
partícula, 386, 389, 403
relativa, 116
sistema coordenado rotación, 134
Sol, 113
Tierra, 113
transversal electrón, 79
Acelerador Van de Graaff, 329
Acelerómetro, 119
Adams, J. C., 178
Agujero negro, 413
Amortiguamiento, coeficiente, 223
Amperio, 73
Amplitud, 212, 214, 216
Análisis dimensional, 67
Ángulo posición, 55
Anisotropía, 331
Antiprotón (p), 387
Aproximación impulso, 415
Área,
de la elipse, 293
del paralelogramo, 42
Átomos universo, 4
Atwood, máquina, 91
Auto-energía electrostática, 284
gravitatoria, 284
Avogadro, número, 4

Bergstrand, E., 309
Bertozzi, W., 328
Bessel, F. W., 331, 417
Bevatrón, 21
Bondi, H., 13
Bradley, James, 310-313
Bridgman, P. W., 116
Brookhven National Laboratory, 21

c, invariancia, 325
c, medida, 309
Caída libre, 153
Campo eléctrico, 74
intensidad, 74
escalar, 50
gravitatorio, 110
magnético, 75
partícula cargada, 390
vectorial, 50
Cantidad movimiento, 359
componentes transversales, 186
conservación, 15, 88, 127, 182
relativista, 360
selector, 86
transformación, 369
Capacitancia, 210, 218-220
Carga, constancia, 379
elemental, 73
Cavendish, experiencia, 70
Cavidad resonante, 314
Celeridad, 45
Célula, 7
Kerr, 315
Centro gravedad, 196
masas, 183
aceleración, 259
momento cinético, alrededor, 196
sistema, 392
velocidad, 184
Ceres, descubrimiento, 177
C.E.R.N. (Conseil Européen pour la Recherche Nucleaire), 21, 397
C.G.S., 63-66, 70-75
Cicloide, 138-139
Ciclotrón, condición resonancia, 87
frecuencia, 82
invento, 100
principio aceleración, 87
Cilindro sobre plano rugoso, 261
Circuito LC, 218
Coeficiente amortiguamiento, 223
Colisión elástica, partículas, 90
Cometa, 377
presión de radiación, 377
Compton, efecto, 398
Conservación energía, 150
momento cinético, 192
Constante integración, 100
Contracción longitudes, 339
Coordenada cartesiana, 57
polar, 57
esférica, 57
Coriolis, aceleración, 135
fuerza, 135
Coseno director, 37
Coulomb, ley, 72
Cuerpo rígido, 248
Curva resonancia, 231
Curvatura espacio, 11

Choque general elástico, 187
inelástico, 370
masas iguales, 129
partícula, 183, 187
pesada con otra ligera, 130

Densidad, 109

Derivada producto vectores, 138
respecto tiempo, velocidad y aceleración, 54
vectores, 44
Deslizamiento, 93
Desviación electrones, 80
Deuteron, 373
Dicke, R., 71, 410
Diferencia potencial, 167
Diferencial, ecuaciones, 99
Difusión protón por núcleo pesado, 198
Dilatación tiempo, 344
relojes, 343
Dinámica elemental cuerpos rígidos, 248
relativista, 359
problemas, 385
Dirac, P. A. M., 7
Doppler, efecto, 325
longitudinal, efecto, 352
transversal, efecto, 354

Ecuación diferencial, 99
Euler, 265
1/r, integración, 304
movimiento, 64, 248
partícula, 386
órbita, 288
plano, 38
Efecto Compton, 398
Doppler, 325
longitudinal, 352
transversal, 354
Efecto Zeeman, 41
Einstein, 14
Electricidad, unidades, 72
Electrón, aceleración longitudinal, 79
transversal, 79
desviación, 80
radio, 286
voltio, 173
Elipse, 57, 292-297
Emisión sin retroceso rayos gamma, 382
Energía, 359
cinética, 152, 249, 371
media, 221
partícula, 81
conservación, 150, 164
disponible partícula móvil, 396
estelar, 374
excitación interna, 89
función, 149
gravitatoria esfera uniforme, 285
galaxia, 284
masa, conversiones, 373
equivalencia, 372
media, 228
potencial, 155, 164, 280, 282
centrífuga, 202
media, 221

Energía relativista, 365
total, 367
reposo, 368
total, 162
transformaciones, 155, 369
umbral, 392
fotoproducción mesones, 393
Enfoque magnético 180°, 86
Eotuos, R., 71, 403-410
Equilibrio estático, 287
Equivalencia, 416
principio, 407
Ergio, 145, 175
Espacio, curvatura, 11
homogeneidad, 15
isotropía, 15
Especie, 5
Estrella binaria, 115
fija, 112
sistema referencia inercial, 112
Éter, 318
Euler, ecuaciones, 265
aplicaciones, 268
Excentricidad, 291
Exceso esférico, 11

Factor calidad , 229
Fermi, E., 17
Feynman, R. P., 7
Fizcau, 313
Fluorescencia nuclear, 382
Forma galaxia, 201
Forma invariante, 50
Fotón, desplazamiento hacia el rojo, 412
desviación por Sol, 414
masa gravitatoria, 411
Foucault, péndulo, 120
Frecuencia angular, 216
ciclotrón, 82
estado estacionario, 235
fundamental, 235
giro, 85
impuesta, 235
resonancia ciclotrónica, 82
Fuerza, 75
cadena caída, 192
central, 158, 193
centrífuga, 110, 119
conservativa, 157
contacto, 65, 92
Coriolis, 135
eléctrica en partícula, 72
ficticia, 118
interna, 182
inversa distancia, 278
ley inverso cuadrado distancia, 287
Lorentz, 75
magnética, 75
en partícula, 72

Fuerza magnética masa puntual, 280, 282
movimiento, 64
resistente, 241
restauradora, 155
sobre partícula, 390
tipo muelle, 242
Función e*, 55
energía, 149

Galaxia, 113
Galle, J. G., 179
Gauss, Carl Friedrich, 10
Geometría, 8
analítica, fórmulas, 57
escala menor, 14
Giro sin deslizamiento, 257
Giroscopio, 270
Gravedad, centro, 196
momento, 195
valores, 112
Gravitación universal, ley Newton, 70

Hadamard, J., 312
Havens, W. W., Jr., 348
Hayes, T. L., 24
Heaviside, O., 31
Hertz, 5
Homogeneidad espacio, 15
Hooke, ley, 155

Identidad vectorial, 58
Impulso, 144
Inercia, momentos y productos, 265
movimiento, 250
Ingravidez,
Integración, constante, 100
ecuación 1/r, 304
Integral curvilínea, 152
Intensidad campo eléctrico, 74
magnético, 75
Interacción externa, 151
Interferómetro, 321
Invariancia *c*, 325
galileana, 122
rotación, 15, 199
traslación, 15
Invariante, 50
Ion ligero alta velocidad, 102
Isotropía espacio, 15
Ives, H. E., 353

Julio, 145

Kepler, leyes, 295
problema, 289
Kerr, célula, 315
Klein, F., 248
Krotkov, R., 71, 410

Larmor, J., 338
Lawrence, E. O., 100-104
Leverrier, U. J. J., 178
Ley conservación, conceptos, 143
mundo físico, 142
Coulomb, 72
Hooke, 155
Kepler, 295
paralelogramo, adición vectorial, 33
senos, 43
suma velocidades, 125
Loar, H. H., 348
Longitud perpendicular luz, 342
Lorentz, fuerza, 75
transformación, 336
Luz, aberración, 310, 352
corrimiento hacia el rojo, 326
velocidad, 307
espejos rotación, 313
ruedas dentadas, 313
sistemas inerciales, 316

Magnetismo, unidades, 72
Magnitud física por vector, 35
Máquina Atwood, 91
Masa, centro, 183
energía, conversiones, 373
equivalencia, 372
relación, 382
gravitatoria, 71, 408
fotones, 411
inerte, 71, 408
reducida, 298
reposo cero, partícula, 376
sujeta muelle, 210
variable, sistemas, 190
Maxwell, J. C., 318, 320
McDonald, D. F., 309
McMillan, E. M., 402-405
McVitties, G. C., 327
Mecánica, libros, 419
unidades, 65
Medida *c*, 309
μ, 93
Mesón, tiempo vida, 347
Michelson-Morley, experimentos, 320
Moivre, teorema, 56
Molécula diatómica, vibración, 301
Momento alrededor centro masas, 260
cinético, 203, 249
alrededor centro masas, 196
conservación, 192
de spin, 197
vector, 263

Momento debido gravedad, 195
disco circular, 269
fuerzas internas, 194
inercia, 250
anillo delgado, 252
barra delgada, 253
disco circular, 253
placa rectangular, 254
rotor rígido, 268
Morley, E. W., 320
Movimiento, cantidad, 359
relativista, 360
transformación, 369
circular, 48
ecuación, 64, 248
fuerzas, 64
horizontal con fuerza rozamiento, 94
leyes Newton, 62
libre, 150
partícula, 68, 77, 80
protón, 137
proyectiles, 171
sistemas desplazados, 220
Mulligan, J. F., 309
Mundo físico, leyes conservación, 142

Neptuno, descubrimiento, 178
Newkirk, Gordon, 12
Newton, ley gravitación universal, 70
movimiento, 62
péndulo, 409, 418
Notación vectorial, 30
Nucleón, 118
Nucleótido, 6
Número Avogadro, 4

Onda gravitatoria, 417
Órbita cicloide, 139
circular, 293
ecuación, 288
excentricidad, 288
Oscilador amortiguado, 233
armónico, 210
amortiguado, 225
ejemplo numérico, 240
forzado, 230, 235

Par, 43
Parábola, 57, 69, 292, 294
Paralaje, 12
Partícula cargada, campo magnético, 390
colisión, 88
elástica, 90
energía cinética, 81
masa reposo cero, 376
móvil, energía disponible, 396
movimiento, 77, 80

Película, lista, 421
Péndulo compuesto, 261
Foucault, 120
Newton, 409, 418
simple, 212
Período, movimiento, 49
Piazzi, G., 178
Potencia, 175
absorción, 239
disipación, 227
Potencial, diferencia, 167
electrostático, 167
gravitatorio, 170
Pound, R. V., 412
Precesión perihelio Mercurio, 415
Predicción planetaria, 11
Principio equivalencia, 407
superposición, 231
Problema Kepler, 289
Producto escalar, 36
aplicaciones, 38
vectores, 35
derivada, 138
vectorial, 39
aplicaciones, 42
Protón, aceleración longitudinal, 78
difusión por núcleo pesado, 198
movimiento, 137
Proyección, 36, 51
Proyectil, movimiento, 171
Pseudofuerza, 119

Radián, 55
Radio electrón, 286
galaxia, 417
giro, 85
Rayo gamma, emisión sin retroceso, 382
Reacción química, conservación cantidad movimiento, 130
Rebka, G. A., Jr., 411
Relatividad especial, hipótesis, 336
Reloj acelerado, 354
Resonancia ciclotrón, condición, 87
curva, 231
respuesta, 236
Rotación alrededor ejes fijos, 263
punto instantáneo contacto, 257
dependencia tiempo, 255
finita, 35
invariancia, 15, 199
Rozamiento, 92, 223
estático, coeficiente, 93

Sadeh, D., 351
Saehs, M., 349
Satélite, órbita circular, 71
polos interplanetarios, 190
Schiff, L. S., 414

Schwarzschild, demostración, 11
Serie, desarrollo, 56
Shapiro, J. I., 415
Sincrotón, 402
Sistema centro masas, 130, 392
  inercial, velocidad luz, 316
  masa variable, 190
  referencia acelerado, 108
    Galileo, 116
    inercial, 108
      fuerzas, 114
  referencial Galileo, 112
Sol, aceleración, 113
Spin, momento cinético, 197
Statvoltio, 167
Stilwell, G. R., 353
Suma momentos internos, 194
  vectorial, 33
  velocidades, 351
Superposición, principio, 231

Taylor, J. M., 341
Teorema ejes paralelos, 250
    perpendiculares, 252
Teoría expansión universo, 327
Tercer armónico, 235
Tesla, 76
Tiempo, cantidad movimiento, derivada, 378
  dilatación, 344
  propio, 343
  relajación, 223
  relojes, dilatación, 343
  vida mesones, 347
Tierra, aceleración, 113
  sistema referencia, 111
Torricelli, E., 320
Trabajo, 39, 75, 145, 151
Transformación cantidad movimiento, 369
  energía, 369
  galileana, 123
  Lorentz, 336
  velocidades, 349
Traslación, invariancia, 15
Trompo, 270

U.A., 296
Ultracentrifugadora, 109
Umbral antiprotón, 397
Unidad astronómica longitud, 296
      mecánica, 65

Universo, 4
  átomos, 4
  radio, 13
  teoría expansión, 327
Urano, 178, 297

Vatio, 175
Vector, 30
  componentes, 37
  derivada, 44
    producto, 138
  eléctrico, 39
  igualdad, 33
  magnético, 39
  magnitudes, 37
  momento cinético, 263
  notación, 30
  operaciones elementales, 51
  representación magnitud física, 35
  velocidad, 45
Vehículo espacial, problema, 191
Veksler, V., 402
Velocidad absoluta, 122
  centro masas, 184
  constante, 114
  en sistema coordenado en rotación, 134
  escape, 169
  ley suma, 125
  límite, 225, 241, 328
  luz, 307
    espejos, rotación, 313
    ruedas dentadas, 313
    sistemas inerciales, 316
  relativa, 122
  suma, 351
  transformación, 349
  vector, 45
Venus, planeta, 415
Vía láctea, 113
Vibración molécula diatómica, 301
Voltio, 163
Volumen, variación, 39

Weber, J., 417
Weber/m^2, 417
Weber, W. E., 76
Weisskopf, V. F., 341
Wheeler, J. A., 341

Zeeman, P., 41

Tabla de valores

Valor y unidades		*Símbolo o abreviatura*	*Derivación del valor*
• *Generales*			
57,3 grados (57°20′)	$\cong$ 1 radián		$180°/\pi$
$3{,}44 \times 10^3$ minutos (de arco)	$\cong$ 1 radián		
$2{,}06 \times 10^5$ segundos (de arco)	$\cong$ 1 radián		
0,0174 radián	$\cong$ 1 grado	°	$\pi/180°$
$2{,}91 \times 10^{-4}$ radián	$\cong$ 1 minuto (de arco)	′	
$4{,}85 \times 10^{-6}$ radián	$\cong$ 1 segundo (de arco)	″	
$1{,}61 \times 10^5$ cm	$\cong$ 1 milla terrestre		
10^{-8} cm	$\equiv$ 1 angstrom	Å	
10^{-4} cm	$\equiv$ 1 micra	μ	
$2{,}998 \times 10^2$ volts	$\cong$ 1 statvolt		$10^{-8}\,c$
$2{,}998 \times 10^{10}$ cm/s	Velocidad de la luz en el vacío	c	
$\approx$ 980 cm/s^2	Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre	g	$GM_E/_E{}^2$
$6{,}670 \times 10^{-8}$ dina-cm^2/g^2	Constante gravitatoria	G	
1 dina	$\equiv$ 1 g-cm/s^2		
• *Astronómicas*			
$3{,}084 \times 10^{18}$ cm	$\cong$ 1 parsec		
$9{,}46 \times 10^{17}$ cm	$\cong$ 1 año luz		$c \times$ s/año
$1{,}49 \times 10^{13}$ cm	$\cong$ 1 unidad astronómica (= radio de la órbita terrestre	U.A.	
$\sim 10^{80}$	Número de nucleones		
$\approx 10^{28}$ cm	Radio		
$\sim 10^{11}$	Número de galaxias	} Universo conocido	
$\approx 3 \times 10^{-18}$ (cm/s)/cm	Velocidad de retroceso de las nebulosas		
$\approx 1{,}6 \times 10^{11}$	Número de estrellas		
$\sim 10^{23}$ cm	Diámetro	} Galaxia	
$\sim 8 \times 10^{44}$ g	Masa		
$6{,}96 \times 10^{10}$ cm	Radio		
$2{,}14 \times 10^6$ s	Período de rotación	} Sol	
$1{,}99 \times 10^{33}$ g	Masa		
$1{,}49 \times 10^{13}$ cm	Radio de la órbita		
$6{,}37 \times 10^8$ cm	Radio medio		
$5{,}98 \times 10^{27}$ g	Masa	} Tierra	
5,52 g/cm^3	Densidad media		
$3{,}16 \times 10^7$ s	$\cong$ 1 año (período de revolución)		
$8{,}64 \times 10^4$ s	24 horas (período de rotación)		
$3{,}84 \times 10^{10}$ cm	Radio de la órbita		
$1{,}74 \times 10^8$ cm	Radio		
$7{,}34 \times 10^{25}$ g	Masa	} Luna	
$2{,}36 \times 10^6$ s	Período de revolución		

Tabla de valores

Valor y unidades		*Símbolo o abreviatura*	*Determinación del valor*
• *Gases*			
$22{,}4 \times 10^{3}$ cm³/mol	Volumen molar en C.N.	V_0	
$2{,}69 \times 10^{19}$ cm^{-3}	Número de Loschmidt	n_0	N_0/V_0
$6{,}0225 \times 10^{23}$ mol^{-1}	Número de los Avogadro	N_0	
$8{,}31 \times 10^{7}$ erg mol^{-1} grado^{-1}	Constante de los gases	R_0	
$1{,}381 \times 10^{-16}$ erg/grado K	Constante de Boltzmann	k, k_B	R_0/V_0
$1{,}01 \times 10^{6}$ dina/cm²	Presión atmosférica		
$\sim 10^{-5}$ cm	Recorrido libre medio del nitrógeno en C.N.		
$3{,}32 \times 10^{4}$ cm/s	Velocidad del sonido en el aire en C.N.		
• *Atomística*			
$6{,}626 \times 10^{-27}$ erg-s	Constante de Planck	h	
$1{,}054 \times 10^{-27}$ erg-s	Constante de Planck/2π	$\hbar$	$h/2\pi$
13,6 electrón volts	Energía asociada con 1 Rydberg		
$1{,}98 \times 10^{-16}$ erg	Energía asociada con un número de ondas unidad		hc
$1{,}60 \times 10^{-12}$ erg	Energía asociada con un electrón-volt	ev	
$1{,}24 \times 10^{-4}$ cm	Longitud de onda asociada con un electrón-volt	λ_0	hc^2/e
8066 cm^{-1}	Número de ondas asociado con un electrón-volt		$1/\lambda_0$
$2{,}42 \times 10^{41}$ s^{-1}	Frecuencia asociada con un electrón-volt	ν_0	c/λ_0
$0{,}529 \times 10^{-8}$ cm	Radio de Bohr del estado fundamental del hidrógeno	a_0	$\hbar^2/me^2$
$\sim 10^{-8}$ cm	Radio de un átomo		
$0{,}927 \times 10^{-20}$	Magnetón de Bohr	μ_B	$e\hbar/2mc$
$0{,}505 \times 10^{-23}$ erg/gauss	Magnetón nuclear	μ_N	$e\hbar/2M_pc$
137,04	Recíproco de la constante de estructura fina	α^{-1}	$\hbar c/e^2$
• *Particles*			
$1{,}6725 \times 10^{-24}$ g	Masa en reposo del protón	M_p	
$1{,}6747 \times 10^{-24}$ g	Masa en reposo del neutrón	M_n	
$1{,}66042 \times 10^{-24}$ g	1 unidad de masa atómica unificada ($\equiv$ 1/12 de la masa del C^{12})	u	
$0{,}911 \times 10^{-27}$ g	Masa en reposo del electrón	m	
$0{,}9382 \times 10^{9}$ ev	Energía equvalente a la masa en reposo del protón	E_p	M_pc^2
$0{,}9395 \times 10^{9}$ ev	Energía equivalente a la masa en reposo del neutrón	E_n	M_nc^2
$0{,}511 \times 10^{6}$ ev	Energía equivalente a la masa en reposo del electrón		mc^2
1836	Masa del protón/masa del electrón		M_p/m
$2{,}82 \times 10^{-13}$ cm	Radio clásico del electrón	r_0	e^2/mc^2
$4{,}803 \times 10^{-10}$ ues	Carga del protón	e	
$3{,}86 \times 10^{-11}$ cm	Longitud de onda de Compton del electrón	λ_{Ce}	$\hbar/mc$